

Peter Schuhr

**Übergangsbogen für Bahnen
mit hohen Fahrgeschwindigkeiten**

München 2007

**Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission beim Verlag C. H. Beck**

Peter Schuhr

Übergangsbogen für Bahnen
mit hohen Fahrgeschwindigkeiten

München 2007

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission beim Verlag C. H. Beck

Adresse des Herausgebers /
Address of the publisher

Deutsche Geodätische Kommission

Marstallplatz 8

D – 80 539 München

Telefon +49 - (0)89 - 23 031 -0 / -1113

Telefax +49 - (0)89 - 23 031 -1283 / -1100

E-mail hornik@dgfi.badw.de

Internet <http://dgk.badw.de>

Adresse des Autors /
Address of the author

Prof. Dr.-Ing. Peter Schuhr

Fachhochschule Frankfurt a.M.

Fachbereich 1

Nibelungenplatz 1

D - 60318 Frankfurt a.M.

<schuhr@fb1.fh-frankfurt.de>

Diese Publikation ist als pdf-Dokument im Internet veröffentlicht unter der Adresse /

This volume is published as pdf-document in the internet under the address

<http://dgk.badw.de/index.php?id=10>

© 2007 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet,
die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen

Zusammenfassung

Das mathematische Modell der Trasse einer Eisenbahn basiert auf separaten Grundriss- und Längsschnittparametern.

Den Überhöhungs- und Krümmungsänderungen innerhalb konventioneller ebener Übergangsbogen liegt eine den speziellen Übergangsbogen charakterisierende stetige Funktion zugrunde. Es wird vorgeschlagen, diese Interpolationsfunktion generell auf die Querneigung anzuwenden und die Krümmung und die Überhöhung als abgeleitete Größen zu betrachten. Bei räumlichen Übergangsbogen ist die Querneigung eine Rotation in der zuvor um die Längsneigung geneigten Querschnittsebene.

Diese Publikation enthält neue räumliche Übergangsbogen, deren Grundrisskrümmung im Normalfall von der Querneigung, der Trassierungsgeschwindigkeit und den Längsschnittparametern abhängt. Die Trassierungsgeschwindigkeit ist dabei die Fahrgeschwindigkeit, für die keine Lateralbeschleunigung auftritt. Die Anwendung hat zur Folge, dass an die Übergangsbogen angrenzende Bereiche mit einer von Null abweichenden konstanten Querneigung nur noch für konstante Längsneigungen und gleichbleibende Trassierungsgeschwindigkeiten exakte Kreisbogen im Grundriss aufweisen.

Es ist anzustreben, dass als Trasse anstelle der Gleisachse die Schwerpunktbahn gewählt wird. Der hierauf senkrecht stehende Querschnitt des Referenzfahrzeugs definiert zusammen mit seiner Querneigung sowohl die Gleisachse als auch die Lage beider Schienen.

Optimal wäre eine Koinzidenz zwischen der Gleisachse und der Schwerpunktbahn. Das hätte jedoch zu starke Auswirkungen auf die baulichen Anlagen und die Fahrzeuge zur Folge.

Summary

The mathematical model of a railway line is based on separate parameters for the plane and the longitudinal section.

The alteration of super-elevation and curvature in conventional flat transition curves is based on a continuous function characterising this special transition curve. I propose to apply this interpolation function generally to the cross slope and to consider the curvature and the super-elevation as derived quantities. For spatial transition curves, the cross slope is a rotation in the transverse section plane which itself slopes longitudinally.

The kernel of this study is the development of new spatial transition curves. Their curvature of the ground plane normally depends on cross slope, design speed, and the longitudinal section parameters. In this case the design speed is the speed at which no lateral acceleration occurs. As a consequence of its application, zones adjacent to transition curves and having a constant cross slope other than zero show exact circular arcs in the horizontal section only for constant longitudinal gradients and constant design speeds.

As railway line the path of the centre of gravity should be chosen instead of the track centre line. Orthogonal to the latter, the sectional profile of the reference vehicle together with its cross slope defines the position of the track centre line and of both rails.

Ideally the track centre line would be right on the path of its centre of gravity. But this would have too heavy effects on the design of railway construction and rail vehicles.

Inhaltsverzeichnis

1 Hintergrund	7
2 Zielsetzung	11
2.1 Vergleichende Betrachtung der gegenwärtigen Übergangsbogen	11
2.2 Entwicklung eines praktikablen räumlichen Modells	11
2.2.1 Ansatz	11
2.2.2 Iterative Einpassung in eine Gesamttrasse	12
3 Differentialgeometrische und physikalische Vorüberlegungen	13
3.1 Natürliche Geometrie einer Raumkurve	13
3.2 Trassierung im Erdschwerefeld	14
3.3 Modellierung der Übergangsbogen	15
4 Ebene Übergangsbogen	18
4.1 Abhängigkeit der Krümmung von der Überhöhung	18
4.2 Proportionale Überhöhungs- und Krümmungsbilder	19
4.2.1 Verfügbare Ansätze	19
4.2.2 Geometrische und physikalische Eigenschaften	21
4.3 Berücksichtigung stärkerer Querneigungen	25
4.4 Polynomansätze höherer Ordnung	26
4.5 Auswahl eines geeigneten Ansatzes	28
5 Räumlicher Ansatz	31
5.1 Anpassung der Interpolationsfunktionen	31
5.2 Krümmung der räumlichen Trassierungslinie	31
5.3 Grundrisskrümmung	34
5.4 Variable Geschwindigkeit	36
5.5 Torsion der räumlichen Trassierungslinie	37
5.6 CORIOLIS-Beschleunigung	39
5.7 Schwerebeschleunigung	42
5.8 Ableitungen des Ortsvektors nach der Zeit	43
5.9 Lateralbeschleunigung	44
6 Berechnungsverfahren	45
6.1 Numerische Integration	45
6.2 Trassenelement	47
6.3 Feintrassierung	49
6.3.1 Ebenes Verfahren	49
6.3.2 Räumliches Verfahren	51
6.3.2.1 Fixierung der Trassenelemente	51
6.3.2.1.1 Längsschnitt	51
6.3.2.1.2 Grundriss	54
6.3.2.2 Einzelpunkte	56
7 Computerprogramm	57

8 Testbeispiele	59
8.1 Grenzparameter	59
8.2 Ebene Übergangsbogen	62
8.3 Räumliche Übergangsbogen	62
9 Ausblick	70
Literaturverzeichnis	72
Anhang Ergänzungen zu den Formelherleitungen	75
A.1 Übergang von (5.10) nach (5.11)	75
A.2 Zu (5.15)	75
A.3 Übergang von (5.29) nach (5.33) durch Einsetzen von (5.30) bis (5.32) in (5.29) (nur Zähler Z)	75
A.4 Übergang von (5.26) mit (5.7) nach (5.34)	76
A.5 Übergang von (5.38) nach (5.39) (vgl. Abbildung 5.7)	76
A.6 Übergang von (5.41) mit (5.7) nach (5.51)	76

1 Hintergrund

Die Kernprobleme der Trassierung eines Landverkehrsweges sind

- die Festlegung einer realisierbaren inneren Geometrie der Hauptachse und
- ihre Lagerung nahe der Erdoberfläche.

Diese mathematische Modellierung einer neuen Trasse ist in der Praxis eine sehr komplexe Aufgabe.

In der Bundesrepublik Deutschland werden in aller Regel eine umfassende Umweltverträglichkeitsprüfung und ein Raumordnungsverfahren durchgeführt. Im Zuge dieser landesplanerischen Abstimmung mit einer Vielzahl unterschiedlicher Träger öffentlicher Belange wird auf der Basis einer mehr oder weniger variablen Grobtrasse ein möglicher Korridor für den neuen Verkehrsweg festgelegt. Dieser Korridor kann jedoch noch etliche Zwangspunkte und Auflagen beinhalten¹.

Das Ergebnis der Landesplanung definiert Rahmenbedingungen für die Planfeststellung und die darauf aufbauende Realisierungsphase. Diese Detailplanung ist regelmäßig mit einer Feintrassierung verbunden, die sowohl fahrdynamische als auch bautechnische Optimierungskriterien² zu berücksichtigen hat.

Je hochwertiger das Verkehrssystem, desto stärker treten trassierungstechnische Aspekte im engeren Sinne³ zuungunsten der örtlichen Geländeanpassungen in den Vordergrund.

Das mathematische Modell eines Landverkehrsweges setzt sich regelmäßig

- aus einer räumlichen Trasse⁴ und
- entsprechenden Querschnitten

zusammen. Die Hauptachse ist in Form einer Grundrißkurve mit hierauf bezogenen Höhenangaben⁵ definiert. Sowohl der Grundriß als auch der Längsschnitt bestehen aus einer Aufeinanderfolge von Geraden und Kreisen. Zwischen den Elementen des Grundrisses werden häufig geeignete Übergangsbogen eingelegt. Die Anforderungen an diese Übergangsbogen hängen nicht unwesentlich vom Verkehrssystem ab.

Bei einer rein ebenen Betrachtungsweise gilt die Klothoide, deren Krümmung sich proportional zur Länge ändert, als Idealkurve eines Übergangsbogens zwischen einer Geraden und einem Kreisbogen bzw. zwei Kreisbogen unterschiedlicher Krümmung (z. B. STRUBECKER 1964⁶, Seite 50). Da sie auch im Zusammenwirken mit den gebräuchlichen Quer- und Längsschnittparametern regelmäßig zu einer zweckmäßigen Gesamttrassierung führt, konnte sie sich im praktischen Straßenbau weitgehend durchsetzen. Im Fernstraßenbau wird sie neben dem Kreisbogen als wichtigstes Trassierungselement verwendet und grundsätzlich den den Fahrer ermüdenden längeren Geraden vorgezogen.

Ein schienengebundenes Fahrzeug nutzt dagegen die systembedingten Spurführungskräfte. Da es der Linienführung des Gleises selbsttätig folgt, ist im Gegensatz zu Straßen-, Wasser- und Luftfahrzeugen keine Kursregelung durch den Führer des Fahrzeugs erforderlich. Deshalb ist die Eisenbahn dasjenige Verkehrsmittel, welches am ehesten automatisierbar ist. Die Auswahl der Trassierungselemente orientiert sich weitgehend am Bau- und Unterhaltungsaufwand. Da er in der Reihenfolge Geraden, Kreisbogen und Übergangsbogen zunimmt⁷, werden im allgemeinen lange Geraden und kurze Übergangsbogen bevorzugt. Bei geringfügigen Krümmungsänderungen dürfen eine Gerade und ein Kreisbogen bzw. zwei Kreisbogen unmittelbar aneinanderstoßen.

¹z. B. von der Variationsbreite für die Gradienten abhängige Untertunnelungsbereiche

²wie kontinuierliche Übergänge in den Verknüpfungsbereichen mit dem vorhandenen Verkehrsnetz, etwaiger Erdmassenausgleich usw.

³wie möglichst geringe Krümmungen, Krümmungsänderungen und Längsneigungen

⁴Hauptachse

⁵Längsschnitt

⁶vgl. Literaturverzeichnis

⁷Wie lange dieses Kriterium angesichts der Automatisierungstendenzen im konventionellen und schotterlosen Oberbau noch Bestand haben wird, bleibe dahingestellt.

Im Eisenbahnbau gelten die elementaren Grundsätze (z. B. HELMERT 1872):

- Im gekrümmten Gleisbogen (Abbildung 4.1⁸) läßt sich die radial nach außen gerichtete Zentrifugalkraft durch eine Überhöhung des äußeren Schienenstranges mit einer gleich großen radial nach innen wirkenden Komponente der Schwerkraft kompensieren.
- Infolge der relativ geringen Querneigungen ist die Überhöhung $\ddot{u}$ als proportional zur Krümmung k ⁹ anzusehen (Abbildung 4.1 und (4.4)).
- Dieser Überhöhung liegt eine bestimmte Geschwindigkeit des Fahrzeugs¹⁰ zugrunde.
- An denjenigen Stellen der Bahnlinie, an denen eine Gerade und ein Kreisbogen oder zwei Kreisbogen verschiedener Radien zusammentreffen, ist eine allmähliche Überführung der äußeren Schiene in die Überhöhung (Abbildung 4.2) bzw. von einer Anfangs- in die Endüberhöhung nötig.
- Da anzustreben ist, daß die Beziehung (4.4) an jeder Stelle des Übergangsbogens erfüllt ist, definieren die Länge und die Form der Überhöhungsrampe einen bestimmten Übergangsbogen im Grundriß.
- Die einfachste Rampenform ist die gleichmäßig geneigte *gerade* Rampe (Abbildung 4.2).
- Zu ihr gehört als Grundrißkurve die Klothoide¹¹.
- Da die gerade Rampe (Abbildung 4.2) am Anfang und Ende des Übergangsbogens jeweils einen Knick im Überhöhungsbild aufweist, sind für höhere Fahrgeschwindigkeiten überall stetig differenzierbare Überhöhungs- und Krümmungsbilder (Abbildung 4.3, links oben) vorzuziehen.

Die ersten Übergangsbogen mit stetig differenzierbarer Überhöhungslinie wurden bereits im vorvorigen Jahrhundert entwickelt (VOJACEK 1868 und HELMERT 1872). Infolge der begrenzten rechentechnischen Möglichkeiten waren früher folgende Näherungen (z. B. HELMERT 1872) allgemein üblich¹²:

- Die Länge der Übergangsbogen L wird auf der Abszissenachse gemessen (Abbildung 4.3, oben).
- Die Berechnung der Ordinaten y erfolgt über eine zweifache Integration der Krümmung als Funktion der Abszisse (nach (4.6) anstelle von (4.7)).

Inzwischen haben diese Ansätze ihre ursprüngliche Bedeutung verloren. Mit den modernen EDV-Anlagen ist die Berechnung der Koordinaten über entsprechende Reihenentwicklungen bzw. numerische Integrationsverfahren exakt lösbar. Für die geradlinige Rampe bedeutet diese Stufe den Übergang von der kubischen Parabel zur Klothoide. Den gleichen Entwicklungsschritt hatte der Verfasser für die bei der Deutschen Bundesbahn¹³ gebräuchlichen Übergangsbogen mit stetig differenzierbarer Überhöhungs- und Krümmungslinie vollzogen. Hierzu gehören die Übergangsbogen mit

- parabelförmiger Krümmungslinie nach HELMERT 1872 (SCHUHR 1979),
- dem Polynomansatz nach BLOSS 1936 (SCHUHR 1983) und
- sinusförmig modulierter Krümmungslinie nach KLEIN 1937 (SCHUHR 1980).

⁸in Kapitel 4

⁹Kehrwert des Radius r

¹⁰Trassierungs-Geschwindigkeit v_T

¹¹HELMERT 1872 bezeichnet die Kurvenform zwar noch nicht mit Klothoide, er gibt jedoch bereits die FRENEL'schen Integrale ihrer kartesischen Koordinaten an.

¹²Die geradlinige Überhöhungslinie führt auf die kubische Parabel und die parabelförmig geschwungene Überhöhungslinie von HELMERT 1872 auf die biquadratische Parabel.

¹³Vorgänger der Deutschen Bahn AG

Der letztere gehört zu den Trassenelementen der Hochleistungsschnellbahn mit elektromagnetischer Schwebetechnik im Emsland (z. B. MÖLZER, ZUREK 1977). Bei der Deutschen Bundesbahn

- wurde er nur vereinzelt zu Testzwecken im bestehenden Streckennetz eingebaut (z. B. BIRMANN 1968) und
- war ursprünglich als Trassierungselement für die Neubaustrecken vorgesehen (z. B. ZEUGE 1975).

Zu den Trassierungselementen der Neubaustrecken der Deutschen Bundesbahn von Hannover nach Würzburg und von Mannheim nach Stuttgart gehört der Übergangsbogen mit parabelförmiger Krümmungslinie nach HELMERT 1872. Tatsächlich eingebaut wurden dagegen lediglich Klothoiden. Der hiermit verbundene Qualitätsverlust wird bei den großzügigen Trassierungselementen¹⁴ als tolerierbar eingestuft. Die Gründe für diese Zurücknahme sind neben der Verringerung der *Trassierungs*-Geschwindigkeit von 300 km/h auf 250 km/h vor allen Dingen im Bereich des Bau- und Unterhaltungsaufwands zu suchen. Sie sind somit für die nachfolgende Untersuchung ohne Belang.

Im vorhandenen Streckennetz der Deutschen Bahn AG konnte die zulässige Höchstgeschwindigkeit häufig nach dem Ersatz der Übergangsbogen mit geradliniger Krümmungslinie durch diejenigen mit parabelförmig geschwungener Krümmungslinie nach HELMERT 1872 und dem Übergangsbogen nach BLOSS 1936 entsprechend erhöht werden. Da man infolge der Bautoleranzen auf den Einbau der als hochwertiger angesehenen Übergangsbogenform mit sinusförmig modulierter Krümmungslinie noch generell verzichtet, dürfte es kaum sinnvoll sein, für die Übergangsbogen der gegenwärtigen Eisenbahnen weitere Verfeinerungen vorzuschlagen.

Auch ein Blick in das Ausland liefert hinsichtlich der Übergangsbogen keine weitergehenden Erkenntnisse. Man hat dort mit den gleichen Übergangsbogen experimentiert wie in Deutschland¹⁵ und beschränkt sich bei den Daueranwendungen noch vielfach auf die Klothoide. Das gilt auch für die Hochgeschwindigkeitsstrecken in Japan¹⁶ und Frankreich.

Die neue Hochgeschwindigkeitsstrecke Köln – Rhein/Main der Deutschen Bahn AG wird seit 2002 fahrplanmäßig mit 300 km/h befahren. Zu den Trassierungsparametern (z. B. HARTMANN, LEY, BECK 2006) gehören nach französischem Vorbild kleine Grundrissradien und große Längsneigungen¹⁷. Es kommen nicht ausgeglichene Überhöhungsfehlbeträge von bis zu 150 mm vor. Die hohe Fahrgeschwindigkeit ist somit keine *Trassierungs*-Geschwindigkeit im obigen Sinne. Sie ist vielmehr mit extremen Seitenbeschleunigungen und Belastungen des Oberbaus erkaufte. Es wurden keine anderen Übergangsbogen eingeplant als bei den früheren Neubaustrecken der Deutschen Bundesbahn.

Unabhängig von den gegenwärtigen bautechnischen Realisierungsmöglichkeiten¹⁸ erhebt sich die vom konventionellen Eisenbahnbau losgelöste Frage, welche Übergangsbogenformen *für erst noch zu erschließende Geschwindigkeitsbereiche* anzustreben sind.

Auf der Suche nach einem optimalen Übergangsbogen wird man mit der Tatsache konfrontiert, daß die stufenweise Verfeinerung eines möglichen Korridors mit geeigneten Bedingungen, die letztlich zu einer allgemeingültigen Idealkurve führt, nicht zielführend ist. Ungünstige Eigenschaften lassen sich nämlich stets durch eine Verlängerung des Übergangsbogens verringern. Da eine unbegrenzte Verlängerung nicht möglich ist, trägt jede praktische Lösung einen gewissen Kompromisscharakter.

¹⁴Grundrissradien $\geq 7000\text{m}$ (Ausnahmegrenzwert 5300m) und Längsneigungen $\leq 1.25\%$

¹⁵einschließlich Übergangsbogen mit sinusförmig modulierter Krümmungslinie nach KLEIN 1937

¹⁶Japan hat die längsten Erfahrungen. Auf der Tokaidolinie fuhren bereits 1964 einige Züge 210 km/h (z. B. BIRMANN 1968).

¹⁷Grundrissradien $\geq 3350\text{m}$ und Längsneigungen $\leq 4.0\%$

¹⁸auch unabhängig davon, ob man die bautechnischen Realisierungsmöglichkeiten im Ausland optimistischer einschätzt als in Deutschland

Eine umfassende Integration über das gesamte Fahrzeug stößt auf unüberwindbare Hindernisse. Darüber hinaus sind sehr verschiedenartige Fahrzeugkonstruktionen¹⁹ für den gleichen Verkehrsweg möglich. Deshalb ist es dringend geboten, daß so wenig fahrzeugabhängige Parameter wie irgend möglich vorausgesetzt werden.

¹⁹einschließlich Wagenkastensteuerungen für optimale Kurvenanpassungen usw.

2 Zielsetzung

2.1 Vergleichende Betrachtung der gegenwärtigen Übergangsbogen

Zur Berechnung der Lagekoordinaten eines Übergangsbogens ist die zweifache Integration der Krümmungen des Grundrisses erforderlich (Abbildung 4.4¹ mit (4.8) bis (4.11)). Im ersten Schritt werden die Richtungs differenzen φ und im zweiten die auf die Tangente des ÜA² bezogenen kartesischen Koordinaten y und x ermittelt.

Die in der Praxis verwendeten Übergangsbogen werden mit einer zur Überhöhungslinie proportionalen Krümmungslinie des Grundrisses definiert (vgl. (4.4)). Das gilt sowohl für die zur geradlinigen Rampe gehörende Klothoide als auch für die im Eisenbahnbau zusätzlich gebräuchlichen Übergangsbogen mit stetig differenzierbarer Überhöhungs- und Krümmungslinie.

Nach einer vergleichenden Gegenüberstellung der verfügbaren Ansätze sind die zweckmäßigsten auszuwählen. Dabei ist auch zu berücksichtigen, daß die Überhöhung $\ddot{u}$ (Abbildung 4.1) nicht nur durch eine Anhebung der äußeren gegenüber der inneren Schiene³, sondern auch durch eine Drehung um die Gleisachse⁴ zu realisieren ist. Das hat den Vorteil, daß sich beim Übergang von einer horizontalen Geraden in eine horizontale Kurve mit geringer Überhöhung die Höhe des Schwerpunktes kaum verändert (z. B. VOJACEK 1877). Gleichwohl wird die erste Lösung von den allermeisten Bahnverwaltungen⁵ aus oberbautechnischen Gründen bevorzugt. Die Absenkung eines Gleises ist nämlich ungleich schwieriger zu realisieren als seine Anhebung. Die Anwendung dieser Variante hat zur Folge, daß sich die

- Lagekoordinaten auf die Gleisachse und
- Höhen des Längsschnitts dagegen grundsätzlich auf den inneren Schienenstrang

beziehen. Nur sehr wenige Bahnverwaltungen⁶ nehmen die oberbautechnische Aufwandsmehrung in Kauf und verteilen die Überhöhung gleichmäßig zu beiden Seiten der Bahnachse. In überhöhten Gleisen ist in beiden Fällen die Grundrißprojektion der Bahn des Schwerpunktes stärker gekrümmt als die Gleismitte (z. B. RUCH 1903, vgl. Abbildung 4.2).

2.2 Entwicklung eines praktikablen räumlichen Modells

2.2.1 Ansatz

Da für Eisenbahnlinien nur relativ geringe Gefälle zugelassen sind, hat es in der bisherigen Praxis⁷ ausgereicht, sich auf eine Berechnung ebener Übergangsbogen zu beschränken. Im Zusammenwirken mit einem nicht-ebenen Längsschnitt resultieren aus der örtlichen Absteckung jedoch hiervon mehr oder weniger stark abweichende Raumkurven. Wird z.B. einem ebenen Kreisbogen eine von Null abweichende gleichmäßige Längsneigung aufmoduliert, entsteht eine gemeine Schraubenlinie (z. B. STRUBECKER 1964, Seite 167).

Ein räumlicher Ansatz hat dagegen die Daten des Längsschnitts von Anfang an zu berücksichtigen. Die aus

- Geraden mit konstanten Längsneigungen,
- Kreisbogen⁸ und
- ggf. auch Klothoiden

¹in Kapitel 4

²Anfang des Übergangsbogens

³Drehung um den Bezugspunkt der inneren Schiene

⁴im Regelfall in der Mitte zwischen den Bezugspunkten beider Schienen

⁵auch von der Deutschen Bahn AG

⁶z. B. Schweizerische Bundesbahnen und Japanische Eisenbahnen

⁷einschließlich der bisher gebauten Hochgeschwindigkeitsstrecken

⁸Kuppen bzw. Wannen

bestehende Geometrie bewirkt in den gekrümmten Bereichen radial nach außen gerichtete Zentrifugalbeschleunigungen, die von denjenigen, die auf den Grundrisskrümmungen basieren, zu unterscheiden sind. Ein Verzicht auf Klothoiden zwischen den Geraden und Kreisbogen impliziert eine gewisse Unstetigkeit der Krümmungen im Längsschnitt und damit auch der Raumkurve.

Da eine umfassende Integration über das gesamte Fahrzeug kaum zu realisieren ist, sind die angreifenden Kräfte eines steifen Wagens in den Schwerpunkt (Abbildung 4.1) zu verlegen (z. B. VOJACEK 1877). Um einen eindeutigen Bezug zwischen dem Schwerpunkt und dem Fahrzeug zu erhalten, ist ein bestimmter Querschnitt auszuwählen. Er enthält

- den Schienenabstand s (Abbildung 4.1) und
- den auf der Symmetrieachse gemessenen Abstand h (Abbildung 4.6) des Schwerpunktes von der Gleisachse.

Mit Ausnahme des der Trassierung zugrunde liegenden Querschnitts sollen keinerlei fahrzeugabhängige Parameter⁹ einfließen. Wird die räumliche Bahn des Schwerpunktes als originärer Übergangsbogen aufgefaßt, läßt sich die Überhöhung (Abbildung 4.1) durch eine Drehung des Querschnitts um die Längsachse im Schwerpunkt ersetzen (z. B. RUCH 1903). Die Verwendung der tatsächlichen Querneigungen bewirkt, daß die Anwendungsschranken der Beziehung (4.4), die nur für kleinere Überhöhungen gilt, nicht mehr existent sind. Bewegt sich der das Fahrzeug repräsentierende Querschnitt stets senkrecht zur Schwerpunktbahn, ist auch die Raumkurve der Gleisachse, die sich wiederum in den Grundriß und den Längsschnitt zerlegen läßt, definiert.

Darüber hinaus sollte

- die der Trassierung zugrunde liegende konstante Geschwindigkeit durch eine variable Geschwindigkeit, die sich innerhalb des von der Mindest- und Höchstgeschwindigkeit begrenzten Intervalls in Abhängigkeit von der jeweiligen Längsneigung verändert, ersetzt und
- die ablenkende Kraft der Erddrehung¹⁰ berücksichtigt

werden.

2.2.2 Iterative Einpassung in eine Gesamttrasse

Der Einrechnung einer Verkehrswegachse liegt regelmäßig ein aus dem Planungsprozeß hervorgegangener Entwurf¹¹ zugrunde. Nach der Digitalisierung der Geradenbereiche sind die graphisch geplanten Kreisbogen festzulegen. Ihre genaue Lage hängt von den jeweiligen Übergangsbogen ab. Erst mit der Einpassung sämtlicher Kreis- und Übergangsbogen zwischen zwei aufeinander folgenden Geraden wird jeweils auch einer ihrer Endpunkte fixiert. Die Stationierung eines vorgegebenen Längsschnitts bezieht sich auf die zuvor ermittelte Grundrißkurve.

Bei der räumlichen Berechnung eines Übergangsbogens werden die jeweiligen Höhenangaben des Längsschnitts jedoch bereits benötigt, bevor die Bezugspunkte und damit auch die Station des ÜA¹², der z. B. mit dem anfänglich nicht bekannten Endpunkt der vorhergehenden Geraden zusammenfällt, bekannt ist. Die einzelnen Übergangsbogen lassen sich somit nicht mehr isoliert berechnen. Sie sind vielmehr mit einem geeigneten Iterationsverfahren in die dazugehörige Gesamttrasse einzupassen.

⁹wie spezielle Federungen oder dergl.

¹⁰CORIOLIS-Kraft

¹¹z. B. im Maßstab 1 : 25000 bzw. 1 : 5000

¹²Anfangspunkt des Übergangsbogens

3 Differentialgeometrische und physikalische Vorüberlegungen

3.1 Natürliche Geometrie einer Raumkurve

Die EUKLIDISCHE Raumgeometrie befaßt sich lediglich mit den Eigenschaften, die nicht von der aktuellen räumlichen Lagerung des Gesamtgebildes abhängen (z. B. STRUBECKER 1964, Seite 128). Diese gegenüber etwaigen Translationen oder Drehungen invariante Geometrie im engeren Sinne wird natürliche Geometrie genannt. Sie läßt sich für eine Raumkurve mit der

- Krümmung $\kappa(\bar{l})$ und
- Torsion $\tau(\bar{l})$

jeweils als Funktion der Bogenlänge $\bar{l}$ vollständig beschreiben.

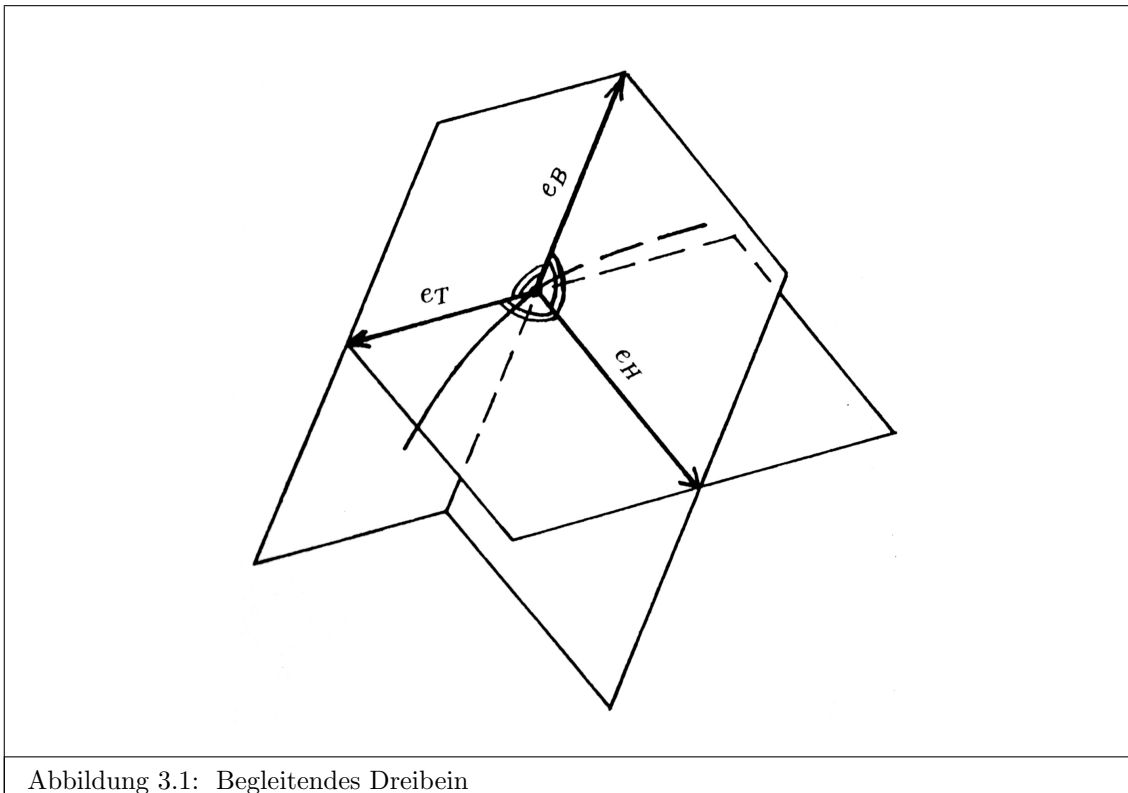


Abbildung 3.1: Begleitendes Dreibein

Mit den einzelnen Punkten der Kurve ist ein aus den drei orthogonalen Einheitsvektoren (vgl. Abbildung 3.1)

- $\vec{e}_T$ (Tangente),
- $\vec{e}_H$ (Hauptnormale) und
- $\vec{e}_B = \vec{e}_T \times \vec{e}_H$ (Binormale)

bestehendes invariantes begleitendes Dreibein verbunden (z. B. STRUBECKER 1964, Seite 150). Die Ableitungsgleichungen von FRENET (vgl. (5.59)) geben an, wie sich die Bogenableitungen der Vektoren des begleitenden Dreibeins der Raumkurve durch die

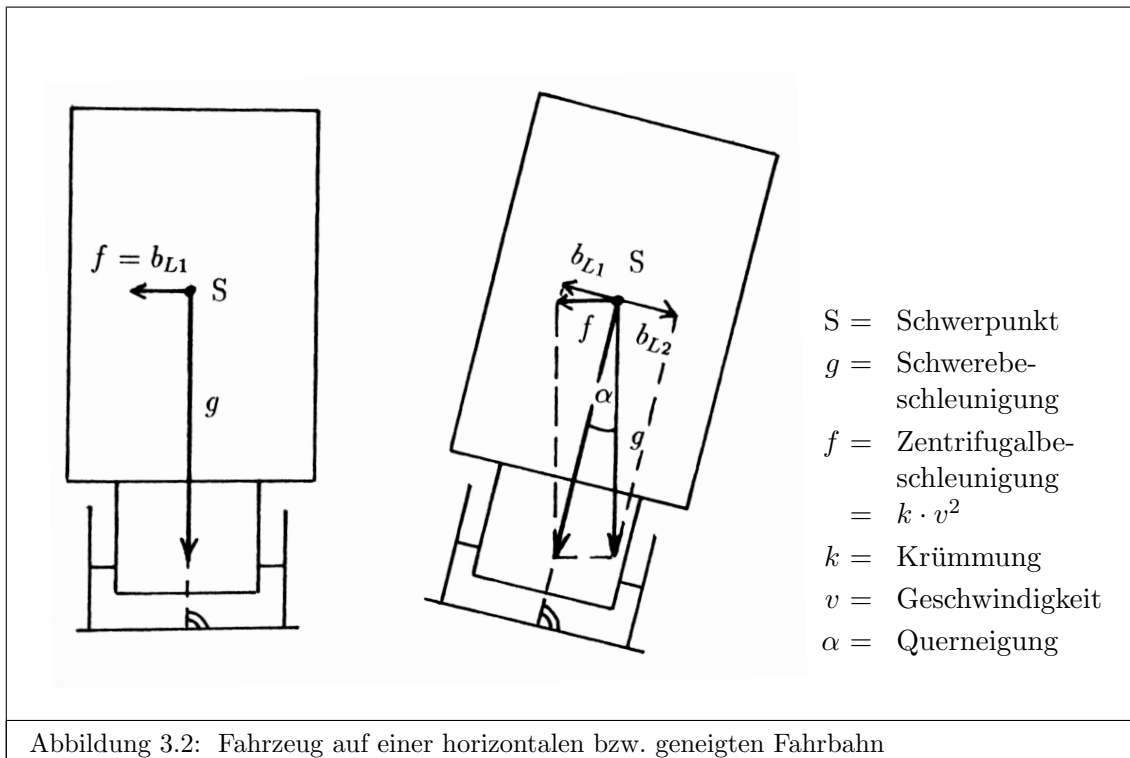
- Vektoren $\vec{e}_T$, $\vec{e}_H$ und $\vec{e}_B$ sowie
- Krümmung κ und Torsion τ

ausdrücken lassen (z. B. STRUBECKER 1964, Seite 154).

Bei der rein geometrischen Betrachtungsweise gibt es z. B. keinen Unterschied zwischen einem ebenen Kreisbogen in einer

- Horizontalebene,
- Vertikalebene oder
- anderen Ebene.

3.2 Trassierung im Erdschwerefeld



Das mathematische Modell eines Fahrweges auf der Erdoberfläche wird im Allgemeinfall mit einer Raumkurve und hierauf bezogenen Querschnitten definiert. Auf einer horizontalen Fahrbahn steht der Vektor der Erdbeschleunigung g stets senkrecht (Abbildung 3.2, links). In gekrümmten Bereichen tritt darüber hinaus eine von der Fahrgeschwindigkeit v abhängige Zentrifugalbeschleunigung f auf, die sich bezogen auf das Fahrzeug als Lateralbeschleunigung b_{L1} auswirkt.

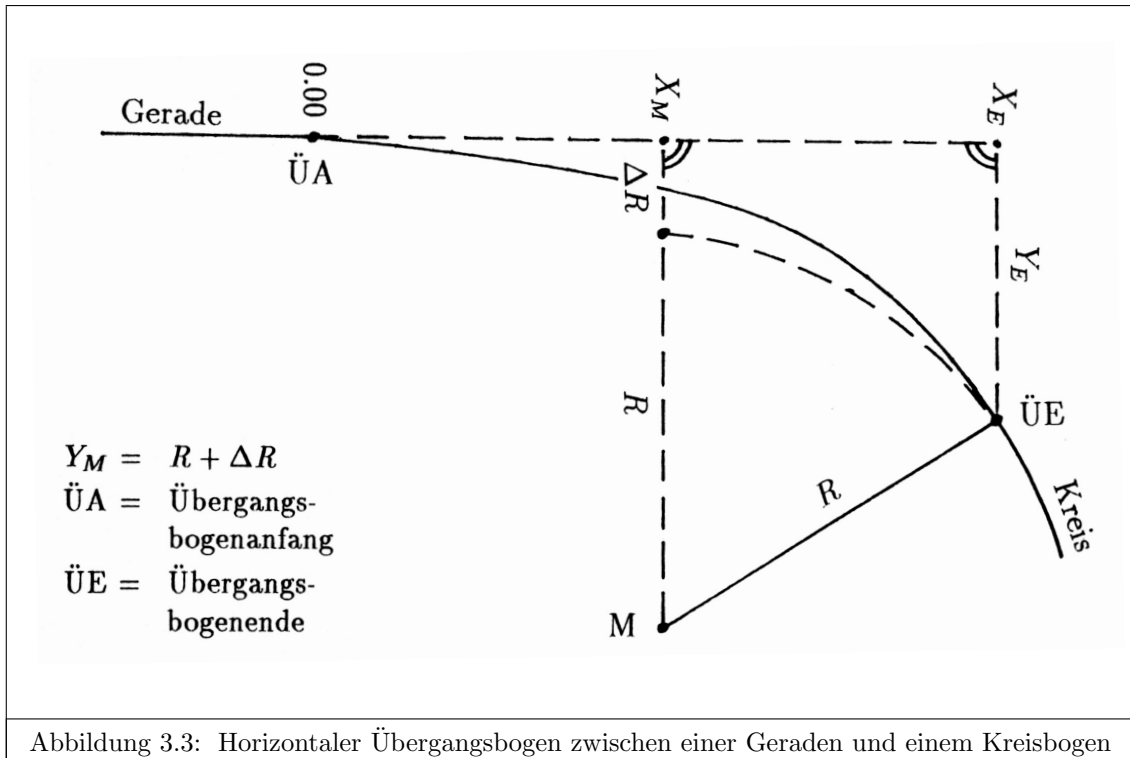
Mit einer entsprechenden Querneigung (Abbildung 3.2, rechts) läßt sich die nach außen gerichtete Komponente der Zentrifugalbeschleunigung b_{L1} ¹ dahingehend durch eine betragsgleiche nach innen gerichtete Zentripetalbeschleunigung b_{L2} so kompensieren, daß die Resultierende wiederum senkrecht auf die Fahrbahn trifft und somit keine auf den Fahrzeugschwerpunkt S bezogene Lateralbeschleunigung auftritt². Diese Kompensationsmöglichkeit ist nur für eine bestimmte Fahrgeschwindigkeit v , die sogenannte Trassierungsgeschwindigkeit v_T , voll wirksam und an die Voraussetzung gebunden, daß das Erdschwerefeld vorhanden ist.

¹Projektion von f

² $b_{L1} = b_{L2}$

3.3 Modellierung der Übergangsbogen

In der gegenwärtigen Trassierungspraxis werden die Achsen der Verkehrswege indirekt über Grundriß- und Längsschnittkurven definiert. Die Einrechnung der Übergangsbogen beschränkt sich auf den Grundriß. Es ist jedoch ohne weiteres möglich, für die aus dem Zusammenwirken des Grundrisses und des Längsschnitts resultierenden Raumkurven die räumliche Krümmung κ und die Torsion τ zu berechnen (vgl. (5.11) und (5.33)).



Ein horizontaler Übergangsbogen zwischen

- einer Geraden und einem Kreisbogen (Abbildung 3.3) bzw.
- zwei Kreisbogen mit unterschiedlichen Radien

soll die Anfangskrümmung kontinuierlich in die Endkrümmung überführen. Je nach aktueller Aufgabenstellung wird entweder

- im Anschluß an eine Gerade bzw. einen Kreisbogen der Übergangsbogen plziert und der nachfolgende Kreisbogen angefügt oder
- der Übergangsbogen zwischen Fixelementen eingerechnet.

Zur Eliminierung der Lateralbeschleunigung ist die Fahrbahn so stark zu neigen, daß die nach innen gerichtete Zentripetalbeschleunigung b_{L2} (Abbildung 3.2) den gleichen Betrag aufweist wie die nach außen gerichtete Komponente der Zentrifugalbeschleunigung b_{L1} .

Bei der Einrechnung zwischen Fixelementen werden die Endpunkte des Übergangsbogens soweit verschoben, bis der zu der vorhandenen Tangentenabrückung ΔR (vgl. Abbildung 3.3) passende Übergangsbogen sich nahtlos einfügt. Die Vorgabe hiervon abweichender Endpunkte wäre nicht sinnvoll, weil überall stetig differenzierbare Übergänge zusätzliche Krümmungswechsel erforderten. Das gilt sinngemäß auch für die ungleich kompliziertere Einrechnung eines räumlichen Übergangsbogens in eine Raumelementenfolge.

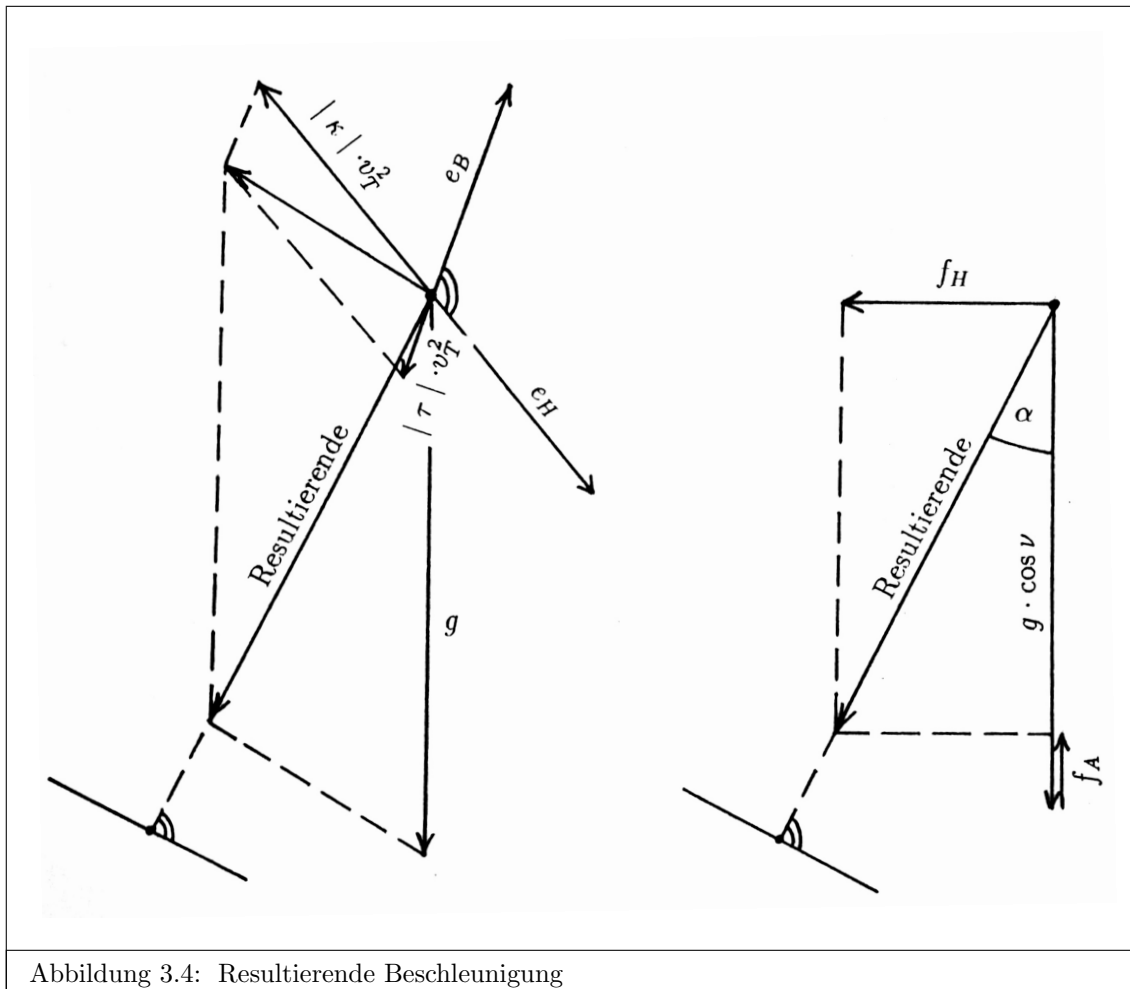


Abbildung 3.4: Resultierende Beschleunigung

Eine Raumkurve ließe sich, ausgehend von dem in ihrem Anfangspunkt absolut orientierten begleitenden Dreiein, mittels der räumlichen Krümmung $\kappa(\bar{l})$ und der Torsion $\tau(\bar{l})$ ³ vollständig beschreiben. Die für die *Trassierungs*-Geschwindigkeit v_T maßgebende Querneigung wäre jeweils so zu bemessen, dass die aus den Vektoren mit den Beträgen (vgl. Abbildung 3.4, links)

- $|\kappa| \cdot v_T^2$ ⁴,
- $|\tau| \cdot v_T^2$ ⁵ und
- g ⁶

zusammengesetzte Gesamtbeschleunigung senkrecht auf die Fahrbahn träge.

Da

- es in dieser Abhandlung jedoch primär um die Einpassung von Übergangsbogen zwischen mehr oder weniger exakt vorgegebenen Fixelementen geht,
- die Querneigung infolge der Erdbeschleunigung eine dominierende Rolle spielt und
- die Querneigungsänderung innerhalb des Übergangsbogens möglichst gleichmäßig erfolgen sollte,

³als Funktionen der räumlichen Länge $\bar{l}$

⁴Zentrifugalbeschleunigung in der rückwärtigen Verlängerung der Hauptnormalen

⁵Zentrifugalbeschleunigung in der rückwärtigen Verlängerung der Binormalen

⁶Erdbeschleunigung

bietet sich für die Einrechnung räumlicher Übergangsbogen dagegen folgende Vorgehensweise an:

- Die Unterscheidung zwischen Grundriß und Längsschnitt ist grundsätzlich beizubehalten.
- Für die Kompensation der Lateralbeschleunigung wird der zur Längsneigung ν senkrechte Querschnitt (Abbildung 3.4, rechts und Abbildung 5.5, rechts) betrachtet.
- Er enthält eine Zerlegung der insgesamt auftretenden Zentrifugalbeschleunigung in
 - einen zur Grundrißkrümmung k proportionalen horizontalen Anteil f_H und
 - einen zur Längsschnittkrümmung $\hat{k}$ proportionalen Aufrißanteil f_A ⁷.
- Die Interpolationsfunktion⁸ wird nicht auf die Grundrißkrümmung angewandt, sondern unmittelbar auf die Querneigung⁹.

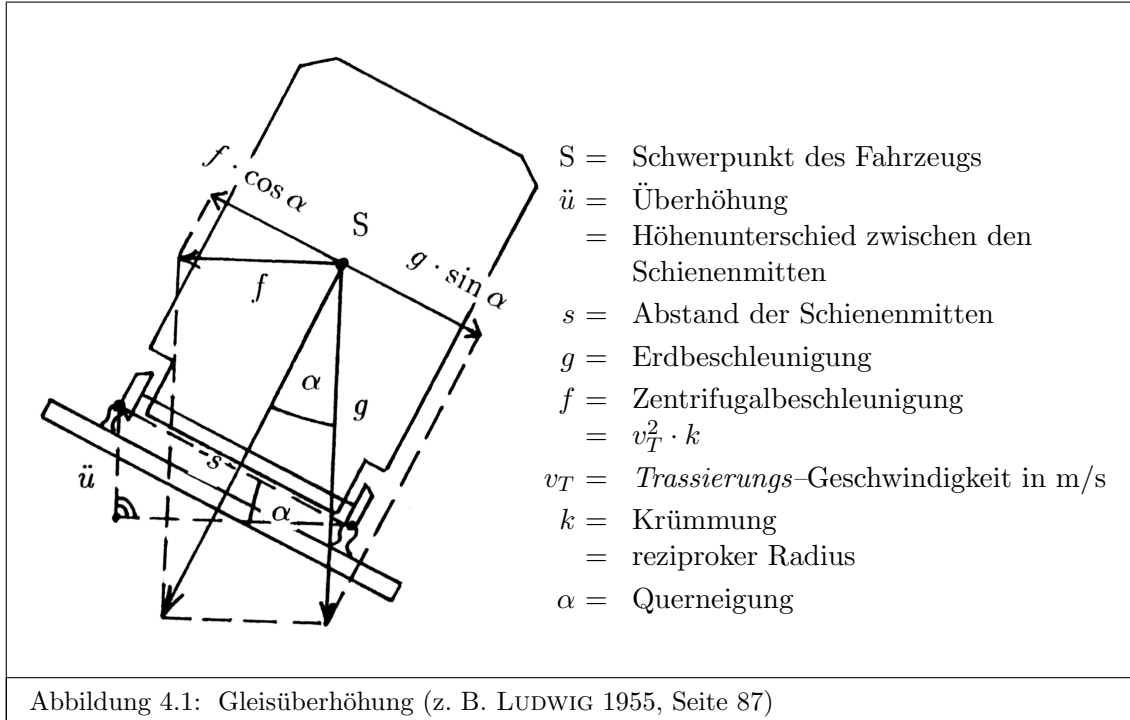
⁷vgl. (5.21) und (5.22)

⁸ $F(\bar{l})$ (vgl. Abbildung 5.1)

⁹(5.1) anstelle von (4.15)

4 Ebene Übergangsbogen

4.1 Abhängigkeit der Krümmung von der Überhöhung



In gekrümmten Gleisbereichen wird der horizontalen Zentrifugalbeschleunigung f (Abbildung 4.1) eine Überhöhung der äußeren gegenüber der inneren Schiene entgegengesetzt. Für die der Trassierung zugrunde liegenden konstanten Geschwindigkeit v_T soll die Resultierende aus der Erd- und Fliehbeschleunigung¹ senkrecht auf die um den Winkel α quergeneigte Gleisebene treffen. Diese Bedingung gilt als erfüllt, wenn die Beträge der im Schwerpunkt S angreifenden Komponenten $f \cdot \cos \alpha$ und $g \cdot \sin \alpha$ gleich groß sind. Die Krümmung k ² ergibt sich mit (Abbildung 4.1)

$$\tan \alpha = \frac{f}{g} = \frac{v_T^2 \cdot k}{g} \quad (4.1)$$

zu

$$k = \frac{1}{r} = \frac{g}{v_T^2} \cdot \tan \alpha = \frac{g}{v_T^2} \cdot \tan \left(\arcsin \frac{\ddot{u}}{s} \right) = \frac{g}{v_T^2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}. \quad (4.2)$$

Da die den Überhöhungen entsprechenden Winkel α im Eisenbahnbau relativ klein sind – bei der Deutschen Bahn AG gilt z. B. der Grenzwert³ (vgl. EBO 2005, §6)

$$\alpha_{\max} \approx \frac{\ddot{u}_{\max}}{s} \approx \frac{0.18\text{m}}{1.50\text{m}} = 0.12\text{rad} \quad -, \quad (4.3)$$

wird regelmäßig $\sin \alpha$ mit $\tan \alpha$ gleichgesetzt. Hierdurch vereinfacht sich die Beziehung (4.2) zu

$$k = \frac{g}{v_T^2 \cdot s} \cdot \ddot{u} = \text{const} \cdot \ddot{u}. \quad (4.4)$$

¹ g und f in Abbildung 4.1

² = reziproker Radius r

³ $\ddot{u}_{\max} = 180\text{mm}$ darf unter Einbeziehung der sich im Betrieb einstellenden Abweichungen nicht überschritten werden

4.2 Proportionale Überhöhungs- und Krümmungsbilder

4.2.1 Verfügbare Ansätze

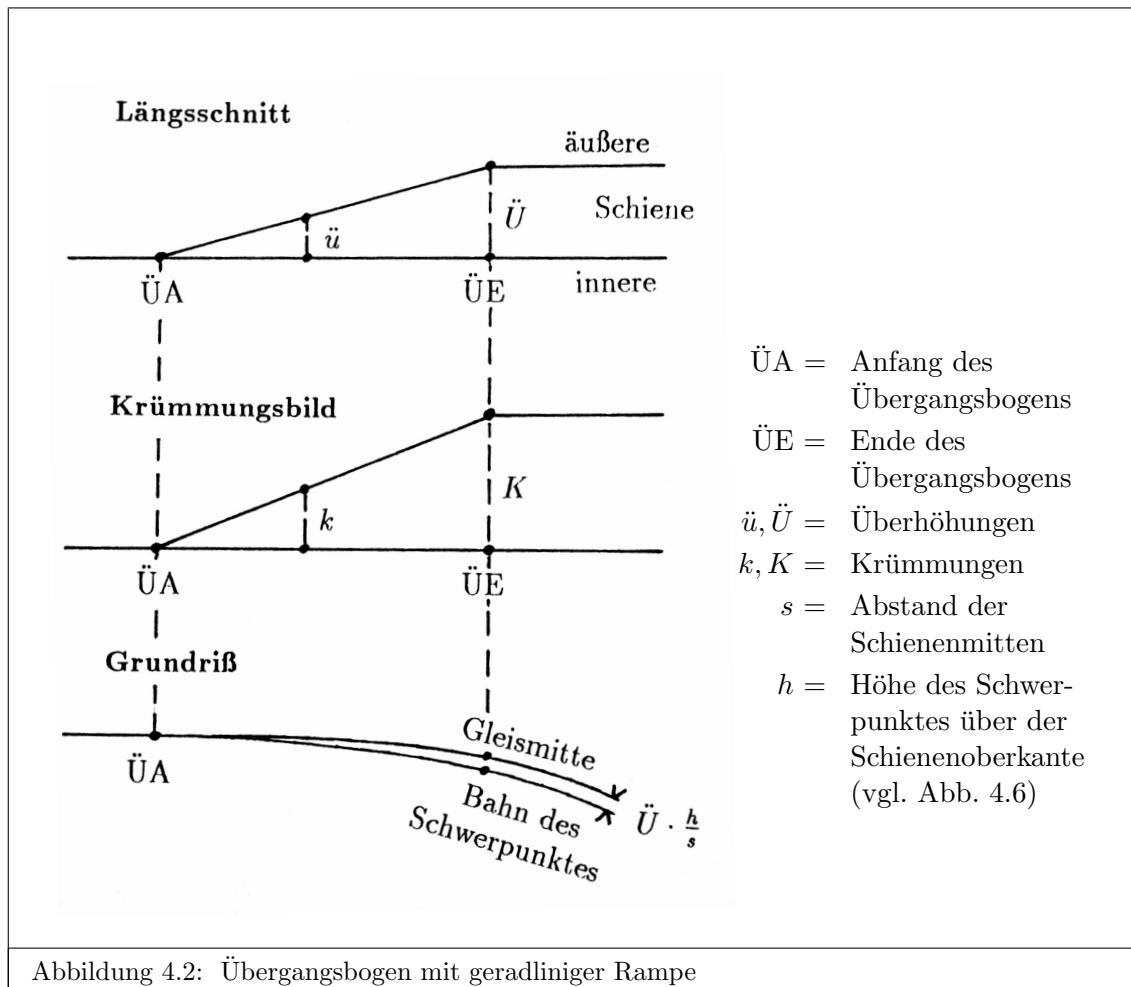


Abbildung 4.2: Übergangsbogen mit geradliniger Rampe

Die Überhöhungsdifferenzen zwischen dem Anfangs- und Endpunkt des Übergangsbogens⁴ lassen sich mit einer geradlinigen (Abbildung 4.2, oben) bzw. einer auch in $\ddot{U}A$ und $\ddot{U}E$ stetig differenzierbaren *Überhöhungs-Rampe* (Abbildung 4.3, links oben) überbrücken. Solange die Beziehung (4.4) gilt, ist die Form des Übergangsbogens zwischen einer Geraden und einem Kreisbogen über das dazugehörige Krümmungsbild (Abbildung 4.2 und Abbildung 4.3, oben)⁵

$$k = \ddot{u} \cdot \frac{K}{\ddot{U}} \quad (4.5)$$

zu ermitteln.

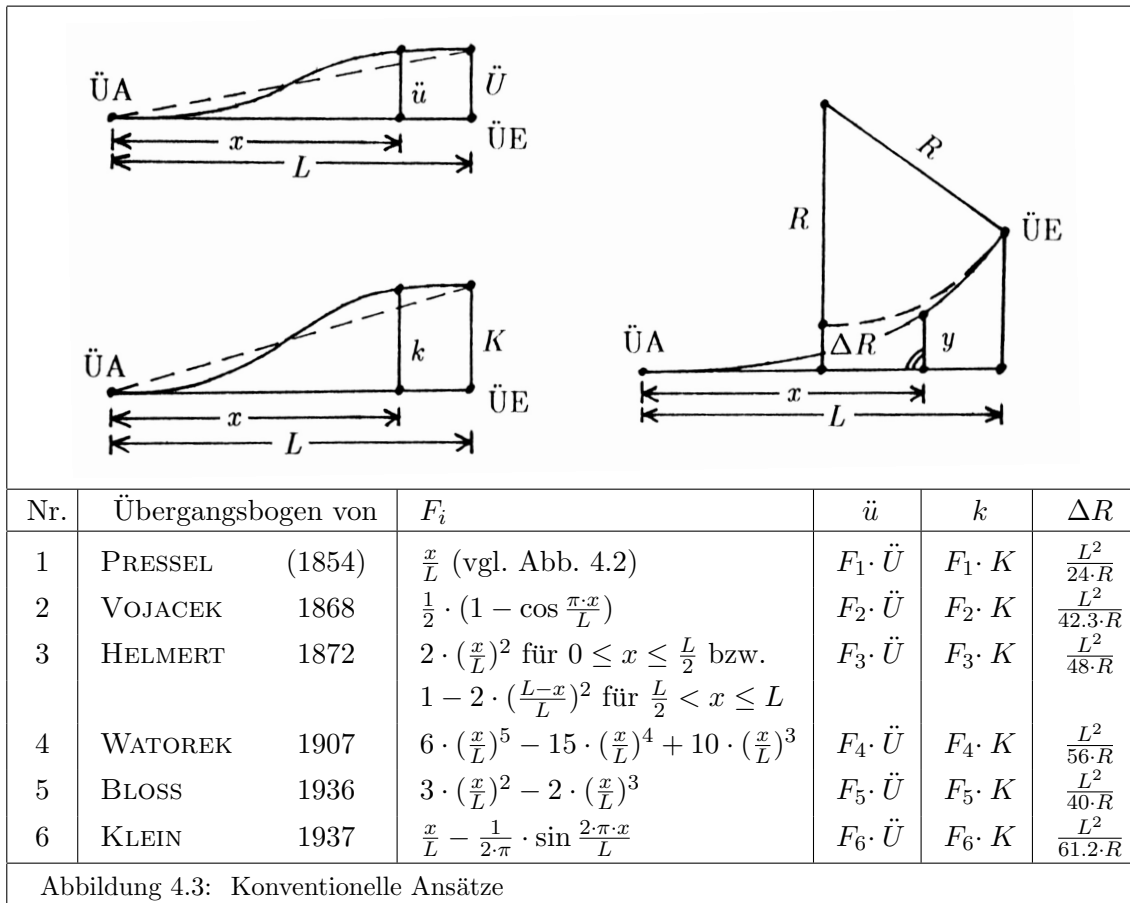
Bei der Deutschen Bahn AG werden neben der Klothoide die Übergangsbogen mit

- parabelförmiger Krümmungslinie nach HELMERT 1872 (SCHUHR 1979) und
- dem Polynomansatz nach BLOSS 1936 (SCHUHR 1983)

benutzt. Darüber hinaus war der Übergangsbogen mit sinusförmig modulierter Krümmungslinie nach KLEIN 1937 (SCHUHR 1980) ursprünglich für die Trassierung der deutschen Neubaustrecken (z. B. ZEUGE 1975) vorgesehen. Der letztere gilt gegenwärtig als hochwertigster Übergangsbogen (z. B. BIRMANN 1968).

⁴ $\ddot{U}A$ und $\ddot{U}E$

⁵ K bzw. $\ddot{U}$ = Krümmung bzw. Überhöhung am Ende des Übergangsbogens und im nachfolgenden Kreisbogen



Die konventionellen Ansätze (Abbildung 4.3)

- dieser drei Übergangsbogen (Nr. 3, 5 und 6),
- der kubischen Parabel (Nr. 1) und
- zwei weiterer Übergangsbogen (Nr. 2 und 4)

basieren auf einem Ersatz der tatsächlichen Teil- und Gesamtlängen der Übergangsbogen durch die entsprechenden Abszissenmaße. Die Ordinate y (Abbildung 4.3) wurde damals über eine zweifache Integration der Näherungsformel

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = k, \quad (4.6)$$

d. h. unter Vernachlässigung der ersten Ableitung y' in (z. B. BRONSTEIN, SEMENDJAJEW 1966, Seite 205)

$$k = \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad (4.7)$$

bestimmt.

Zur exakten Berechnung der Koordinaten (Abbildung 4.4)

$$y = \int_0^l \sin \varphi(l) \cdot dl \quad \text{und} \quad (4.8)$$

$$x = \int_0^l \cos \varphi(l) \cdot dl \quad (4.9)$$

mit

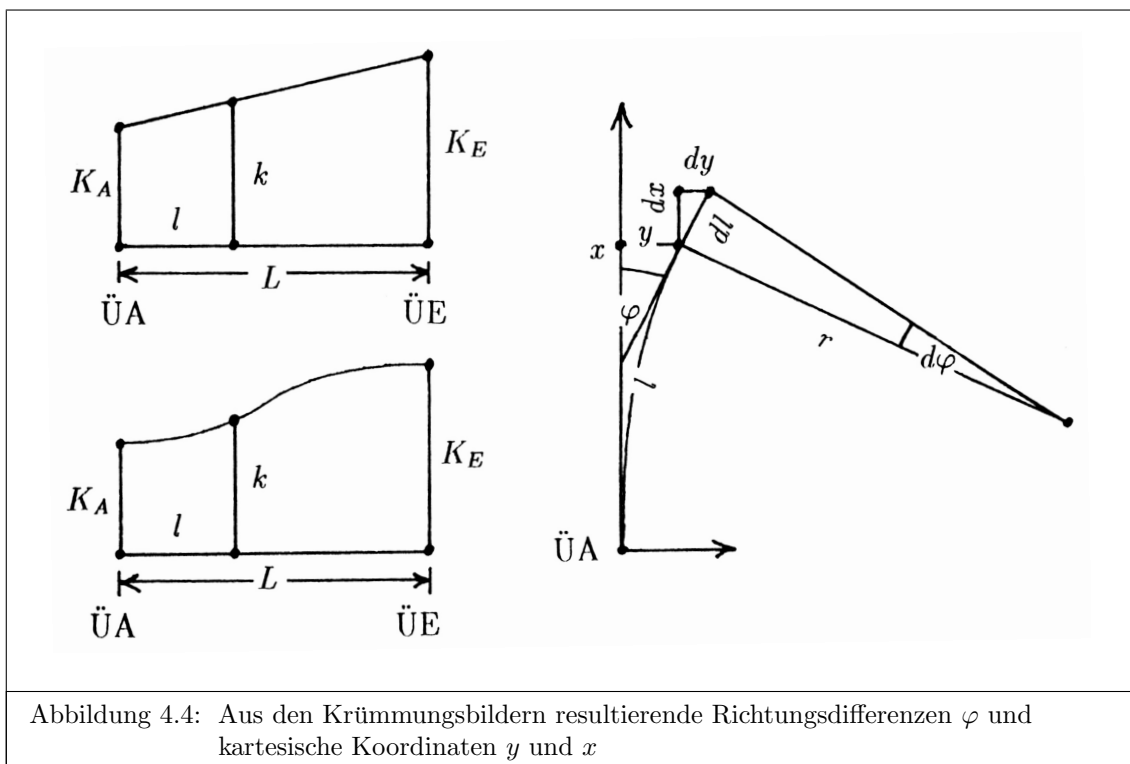
$$\varphi = \int_0^l k(l) \cdot dl \quad \text{und} \quad (4.10)$$

$$k = K_A + F_i(l) \cdot (K_E - K_A) \quad (4.11)$$

sind die Abszissenmaße x und L in den Interpolationsfunktionen F_i (Abbildung 4.3) durch die entsprechenden Teil- und Gesamtlängen l und L des Übergangsbogens (Abbildung 4.5) zu ersetzen. Diese Präzisierung der Ansätze

- entspricht für den Übergangsbogen Nr. 1 (Abbildungen 4.3 und 4.5) dem Übergang von der kubischen Parabel⁶ zur Klothoide und
- wird für die Übergangsbogen Nr. 2 bis 6 durch die Änderung der Bezeichnungen
 - Übergangsbogen *von* VOJACEK 1868, HELMERT 1872... (Abbildung 4.3) in
 - Übergangsbogen *nach* VOJACEK 1868, HELMERT 1872...(Abbildung 4.5)

ausgedrückt.



4.2.2 Geometrische und physikalische Eigenschaften

In der Abbildung 4.5 sind die Interpolationsfunktionen $F(l)$ sowie die mit L^7 bzw. L^2 multiplizierten ersten und zweiten Ableitungen F' und F'' nach l dargestellt. Diese Funktionen definieren zusammen mit den Anfangs- und Endwerten der

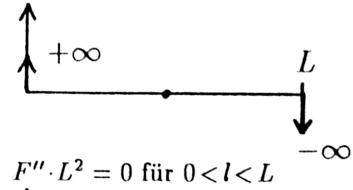
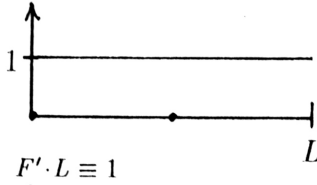
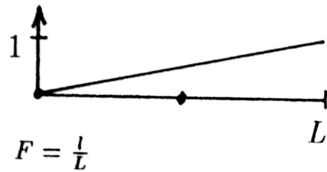
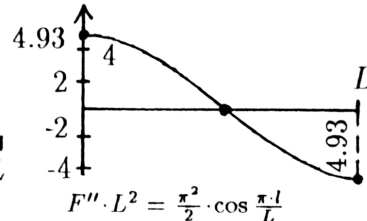
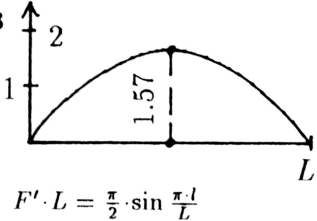
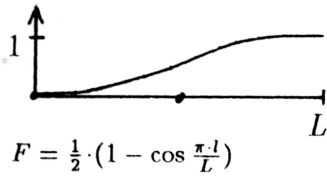
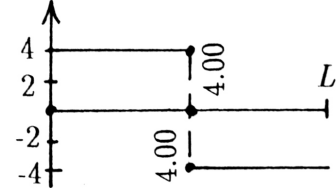
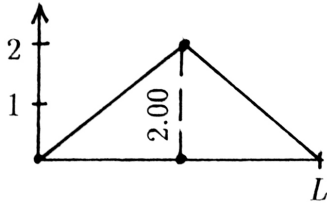
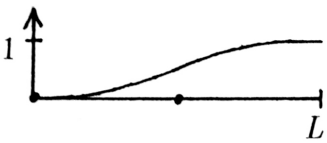
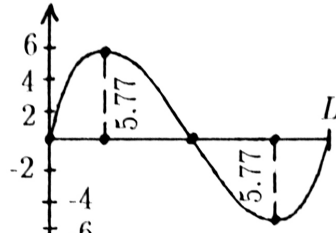
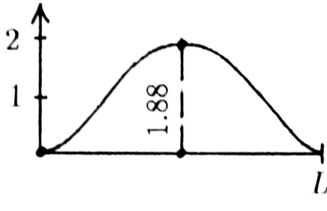
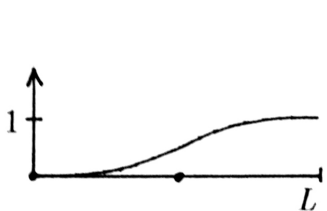
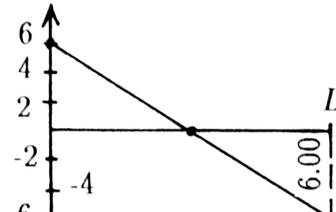
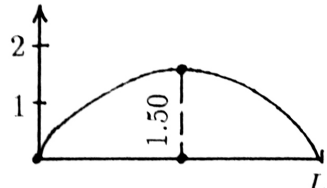
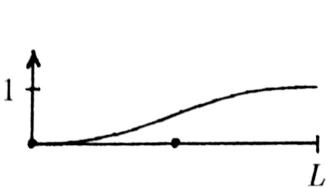
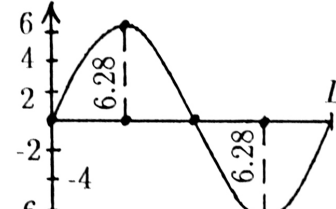
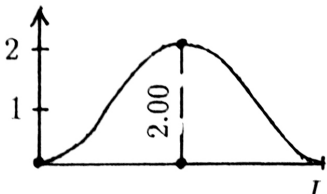
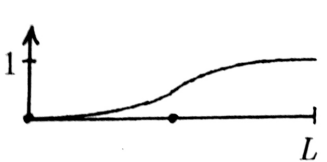
- Überhöhungen $\ddot{U}_A$ und $\ddot{U}_E$ sowie
- Krümmungen K_A und K_E

die Überhöhungen

$$\ddot{u} = \ddot{U}_A + F \cdot (\ddot{U}_E - \ddot{U}_A) = \ddot{U}_A + F \cdot \Delta \ddot{U} \quad (4.12)$$

⁶die wahrscheinlich erstmals 1854 von PRESSEL erwähnt wird (HELMERT 1872)

⁷= Gesamtlänge des Übergangsbogens

Nr. 1: geradlinig**Nr. 2: nach VOJACEK 1868****Nr. 3: nach HELMERT 1872****Nr. 4: nach WATOREK 1907****Nr. 5: nach BLOSS 1936****Nr. 6: nach KLEIN 1937**Abbildung 4.5: Interpolationsfunktionen $F(l)$ und deren Ableitungen

mit den Ableitungen

$$\ddot{u}' = \frac{d\ddot{u}}{dl} = \frac{dF}{dl} \cdot \Delta\ddot{U} = F' \cdot \Delta\ddot{U} = (F' \cdot L) \cdot \frac{\Delta\ddot{U}}{L} \quad \text{und} \quad (4.13)$$

$$\ddot{u}'' = \frac{d^2\ddot{u}}{dl^2} = \frac{d^2F}{dl^2} \cdot \Delta\ddot{U} = F'' \cdot \Delta\ddot{U} = (F'' \cdot L^2) \cdot \frac{\Delta\ddot{U}}{L^2} \quad (4.14)$$

sowie Krümmungen

$$k = K_A + F \cdot (K_E - K_A) = K_A + F \cdot \Delta K \quad (4.15)$$

mit den Ableitungen

$$k' = \frac{dk}{dl} = (F' \cdot L) \cdot \frac{\Delta K}{L} \quad \text{und} \quad (4.16)$$

$$k'' = \frac{d^2k}{dl^2} = (F'' \cdot L^2) \cdot \frac{\Delta K}{L^2} \quad (4.17)$$

des gesamten Übergangsbogens. Für einen Übergangsbogen zwischen einer Geraden und einem Kreisbogen ist $\ddot{U}_A = K_A = 0$ einzusetzen.

Ein Parameter für die Qualität eines Übergangsbogens ist der Anstieg der Überhöhungsrampe (4.13). Er darf gewisse⁸ Grenzen nicht überschreiten, damit z. B. eines der vier Räder starrer Fahrzeuge trotz der nicht mehr parallel verlaufenden Schienen eines Gleises nicht zu stark von der Schiene abheben kann. Die anzustrebende Stetigkeit von $F' \cdot L$ am Anfang und Ende des Übergangsbogens wird jedoch stets mit der Zunahme des Maximalbetrags in seiner Mitte (Abbildung 4.5, Nr. 1 und 2 bis 6) erkauft. Da der Übergangsbogen Nr. 5 den geringsten Anstieg erfordert, ist er als besonders günstig einzustufen.

Gilt dieses auch für den praktischen Fall des Ersatzes einer Klothoide durch einen der Übergangsbogen Nr. 2 bis 6 zwischen fixen Geraden und Kreisen? Im Eisenbahnbau gibt es regelmäßig so viele Zwangspunkte, dass ein örtlich vorhandener Kreisabstand ΔR (Abbildung 4.3) nicht ohne mehr oder weniger umfangreiche Baumaßnahmen⁹ abänderbar ist. Wird neben dem konstanten Kreisabstand ΔR und dem Radius R (Abbildung 4.3) ein Grenzwert für den Rampenanstieg $\ddot{u}'_{max}$ (vgl. (4.13)) vorgegeben, lassen sich die unterschiedlichen Gesamtlängen $L_1, L_2 \dots$ und Überhöhungen des anschließenden Kreisbogens $\ddot{U}_1, \ddot{U}_2 \dots$ der jeweiligen Übergangsbogen näherungsweise aus den Beziehungen (Abbildung 4.3)

$$\Delta R = \frac{L_1^2}{24 \cdot R} = \frac{L_2^2}{42.3 \cdot R} = \frac{L_3^2}{48 \cdot R} = \frac{L_4^2}{56 \cdot R} = \frac{L_5^2}{40 \cdot R} = \frac{L_6^2}{61.2 \cdot R} \quad (4.18)$$

und (Abbildung 4.5, mittlere Spalte und (4.13))

$$\ddot{u}'_{max} = 1.00 \cdot \frac{\ddot{U}_1}{L_1} = 1.57 \cdot \frac{\ddot{U}_2}{L_2} = 2.00 \cdot \frac{\ddot{U}_3}{L_3} = 1.88 \cdot \frac{\ddot{U}_4}{L_4} = 1.50 \cdot \frac{\ddot{U}_5}{L_5} = 2.00 \cdot \frac{\ddot{U}_6}{L_6} \quad (4.19)$$

bestimmen. Durch Einsetzen der in (4.18) enthaltenen Längenrelationen

$$L_1 = 0.75 \cdot L_2 = 0.71 \cdot L_3 = 0.65 \cdot L_4 = 0.77 \cdot L_5 = 0.63 \cdot L_6 \quad (4.20)$$

in (4.19) folgt

$$\ddot{U}_1 = 1.18 \cdot \ddot{U}_2 = 1.41 \cdot \ddot{U}_3 = 1.23 \cdot \ddot{U}_4 = 1.16 \cdot \ddot{U}_5 = 1.25 \cdot \ddot{U}_6. \quad (4.21)$$

Bei der Deutschen Bahn AG darf der nur punktuell in der Mitte der Übergangsbogen mit stetig differenzierbarer Krümmungslinie auftretende maximale Rampenanstieg doppelt so groß sein wie derjenige der Klothoide, solange der allgemeine Grenzwert von 1:400 (EBO 2005, §6) nicht überschritten wird. Diese Verdoppelung lässt sich z. B. durch Einsetzen von $2.00 \cdot \ddot{U}_1$ anstelle von $\ddot{U}_1$ in (4.21) berücksichtigen. Daraus ergibt sich

$$\ddot{U}_5 > \ddot{U}_2 > \ddot{U}_4 > \ddot{U}_6 > \ddot{U}_3 > \ddot{U}_1. \quad (4.22)$$

⁸vom Fahrzeug abhängige

⁹z. B. Dammverlegungen und Profilverbreiterungen der Tunnel mit einer Anpassung der Streckenausrüstung im gesamten Kreisbereich

Da die Überhöhung ungefähr proportional zum Quadrat der *Trassierungs*-Geschwindigkeit v_T ist (vgl. (4.4)), lässt sich¹⁰ v_T mit dem Ersatz der Klothoide durch den Übergangsbogen Nr. 5 (Abbildung 4.5 und (4.22)) am stärksten heraufsetzen.

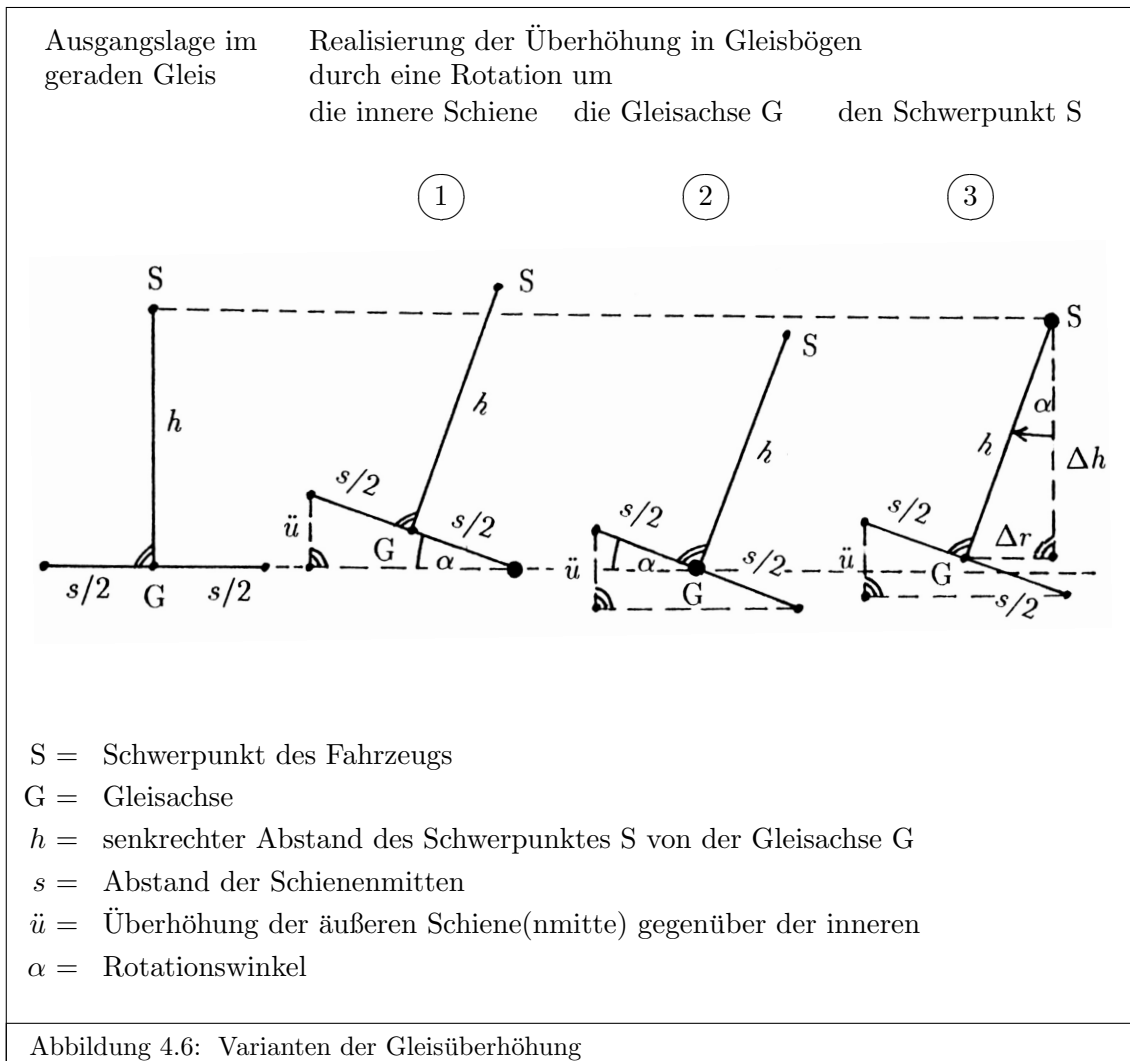
Zur Überhöhung (4.12) gehören die Hubgeschwindigkeit

$$v_H = \frac{d\ddot{u}}{dt} = \frac{d\ddot{u}}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{dF}{dl} \cdot \Delta\ddot{U} \cdot v = \frac{\Delta\ddot{U} \cdot v}{L} \cdot (F' \cdot L) \quad (4.23)$$

und die Hubbeschleunigung

$$b_H = \frac{dv_H}{dt} = \frac{dv_H}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{\Delta\ddot{U} \cdot v^2}{L^2} \cdot (F'' \cdot L^2), \quad (4.24)$$

die auf einer Anhebung der äußeren gegenüber der inneren Schiene basieren.



Einige Bahnverwaltungen¹¹ realisieren die Überhöhung durch eine Anhebung der äußeren bei gleichzeitiger Absenkung der inneren Schiene (Abbildung 4.6, Nr. 2) jeweils um den halben Gesamtbetrag (vgl. (4.12)). Bei dieser Lösung ist zwischen dem 'Hub' der äußeren und inneren Schiene zu unterscheiden. Zur Berechnung der von der äußeren bzw. inneren Schiene verursachten Hubgeschwindigkeit und -beschleunigung ist der erste Faktor in (4.23) und (4.24) mit 0.5 bzw. - 0.5 zu erweitern. Dieses Verfahren beeinflusst die Höhe des Schwerpunktes eines Fahrzeugs in erheblich geringerem Maße als die alleinige Anhebung der äußeren gegenüber der inneren Schiene (vgl. Abbildung 4.6, Nr. 1 und 2).

¹⁰solange die höchstzulässige Überhöhung nicht überschritten wird

¹¹z. B. Schweizerische Bundesbahnen

Wird ein Gleisbogen mit einer von der *Trassierungs*-Geschwindigkeit v_T abweichenden aktuellen Geschwindigkeit v_a befahren, ist die nach außen gerichtete Lateralbeschleunigung (Abbildung 4.1)

$$b = f \cdot \cos \alpha - g \cdot \sin \alpha = v_a^2 \cdot k \cdot \cos \alpha - g \cdot \sin \alpha \quad (4.25)$$

wirksam. Für einen Übergangsbogen mit relativ kleinen Querneigungen α gilt die Näherung (vgl. (4.12) und (4.15))

$$\begin{aligned} b &\approx v_a^2 \cdot k - g \cdot \alpha \approx v_a^2 \cdot k - g \cdot \frac{\ddot{u}}{s} \\ &= v_a^2 \cdot (K_A + F \cdot \Delta K) - \frac{g}{s} \cdot (\ddot{U}_A + F \cdot \Delta \ddot{U}) \\ &= (v_a^2 \cdot K_A - \frac{g}{s} \cdot \ddot{U}_A) + (v_a^2 \cdot \Delta K - \frac{g}{s} \cdot \Delta \ddot{U}) \cdot F \\ &= b_A + (b_E - b_A) \cdot F = b_A + \Delta b \cdot F \end{aligned} \quad (4.26)$$

mit b_A = Anfangs- und b_E = Endwert der Lateralbeschleunigung, d. h. innerhalb des Übergangsbogens ist der Zuwachs proportional zu F (Abbildung 4.5, linker Teil). Dieses hat zur Folge, dass die mit *Ruck* (z. B. SCHRAMM 1934) bezeichnete Änderung der Lateralbeschleunigung

$$\dot{b} = \frac{db}{dt} = \frac{db}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} \approx \Delta b \cdot \frac{dF}{dl} \cdot v = \left(\frac{\Delta b \cdot v}{L} \right) \cdot (F' \cdot L) \quad (4.27)$$

den von der Form des Übergangsbogens abhängenden Faktor $F' \cdot L$ (Abbildung 4.5, mittlerer Teil) enthält.

4.3 Berücksichtigung stärkerer Querneigungen

Die bisherigen Ansätze lassen sich unabhängig von etwaigen praktischen Realisierungsmöglichkeiten stärkerer Querneigungen der Fahrbahn¹² durch eine Abkehr von (4.4) präzisieren. Fließen die Querneigungen¹³ anstelle der Überhöhungen in (4.12) ein, ergibt sich

$$\alpha = \alpha_A + (\alpha_E - \alpha_A) \cdot F = \alpha_A + \Delta \alpha \cdot F. \quad (4.28)$$

Es gelten die jeweiligen

- Überhöhungen (Abbildung 4.1)

$$\ddot{u} = s \cdot \sin \alpha, \quad (4.29)$$

- Krümmungen ((4.2) und Abbildung 4.1)

$$k = \frac{g}{v_T^2} \cdot \tan \alpha, \quad (4.30)$$

- Drehgeschwindigkeiten (vgl. (4.23))

$$v_D = \frac{d\alpha}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{dF}{dl} \cdot \Delta \alpha \cdot v = \frac{\Delta \alpha \cdot v}{L} \cdot (F' \cdot L) \quad (4.31)$$

und

- Drehbeschleunigungen (vgl. (4.24))

$$b_D = \frac{dv_D}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{\Delta \alpha \cdot v^2}{L^2} \cdot (F'' \cdot L^2). \quad (4.32)$$

¹²z. B. des Gleises

¹³ α_A = Anfangs- und α_E = Endwert

Bei stärkeren Querneigungen ist eine Rotation um die als originäre Trassierungslinie fungierende Schwerpunktbahn (Abbildung 4.6, Nr. 3) anzustreben. Die hierauf bezogene Gleislage ergibt sich über den Höhenunterschied

$$\Delta h = -h \cdot \cos \alpha \quad (4.33)$$

und den radial nach außen gerichteten Korrekturbetrag¹⁴

$$\Delta r = h \cdot \sin \alpha. \quad (4.34)$$

Ersatzweise kommt auch eine Rotation um die mit der Trassierungslinie identischen Gleisachse (Abbildung 4.6, Nr. 2) in Betracht.

4.4 Polynomansätze höherer Ordnung

Bevor einer der Ansätze Nr. 2 bis 6 (Abbildung 4.5) favorisiert wird, erhebt sich die Frage, inwieweit die Skala der Polynomansätze Nr. 1, 4 und 5 erweiterbar ist. Auf dem in der Abbildung 4.7 skizzierten Lösungsweg lassen sich neben den bisherigen Interpolationsfunktionen (Abbildung 4.5, Nr. 1, 4 und 5)

$$F = \frac{l}{L} \quad (1. \text{ Ordnung}), \quad (4.35)$$

$$F = -2 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^2 \quad (3. \text{ Ordnung}) \quad \text{und} \quad (4.36)$$

$$F = 6 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^5 - 15 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^4 + 10 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^3 \quad (5. \text{ Ordnung}) \quad (4.37)$$

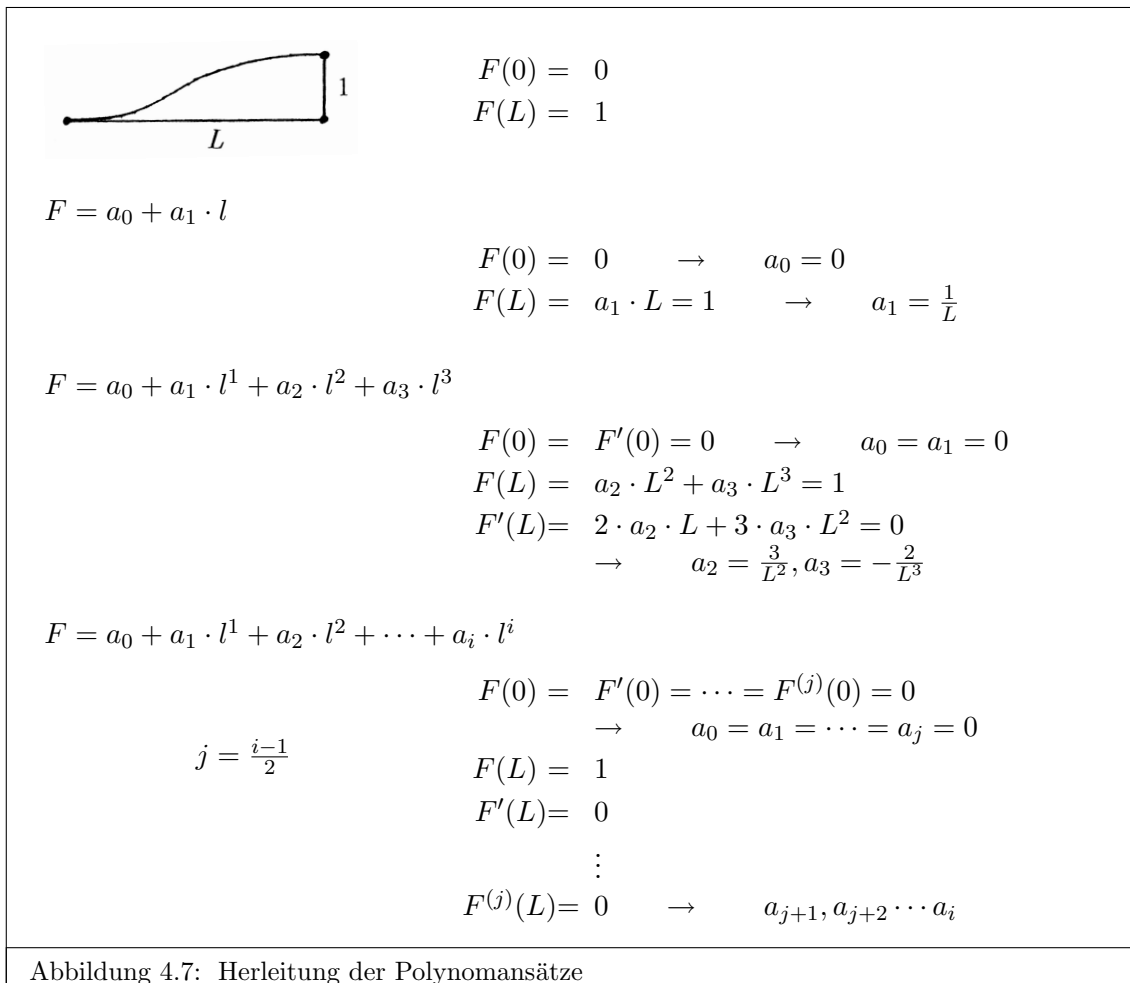


Abbildung 4.7: Herleitung der Polynomansätze

¹⁴= Radiusdifferenz

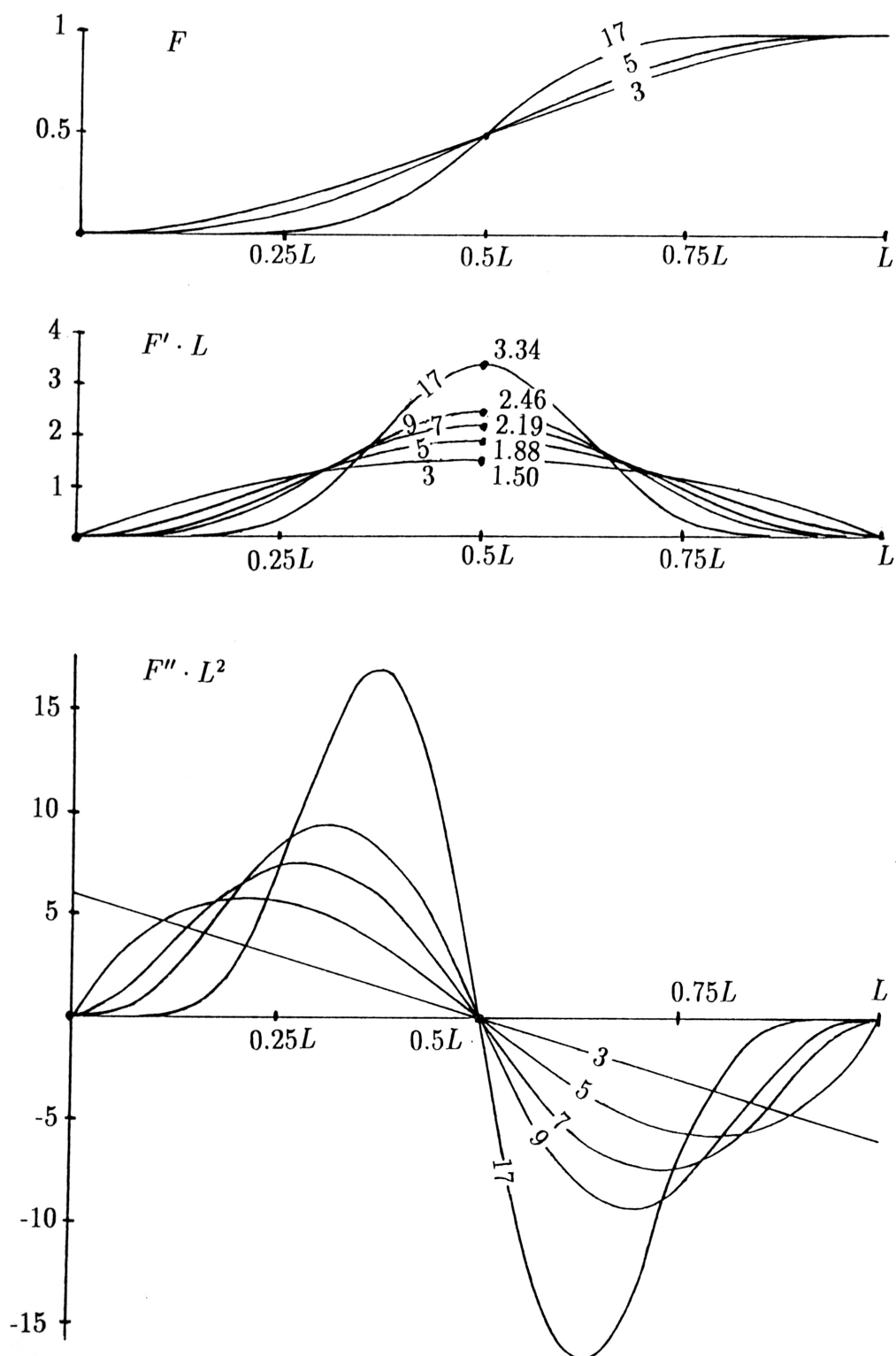


Abbildung 4.8: Polynomansätze 3. bis 17. Ordnung und deren Ableitungen

die zusätzlichen Polynomansätze

$$F = -20 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^7 + 70 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^6 - 84 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^5 + 35 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^4 \quad (7. \text{ Ordnung}), \quad (4.38)$$

$$F = 70 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^9 - 315 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^8 + 540 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^7 - 420 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^6 + 126 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^5 \quad (9. \text{ Ordnung}) \quad (4.39)$$

usw.

ermitteln. In der Abbildung 4.8 sind den aus der Abbildung 4.5 entnommenen Ansätzen 3. und 5. Ordnung eine charakteristische Auswahl weiterer Ansätze höherer¹⁵ Ordnung gegenübergestellt worden. Die Abbildung 4.8 erstreckt sich wie die Abbildung 4.5 auf die Interpolationsfunktionen $F(l)$ und auf die mit L ¹⁶ bzw. L^2 multiplizierten ersten und zweiten Ableitungen.

Für die Ansätze 2. bzw. 4. bzw. 6. . . . Ordnung ist $F'(L)$ ¹⁷ bzw. $F''(L)$ bzw. $F'''(L)$. . . von Null verschieden. Deshalb sind sie nicht ohne weiteres geeignet. Dem Übergangsbogen Nr. 3 (Abbildung 4.5) liegen jedoch zwei spezielle Ansätze 2.Ordnung, die jeweils nur für eine Hälfte des Übergangsbogens gelten, zugrunde.

4.5 Auswahl eines geeigneten Ansatzes

Die Interpolationsfunktionen F (Abbildung 4.5, linker Teil) definieren im Zusammenwirken mit den jeweiligen Anfangswerten und konstanten Faktoren die

- Überhöhung (vgl. (4.12)) oder
- Querneigung (vgl. (4.28)) sowie
- ungefähre Lateralbeschleunigung (vgl. (4.26)).

Die mit L bzw. L^2 multiplizierten ersten und zweiten Ableitungen $F' \cdot L$ (Abbildung 4.5, mittlerer Teil) und $F'' \cdot L^2$ (Abbildung 4.5, rechter Teil) veranschaulichen die

- Hubgeschwindigkeit (vgl. (4.23)) oder
- Drehgeschwindigkeit (vgl. (4.31)),
- ungefähre Krümmungsänderung (vgl.(4.16)) sowie
- genäherte Änderung der Lateralbeschleunigung¹⁸

und

- Hubbeschleunigung (vgl. (4.24)) oder
- Drehbeschleunigung (vgl. (4.32)).

Die Klothoide (Abbildung 4.5, Nr. 1) ist für höhere Geschwindigkeiten nicht mehr zu empfehlen. Die *Knicke* der Interpolationsfunktionen F in ÜA und ÜE¹⁹ ziehen entsprechende

- Unstetigkeitsstellen der ersten bzw.
- singuläre Punkte der zweiten

Ableitung nach sich.

¹⁵bis zur 17.

¹⁶= Gesamtlänge des Übergangsbogens

¹⁷= Endpunkt der ersten Ableitung

¹⁸= *Rucklinie* (vgl. (4.27))

¹⁹Anfangs- und Endpunkt des Übergangsbogens

Eine auch in $\ddot{U}A$ und $\ddot{U}E$ stetig differenzierbare Interpolationsfunktion F (Abbildung 4.5, Nr. 2 bis 6, linker Teil) impliziert die beiden Nullstellen von $F' \cdot L$ (Abbildung 4.5, Nr. 2 bis 6, mittlerer Teil). Infolge der Identität

$$F(l) = 1 - F(L - l) \quad (4.40)$$

hat die Kurve $F' \cdot L$ an der Stelle $l = \frac{L}{2}$ ihr Maximum, und die dazugehörige Ordinate ist die Symmetrieachse. Die mit L^2 multiplizierte zweite Ableitung $F'' \cdot L^2$ (Abbildung 4.5, rechter Teil) ist zentral-symmetrisch zu $l = \frac{L}{2}$, d. h.

$$F''(l) = -F''(L - l) \quad (4.41)$$

und

$$\int_0^L F'' \cdot dl = 0. \quad (4.42)$$

Der Flächeninhalt zwischen der charakteristischen Gesamtkurve der ersten Ableitung $F' \cdot L$ und der Bezugslinie (Abbildung 4.5, mittlerer Teil) ist unabänderbar stets

$$\int_0^L (F' \cdot L) \cdot dl = \left(\int_0^L F' \cdot dl \right) \cdot L = 1 \cdot L. \quad (4.43)$$

Trotzdem sollte das Maximum in der Mitte einen möglichst kleinen Wert annehmen. Diese Bedingung (Abbildung 4.5, mittlerer Teil) bzw. die maximalen *Sprünge* von $F'' \cdot L^2$ (Abbildung 4.5, rechter Teil) führen auf die Reihenfolgen

- 1.50 (Nr. 5),
- 1.57 (Nr. 2),
- 1.88 (Nr. 4) und
- 2.00 (Nr. 3 und 6)

bzw.

- 0.00 (Nr. 4 und 6),
- 4.93 (Nr. 2),
- 6.00 (Nr. 5)
- 8.00 (Nr. 3).

Der Übergangsbogen Nr. 3 steht in beiden Reihen ganz hinten. Die Übergangsbogen Nr. 2 und 5 bzw. 4 und 6 haben jeweils eine große Ähnlichkeit miteinander. Die Polynomansätze (Abbildung 4.5, linker Teil) Nr. 5 (3. Grades) und Nr. 4 (5. Grades) bewirken sogar noch etwas kleinere Maximalbeträge von $F' \cdot L$ als die Vergleichsansätze²⁰.

Die definitive Auswahl eines bestimmten Ansatzes trägt in jedem Fall Kompromisscharakter. In den Abbildungen 4.5 und 4.8 sind neben den Interpolationsfunktionen F auch die mit L bzw. L^2 multiplizierten ersten und zweiten Ableitungen dargestellt. Sämtliche Ordinaten sind

- Funktionen der Länge $0 \leq l \leq L$ und
- dimensionslose Zahlen.

Da z. B. die ersten Faktoren in (4.31) und (4.32) mit zunehmender Länge kleiner werden und die Maxima bzw. Minima der zweiten Faktoren für eine bestimmte Interpolationsfunktion F konstant sind, lassen sich die negativen Auswirkungen zu großer Extremwerte stets mit einer entsprechenden Verlängerung des Übergangsbogens auf ein erträgliches Maß zurückschrauben.

²⁰1.50 anstelle von 1.57 und 1.88 anstelle von 2.00

Auf der anderen Seite sind

- die Übergangsbogen aus bautechnischen Gründen nicht unbegrenzt verlängerbar und
- bereits für Übergangsbogen der Form Nr. 6 (Abbildung 4.5) bei höheren Geschwindigkeiten erhebliche Längen erforderlich²¹.

Daher erscheint es sinnvoll, bei den Ansätzen Nr. 4 und 6, deren zweite Ableitungen F'' (Abbildung 4.5, rechter Teil) gegenüber den anderen Ansätzen keine Unstetigkeitsstellen an den Enden der Übergangsbogen aufweisen, eine Anwendungsgrenze zu ziehen und auf Polynomansätze höherer Ordnung mit überall stetig differenzierbaren zweiten Ableitungen F'' (Abbildung 4.8, 7. und höherer Ordnung) zu verzichten.

Die Ansätze Nr. 4 und 6 (Abbildung 4.5) sind als ungefähr gleichwertig anzusehen. Während die mit L bzw. L^2 multiplizierten ersten und zweiten Ableitungen $F' \cdot L$ bzw. $F'' \cdot L^2$ beim Ansatz Nr. 4 etwas kleinere Extrema aufweisen, sorgt die symmetrische Sinusfunktion für geringfügig verminderte maximale Steigungsbeträge der Kurve $F'' \cdot L^2$ ²². Somit bestätigt sich die bisherige Auffassung, dass der Ansatz Nr. 6 (Abbildung 4.5) für höhere Geschwindigkeiten zu bevorzugen ist (z. B. BIRMANN 1968)²³.

²¹vgl. Längen L für Übergangsbogen der Form Nr. 6 in Abbildung 8.1

²²Darüber hinaus ist sie etwas besser für numerische Integrationsverfahren geeignet, was jedoch heute kaum noch ins Gewicht fällt.

²³Der Ansatz Nr. 4 ist jedoch nahezu gleichwertig.

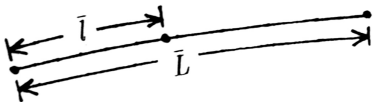
5 Räumlicher Ansatz

5.1 Anpassung der Interpolationsfunktionen

Ein zu (4.28) analoger räumlicher Ansatz

$$\alpha = \alpha_A + (\alpha_E - \alpha_A) \cdot F(\bar{l}) = \alpha_A + \Delta\alpha \cdot F(\bar{l}) \quad (5.1)$$

erfordert den Ersatz der bisherigen Interpolationsfunktionen $F(l)$ (Abbildung 4.5) durch die auf die räumlichen Längen der Übergangsbogen $\bar{L}$ bezogenen Interpolationsfunktionen $F(\bar{l})$ (Abbildung 5.1)¹.

 $\bar{l}$=räumliche Teillänge $\bar{L}$=räumliche Gesamtlänge			
Nr.	nach	$F(\bar{l})$	$F' = \frac{dF(\bar{l})}{d\bar{l}}$
1	(geradlinig)	$\frac{\bar{l}}{\bar{L}}$	$\frac{1}{\bar{L}}$
2	VOJACEK 1868	$\frac{1}{2} \cdot (1 - \cos \frac{\pi \cdot \bar{l}}{\bar{L}})$	$\frac{\pi}{2 \cdot \bar{L}} \cdot \sin \frac{\pi \cdot \bar{l}}{\bar{L}}$
3	HELMERT 1872	$2 \cdot (\frac{\bar{l}}{\bar{L}})^2$ für $0 \leq \bar{l} \leq \frac{\bar{L}}{2}$ bzw. $1 - 2 \cdot (\frac{\bar{L}-\bar{l}}{\bar{L}})^2$ für $\frac{\bar{L}}{2} < \bar{l} \leq \bar{L}$	$4 \cdot \frac{\bar{l}}{\bar{L}^2}$ für $0 \leq \bar{l} \leq \frac{\bar{L}}{2}$ bzw. $4 \cdot \frac{\bar{L}-\bar{l}}{\bar{L}^2}$ für $\frac{\bar{L}}{2} < \bar{l} \leq \bar{L}$
4	WATOREK 1907	$6 \cdot (\frac{\bar{l}}{\bar{L}})^5 - 15 \cdot (\frac{\bar{l}}{\bar{L}})^4 + 10 \cdot (\frac{\bar{l}}{\bar{L}})^3$	$30 \cdot \frac{\bar{l}^4}{\bar{L}^5} - 60 \cdot \frac{\bar{l}^3}{\bar{L}^4} + 30 \cdot \frac{\bar{l}^2}{\bar{L}^3}$
5	BLOSS 1936	$3 \cdot (\frac{\bar{l}}{\bar{L}})^2 - 2 \cdot (\frac{\bar{l}}{\bar{L}})^3$	$6 \cdot (\frac{\bar{l}}{\bar{L}^2} - \frac{\bar{l}^2}{\bar{L}^3})$
6	KLEIN 1937	$\frac{\bar{l}}{\bar{L}} - \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot \bar{l}}{\bar{L}}$	$\frac{1}{\bar{L}} \cdot (1 - \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot \bar{l}}{\bar{L}})$
Abbildung 5.1: Interpolationsfunktionen $F(\bar{l})$ und deren erste Ableitungen			

5.2 Krümmung der räumlichen Trassierungslinie

Eine Raumkurve mit den Ortsvektoren $\vec{o}(\bar{l})$ als Funktion der Länge $0 \leq \bar{l} \leq \bar{L}$ trägt die

- Tangenten-*Einheitsvektoren*

$$\vec{e}_T = \vec{o}' = \frac{d\vec{o}}{d\bar{l}} \quad \text{und} \quad (5.2)$$

- Hauptnormalen

$$\vec{e}_T' = \vec{o}'' = \frac{d^2\vec{o}}{d\bar{l}^2} = |\vec{o}''| \cdot \vec{e}_H = \kappa \cdot \vec{e}_H, \quad (5.3)$$

deren Betrag mit der Krümmung κ identisch ist

(z. B. STRUBECKER 1964, Seiten 148 und 149). Somit führen die Ortsvektoren (Abbildung 5.2)

$$\vec{o} = y \cdot \vec{e}_y + x \cdot \vec{e}_x + z \cdot \vec{e}_z \quad (5.4)$$

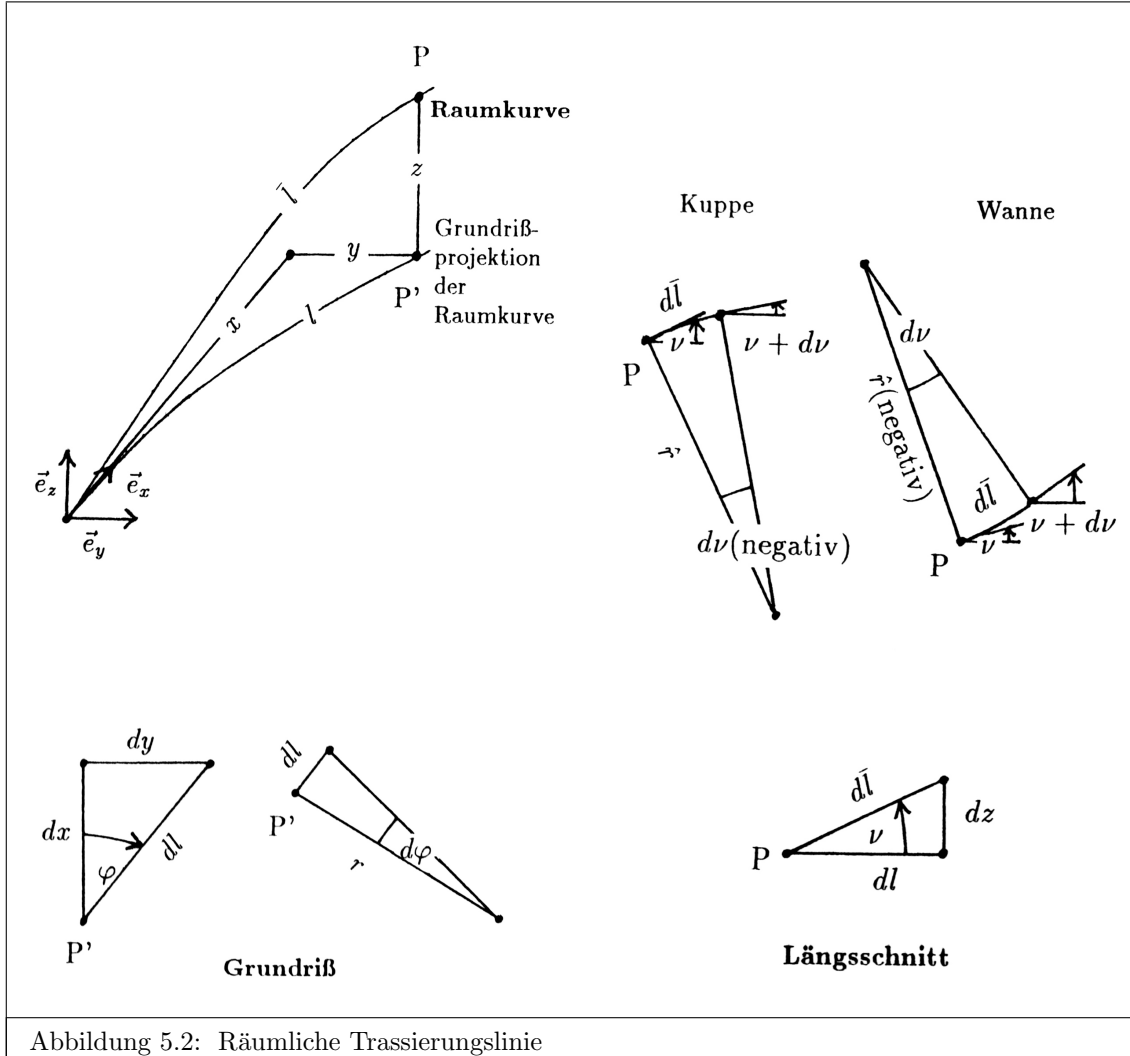
auf die Tangenten-*Einheitsvektoren*

$$\begin{aligned}
 \vec{o}' &= y' \cdot \vec{e}_y + x' \cdot \vec{e}_x + z' \cdot \vec{e}_z \\
 &= \frac{dy}{d\bar{l}} \cdot \vec{e}_y + \frac{dx}{d\bar{l}} \cdot \vec{e}_x + \frac{dz}{d\bar{l}} \cdot \vec{e}_z \\
 &= \frac{dy}{d\bar{l}} \cdot \frac{d\bar{l}}{dl} \cdot \vec{e}_y + \frac{dx}{d\bar{l}} \cdot \frac{d\bar{l}}{dl} \cdot \vec{e}_x + \frac{dz}{d\bar{l}} \cdot \vec{e}_z
 \end{aligned} \quad (5.5)$$

¹Obwohl die Interpolationsfunktionen Nr. 6 und Nr. 4 eindeutig zu bevorzugen sind (vgl. Kapitel 4.5), werden der Vollständigkeit halber auch die Ansätze Nr. 1 bis 3 und 5 für eventuelle Vergleichsberechnungen mit aufgeführt.

und Hauptnormalen

$$\begin{aligned}
 \vec{o}'' &= y'' \cdot \vec{e}_y + x'' \cdot \vec{e}_x + z'' \cdot \vec{e}_z \\
 &= \frac{dy'}{dl} \cdot \vec{e}_y + \frac{dx'}{dl} \cdot \vec{e}_x + \frac{dz'}{dl} \cdot \vec{e}_z.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$



Mit den Hilfsgrößen (vgl. Abbildung 5.2)

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dl} &= \sin \varphi, \\
 \frac{dx}{dl} &= \cos \varphi, \\
 z' &= \frac{dz}{dl} = \sin \nu, \\
 \frac{dl}{dl} &= \cos \nu, \\
 \frac{d\varphi}{dl} &= \frac{1}{r} = k \quad \text{und} \\
 \nu' &= \frac{d\nu}{dl} = -\frac{1}{\hat{r}} = -\hat{k}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 \frac{d \sin \varphi}{d\bar{l}} &= \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{d\bar{l}} \cdot \frac{d\bar{l}}{dl} = \cos \varphi \cdot k \cdot \cos \nu, \\
 \frac{d \cos \varphi}{d\bar{l}} &= -\sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{d\bar{l}} \cdot \frac{d\bar{l}}{dl} = -\sin \varphi \cdot k \cdot \cos \nu, \\
 \frac{d \sin \nu}{d\bar{l}} &= \cos \nu \cdot \frac{d\nu}{d\bar{l}} = -\cos \nu \cdot \hat{k} \quad \text{und} \\
 \frac{d \cos \nu}{d\bar{l}} &= -\sin \nu \cdot \frac{d\nu}{d\bar{l}} = \sin \nu \cdot \hat{k}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

folgen aus (5.5) und (5.6)

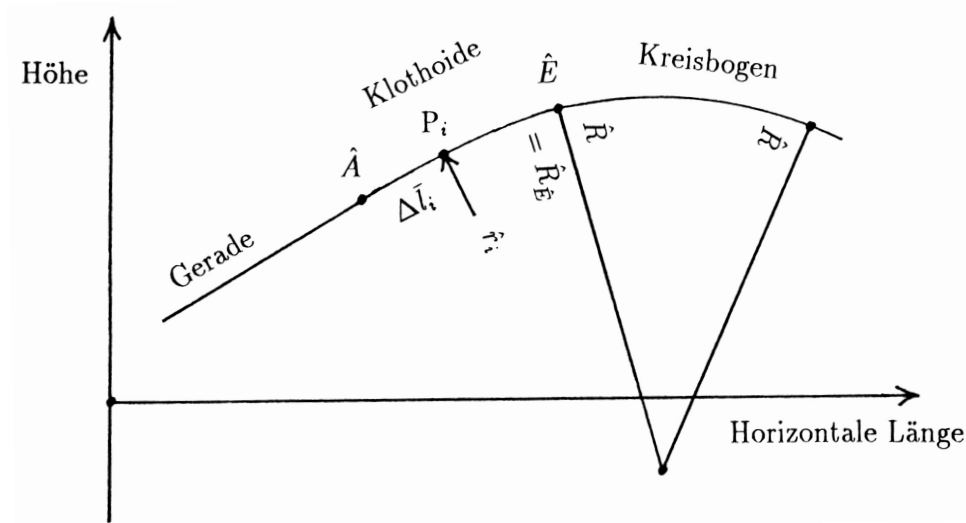
$$\vec{o}' = \sin \varphi \cdot \cos \nu \cdot \vec{e}_y + \cos \varphi \cdot \cos \nu \cdot \vec{e}_x + \sin \nu \cdot \vec{e}_z \tag{5.9}$$

und

$$\begin{aligned}
 \vec{o}'' &= (\cos \varphi \cdot k \cdot \cos^2 \nu + \sin \varphi \cdot \sin \nu \cdot \hat{k}) \cdot \vec{e}_y \\
 &- (\sin \varphi \cdot k \cdot \cos^2 \nu - \cos \varphi \cdot \sin \nu \cdot \hat{k}) \cdot \vec{e}_x - \cos \nu \cdot \hat{k} \cdot \vec{e}_z
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

bzw. die Krümmung der Raumkurve (vgl. (5.3) und Anhang A.1)

$$\kappa = |\vec{o}''| = \sqrt{k^2 \cdot \cos^4 \nu + \hat{k}^2}. \tag{5.11}$$



$$\hat{K}_{\hat{A}} = \frac{1}{R_{\hat{A}}} \text{ bzw.}$$

$$\hat{K}_{\hat{E}} = \frac{1}{R_{\hat{E}}} = \text{Krümmung im Anfangs- bzw. Endpunkt}$$

$$\Delta \bar{l}_i = \bar{l}_i - \bar{l}_{\hat{A}} = \text{auf den Anfangspunkt } \hat{A} \text{ bezogene räumliche Teillänge}$$

$$\hat{L} = \bar{l}_{\hat{E}} - \bar{l}_{\hat{A}} = \text{Gesamtlänge der Klothoide}$$

Abbildung 5.3: Längsschnitt

Der Längsschnitt bestehe aus einer Aufeinanderfolge von Geraden, Kreisbogen und Klothoiden (Abbildung 5.3). In den Bereichen, die mit Geraden definiert sind, gilt

$$\hat{k} = \frac{1}{\hat{r}} = 0. \tag{5.12}$$

Deshalb ist der Vektor der Hauptnormalen für $k \neq 0$ (vgl. (5.10)) stets horizontal. Die Beziehung (5.11) vereinfacht sich zu

$$\kappa = k \cdot \cos^2 \nu. \quad (5.13)$$

Das entspricht einem Radius von

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = r \cdot (1 + \tan^2 \nu). \quad (5.14)$$

Während für einen Grundrisskreis mit dem Radius R die gemeine Schraubenlinie (z. B. STRUBECKER 1964, Seite 167; vgl. Anhang A.2)

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = R \cdot (1 + \tan^2 \nu) \quad (5.15)$$

folgt, definieren die verschiedenen Radien r eines Übergangsbogens mit differenzierbarer Grundrisskrümmung unterschiedliche gemeine Schraubenlinien (5.14), die jeweils nur in infinitesimalen Bereichen mit der Raumkurve identisch sind.

In den Kreis- und Klothoidenbereichen ist der Vektor der Hauptnormalen (5.10) dagegen nicht mehr horizontal. Die Krümmung der Raumkurve ergibt sich (vgl. Abbildung 5.3), wenn in (5.11)

$$\hat{k} = \hat{K} = \frac{1}{\hat{R}} \quad (5.16)$$

(Kreisbogen) bzw.

$$\hat{k}_i = \hat{K}_{\hat{A}} + (\hat{K}_{\hat{E}} - \hat{K}_{\hat{A}}) \cdot \frac{\bar{l}_i - \bar{l}_{\hat{A}}}{\hat{L}} = \hat{K}_{\hat{A}} + \Delta \hat{K} \cdot \frac{\Delta \bar{l}_i}{\hat{L}} \quad (5.17)$$

(Klothoide) eingesetzt wird. Neben der Klothoide (Abbildung 5.1, Nr. 1) stehen auch die Ansätze Nr. 2 bis 6 für Einzelelemente des Längsschnitts zur Verfügung. Für diesen speziellen Anwendungsfall sind in $F(\bar{l})$ (Abbildung 5.1) als Teil- und Gesamtlängen $\bar{l}$ und $\bar{L}$ jeweils die Elemente des Längsschnitts $\Delta \bar{l}_i$ und $\hat{L}$ (Abbildung 5.3) einzusetzen. (5.17) geht in

$$\hat{k}_i = \hat{K}_{\hat{A}} + \Delta \hat{K} \cdot F(\bar{l}) \quad (5.18)$$

über und gilt gleichermaßen für die Ansätze Nr. 1 (Klothoide) und Nr. 2 bis 6 (Abbildung 5.1).

5.3 Grundrisskrümmung

Die Bewegung eines Massenpunktes P auf einer Raumkurve (Abbildung 5.4) mit der *Trassierungs*-Geschwindigkeit v_T erfordert eine radial nach innen gerichtete Zentripetalbeschleunigung

$$\vec{b}_R = \vec{o}'' \cdot v_T^2, \quad (5.19)$$

welche die nach außen gerichtete Zentrifugalbeschleunigung

$$\vec{f} = -\vec{o}'' \cdot v_T^2 \quad (5.20)$$

kompensiert (z. B. SOMMERFELD, FUES 1977, Seite 52). Diese Vektoren setzen sich aus (vgl. (5.11) und (5.13))

- einem horizontalen Anteil mit dem Betrag

$$f_H = k \cdot \cos^2 \nu \cdot v_T^2 \quad (5.21)$$

und

- einem um die Längsneigung ν von der Vertikalen abweichenden Aufrissanteil mit dem Betrag

$$f_A = \hat{k} \cdot v_T^2 \quad (5.22)$$

zusammen.

Die Abbildung 5.4 veranschaulicht den Zusammenhang zwischen den Komponenten der Hauptnormalen (vgl. (5.6) und (5.10))

$$\begin{aligned}
 y'' &= y_1'' + y_2'' = y_1'' + \sin \varphi \cdot \Delta \bar{x}_2 \\
 &= \cos \varphi \cdot k \cdot \cos^2 \nu + \sin \varphi \cdot \sin \nu \cdot \hat{k} \\
 x'' &= x_1'' + x_2'' = x_1'' + \cos \varphi \cdot \Delta \bar{x}_2 \\
 &= -\sin \varphi \cdot k \cdot \cos^2 \nu + \cos \varphi \cdot \sin \nu \cdot \hat{k} \\
 z'' &= -\cos \nu \cdot \hat{k}
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

und der zu v_T^2 proportionalen Zentrifugalbeschleunigung.

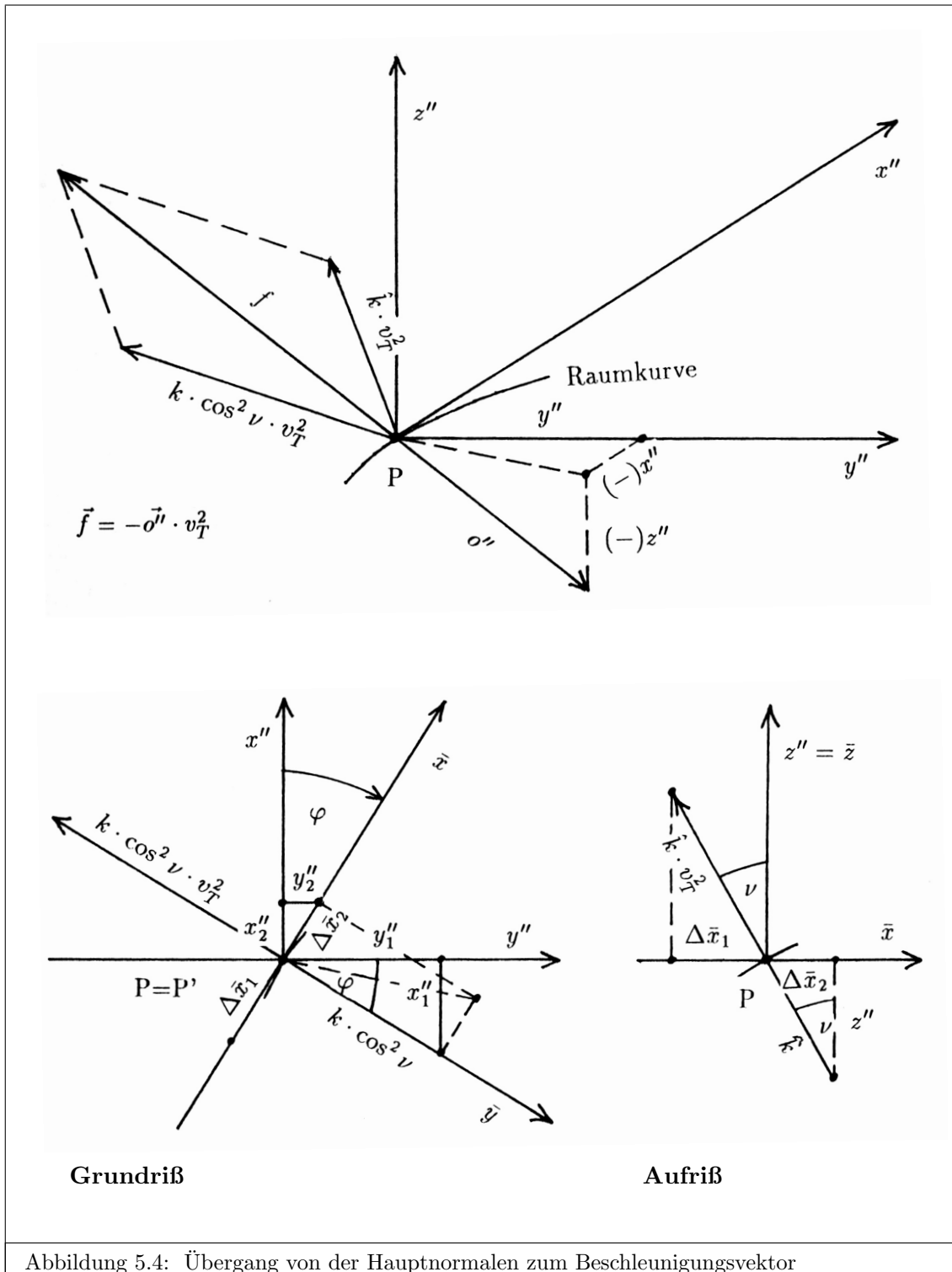


Abbildung 5.4: Übergang von der Hauptnormalen zum Beschleunigungsvektor

Ein das Fahrzeug repräsentierender Querschnitt, der sich senkrecht zum Gleis befindet, weicht um die Längsneigung ν von der Vertikalebene ab (Abbildung 5.5, links). In der Verbindungslinie zwischen dem Schwerpunkt S und dem nicht überhöhten Gleis G' ist neben der Aufrisskomponente mit dem Betrag $\hat{k} \cdot v_T^2$ (vgl. Abbildung 5.2²) auch der Anteil der Erdbeschleunigung mit dem Betrag $g \cdot \cos \nu$ wirksam (Abbildung 5.5, Mitte). Das Gleis G' lässt sich durch eine Rotation des Querschnitts um den Schwerpunkt S (Abbildung 5.5, rechts) dergestalt überhöhen, dass die resultierende Gesamtbeschleunigung senkrecht auf das überhöhte Gleis G trifft³. Der aus (vgl. Abbildung 5.5, rechts)

$$b_{L1} = b_{L2} \quad (5.24)$$

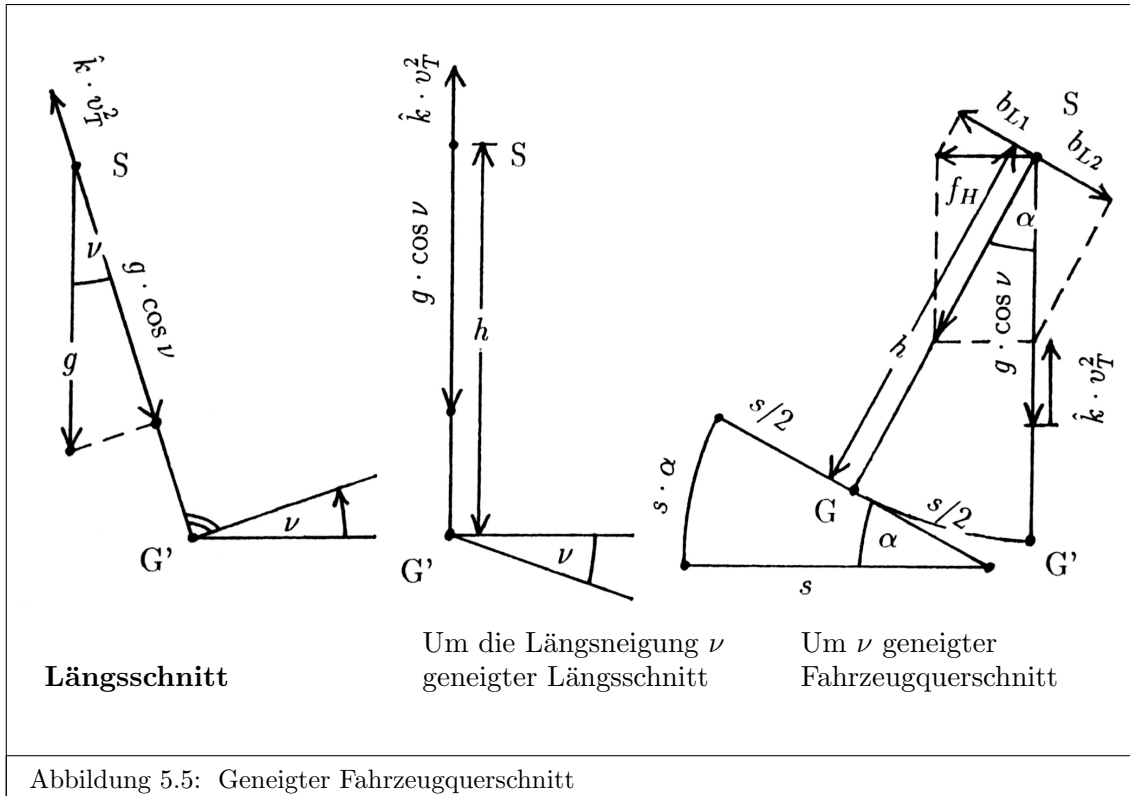
resultierende Ansatz

$$\tan \alpha = \frac{f_H}{g \cdot \cos \nu - \hat{k} \cdot v_T^2} \quad (5.25)$$

führt mit (5.21) auf die ebene Krümmung

$$k = \frac{(g \cdot \cos \nu - \hat{k} \cdot v_T^2) \cdot \tan \alpha}{\cos^2 \nu \cdot v_T^2} \quad (5.26)$$

des Grundrisses der Raumkurve.



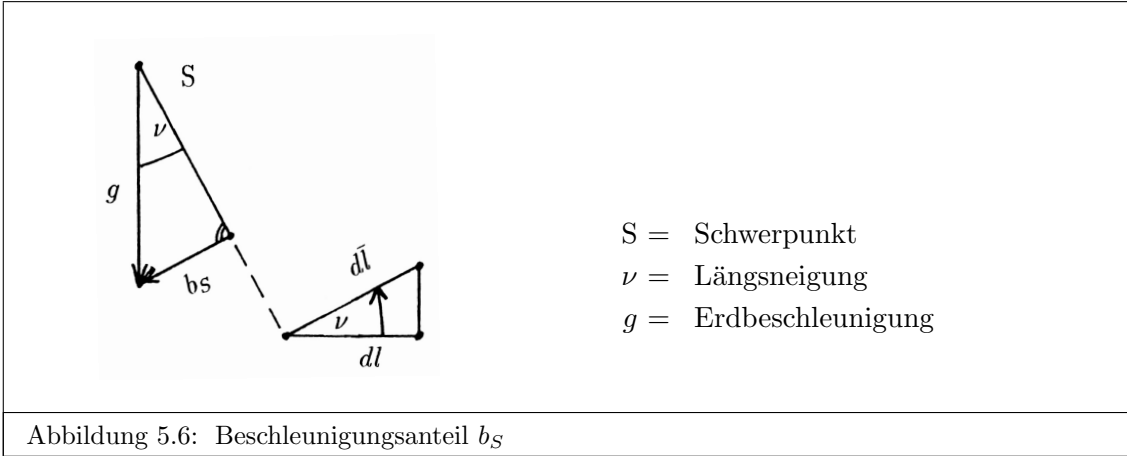
5.4 Variable Geschwindigkeit

Die bisher vorausgesetzte konstante *Trassierungs*-Geschwindigkeit des Fahrzeugs v_T (vgl. Abbildung 4.1) erfordert in Steigungsbereichen eine Verstärkung der Antriebskräfte und in Gefällebereichen entsprechende Bremskräfte. Der dafür erforderliche Energieaufwand lässt sich mit einer variablen Geschwindigkeit vermindern. Das gilt jedoch naturgemäß nur für einen repräsentativen Querschnitt⁴ und ist nur innerhalb eines von der minimalen und maximalen Geschwindigkeit begrenzten Intervalls $v_{min} \leq v_T \leq v_{max}$ sinnvoll.

² $\hat{r}$ und $\hat{k}$ sind im Kuppenbereich positiv

³Analogon zu Abbildung 4.1

⁴z. B. in der Mitte des Zuges

Abbildung 5.6: Beschleunigungsanteil b_S

Die Erdbeschleunigung g (Abbildung 5.6) verursacht die von der momentanen Längsneigung ν abhängige Beschleunigung

$$b_S = \frac{dv_T}{dt} = -g \cdot \sin \nu(\bar{l}). \quad (5.27)$$

Dieser Ansatz führt auf die von der Länge der Raumkurve $\bar{l}$ und der momentanen *Trassierungs*-Geschwindigkeit $v_T(\bar{l})$ abhängige Größe⁵

$$v'_T = \frac{dv_T}{d\bar{l}} = \frac{dv_T}{dt} \cdot \frac{dt}{d\bar{l}} = \frac{dv_T}{dt} \cdot \frac{1}{v_T} = \frac{-g \cdot \sin \nu(\bar{l})}{v_T(\bar{l})}. \quad (5.28)$$

Solange die vor bzw. hinter dem repräsentativen Querschnitt befindlichen Teile des Zuges nicht mit der für ihre jeweilige Stelle maßgebenden mehr oder weniger stark abweichenden Geschwindigkeit fahren können⁶, ist die Anwendung des Verfahrens nur für kurze Züge geboten.

5.5 Torsion der räumlichen Trassierungslinie

Mit den für den Ansatz (z. B. STRUBECKER 1964, Seite 157)

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} y' & x' & z' \\ y'' & x'' & z'' \\ y''' & x''' & z''' \end{vmatrix}}{y''^2 + x''^2 + z''^2} \quad (5.29)$$

benötigten Komponenten (vgl. (5.9))

$$\begin{aligned} y' &= \sin \varphi \cdot \cos \nu \\ x' &= \cos \varphi \cdot \cos \nu \\ z' &= \sin \nu, \end{aligned} \quad (5.30)$$

(vgl. (5.10))

$$\begin{aligned} y'' &= \cos \varphi \cdot k \cdot \cos^2 \nu + \sin \varphi \cdot \sin \nu \cdot \hat{k} \\ x'' &= -\sin \varphi \cdot k \cdot \cos^2 \nu + \cos \varphi \cdot \sin \nu \cdot \hat{k} \\ z'' &= -\cos \nu \cdot \hat{k} \end{aligned} \quad (5.31)$$

⁵negativ (bzw. positiv) für positive (bzw. negative) Längsneigungen

⁶Die einzelnen Wagen (genauer: Wagenteile) des gleichen Zuges müssten unterschiedlich schnell fahren.

und (mit (5.7) und (5.8))

$$\begin{aligned}
 y''' &= \frac{d^3 y}{dl^3} = -\sin \varphi \cdot k^2 \cdot \cos^3 \nu + \cos \varphi \cdot k' \cdot \cos^2 \nu + 3 \cdot \cos \varphi \cdot k \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu \cdot \hat{k} \\
 &\quad - \sin \varphi \cdot \cos \nu \cdot \hat{k}^2 + \sin \varphi \cdot \sin \nu \cdot \hat{k}' \\
 x''' &= \frac{d^3 x}{dl^3} = -\cos \varphi \cdot k^2 \cdot \cos^3 \nu - \sin \varphi \cdot k' \cdot \cos^2 \nu - 3 \cdot \sin \varphi \cdot k \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu \cdot \hat{k} \\
 &\quad - \cos \varphi \cdot \cos \nu \cdot \hat{k}^2 + \cos \varphi \cdot \sin \nu \cdot \hat{k}' \\
 z''' &= \frac{d^3 z}{dl^3} = -\sin \nu \cdot \hat{k}^2 - \cos \nu \cdot \hat{k}'
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

ergibt sich die Torsion⁷ zu (vgl. Anhang A.3)

$$\tau = \frac{(k \cdot \hat{k}' - k^3 \cdot \sin \nu \cdot \cos^3 \nu - k' \hat{k} - 3 \cdot k \cdot \tan \nu \cdot \hat{k}^2) \cdot \cos^2 \nu}{k^2 \cdot \cos^4 \nu + \hat{k}^2}. \tag{5.33}$$

Hierfür werden die Ableitungen (vgl. (5.26) mit (5.7), (5.8) und Anhang A.4)

$$\begin{aligned}
 k' &= \frac{dk}{dl} = (g \cdot \sin \nu \cdot \hat{k} - \hat{k}' \cdot v_T^2 - 2 \cdot \hat{k} \cdot v_T \cdot v_T') \cdot \frac{\tan \alpha}{\cos^2 \nu \cdot v_T^2} \\
 &\quad + (g \cdot \cos \nu - \hat{k} \cdot v_T^2) \cdot \frac{\alpha'}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \nu \cdot v_T^2} - 2 \cdot k \cdot (\hat{k} \cdot \tan \nu + \frac{v_T'}{v_T})
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

und (vgl. (5.12) und (5.16) bis (5.18))

$$\hat{k}' = \begin{cases} \frac{d\hat{k}}{dl} = 0 & \text{für } \hat{k} = \text{const.} \\ \frac{\Delta \hat{K}}{\hat{L}} & \text{im Klothoidenbereich} \\ \Delta \hat{K} \cdot F' & \text{für einen der Übergangsbogen Nr.2 bis 6} \end{cases} \tag{5.35}$$

mit

- F' aus Abbildung 5.1,
- (vgl. (5.1))

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dl} = \Delta \alpha \cdot F' \tag{5.36}$$

und

- (vgl. (5.28))

$$v_T' = \begin{cases} \frac{dv_T}{dl} = 0 & \text{für } v_T = \text{const.} \\ -\frac{g \cdot \sin \nu}{v_T} & \text{für } v_{\min} < v_T < v_{\max} \end{cases} \tag{5.37}$$

benötigt.

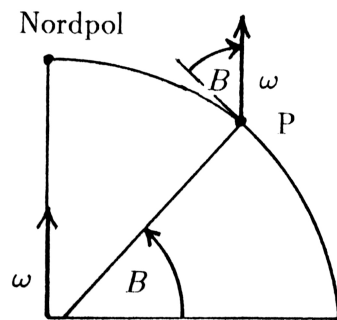
Die 'abrupten' Änderungen von

- $\hat{k}'$ an den Anfangs- und Endpunkten der Klothoiden des Längsschnitts (vgl. (5.35)) und
- v_T' an den Übergängen von $v_T = \text{variabel}$ zu $v_T = \text{const.}$ (vgl. (5.37))

ziehen gewisse Unstetigkeiten von k' (vgl. (5.34)) nach sich. Die Unzulänglichkeiten der Klothoiden lassen sich durch die alternative Verwendung der Übergangsbogen Nr. 2 bis 6 (Abbildung 5.1) vermeiden. Hierfür gilt die Beziehung (5.18), wenn die Teil- und Gesamtlängen $\bar{l}$ und $\bar{L}$ durch die Elemente des Längsschnitts $\Delta \bar{l}$ und $\hat{L}$ ersetzt werden. Die Umstellung von $v_T = \text{variabel}$ zu $v_T = \text{const.}$ ist erforderlich, damit v_T in Steigungsbereichen nicht unter $v_{\min}$ absinkt und in Gefällebereichen nicht über $v_{\max}$ ansteigt.

⁷ = Windung

5.6 CORIOLIS-Beschleunigung



B = Geographische Breite

ω = Winkelgeschwindigkeit der Erde

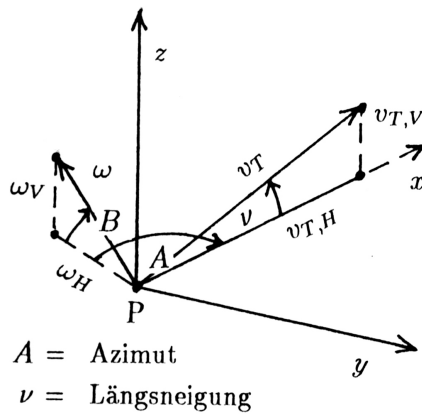
$$= \frac{2 \cdot \pi}{\text{Sterntag}} = \frac{2 \cdot \pi}{86164.09[\text{s}]} = 7.2921151467 \cdot 10^{-5} \cdot \text{s}^{-1}$$

(z. B. TORGE 2003, Seite 102)

v_T = Trassierungs-Geschwindigkeit

$\vec{b}_C$ = CORIOLIS-Beschleunigung = $2 \cdot [\vec{v}_T \times \vec{\omega}]$

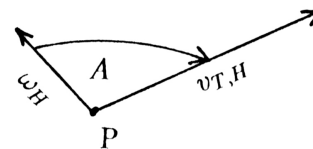
Auf die Grundrißprojektion von $\vec{v}_T$ bezogene Komponenten:



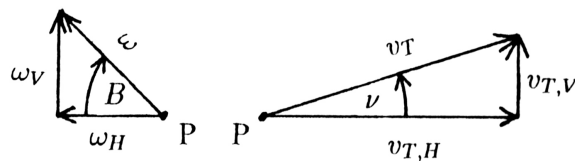
A = Azimut

ν = Längsneigung

Grundriß



Aufrisse



Rotation um die Längsneigung ν :

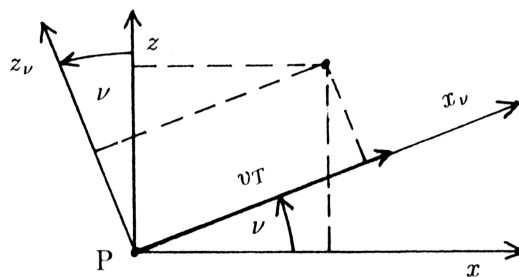


Abbildung 5.7: CORIOLIS-Beschleunigung

Infolge der Erdrotation ist die CORIOLIS-Beschleunigung (z. B. SOMMERFELD, FUES 1977, Seite 144)

$$\vec{b}_C = 2 \cdot [\vec{v}_T \times \vec{\omega}] \quad (5.38)$$

(vgl. Abbildung 5.7) wirksam.

Sie lässt sich in die auf $\vec{v}_T$ bezogenen horizontalen und senkrechten Anteile $b_{C,H}$ und $b_{C,S}$ in (vgl. Abbildung 5.7 und Anhang A.5)

$$\begin{aligned}\vec{b}_C &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \nu & \sin \nu \\ 0 & -\sin \nu & \cos \nu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_y & \vec{e}_x & \vec{e}_z \\ 0 & v_{T,H} & v_{T,V} \\ -\omega_H \cdot \sin A & \omega_H \cdot \cos A & \omega_V \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot v_T \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} \cos \nu \cdot \sin B - \sin \nu \cdot \cos B \cdot \cos A \\ 0 \\ \cos B \cdot \sin A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{C,H} \\ 0 \\ b_{C,S} \end{pmatrix} \quad (5.39)\end{aligned}$$

zerlegen und durch eine entsprechende Ergänzung des Ansatzes (5.25) (vgl. Abbildung 5.5, rechts)

$$\tan \alpha = \frac{k \cdot \cos^2 \nu \cdot v_T^2 - b_{C,H}}{g \cdot \cos \nu - \hat{k} \cdot v_T^2 - b_{C,S}} \quad (5.40)$$

bzw. der hieraus resultierenden ebenen Krümmung

$$k = \frac{(g \cdot \cos \nu - \hat{k} \cdot v_T^2 - b_{C,S}) \cdot \tan \alpha + b_{C,H}}{\cos^2 \nu \cdot v_T^2} \quad (5.41)$$

des Grundrisses der Raumkurve⁸ berücksichtigen.

Neben den Parametern der Trassierung v_T ⁹ und ν ¹⁰ sowie der Winkelgeschwindigkeit der Erde (vgl. Abbildung 5.7) werden zur Berechnung von $b_{C,H}$ und $b_{C,S}$ (vgl. (5.39)) die geographische Breite B und das Azimut

$$A = \varphi + c \quad (5.42)$$

bzw. die Meridiankonvergenz c , d. h. die Abweichung des Azimuts A vom geodätischen Richtungswinkel φ , benötigt.

Den deutschen Landesvermessungen liegen das BESSEL- bzw. GRS80-Ellipsoid mit den großen und kleinen Halbachsen (HELMERT 1880, Seite 38 bzw. MORITZ 1980)

$$a = 6377397.15500\text{m} \quad \text{und} \quad b = 6356078.96325\text{m} \quad \text{bzw.}$$

$$a = 6378137\text{m} \quad \text{und} \quad b = 6356752.31414\text{m} \quad (5.43)$$

zugrunde. Die GAUSS-KRÜGER- bzw. UTM-Koordinaten

- Rechtswert $R = y_{GK}$ bzw. $E = y_{UTM}$ und
- Hochwert $H = x_{GK}$ bzw. $N = x_{UTM}$

enthalten die Lotlängen

$$\begin{aligned}y &= y_{GK} - ([y_{GK} \cdot 10^{-6}] + 0.5) \cdot 10^6 \quad \text{bzw.} \\ y &= \frac{y_{UTM} - ([y_{UTM} \cdot 10^{-6}] + 0.5) \cdot 10^6}{0.9996}.\end{aligned} \quad (5.44)$$

Die geographische Breite des Fußpunktes B_f ergibt sich zu (SCHNÄDELBACH 1975)

$$\begin{aligned}B_f &= \sigma + \frac{3}{2} \cdot n \cdot \left(1 - \frac{9}{16} \cdot n^2\right) \cdot \sin 2\sigma + \frac{n^2}{16} \cdot \left(21 - \frac{55}{2} \cdot n^2\right) \cdot \sin 4\sigma + \frac{151}{96} \cdot n^3 \cdot \sin 6\sigma \\ \text{mit } n &= \frac{a-b}{a+b}, \quad \sigma = \frac{(1+n) \cdot x}{a \cdot \left(1 + \frac{n^2}{8}\right)^2} \quad \text{und} \quad x = x_{GK} \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{x_{UTM}}{0.9996}.\end{aligned} \quad (5.45)$$

⁸Analogon zu (5.26)

⁹= Geschwindigkeit

¹⁰= Längsneigung

Über die Hilfsgrößen (GROSSMANN 1964, Seiten 8, 12 und 16)¹¹

$$\begin{aligned} t_f &= \tan B_f, \\ \eta_f^2 &= \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cdot \cos^2 B_f \quad \text{und} \\ N_f &= \frac{a^2}{b \cdot \sqrt{1 + \eta_f^2}} \end{aligned} \quad (5.46)$$

folgen die ellipsoidische geographische Breite (HOFMANN–WELLENHOF, LICHTENEGGER, COLLINS 2001, Seite 288)

$$\begin{aligned} B &= B_f - \frac{t_f}{2 \cdot N_f^2} \cdot (1 + \eta_f^2) \cdot y^2 \\ &+ \frac{t_f}{24 \cdot N_f^4} \cdot (5 + 3 \cdot t_f^2 + 6 \cdot \eta_f^2 - 6 \cdot t_f^2 \cdot \eta_f^2 - 3 \cdot \eta_f^4 - 9 \cdot t_f^2 \cdot \eta_f^4) \cdot y^4 \\ &- \frac{t_f}{720 \cdot N_f^6} \cdot (61 + 90 \cdot t_f^2 + 45 \cdot t_f^4 + 107 \cdot \eta_f^2 - 162 \cdot t_f^2 \cdot \eta_f^2 - 45 \cdot t_f^4 \cdot \eta_f^2) \cdot y^6 \\ &+ \frac{t_f}{40320 \cdot N_f^8} \cdot (1385 + 3633 \cdot t_f^2 + 4095 \cdot t_f^4 + 1575 \cdot t_f^6) \cdot y^8 + \dots \end{aligned} \quad (5.47)$$

und die GAUSS'sche Meridiankonvergenz (KNEISSL 1959, Seite 1117)

$$\begin{aligned} c &= \frac{t_f}{N_f} \cdot y - \frac{t_f}{3 \cdot N_f^3} \cdot (1 + t_f^2 - \eta_f^2 - 2 \cdot \eta_f^4) \cdot y^3 \\ &+ \frac{t_f}{15 \cdot N_f^5} \cdot (2 + 5 \cdot t_f^2 + 3 \cdot t_f^4 + 2 \cdot \eta_f^2 + t_f^2 \cdot \eta_f^2) \cdot y^5 \\ &- \frac{t_f}{315 \cdot N_f^7} \cdot (17 + 77 \cdot t_f^2 + 105 \cdot t_f^4 + 45 \cdot t_f^6) \cdot y^7 + \dots \end{aligned} \quad (5.48)$$

Für nahe beieinander liegende Punkte genügen die Näherungen¹²

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dx} &= \frac{1}{M} \quad \text{und} \\ \frac{dc}{dy} &= \frac{\tan B}{N} \quad \text{bzw.} \\ \Delta B &= \frac{\Delta x}{M} \quad \text{und} \\ \Delta c &= \frac{\tan B}{N} \cdot \Delta y, \end{aligned} \quad (5.49)$$

welche die lokalen Halbmesser (GROSSMANN 1964, Seiten 8 und 12)

$$\begin{aligned} M &= \frac{a^2}{b \cdot \sqrt{(1 + \eta^2)^3}} \quad \text{und} \\ N &= \frac{a^2}{b \cdot \sqrt{1 + \eta^2}} \quad \text{mit} \\ \eta^2 &= \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cdot \cos^2 B \end{aligned} \quad (5.50)$$

enthalten. Die Bezeichnungen b und t wurden bereits vorher für die Beschleunigung und die Zeit verwandt. Verwechslungen sind jedoch nicht zu befürchten.

¹¹ N_f = Radius der Querkrümmung

¹²erste Glieder in (5.45) und (5.48)

Der Ersatz von (5.26) durch (5.41) zieht die Verwendung von (vgl. (5.7), (5.8) und Anhang A.6)

$$\begin{aligned}
 k' &= \frac{dk}{dl} = \frac{(g' \cdot \cos \nu + g \cdot \sin \nu \cdot \hat{k} - \hat{k}' \cdot v_T^2 - 2 \cdot \hat{k} \cdot v_T \cdot v_T' - b'_{C,S}) \cdot \tan \alpha + b'_{C,H}}{\cos^2 \nu \cdot v_T^2} \\
 &+ \frac{(g \cdot \cos \nu - \hat{k} \cdot v_T^2 - b_{C,S}) \cdot \alpha'}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \nu \cdot v_T^2} - 2 \cdot k \cdot \left(\hat{k} \cdot \tan \nu + \frac{v_T'}{v_T} \right)
 \end{aligned} \quad (5.51)$$

mit

- g' in Kapitel 5.7,
- (vgl. (5.39), (5.7) und (5.8))

$$b'_{C,S} = 2 \cdot \omega \cdot (\cos B \cdot \cos A \cdot v_T' - v_T \cdot \sin B \cdot \sin A \cdot B' + v_T \cdot \cos B \cdot \cos A \cdot A'), \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned}
 b'_{C,H} &= 2 \cdot \omega \cdot \left((\cos \nu \cdot \sin B - \sin \nu \cdot \cos B \cdot \cos A) \cdot v_T' \right. \\
 &+ v_T \cdot (\cos \nu \cdot \cos B + \sin \nu \cdot \sin B \cdot \cos A) \cdot B' \\
 &+ v_T \cdot (\sin \nu \cdot \sin B + \cos \nu \cdot \cos B \cdot \cos A) \cdot \hat{k} \\
 &\left. + v_T \cdot \sin \nu \cdot \cos B \cdot \sin A \cdot A' \right),
 \end{aligned} \quad (5.53)$$

- (vgl. (5.42), (5.49), (5.7) und (5.8))

$$B' = \frac{dB}{dl} = \frac{dB}{dx} \cdot \frac{dx}{dl} \cdot \frac{dl}{dl} = \frac{\cos \varphi \cdot \cos \nu}{M}, \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned}
 A' &= \frac{dA}{dl} = \frac{d(\varphi + c)}{dl} = \frac{d\varphi}{dl} \cdot \frac{dl}{dl} + \frac{dc}{dy} \cdot \frac{dy}{dl} \cdot \frac{dl}{dl} \\
 &= k \cdot \cos \nu + \frac{\tan B}{N} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \nu = \cos \nu \cdot \left(k + \frac{\tan B \cdot \sin \varphi}{N} \right) \quad \text{und}
 \end{aligned} \quad (5.55)$$

- (5.35) bis (5.37)

anstelle von (5.34) mit (5.35) bis (5.37) nach sich.

5.7 Schwerebeschleunigung

Die Erdbeschleunigung g (vgl. Abbildungen 4.1, 5.5 und 5.6) ist als Resultierende aus der Gravitationsbeschleunigung und der auf der Erdrotation beruhenden Zentrifugalbeschleunigung eine physikalische Messgröße der Erdmessung. Solange keine exakteren örtlichen Messwerte vorliegen, lässt sie sich lediglich näherungsweise, z. B. in Form der Normalschwere als Funktion der geographischen Breite B und der ellipsoidischen Höhe z des GRS80 (z. B. TORGE 2003, Seite 104)

$$\begin{aligned}
 g &= 9.780327 [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}] \cdot (1 + 0.0053024 \cdot \sin^2 B - 0.58 \cdot 10^{-5} \cdot \sin^2 2B) \\
 &- 0.30877 \cdot 10^{-5} \cdot (1 - 0.00139 \cdot \sin^2 B) \cdot z
 \end{aligned} \quad (5.56)$$

berücksichtigen.

Die Beziehung (5.56) enthält die nicht wirksamen Einflüsse der oberhalb der Trasse befindlichen Luftmassen, jedoch keine lokalen Geoidundulationen. Wegen dieser Unzulänglichkeiten ist für den Bereich eines Trassenelements neben dem Ansatz der von der geographischen Breite B und der Höhe z abhängigen Änderung der Normalschwere

$$\begin{aligned}
 g' &= \frac{dg}{dl} = \frac{\partial g}{\partial B} \cdot B' + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot z' \\
 &= 9.780327 \cdot (0.0106048 \cdot \sin B \cdot \cos B - 0.232 \cdot 10^{-4} \cdot \sin 2B \cdot \cos 2B) \cdot B' \\
 &- 0.30877 \cdot 10^{-5} \cdot (1 - 0.00139 \cdot \sin^2 B) \cdot z' \\
 &+ 0.86 \cdot 10^{-8} \cdot \sin B \cdot \cos B \cdot z \cdot B'
 \end{aligned} \quad (5.57)$$

(mit B' nach (5.54) und z' nach (5.7)) auch die Annahme einer konstanten Schwerebeschleunigung, d. h.

$$g' = 0, \quad (5.58)$$

vertretbar.

5.8 Ableitungen des Ortsvektors nach der Zeit

Ausgehend von den FRENET-Ableitungen der Tangenten-, Hauptnormalen- und Binormalen-Einheitsvektoren¹³ nach der räumlichen Länge $\bar{l}$ (z. B. STRUBECKER 1964, Seite 157)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_T}{d\bar{l}} &= \kappa \cdot \vec{e}_H \\ \frac{d\vec{e}_H}{d\bar{l}} &= -\kappa \cdot \vec{e}_T + \tau \cdot \vec{e}_B \\ \frac{d\vec{e}_B}{d\bar{l}} &= -\tau \cdot \vec{e}_H \end{aligned} \quad (5.59)$$

mit κ = Krümmung und τ = Torsion der Raumkurve, lassen sich für den Ortsvektor als Funktion der Zeit

$$\vec{o} = \vec{o}(t) \quad (5.60)$$

die Vektoren der *Trassierungs*-Geschwindigkeit (vgl. (5.2))

$$\vec{v}_T = \frac{d\vec{o}}{dt} = \frac{d\vec{o}}{d\bar{l}} \cdot \frac{d\bar{l}}{dt} = v_T \cdot \vec{e}_T, \quad (5.61)$$

der Beschleunigung

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \frac{d^2\vec{o}}{dt^2} = \frac{dv_T}{dt} \cdot \vec{e}_T + v_T \cdot \frac{d\vec{e}_T}{d\bar{l}} \cdot \frac{d\bar{l}}{dt} \\ &= \dot{v}_T \cdot \vec{e}_T + v_T^2 \cdot \kappa \cdot \vec{e}_H \end{aligned} \quad (5.62)$$

und der Änderung der Beschleunigung

$$\begin{aligned} \vec{\dot{b}} &= \frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d^3\vec{o}}{dt^3} = \ddot{v}_T \cdot \vec{e}_T + \dot{v}_T \cdot \frac{d\vec{e}_T}{d\bar{l}} \cdot \frac{d\bar{l}}{dt} + 2 \cdot v_T \cdot \dot{v}_T \cdot \kappa \cdot \vec{e}_H \\ &+ v_T^2 \cdot \dot{\kappa} \cdot \vec{e}_H + v_T^2 \cdot \kappa \cdot \frac{d\vec{e}_H}{d\bar{l}} \cdot \frac{d\bar{l}}{dt} \\ &= \ddot{v}_T \cdot \vec{e}_T + \dot{v}_T \cdot v_T \cdot \kappa \cdot \vec{e}_H + 2 \cdot v_T \cdot \dot{v}_T \cdot \kappa \cdot \vec{e}_H + v_T^2 \cdot \dot{\kappa} \cdot \vec{e}_H \\ &+ v_T^2 \cdot \kappa \cdot (-\kappa \cdot \vec{e}_T + \tau \cdot \vec{e}_B) \cdot v_T \\ &= (\ddot{v}_T - v_T^3 \kappa^2) \cdot \vec{e}_T + (3 \cdot v_T \cdot \dot{v}_T \cdot \kappa + v_T^2 \cdot \dot{\kappa}) \cdot \vec{e}_H + v_T^3 \cdot \kappa \cdot \tau \cdot \vec{e}_B \end{aligned} \quad (5.63)$$

herleiten.

MEGYERI 1981 hat vorgeschlagen, die Länge des Übergangsbogens jeweils so zu bemessen, dass der Absolutbetrag der dritten Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit (vgl. (5.63))

$$|\dot{\vec{b}}| = \sqrt{(\ddot{v}_T - v_T^3 \kappa^2)^2 + (3 \cdot v_T \cdot \dot{v}_T \cdot \kappa + v_T^2 \cdot \dot{\kappa})^2 + (v_T^3 \cdot \kappa \cdot \tau)^2} \quad (5.64)$$

in keinem Punkt einen vorgegebenen Grenzwert von z. B. $|\dot{\vec{b}}| = 0.2$ oder 0.3 m/s^3 überschreitet. Für eine derartige Anwendung werden neben der Geschwindigkeit v_T , der Krümmung κ (vgl. (5.11)) und der Torsion τ (vgl. (5.33)) die Ableitungen (vgl. (5.28))

$$\dot{v}_T = \frac{dv_T}{dt} = \frac{dv_T}{d\bar{l}} \cdot \frac{d\bar{l}}{dt} = v'_T \cdot v_T = -g \cdot \sin \nu, \quad (5.65)$$

¹³ $\vec{e}_T$, $\vec{e}_H$ und $\vec{e}_B$

(vgl. (5.7) und (5.8))

$$\ddot{v}_T = \begin{cases} \frac{d\dot{v}_T}{dt} = \frac{d\dot{v}_T}{d\bar{l}} \cdot \frac{d\bar{l}}{dt} = 0 & \text{für } \dot{v}_T = 0 \\ (g \cdot \cos \nu \cdot \hat{k} - g' \cdot \sin \nu) \cdot v_T & \text{für } \dot{v}_T \neq 0 \end{cases} \quad (5.66)$$

mit g' nach (5.57) bzw. (5.58) sowie (vgl. (5.11), (5.7) und (5.8))

$$\begin{aligned} \dot{\kappa} &= \frac{d\kappa}{dt} = \frac{d\kappa}{d\bar{l}} \cdot \frac{d\bar{l}}{dt} = \frac{d\sqrt{k^2 \cdot \cos^4 \nu + \hat{k}^2}}{d\bar{l}} \cdot \frac{d\bar{l}}{dt} \\ &= \frac{2 \cdot k \cdot k' \cdot \cos^4 \nu + k^2 \cdot 4 \cdot \cos^3 \nu \cdot (-\sin \nu) \cdot \nu' + 2 \cdot \hat{k} \cdot \hat{k}'}{2 \cdot \kappa} \cdot \frac{d\bar{l}}{dt} \\ &= \frac{k \cdot k' \cdot \cos^4 \nu + 2 \cdot k^2 \cdot \sin \nu \cdot \cos^3 \nu \cdot \hat{k} + \hat{k} \cdot \hat{k}'}{\kappa} \cdot v_T \end{aligned} \quad (5.67)$$

mit k' nach (5.34) bzw. (5.51) und $\hat{k}'$ nach (5.35) benötigt.

5.9 Lateralbeschleunigung

Wird ein Gleisbogen mit einer von der *Trassierungs*-Geschwindigkeit v_T abweichenden aktuellen Geschwindigkeit v_a befahren, ist die nach außen gerichtete Lateralbeschleunigung (vgl. Abbildung 5.5, rechts und (5.21))

$$b_L = b_{L1} - b_{L2} = k \cdot \cos^2 \nu \cdot v_a^2 \cdot \cos \alpha - (g \cdot \cos \nu - \hat{k} \cdot v_a^2) \cdot \sin \alpha \quad (5.68)$$

wirksam. In diesem Fall wäre auch in (5.61) bis (5.67) generell v_T durch v_a zu ersetzen.

Die zusätzliche Berücksichtigung der CORIOLIS-Beschleunigung erfordert die Ergänzung von (5.68) mit den Gliedern $b_{C,H}$ und $b_{C,S}$ nach (5.39) mit v_a anstelle von v_T (vgl. Abbildung 5.5, rechts und (5.40))

$$b_L = (k \cdot \cos^2 \nu \cdot v_a^2 - b_{C,H}) \cdot \cos \alpha - (g \cdot \cos \nu - \hat{k} \cdot v_a^2 - b_{C,S}) \cdot \sin \alpha. \quad (5.69)$$

6 Berechnungsverfahren

6.1 Numerische Integration

Im Jahre 1955 hat ROMBERG ein numerisches Integrationsverfahren, welches auf einer Extrapolation von Trapeznäherungen mit fortgesetzt halbierten Schrittweiten basiert, entwickelt (z. B. RUTISHAUSER 1976, Seite 131).

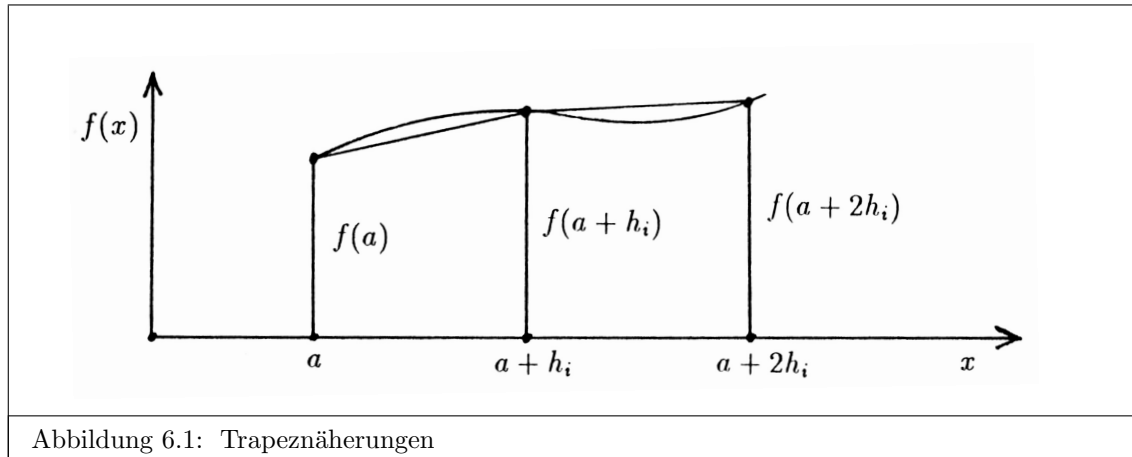


Abbildung 6.1: Trapeznäherungen

Die Resultate der Trapezregel (vgl. Abbildung 6.1¹)

$$T_0^{(i)} = \frac{h_i}{2} \cdot \sum_{k=0,1,2,\dots} (f(a + k \cdot h_i) + f(a + (k+1) \cdot h_i)) \quad \text{mit} \quad h_i = \frac{h_0}{2^i} \quad (6.1)$$

lassen sich mit den Elementen der Folgespalten

$$T_k^{(i)} = T_{k-1}^{(i+1)} + \frac{T_{k-1}^{(i+1)} - T_{k-1}^{(i)}}{4^k - 1} \quad (6.2)$$

zum ROMBERG–Dreiecksschema

$$\begin{array}{cccc} T_0^{(0)} & & & \\ T_0^{(1)} & T_1^{(0)} & & \\ T_0^{(2)} & T_1^{(1)} & T_2^{(0)} & \\ T_0^{(3)} & T_1^{(2)} & T_2^{(1)} & T_3^{(0)} \\ \dots & & & \end{array} \quad (6.3)$$

vervollständigen, welches in seiner ersten Folgespalte $T_1^{(0)}, T_1^{(1)}, T_1^{(2)} \dots$ die Resultate der SIMPSON–Regel enthält (z. B. BAUER, RUTISHAUSER, STIEFEL 1963).

Beim ROMBERG–Verfahren wird die Anzahl der zu berechnenden Funktionswerte infolge der Halbierung der Schrittweite mit jedem Iterationsschritt verdoppelt. Es ist deshalb mit

- einem verbesserten Algorithmus zur Extrapolation² (STOER 1961),
- einer zweckmäßigeren Schrittweitensteuerung (BULIRSCH 1964),
- der modifizierten Mittelwertregel (GRAGG 1965) und
- einer Erweiterung auf zwei konvergente Folgen, die den exakten Wert asymptotisch von entgegengesetzten Seiten her eingrenzen und eine zuverlässige Fehlerabschätzung ermöglichen (BULIRSCH, STOER 1966(B)),

zum Extrapolationsverfahren von BULIRSCH–GRAGG–STOER weiterentwickelt worden.

¹ h_0 = Anfangsschrittweite

²anstelle von (6.2)

Ein Vergleich zwischen dem *Original*-ROMBERG-Verfahren und dem Extrapolationsverfahren von BULIRSCH-GRAGG-STOER (BULIRSCH,STOER 1967) ergab für

- 40 Integrale $\int_a^b x \cdot \cos 3x \cdot dx$ mit $a = 0.00$ und $b = 0.05, 0.10, 0.15 \dots 2.00$
eine klare Überlegenheit des ROMBERG-Verfahrens³ und
- 40 Integrale $\int_a^b e^{x^2} \cdot \sin e^{x^2} \cdot dx$ mit $a = 0.00$ und $b = 0.05, 0.10, 0.15 \dots 2.00$
eine starke Überlegenheit des Extrapolationsverfahrens von BULIRSCH-GRAGG-STOER⁴.

Das *Original*-ROMBERG-Verfahren ist somit nach wie vor zu empfehlen, wenn

- der Integrand einen relativ einfachen Aufbau hat,
- das Integrationsintervall klein ist oder
- kein sehr genaues Resultat benötigt wird.

In allen anderen Fällen ist das BULIRSCH-GRAGG-STOER-Verfahren vorzuziehen.

Numerische Integrationsverfahren sind grundsätzlich auch zur Lösung von Differentialgleichungen geeignet (z. B. STIEFEL 1961, Seite 147).

FEHLBERG hat Prozeduren entwickelt, die auf geeigneten Kombinationen zwischen TAYLOR-Entwicklungen und Verfahren vom RUNGE-KUTTA-Typ basieren. Hierbei wird das klassische RUNGE-KUTTA-Verfahren mit zusätzlichen Ableitungen verfeinert. Man kommt jedoch noch mit erheblich weniger Ableitungen aus, als bei einer direkten Anwendung der reinen TAYLOR-Entwicklung zu berücksichtigen wären (z. B. GRIGORIEFF 1972, Seite 31).

Das Extrapolationsverfahren von BULIRSCH-GRAGG-STOER ist ebenso wie das RUNGE-KUTTA-FEHLBERG-Verfahren auch zur Lösung eines Anfangswertproblems für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen geeignet (z. B. STOER,BULIRSCH 1973, Seite 149).

Das Autorenteam DIEKHOFF,LORY,OBERLE,PESCH,RENTROP,SEYDEL 1975 hat im Rahmen einer umfangreichen Testserie u. a. die Verfahren von

- RUNGE-KUTTA-FEHLBERG (4. und 7. Ordnung) und
- BULIRSCH-GRAGG-STOER

hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit miteinander verglichen. Die Ergebniszusammenfassung weist gewisse Ähnlichkeiten zur vorherigen Untersuchung von BULIRSCH,STOER 1967 auf. Für

- einfache Probleme ist das RUNGE-KUTTA-FEHLBERG-Verfahren 4. Ordnung,
- weniger schwierige Probleme das RUNGE-KUTTA-FEHLBERG-Verfahren 7. Ordnung und
- schwierige Probleme das BULIRSCH-GRAGG-STOER-Verfahren

zu empfehlen. Mit zunehmender Kompliziertheit wächst die Überlegenheit des zuletzt genannten Verfahrens. Das BULIRSCH-GRAGG-STOER-Verfahren ist universell einsetzbar. Lediglich bei einfacheren Problemen lässt sich mit dem RUNGE-KUTTA-FEHLBERG-Verfahren Rechenzeit einsparen.

Dem Computerprogramm (vgl. Kapitel 7) liegen

- das Extrapolationsverfahren von BULIRSCH-GRAGG-STOER und
- die von BULIRSCH,STOER 1966(A) angegebene ALGOL-Prozedur

zugrunde.

³relative Genauigkeit 10^{-9} (bzw. 10^{-4}): ca 2fach (bzw. 4fach) schneller

⁴relative Genauigkeit 10^{-9} (bzw. 10^{-4}): ca 2fach schneller (bzw. ungefähr zeitgleich)

Zur Berechnung eines gesuchten Lösungsvektors

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

werden als Eingangsparameter jeweils die Anfangswerte⁵

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

sowie die Ableitungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

benötigt.

6.2 Trassenelement

Zur Berechnung der Grundrissparameter (vgl. Abbildung 4.4 mit (4.8) bis (4.11))

- Richtungsdivergenz φ sowie
- GAUSS–KRÜGER– bzw. UTM–Koordinaten $y_{GK|UTM}$ und $x_{GK|UTM}$ ⁶,

Längsschnittdaten (vgl. Abbildung 5.2 und (5.7))

- Höhe z ,
- Krümmung $\hat{k}$ sowie
- Längsneigung ν

und Hilfsgrößen

- räumliche Länge $\bar{l}$,
- Geschwindigkeit v_T (vgl. Kapitel 5.4),
- geographische Breite B (vgl. Kapitel 5.6),
- GAUSS'sche Meridiankonvergenz c (vgl. Kapitel 5.6) und
- Erdbeschleunigung g (vgl. Kapitel 5.7)

beliebiger Punkte eines Trassenelements als Funktion der auf den Anfangspunkt bezogenen horizontalen Länge l lässt sich ein Anfangswertproblem (vgl. (6.4) bis (6.6)) ansetzen.

⁵z. B. an der Stelle 0

⁶anstelle von y und x

Der Lösungsvektor⁷

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ y_{GK|UTM} \\ x_{GK|UTM} \\ z \\ \hat{k} \\ \nu \\ \bar{l} \\ v_T \\ B \\ c \\ g \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

ist jeweils über die Vektoren der Anfangswerte an der Stelle $l = l_0$

$$\mathbf{x}(l_0) = \begin{pmatrix} x_1(l_0) \\ x_2(l_0) \\ x_3(l_0) \\ x_4(l_0) \\ x_5(l_0) \\ x_6(l_0) \\ x_7(l_0) \\ x_8(l_0) \\ x_9(l_0) \\ x_{10}(l_0) \\ x_{11}(l_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(l_0) \\ y_{GK|UTM}(l_0) \\ x_{GK|UTM}(l_0) \\ z(l_0) \\ \hat{k}(l_0) \\ \nu(l_0) \\ \bar{l}(l_0) \\ v_T(l_0) \\ B(l_0) \\ c(l_0) \\ g(l_0) \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

und Ableitungen (vgl. Abbildung 5.2, (5.7), (5.54) und (5.55))

$$\dot{\mathbf{x}}(l) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\varphi}{dl} \\ \frac{dy_{GK|UTM}}{dl} \\ \frac{dx_{GK|UTM}}{dl} \\ \frac{dz}{dl} \\ \frac{d\hat{k}}{dl} \\ \frac{d\nu}{dl} \\ \frac{dv_T}{dl} \\ \frac{dB}{dl} \\ \frac{dc}{dl} \\ \frac{dg}{dl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ \sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \tan \nu \\ \frac{d\hat{k}}{dl} \cdot \frac{d\bar{l}}{dl} = \hat{k}' \cdot \dot{x}_7 \\ \frac{d\nu}{dl} \cdot \frac{d\bar{l}}{dl} = -\hat{k} \cdot \dot{x}_7 \\ \frac{1}{\cos \nu} \\ \frac{dv_T}{dl} \cdot \frac{d\bar{l}}{dl} = v_T' \cdot \dot{x}_7 \\ \frac{\cos \varphi}{M} \\ \frac{\tan B \cdot \sin \varphi}{N} \\ \frac{dg}{dl} \cdot \frac{d\bar{l}}{dl} = g' \cdot \dot{x}_7 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

mit

- k nach
 - (5.26) bei Vernachlässigung der CORIOLIS-Beschleunigung bzw.
 - (5.41) mit Berücksichtigung der CORIOLIS-Beschleunigung

unter Verwendung von (5.1),

- $\hat{k}'$ nach (5.35),

⁷Die zur Ermittlung der CORIOLIS-Beschleunigung benötigte geographische Breite B und Meridiankonvergenz c sind als variable Größen angesetzt worden. Ihre Änderungsbeträge sind zwar innerhalb eines Übergangsbogens generell zu vernachlässigen; der Ansatz soll jedoch prinzipiell auch für extrem lange, gekrümmte Trassenelemente zwischen den Übergangsbogen geeignet sein.

- (vgl. (5.28) und (5.37))

$$\begin{array}{llll}
 v'_T = \frac{-g \cdot \sin \nu}{v_T} & \text{für} & v_{\min} < v_T < v_{\max} & \\
 & \text{bzw.} & v_T = v_{\min} & \text{und} \quad \nu < 0 \\
 & \text{bzw.} & v_T = v_{\max} & \text{und} \quad \nu > 0 \\
 v'_T = 0 & \text{für} & v_T = \text{const.} & \\
 & \text{bzw.} & v_T = v_{\min} & \text{und} \quad \nu \geq 0 \\
 & \text{bzw.} & v_T = v_{\max} & \text{und} \quad \nu \leq 0,
 \end{array} \tag{6.10}$$

- M und N nach (5.50) und
- g' nach (5.57) bzw. (5.58)

bestimmbar.

6.3 Feintrassierung

6.3.1 Ebenes Verfahren

Ebene Übergangsbogen verbinden

- eine Gerade mit dem nachfolgenden Kreisbogen bzw.
- zwei benachbarte Kreisbogen.

Ihre Geometrie ist vollständig bestimmt (vgl. Abbildung 4.4 mit (4.8) bis (4.11)), sobald nach der Auswahl einer bestimmten Grundform (vgl. Abbildung 4.5) über die Ausgangsparameter

- Anfangs- und Endpunktradien R_A und R_E bzw. Krümmungen $K_A = \frac{1}{R_A}$ und $K_E = \frac{1}{R_E}$ sowie
- Gesamtlänge L

verfügt wurde. Zur Berechnung der auf die Anfangspunkte bezogenen Endpunkte der einzelnen Übergangsbogen werden lediglich die ersten drei Elemente in (6.7) bis (6.9) mit den lokalen Koordinaten y und x anstelle der GAUSS-KRÜGER- bzw. UTM-Koordinaten $y_{GK|UTM}$ und $x_{GK|UTM}$ benötigt.

Der Lösungsvektor

$$\mathbf{x}(l) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ y \\ x \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

lässt sich über die Anfangswerte und Ableitungen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(l_0) &= \begin{pmatrix} x_1(l_0) \\ x_2(l_0) \\ x_3(l_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(l_0) \\ y(l_0) \\ x(l_0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \\
 \dot{\mathbf{x}}(l) &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

mit k nach (4.15) bzw. (4.30) mit (4.28) und Abbildung 4.5, links ermitteln. Für eine Gerade bzw. einen Kreisbogen mit dem Radius R genügen die elementaren Beziehungen (Abbildung 6.2)

$$\begin{aligned}
 \varphi &= y = 0 \quad \text{und} \quad x = \Delta l \quad \text{bzw.} \\
 \varphi &= \frac{\Delta l}{R}, \quad y = R \cdot (1 - \cos \varphi) \quad \text{und} \quad x = R \cdot \sin \varphi.
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

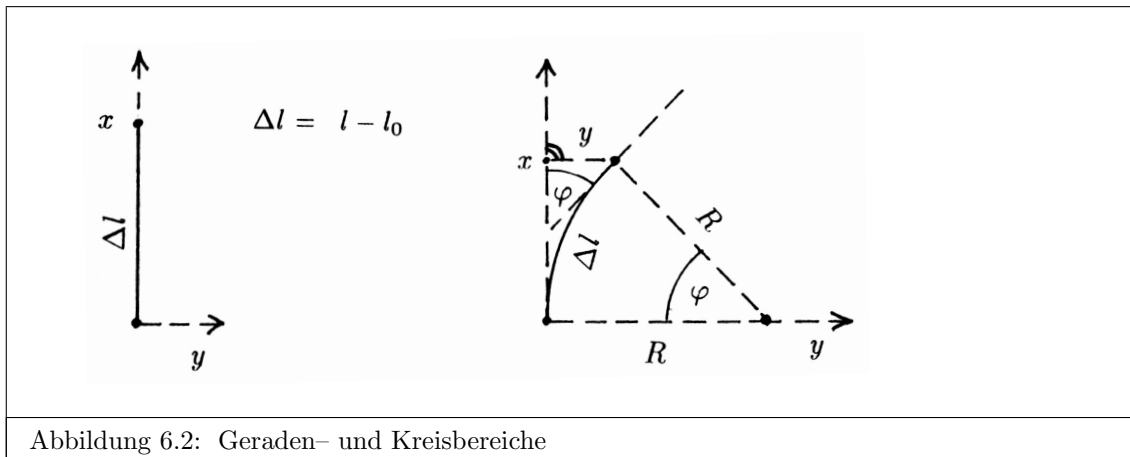


Abbildung 6.2: Geraden- und Kreisbereiche

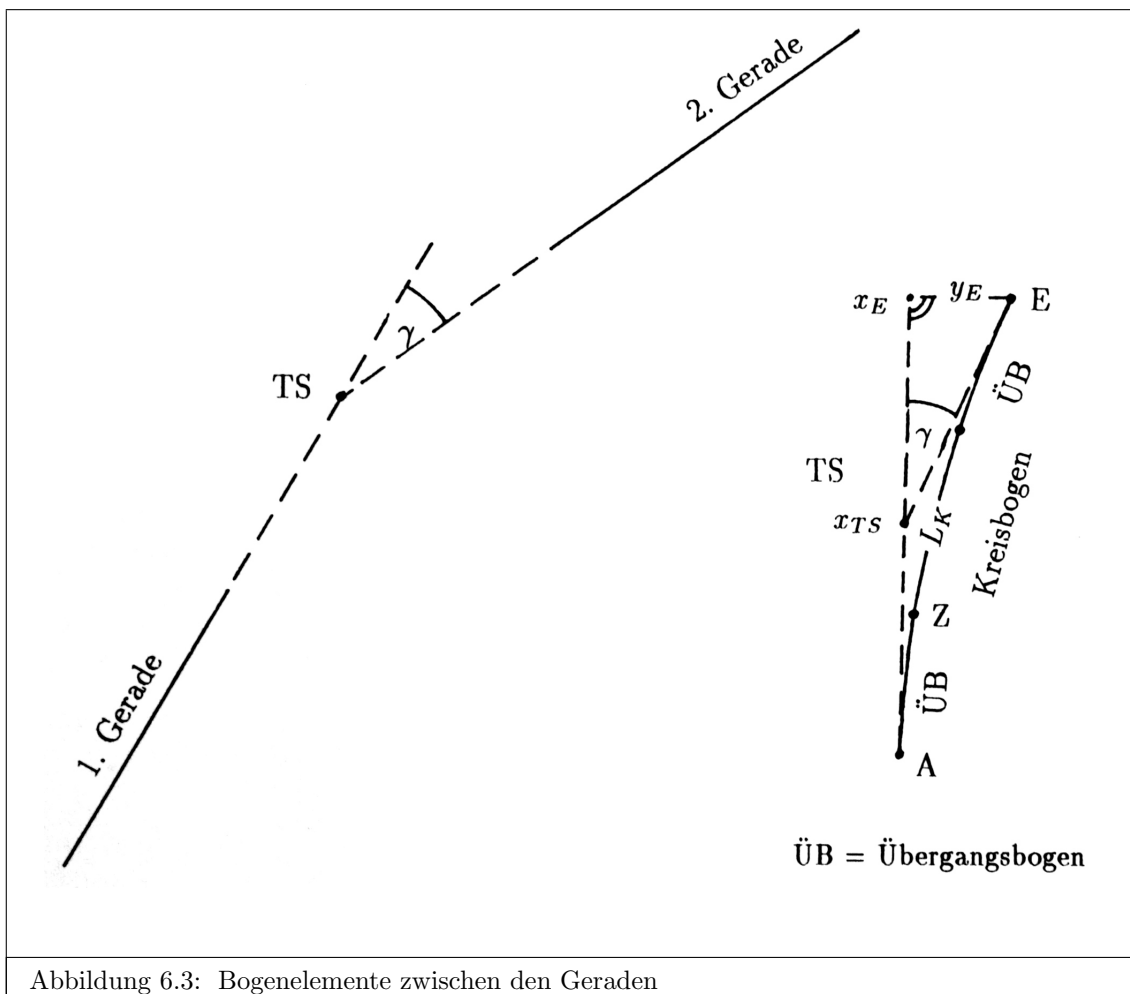


Abbildung 6.3: Bogenelemente zwischen den Geraden

Die absolute Orientierung innerhalb einer Trassierungslinie erfolgt in aller Regel nach der Digitalisierung der Geraden. Die Bogenelemente zwischen zwei aufeinander folgenden Geraden (vgl. Abbildung 6.3) lassen sich jeweils nach der Ermittlung der Richtungsdivergenzen, welche die einzelnen Elemente überbrücken⁸, in einem lokalen Koordinatensystem rechnerisch dergestalt miteinander verbinden, dass der Endpunkt E auf den Anfangspunkt A bezogen ist (Abbildung 6.3, rechts). Es sind auch mehrere Kreisbogen mit weiteren Übergangsbogen zugelassen, wenn für alle zusätzlichen Trassenelemente graphisch ermittelte Längen sowie Anfangs- und Endpunktradien als definitiv anzusehen sind. Die jeweilige Elementenfolge zwischen A und E (Abbildung 6.3, rechts) lässt sich über eine Koinzidenz des Tangentenschnitts TS und des Winkels γ in die eigentliche Trasse (Abbildung 6.3, links) einfügen.

⁸Übergangsbogen nach (4.10) mit (4.11) und Restbetrag für den Kreisbogen

Der Längsschnitt (Abbildung 6.4, oben) wird erst hinterher festgelegt. Er bezieht sich auf die zuvor ermittelte ebene Trassierungslinie (Abbildung 6.4, unten). Die Fixierung der Bogenelemente⁹ zwischen den Geraden im Längsschnitt erfolgt in Analogie zur ebenen Berechnung des Grundrisses.

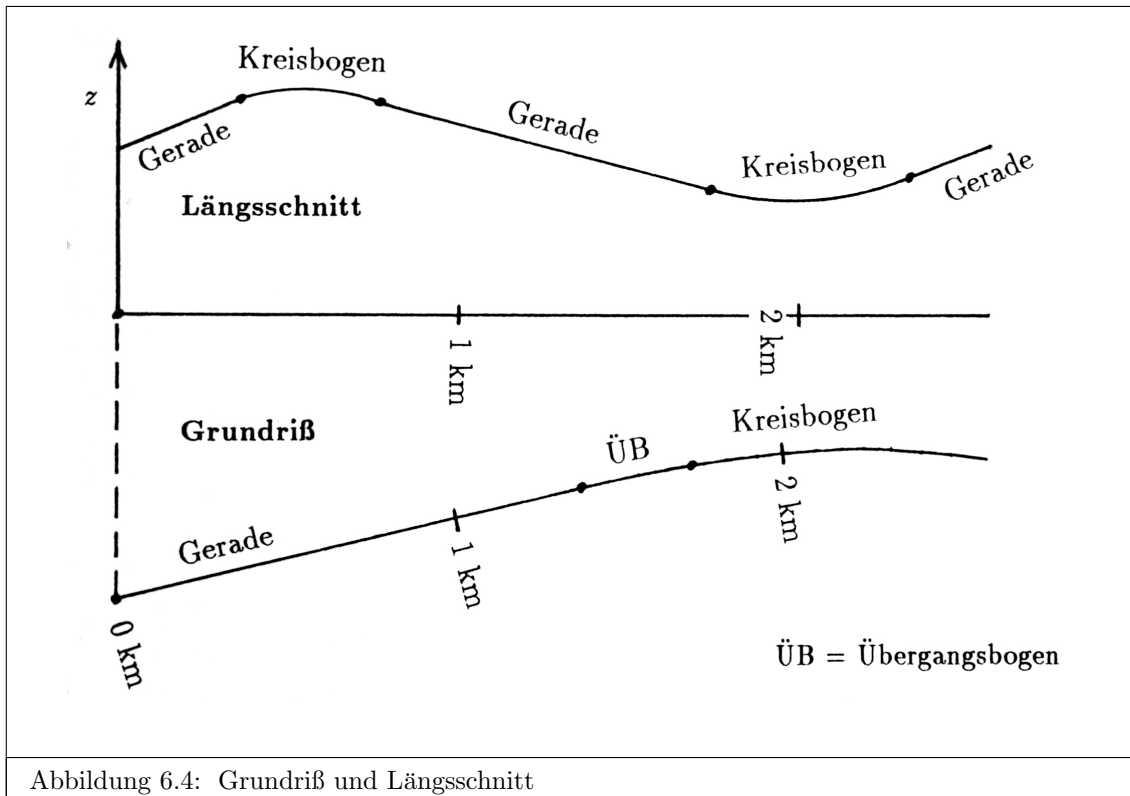


Abbildung 6.4: Grundriß und Längsschnitt

6.3.2 Räumliches Verfahren

6.3.2.1 Fixierung der Trassenelemente

6.3.2.1.1 Längsschnitt

Der Grundriß eines räumlichen Übergangsbogens lässt sich grundsätzlich nicht mehr unabhängig vom Längsschnitt ermitteln. Zur Berechnung der jeweiligen Krümmung des Grundrisses nach (5.26) bzw. (5.41) mit (5.1) werden bereits die

- räumliche Gesamtlänge des Übergangsbogens $\bar{L}$ (vgl. Abbildung 5.1),
- Längsschnittdaten ν und $\hat{k}$ (vgl. Abbildung 5.2 und (5.7)) sowie
- *Trassierungs*-Geschwindigkeit v_T (vgl. Kapitel 5.4)

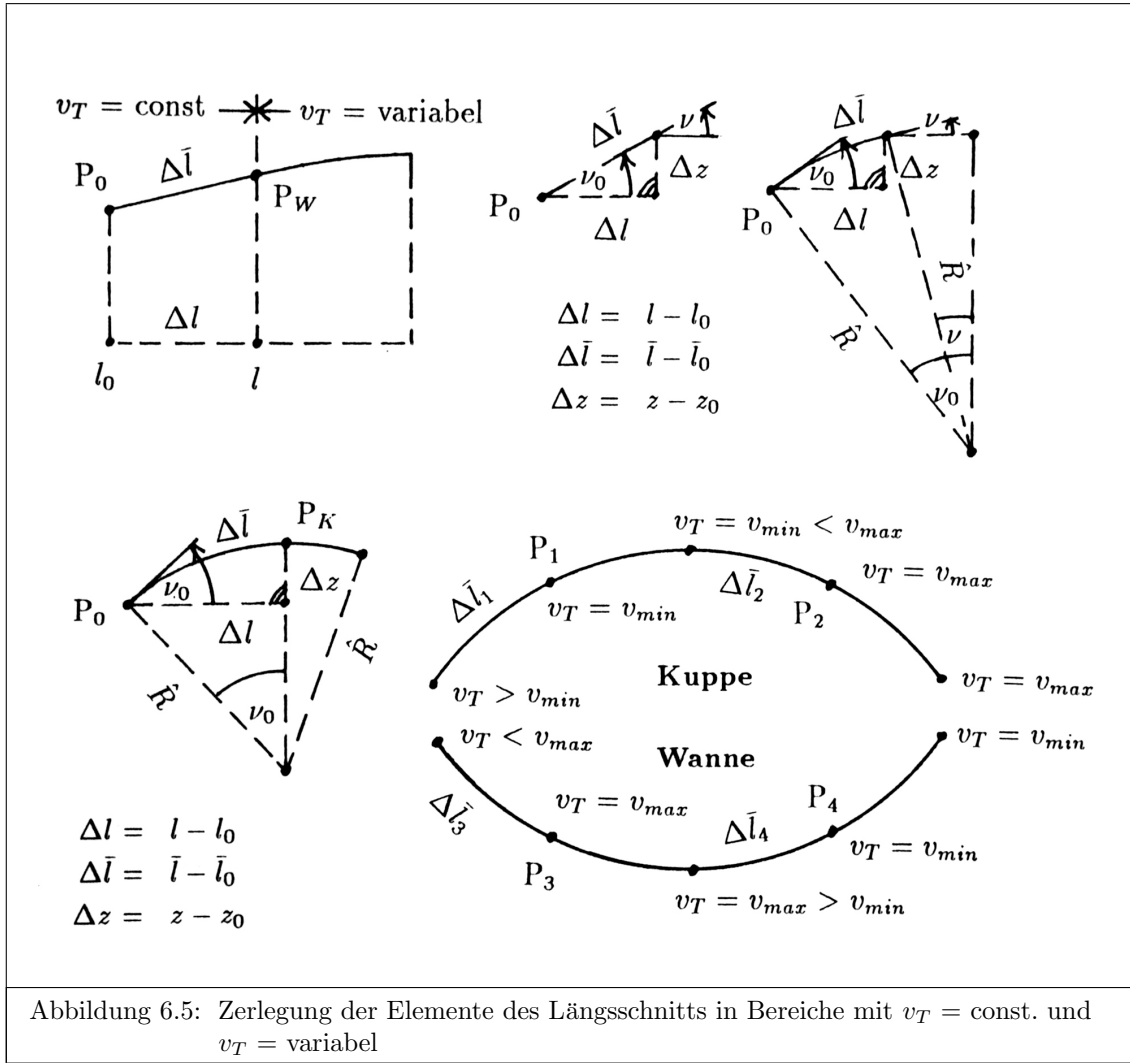
benötigt. Deshalb ist zuerst der Längsschnitt zu bestimmen, obwohl die Grundrisstrasse, auf die er sich bezieht, anfänglich nur ungefähr¹⁰ bekannt ist. Hierfür lässt sich das gleiche Verfahren wie bei der ebenen Feintrassierung (vgl. Kapitel 6.3.1) verwenden.

Die Längsschnittdaten eines über die horizontale Station l vorgegebenen Wechelpunktes P_W (Abbildung 6.5, links oben) zwischen den Bereichen mit konstanter und variabler Geschwindigkeit v_T sind innerhalb eines Übergangsbogens dem Lösungsvektor

$$\mathbf{x}(l) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{l} \\ \nu \\ z \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

⁹Kreisbogen und ggf. auch Übergangsbogen

¹⁰z. B. in Form eines graphischen Entwurfs



zu entnehmen, welcher über die Vektoren der Anfangswerte und Ableitungen (vgl. Abbildung 5.2, (5.7) und (6.9))

$$\mathbf{x}(l_0) = \begin{pmatrix} x_1(l_0) \\ x_2(l_0) \\ x_3(l_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{l}(l_0) \\ \nu(l_0) \\ z(l_0) \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(l) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\bar{l}}{dl} = \frac{1}{\cos \nu} \\ \frac{d\nu}{dl} = -\frac{k}{\cos \nu} \\ \frac{dz}{dl} = \tan \nu \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

mit $\hat{k}$ nach (5.18) bestimmbar ist (vgl. (6.4) bis (6.6)). In den Geraden- bzw. Kreisbereichen genügen dagegen die elementaren Beziehungen (vgl. Abbildung 6.5, rechts oben)

$$\begin{aligned} \bar{l} &= \bar{l}_0 + \frac{\Delta l}{\cos \nu_0}, \quad \nu = \nu_0 \quad \text{und} \\ z &= z_0 + \Delta l \cdot \tan \nu_0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \nu &= \arcsin\left(\frac{\hat{R} \cdot \sin \nu_0 - \Delta l}{\hat{R}}\right), \\ \bar{l} &= \bar{l}_0 + \hat{R} \cdot (\nu_0 - \nu) \quad \text{und} \\ z &= z_0 + \hat{R} \cdot (\cos \nu - \cos \nu_0). \end{aligned} \quad (6.17)$$

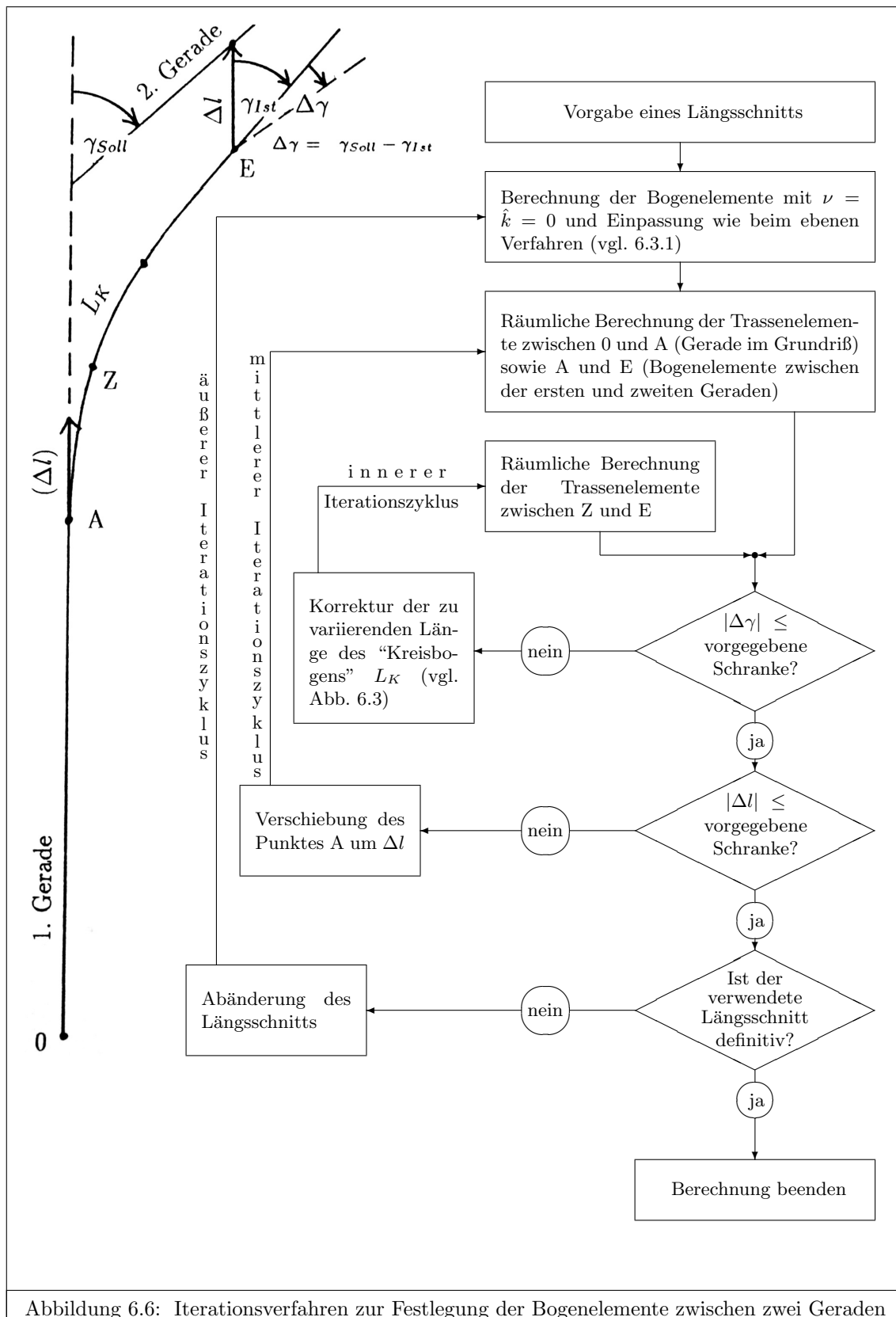


Abbildung 6.6: Iterationsverfahren zur Festlegung der Bogenelemente zwischen zwei Geraden

Wird vor der höchsten (bzw. tiefsten) Stelle einer Kuppe (bzw. Wanne) (vgl. Abbildung 6.5, rechts unten) die Intervallgrenze $v_T = v_{min}$ (bzw. $v_T = v_{max}$) erreicht, beginnt im Kulminationspunkt die erneute Zunahme (bzw. Abnahme) der Geschwindigkeit v_T . Im Kreisbereich ergeben sich die Längsschnittdaten des Maximums P_K (vgl. Abbildung 6.5, links unten) zu

$$\begin{aligned}\nu &= 0, \\ \bar{l} &= \bar{l}_0 + \hat{R} \cdot \nu_0, \\ l &= l_0 + \hat{R} \cdot \sin \nu_0 \quad \text{und} \\ z &= z_0 + (1 - \cos \nu_0) \cdot \hat{R}.\end{aligned}\tag{6.18}$$

Innerhalb eines Übergangsbogens führt das Gleichungssystem (vgl. (6.4) bis (6.6)) mit dem Lösungsvektor

$$\mathbf{x}(\nu = 0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{l} \\ l \\ z \end{pmatrix}\tag{6.19}$$

und den Vektoren der Anfangswerte und Ableitungen (vgl. Abbildung 5.2 und (5.7))

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(\nu_0) &= \begin{pmatrix} x_1(\nu_0) \\ x_2(\nu_0) \\ x_3(\nu_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{l}(\nu_0) \\ l(\nu_0) \\ z(\nu_0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ \dot{\mathbf{x}}(\nu) &= \begin{pmatrix} \frac{d\bar{l}}{d\nu} = -\frac{1}{\hat{k}} = -\hat{r} \\ \frac{dl}{d\nu} = -\frac{\cos \nu}{\hat{k}} \\ \frac{dz}{d\nu} = -\frac{\sin \nu}{\hat{k}} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{6.20}$$

mit $\hat{k}$ nach (5.18) zum Ziel.

6.3.2.1.2 Grundriss

Nach der provisorischen Festlegung ebener Trassenelemente zwischen der ersten und zweiten Geraden¹¹ werden die jeweiligen Lösungsvektoren (6.7) der Endpunkte der Trassenelemente (vgl. Abbildung 6.6) zwischen

- 0 und A¹² sowie
- A und E¹³

über die Vektoren (6.8) und (6.9) mit dem Extrapolationsverfahren von BULIRSCH–GRAGG–STOER (vgl. (6.4) bis (6.6)) berechnet.

Obwohl die räumliche Länge der Trassenelemente zur Lösungsmenge gehört, wird bereits bei der anfänglichen Anwendung von (5.1) für k nach (5.26) bzw. (5.41) in (6.9) die räumliche Gesamtlänge der Übergangsbogen¹⁴ benötigt. Sie ergibt sich aus den korrespondierenden Elementenlängen im Längsschnitt, die erforderlichenfalls zu unterteilen sind. Innerhalb der *Längsschnitt*-Übergangsbogen ist die räumliche Teillänge $\bar{l}$ dem Lösungsvektor (vgl. (6.4) bis (6.6))

$$\mathbf{x}(l) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{k} \\ \nu \\ \bar{l} \end{pmatrix}\tag{6.21}$$

¹¹Berechnung des Grundrisses nach Kapitel 6.3.1 und Abbildung 6.3 ohne Berücksichtigung des Längsschnitts

¹²Gerade im Grundriss

¹³Bogenelemente zwischen der ersten und zweiten Geraden

¹⁴des Grundrisses

der Anfangswerte und Ableitungen (vgl. Abbildung 5.2 und (5.7))

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(l_0) &= \begin{pmatrix} x_1(l_0) \\ x_2(l_0) \\ x_3(l_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{k}(l_0) \\ \nu(l_0) \\ \bar{l}(l_0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ \dot{\mathbf{x}}(l) &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\hat{k}}{dl} = \frac{d\hat{k}}{dl} \cdot \frac{dl}{dl} = \hat{k}' \cdot \dot{x}_3 \\ \frac{d\nu}{dl} = \frac{d\nu}{dl} \cdot \frac{dl}{dl} = -\hat{k} \cdot \dot{x}_3 \\ \frac{d\bar{l}}{dl} = \frac{1}{\cos \nu} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.22)$$

mit $\hat{k}'$ nach (5.35) zu entnehmen. In Geraden- und Kreisbereichen reichen dagegen die elementaren Beziehungen (vgl. Abbildung 6.5, rechts oben sowie (6.16) und (6.17))

$$\begin{aligned} \bar{l} &= \bar{l}_0 + \frac{\Delta l}{\cos \nu_0} \quad \text{bzw.} \\ \bar{l} &= \bar{l}_0 + \hat{R} \cdot (\nu_0 - \nu) = \bar{l}_0 + \hat{R} \cdot \left(\nu_0 - \arcsin\left(\frac{\hat{R} \cdot \sin \nu_0 - \Delta l}{\hat{R}}\right) \right) \end{aligned} \quad (6.23)$$

aus.

Infolge der 'sprunghaften' Änderung der Ableitung der Geschwindigkeit v_T nach der räumlichen bzw. horizontalen Länge v'_T (vgl. (5.28) und (6.10)) bzw. $\dot{x}_8$ in (6.9) darf über die Stellen, an denen eine variable Geschwindigkeit v_T die Intervallgrenze $v_T = v_{min}$ oder $v_T = v_{max}$ erreicht (vgl. Abbildung 6.5, Punkte P_1 bis P_4), nicht hinweg integriert werden. Da sowohl die horizontale als auch die räumliche Zwischenlänge anfänglich nicht bekannt sind, bietet sich für die Berechnung des ersten Abschnitts ein Ersatz der Vektoren (6.7) bis (6.9) durch den Lösungsvektor

$$\mathbf{x}(v = v_{min} \quad \text{bzw.} \quad v_{max}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ y_{GK|UTM} \\ x_{GK|UTM} \\ z \\ \hat{k} \\ \nu \\ \bar{l} \\ l \\ B \\ c \\ g \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

sowie die Vektoren mit den Anfangswerten und Ableitungen

$$\mathbf{x}(v_0) = \begin{pmatrix} x_1(v_0) \\ x_2(v_0) \\ x_3(v_0) \\ x_4(v_0) \\ x_5(v_0) \\ x_6(v_0) \\ x_7(v_0) \\ x_8(v_0) \\ x_9(v_0) \\ x_{10}(v_0) \\ x_{11}(v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(v_0) \\ y_{GK|UTM}(v_0) \\ x_{GK|UTM}(v_0) \\ z(v_0) \\ \hat{k}(v_0) \\ \nu(v_0) \\ \bar{l}(v_0) \\ l(v_0) \\ B(v_0) \\ c(v_0) \\ g(v_0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{x}}(v) = \begin{pmatrix} \frac{d\varphi}{dl} \cdot \frac{dl}{dv} \\ \frac{dy_{GK|UTM}}{dl} \cdot \frac{dl}{dv} \\ \frac{dx_{GK|UTM}}{dl} \cdot \frac{dl}{dv} \\ \frac{dz}{dl} \cdot \frac{dl}{dv} \\ \frac{d\hat{k}}{dl} \cdot \frac{dl}{dv} \\ \frac{d\nu}{dl} \cdot \frac{dl}{dv} \\ \frac{d\bar{l}}{dl} \cdot \frac{dl}{dv} \\ \frac{dl}{dl} \cdot \frac{dl}{dv} \\ \frac{dB}{dl} \cdot \frac{dl}{dv} \\ \frac{dc}{dl} \cdot \frac{dl}{dv} \\ \frac{dg}{dl} \cdot \frac{dl}{dv} \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

an. Der Vektor $\dot{\mathbf{x}}(v)$ ergibt sich, wenn in (6.9) anstelle von $\dot{x}_8$ (vgl. (6.10)) sein Kehrwert

$$\frac{dl}{dv} = \frac{-v_T}{g \cdot \tan \nu} \quad (6.26)$$

tritt und alle anderen Elemente mit diesem Faktor erweitert werden. Die Anwendung des Gleichungssystems (6.24) bis (6.26) versagt jedoch an der Kulminationsstelle. $\nu = 0$ hätte nämlich eine unzulässige Division durch Null zur Folge. Deshalb ist zunächst der unmittelbare Kulminationsbereich bis zu einer vorgegebenen horizontalen Länge mit dem Gleichungssystem (6.7) bis (6.9) zu überbrücken, bevor z. B. der Punkt P_2 bzw. P_4 (vgl. Abbildung 6.5, rechts unten) mit den Beziehungen (6.24) bis (6.26) zu berechnen ist.

Im inneren Iterationszyklus (vgl. Abbildung 6.6) wird die variable Länge des 'Kreisbogens'¹⁵ solange abgeändert, bis eine hinreichende Übereinstimmung zwischen der tatsächlichen Richtungsdivergenz

$$\gamma_{Ist} = \varphi_{2.Gerade} - \varphi_{1.Gerade} \quad (6.27)$$

und dem Sollwert vorliegt.

Der mittlere Iterationszyklus (vgl. Abbildung 6.6) bewirkt, dass der Endpunkt E innerhalb einer vorgegebenen Schranke mit der zweiten Geraden koinzidiert.

Bei einer längeren Trasse ist das Einpassverfahren dadurch fortzusetzen, dass Punkt E (vgl. Abbildung 6.6) als Punkt 0 der Feintrassierung zwischen der zweiten und dritten Geraden usw. aufgefasst wird.

Da der Längsschnitt anfänglich bereits vor der Feintrassierung des Grundrisses entstanden ist, könnte eine Anpassung erforderlich werden, die wiederum den Grundriss beeinflusst (Abbildung 6.6, äußerer Iterationszyklus).

6.3.2.2 Einzelpunkte

Nach der definitiven Festlegung aller Trassenelemente (vgl. Kapitel 6.3.2.1.2) liegen für sämtliche Elemente des Grundrisses und des Längsschnitts die Anfangswerte (6.8) vor, und es lassen sich für beliebige Zwischenpunkte die Lösungsvektoren (6.7) als Funktion der ebenen Länge l berechnen (vgl. Kapitel 6.1 und 6.3.2.1.1).

¹⁵Nach der Modulation des ursprünglichen Kreisbogens mit den Parametern des Längsschnitts usw. ist im Allgemeinfall keine strenge Kreisform mehr gegeben.

7 Computerprogramm

Für die praktische Anwendung der in den Kapiteln 4 bis 6 entwickelten Berechnungsverfahren wurde ein leistungsfähiges FORTRAN 77-Programm erstellt.

Der Einsatzbereich dieses Programms erstreckt sich auf die

- Berechnung einzelner ebener Übergangsbogen mit den Ansätzen (4.15) oder (4.28),
- ebene Feintrassierung nach Kapitel 6.3.1 und
- Bestimmung räumlicher Übergangsbogen im Rahmen einer komplexen Feintrassierung nach Kapitel 6.3.2.

Als Interpolationsfunktionen stehen wahlweise die Ansätze Nr. 1 bis 6 (Abbildung 4.5 bzw. Abbildung 5.1) zur Verfügung. Die zusätzliche Verwendung der Polynomansätze höherer Ordnung ((4.38), (4.39) usw.) wäre nach einer relativ geringen Programmergänzung ebenfalls möglich.

Zur räumlichen Feintrassierung werden die Eingangsdaten

- *Trassierungs*-Geschwindigkeit V_T ¹,
- ggf. Anfangsgeschwindigkeit V_S , Endstation l für V_S (P_W in Abbildung 6.5, links oben) sowie minimale und maximale Geschwindigkeit V_{min} und V_{max} (für den Bereich hinter P_W),
- Bezugsgröße s ² zur Ermittlung der Querneigungen α aus den Überhöhungen $\ddot{u}$ (vgl. (4.2) und Abbildung 4.1),
- Koordinaten und Höhe des Anfangspunktes³,
- Kennziffer für die wahlweise Berücksichtigung der CORIOLIS-Beschleunigung nach Kapitel 5.6⁴,
- Polygonzug der Tangentenschnitte TS (vgl. Abbildung 6.3, Richtungen und Distanzen oder Koordinaten),
 - – Kennziffer (1 = Kreis und 11 bis 16 = Übergangsbogen mit den Ansätzen (5.25) bzw. (5.40) unter Verwendung von (5.1) und den Interpolationsfunktionen Nr. 1 bis 6 nach Abbildung 5.1),
 - – Länge bzw. 0 ⁵ sowie
 - – Anfangs- und Endüberhöhung
 für alle Bogenelemente zwischen den Geraden,
- horizontale Abstände und Höhen der Neigungswechsel NW ⁶ und
 - – Kennziffer (2 = Kreis, 3 = Klothoide und 11 bis 16 = Übergangsbogen Nr. 1 bis 6 (vgl. (5.18) mit Abbildung 5.1),
 - – Länge bzw. 0 ⁷ sowie
 - – Anfangs- und Endkrümmung
 für alle Bogenelemente des Längsschnitts

benötigt.

¹ V (bzw. v) = Geschwindigkeit in km/h (bzw. m/s)

²z. B. ungefähre Abstand der Schienenmitten

³Die Eingabe von GAUSS-KRÜGER- bzw. UTM-Koordinaten anstelle von lokalen Koordinaten bewirkt den Ersatz der konstanten Erdbeschleunigung $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ durch die Normalschwere nach (5.56).

⁴nur nach der vorherigen Eingabe von GAUSS-KRÜGER- bzw. UTM-Koordinaten

⁵nur für einen Kreisbogen je TS, dessen Länge im Zuge der Einpassung zu berechnen ist

⁶= Schnittpunkte benachbarter Geraden des Längsschnitts

⁷nur für einen Kreisbogen je NW, dessen Länge im Zuge der Einpassung zu berechnen ist

Die Resultate erstrecken sich auf die

- Stationierungen,
- Koordinaten,
- Richtungen der Tangenten,
- *Trassierungs*-Geschwindigkeit V_T und
- Radien

der Bogenhauptpunkte⁸ des Grundrisses sowie

- Stationierungen,
- *Trassierungs*-Geschwindigkeit V_T ,
- Höhen und
- Neigungen

der Bogenhauptpunkte des Längsschnitts. Seine Elemente werden dabei (vgl. (6.14) bis (6.20) und Abbildung 6.5)

- an der Nahtstelle zwischen $V_T = \text{const.}$ und $V_T = \text{variabel}$ sowie
- in den oberen und unteren Kulminationspunkten des Bereichs $V_T = \text{variabel}$

aufgeteilt.

Darüber hinaus lassen sich die

- Koordinaten des Grundrisses und
- *Trassierungs*-Geschwindigkeit V_T

für beliebige Einzelpunkte berechnen und zwecks späterer Vergleiche mit einer modifizierten Trasse extern speichern.

Ferner können auch die

- Lateralbeschleunigung (vgl. Kapitel 5.9) und
- Änderung der Gesamtbeschleunigung (vgl. (5.64))

für beliebige⁹ aktuelle Geschwindigkeiten V_a ermittelt werden.

⁸d. h. der Anfangs- und Endpunkte sämtlicher Geraden, Kreis- und Übergangsbogen

⁹mehr oder weniger stark von der *Trassierungs*-Geschwindigkeit V_T abweichende

8 Testbeispiele

8.1 Grenzparameter

Den Neubaustrecken der Deutschen Bundesbahn¹

- Mannheim – Stuttgart und
- Hannover – Würzburg

liegt eine *Trassierungs*-Geschwindigkeit $V_T = 250$ km/h zugrunde. Die ursprünglichen Planungsaktivitäten basierten dagegen auf $V_T = 300$ km/h (z. B. ZEUGE 1975). Neben diesen Geschwindigkeiten sind im oberen Teil der Abbildung 8.1 u. a. die dazugehörigen Grenzwerte

- maximale Überhöhung² $\ddot{U}_{max} = 0.15$ m (0.18 m)³,
- Bezugsgröße⁴ $s = 1.50$ m zur Definition der höchstzulässigen Querneigung des Gleises (vgl. Abbildung 4.1)

$$\alpha_{max} = \arcsin \frac{\ddot{U}_{max}}{s} = \arcsin \frac{0.15}{1.50} = \arcsin 0.10, \quad (8.1)$$

- größte Längsneigung $\nu_{max} = 1.25$ ‰ sowie
- minimaler Ausrundungsradius im Längsschnitt
 - $\hat{R}_{min} = 16000$ m für $V_T = 200$ km/h bzw.
 - $\hat{R}_{min} = 25000$ m für $V_T > 200$ km/h

aufgelistet.

Bahn	V_T [km/h]	v_T [m/s]	$\ddot{U}_{max}$	s	$R_{min,1}$	L	ν_{max} [‰]	$\hat{R}_{min}$
DB	200	55.6	0.15	1.50	3130.4	360	12.5	16000
	250	69.4	(0.18)		4891.3	450		25000
	(300)	83.3			7043.5	540		
SNCF	300	83.3	0.18	1.50	5856.5	650	35	25000 (16000)
EMS	400	111.1	0.582	2.80	5920.7	1500	35 (50)	25000 12500
	500	138.9			9251.1	1875		
	1000	277.8			37004.2	3750		

Abbildung 8.1: Tabelle der Trassierungsparameter

Die französische Staatsbahn (SNCF) hat erstmals bei der Personenzugstrecke Paris – Südosten⁵ (vgl. Abbildung 8.1, SNCF)

- die Geschwindigkeit $V = 300$ km/h,
- die maximale Querneigung (vgl. (8.1))

$$\alpha_{max} = \arcsin \frac{0.18}{1.50} = \arcsin 0.12, \quad (8.2)$$

¹Vorgänger der Deutschen Bahn AG

²der äußeren gegenüber der inneren Schiene

³Nach der EBO 2005 darf die Überhöhung *unter Einbeziehung der sich im Betrieb einstellenden Abweichungen* 180 mm nicht überschreiten.

⁴ungefährer Abstand der Schienenmitten

⁵zwischen Paris und Lyon

- die höchstzulässige Längsneigung $\nu_{max} = 3.5 \%$ und
- den minimalen Ausrundungsradius im Längsschnitt $\hat{R}_{min} = 25000 \text{ m}$ ⁶

verwendet (z. B. ALIAS, VERRIER 1976). Die Geschwindigkeit von 300 km/h wurde neben den nachfolgenden französischen auch den zuletzt in Betrieb gegangenen Neubaustrecken der Deutschen Bahn AG Köln–Rhein/Main und Nürnberg–Ingolstadt zugrunde gelegt.

Für Hochleistungsschnellbahnen mit elektromagnetischer Schwebetechnik (EMS) kann mit einer (Abbildung 8.1, EMS)

- Geschwindigkeit $V = 400 \text{ km/h}$,
- maximalen Querneigung $\alpha_{max} = 12^\circ$ – d. h. für eine Fahrbahnbreite von 2.80 m gilt

$$\alpha_{max} = \arcsin \frac{0.582}{2.80} \quad -, \quad (8.3)$$

- höchstzulässigen Längsneigung von $\nu_{max} = 3.5 \%$ ⁷ sowie
- minimalen Ausrundungsradien
 - $\hat{R}_{min} = 25000 \text{ m}$ für Kuppen bzw.
 - $\hat{R}_{min} = 12500 \text{ m}$ für Wannen

gerechnet werden (z. B. MÖLZER, ZUREK 1977 sowie MÖLZER, STÖCKL 1982).

Infolge der grundlegenden Bedingung (4.2) gehört zu einem ebenen Übergangsbogen mit der *Trassierungs*-Geschwindigkeit v_T und der maximalen Querneigung α_{max} (vgl. (8.1) bis (8.3)) der minimale *Grundriss*-Radius

$$R_{min,1} = \frac{v_T^2}{g \cdot \tan \alpha_{max}} \quad (8.4)$$

(vgl. Abbildung 8.1). Die Bahnverwaltungen operieren jedoch häufig mit hiervon mehr oder weniger stark abweichenden Grenzwerten⁸, die bereits entsprechende Toleranzmaße für die Lateralbeschleunigung enthalten. Durch die Verwendung erheblich kleinerer Radien bei

- der SNCF (z. B. ALIAS, VERRIER 1976)⁹ und
- der EMS (z. B. MÖLZER, ZUREK 1977 sowie MÖLZER, STÖCKL 1982)

wird indirekt zum Ausdruck gebracht, dass mit den Geschwindigkeiten von 300 km/h bzw. 400 km/h nicht V_T im Sinne einer strengen Erfüllung von (4.2), sondern eher so etwas wie eine planmäßige Maximalgeschwindigkeit gemeint ist¹⁰. Da sich diese Abhandlung jedoch primär mit Übergangsbogenformen *für erst noch zu erschließende Geschwindigkeitsbereiche* befasst, sind die angegebenen 300 km/h bzw. 400 km/h sozusagen als Richtwerte für zukünftige höhere *Trassierungs*-Geschwindigkeiten V_T im Sinne von (4.2) eingeflossen.

Für räumliche Übergangsbogen gilt die Verallgemeinerung von (8.4) (vgl. (5.41))

$$R_{min,2} = \frac{v_T^2 \cdot \cos^2 \nu_{max}}{\left(g \cdot \cos \nu_{max} - \frac{1}{(-)\hat{R}_{min}} \cdot v_T^2 - b_{C,S}\right) \cdot \tan \alpha_{max} + b_{C,H}}, \quad (8.5)$$

worin $b_{C,S} = b_{C,H} = 0$ einzusetzen ist, wenn die CORIOLIS-Beschleunigung nicht zu berücksichtigen ist (vgl. (5.26)).

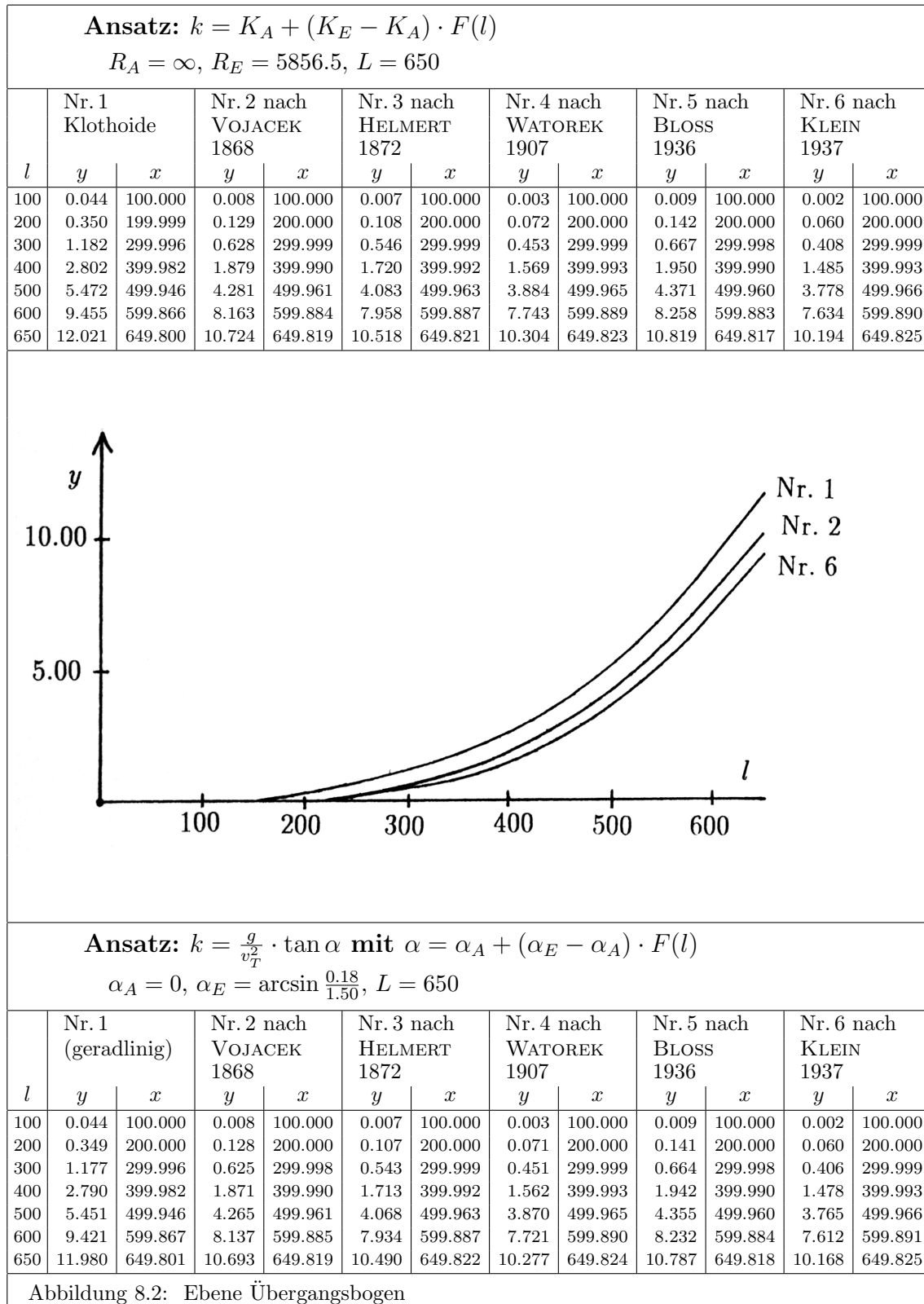
⁶Ausnahmegrenzwert 16000 m

⁷Ausnahmegrenzwert 5.0 %

⁸kleinere Radien

⁹Das gilt auch für die Neubaustrecken der Deutschen Bahn AG Köln–Rhein/Main und Nürnberg–Ingolstadt.

¹⁰D. h. die Trassierungsgeschwindigkeiten V_T sind erheblich geringer als 300 km/h bzw. 400 km/h.



Den Längen der Übergangsbogen liegt die Beziehung

$$L[\text{m}] = 12 \cdot V_T[\text{km/h}] \cdot \ddot{U}_{\text{max}}[\text{m}] \quad (8.6)$$

(z. B. ZEUGE 1975) zugrunde. Der originäre Grenzwert ist jedoch die höchstzulässige Überhöhungszunahme (vgl. (4.19) und Abbildung 4.5, mittlere Spalte) von

$$\ddot{u}'_{\text{max}} = (F' \cdot L)_{\text{max}} \cdot \frac{\ddot{U}_{\text{max}}}{L} = \frac{1}{6 \cdot V[\text{km/h}]} \quad (8.7)$$

Mit dem Faktor $(F' \cdot L)_{\text{max}} = 2.00$ ¹¹ ist jeweils das Maximum der Übergangsbogen Nr. 3 und 6 (vgl. Abbildung 4.5, mittlere Spalte) eingeflossen. Andere Übergangsbogen¹² können entsprechend verkürzt werden.

Der Beziehung (8.7) liegt jedoch kein eindeutiges Grenzmaß für die mit der Überhöhungszunahme gemessenen Gleisverwindung zugrunde. Es handelt sich vielmehr um einen empirisch gewonnenen Erfahrungswert, welcher neben der Hubgeschwindigkeit (vgl. (4.23)) indirekt auch bautechnische Toleranzen der örtlichen Gleisverlegearbeiten enthält.

8.2 Ebene Übergangsbogen

Im oberen Teil der Abbildung 8.2 sind der Klothoide (Nr. 1) mit den Interpolationsfunktionen Nr. 2 bis 6 (vgl. Abbildung 4.5) und dem gleichen Ansatz (4.15) berechnete Übergangsbogen gegenübergestellt. Diese Resultate repräsentieren sozusagen den bisherigen Entwicklungsstand, auf den diese Abhandlung aufbaut (vgl. Kapitel 1). Den Übergangsbogen mit

- parabelförmiger Krümmungslinie nach HELMERT 1872 (Nr. 3),
- dem Polynomansatz nach BLOSS 1936 (Nr. 5) und
- sinusförmig modulierter Krümmungslinie nach KLEIN 1937 (Nr. 6),

für deren Berechnung geeignete Reihenentwicklungen zur Verfügung stehen (SCHUHR 1979, 1980 und 1983), sind lediglich die Übergangsbogen Nr. 2 und 4 hinzugefügt worden.

Für größere Querneigungen reicht die Näherung (4.4) dagegen nicht mehr aus. Den zusätzlichen Resultaten (vgl. Abbildung 8.2, unterer Teil) liegt der Ansatz (4.30) mit (4.28) und Abbildung 4.5 zugrunde. Die Querabweichungen betragen immerhin bis zu 0.041 m. Sie mögen zwar infolge ihres stufenweisen Anstiegs für dieses Beispiel noch fahrdynamisch unbedenklich sein, ihre Größe wächst jedoch mit zunehmenden Querneigungen und Längen der Übergangsbogen ziemlich rasch stark an.

8.3 Räumliche Übergangsbogen

Im Gegensatz zum ebenen Ansatz (4.30) mit (4.28) und Abbildung 4.5 fließen in die räumlichen Ansätze (5.26) und (5.41) jeweils mit (5.1) und Abbildung 5.1 von vornherein die aktuellen Daten des Längsschnitts (vgl. Abbildung 5.2) ein. Die Form eines räumlichen Übergangsbogens wird deshalb zusammen mit der Fixierung der Trassenelemente im Zuge einer Feintrassierung (vgl. 6.3.2.1) bestimmt.

In der Abbildung 8.3 ist ein vollständiges Beispiel, welches sich aus den

- Eingabedaten (oberer Teil der Abbildung 8.3) und
- Resultaten (unterer Teil der Abbildung 8.3)

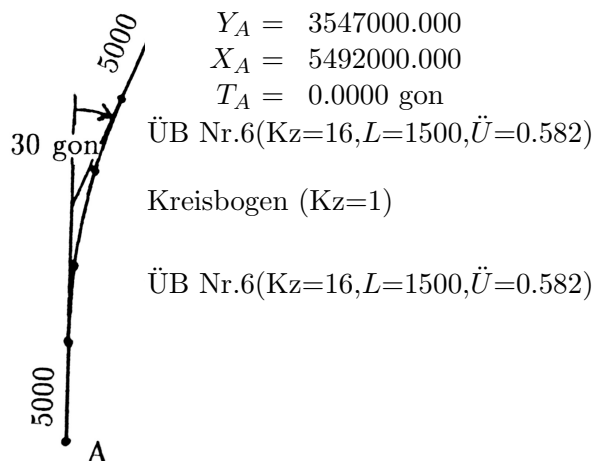
zusammensetzt und die CORIOLIS-Beschleunigung unberücksichtigt lässt, enthalten.

¹¹Übergang von (8.7) nach (8.6)

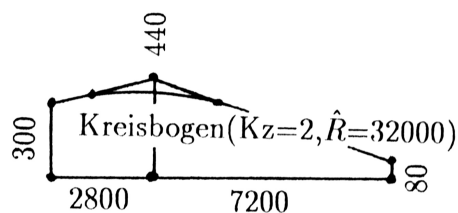
¹²Nr. 2, 4 und 5

Eingabedaten

Grundriß



Längsschnitt



$V_T = \text{const.} = 400 \text{ km/h}$
 $\ddot{U} = \text{Übergangsbogen}$
 $\ddot{U} = \text{Überhöhung}$
 $L = \text{Übergangsbogenlänge}$
 $s = 2.80 \text{ (zur Berechnung von)}$
 $\alpha = \arcsin \frac{\ddot{U}}{s} \text{ (vgl. (4.2))}$

Ergebnisliste

St = ebene Station
 Y,X = Koordinaten
 T = Richtungen der Tangenten

Kz = Kennziffer der Trassenelemente
 (0 = Gerade, 1 oder 2 = Kreis,
 3 = Klothoide,
 11 bis 16 = ÜB Nr. 1 bis 6)
 L = Länge
 $\ddot{U}_1, \ddot{U}_2$ = Überhöhungen
 V = Geschwindigkeit
 R = Radius im Grundriß

TRASSENELEMENTE

GRUNDRISS

$V_a = 400.0 \text{ km/h}$ bis $St = 10000.0000$ ($V_{\min} = 400 \text{ km/h}$, $V_{\max} = 400 \text{ km/h}$)

St	Y	X	T[gon]	KZ	L	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	V[km/h]	R
0.0000	3547000.0000	5492000.0000	0.000000					400.0	*
2795.1113	3547000.0000	5494795.1113	0.000000	0	2795.1113	0.000000	0.000000	400.0	*
4295.1113	3547051.1283	5496293.1928	7.711586	16	1500.0000	0.000000	0.582000	400.0	6158.8
5623.5749	3547356.9184	5497583.1202	21.965107	1	1328.4636	0.582000	0.582000	400.0	5915.3
7123.5749	3547989.4805	5498941.9647	30.000000	16	1500.0000	0.582000	0.000000	400.0	*
9944.0569	3549269.9525	5501455.0326	30.000000	0	2820.4820	0.000000	0.000000	400.0	*

LÄNGSSCHNITT

St	V[km/h]	H	N[m/1000m]	KZ	L	R1,R2
0.0000	400.0	300.0000	50.000000			
1201.9963	400.0	360.0998	50.000000	0	1203.4978	*,*
4398.0037	400.0	360.0998	-50.000000	2	3197.3373	32000.0000
10000.0000	400.0	80.0000	-50.000000	0	5608.9944	*,*

H = Höhe
 N = Neigung in ‰
 R1,R2 = Radien

Abbildung 8.3: Räumliche Feintrassierung

Der Übersichtlichkeit halber beschränkt es sich auf

- zwei horizontale Ausgangsgeraden, deren Richtungsdivergenz mit drei Elementen einer Bogenfolge¹³ zu überbrücken ist, und
- einen mit zwei geneigten Geraden und einem Kreisbogen definierten Längsschnitt.

Den Übergangsbogen liegen die EMS-Daten (vgl. Abbildung 8.1 und (8.3)) mit $\hat{R} = 32000$ m zugrunde. Der erste Übergangsbogen zwischen den Stationen 2795.1 (vgl. Abbildung 8.3) und 4295.1 befindet sich im *Längsschnitt*-Kreisbogen¹⁴, der zweite zwischen den Stationen 5623.6 und 7123.6 innerhalb einer konstanten Längsneigung¹⁵. Sein Anfangsradius¹⁶ von 5915.3 ist etwas kleiner als $R_{min,1} = 5920.7$ (vgl. Abbildung 8.1) eines ebenen Übergangsbogens (vgl. (8.4) und (8.5)).

Eine zum ebenen Übergangsbogen Nr. 6 nach KLEIN 1937 (vgl. Abbildung 8.2, rechts unten) analoge Berechnung mit den EMS-Daten (vgl. Abbildung 8.1) führt auf die in der Abbildung 8.4 tabulierten Koordinaten. Die Berücksichtigung von Längsschnittgeraden mit den konstanten Neigungen (vgl. Abbildung 8.4, oben und mittlerer Teil der unteren Darstellung)

+3.5%	oder	−3.5%,	
+5.0%	oder	−5.0%,	
+10.0%	oder	−10.0%	bzw.
+20.0%	oder	−20.0%	

bewirkt bereits Ordinatenabweichungen von bis zu

+ 0.033m,
+ 0.067m,
+ 0.266m bzw.
+ 1.052m.

Wird der Längsschnitt mit dem Radius $\hat{R} = 32000$ m definiert, ergeben sich die maximalen Δy -Werte (vgl. Abbildung 8.4)

−2.073m	($\nu_A = 3.5\%, \hat{R} = 32000\text{m}$),
−2.048m	($\nu_A = 5.0\%, \hat{R} = 32000\text{m}$),
−1.887m	($\nu_A = 10.0\%, \hat{R} = 32000\text{m}$),
−1.209m	($\nu_A = 20.0\%, \hat{R} = 32000\text{m}$),
+2.105m	($\nu_A = −3.5\%, \hat{R} = −32000\text{m}$),
+2.132m	($\nu_A = −5.0\%, \hat{R} = −32000\text{m}$),
+2.317m	($\nu_A = −10.0\%, \hat{R} = −32000\text{m}$) bzw.
+3.103m	($\nu_A = −20.0\%, \hat{R} = −32000\text{m}$).

Die gegenwärtigen Grenzwerte (EMS-Zeile in Abbildung 8.1)

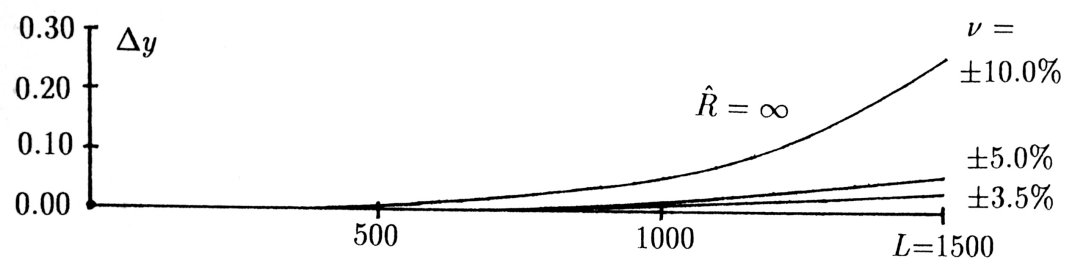
- $\nu_{max} = 5.0\%$ und
- $\hat{R}_{min} = 25000\text{m}$ für Kuppen bzw.
 $\hat{R}_{min} = 12500\text{m}$ für Wannen

¹³ein Kreisbogen und zwei Übergangsbogen

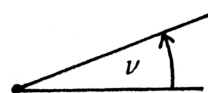
¹⁴Stationen 1202.0 bis 4398.0

¹⁵hinter Station 4398.0

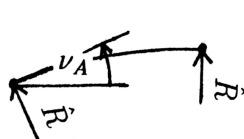
¹⁶im Grundriss



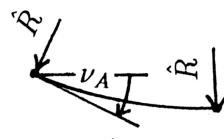
$$\alpha_A = 0, \quad \alpha_E = \arcsin \frac{0.582}{2.80}, \quad L = 1500, \quad V_T = 400 \text{ km/h}$$



$\nu = \text{const.}$



$\nu_A, \hat{R} = \text{positiv}$



$\nu_A, \hat{R} = \text{negativ}$

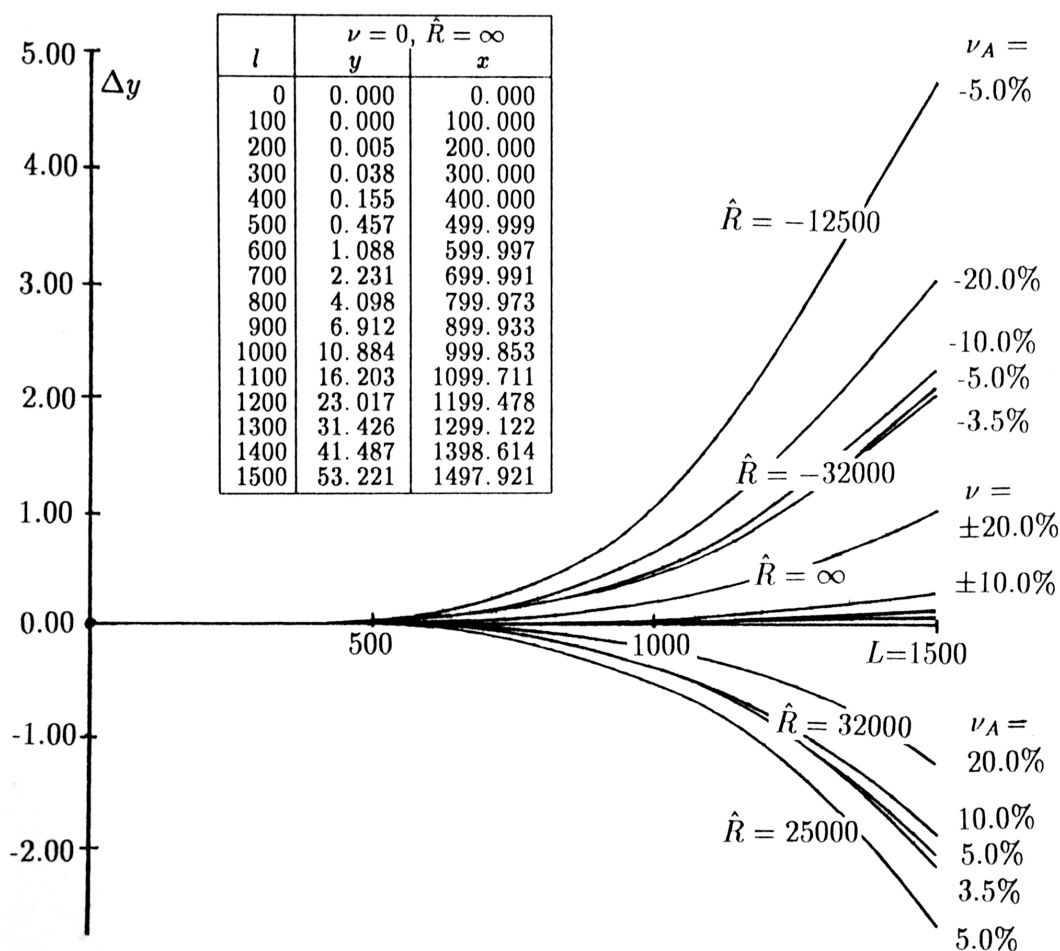
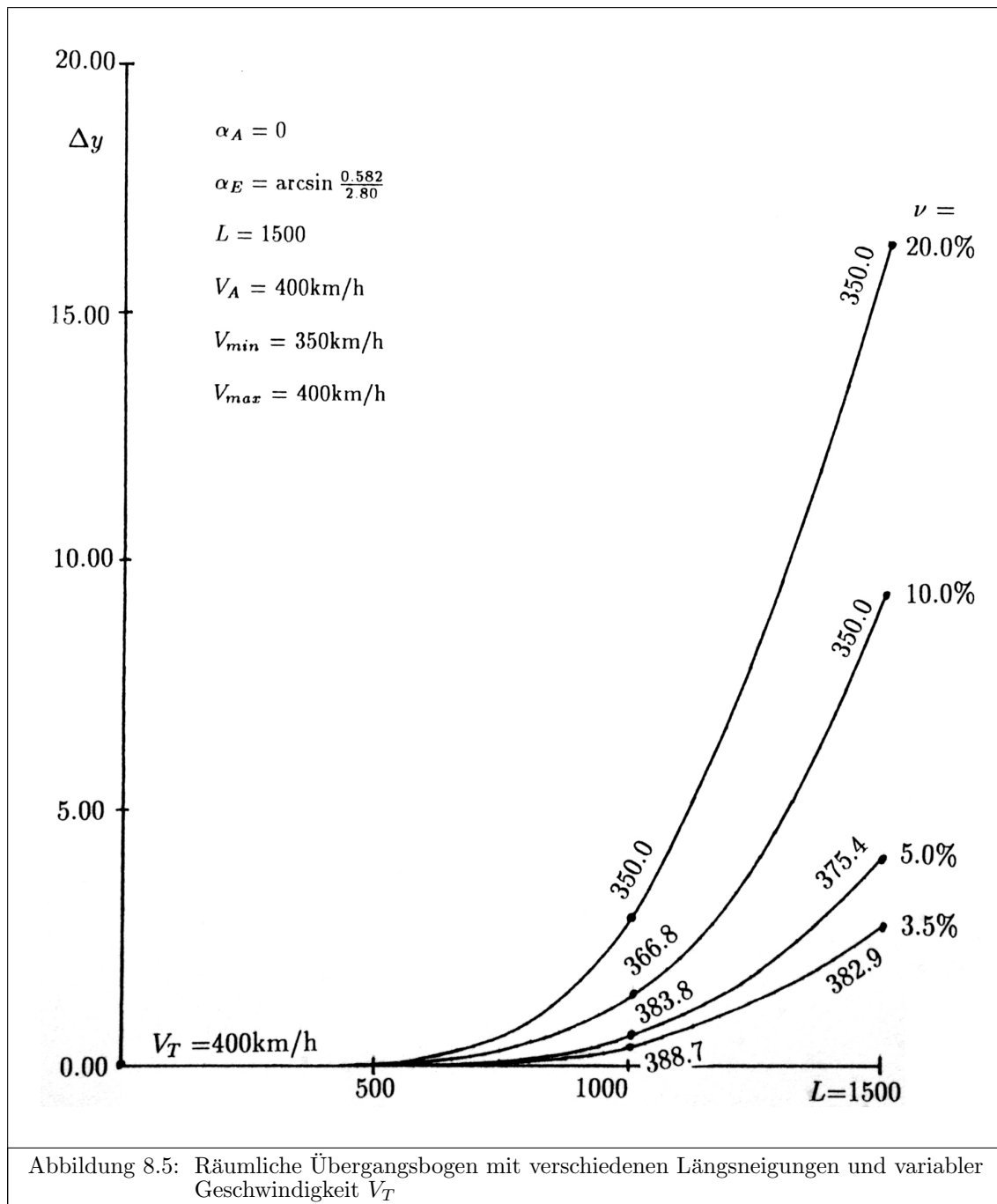


Abbildung 8.4: Räumliche Übergangsbogen mit unterschiedlichen Längsschnitten



führen sogar auf y -Abweichungen bis zu (vgl. Abbildung 8.4)

$$\begin{aligned}
 &-2.640 \text{ m} \quad (\nu_A = 5.0\%, \hat{R} = 25000 \text{ m}) \quad \text{bzw.} \\
 &+4.829 \text{ m} \quad (\nu_A = -5.0\%, \hat{R} = -12500 \text{ m}).
 \end{aligned}$$

Da der Kreisbogen $\hat{R} = -12500 \text{ m}$ bereits nach 1248.96 m den Grenzwert $\nu = 5.0\%$ erreicht, obwohl die Grundrissprojektion des Übergangsbogens insgesamt 1500 m lang ist, wird der Restbereich mit $\nu = \text{const.} = 5.0\%$ angesetzt.

Wird die konstante *Trassierungs*-Geschwindigkeit $V_T = 400 \text{ km/h}$ durch eine variable *Trassierungs*-Geschwindigkeit mit

- dem Anfangswert $V_A = 400 \text{ km/h}$ und
- dem Intervall $V_{\min} = 350 \text{ km/h} \leq V_T \leq V_{\max} = 400 \text{ km/h}$

ersetzt, wachsen die y -Abweichungen für die konstanten Längsneigungen (vgl. Abbildung 8.4) bis zu (vgl. Abbildung 8.5)

$$\begin{aligned} &+2.798\text{m} \quad (\nu = +3.5\%), \\ &+4.119\text{m} \quad (\nu = +5.0\%), \\ &+9.153\text{m} \quad (\nu = +10.0\%) \quad \text{bzw.} \\ &+16.168\text{m} \quad (\nu = +20.0\%) \end{aligned}$$

an.

Die zusätzliche Berücksichtigung der CORIOLIS-Beschleunigung impliziert einen Ersatz der Koordinatentabelle in der Abbildung 8.4 durch diejenige in der Abbildung 8.6 mit bis zu 1.119 m größeren Ordinaten (vgl. Δy -Spalte in Abbildung 8.6). Um die Einflüsse

- des Übergangs von der konstanten Erdbeschleunigung $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ zur Normalschwere g nach (5.56) und
- der CORIOLIS-Beschleunigung (vgl. Kapitel 5.6)

voneinander trennen zu können, wurden die GAUSS-KRÜGER-Koordinaten und die Höhe des Anfangspunktes des Übergangsbogens mit

- $y_{GK} = 3547000.000 \text{ m}$,
- $x_{GK} = 5492000.000 \text{ m}$ und
- $z = 100.000 \text{ m}$

so angesetzt, dass die nach (5.56) ermittelte Normalschwere $g = 9.81000 \text{ m/s}^2$ mit der zuvor verwendeten konstanten Erdbeschleunigung übereinstimmt. Eine erneute Berechnung der Beispiele für $\hat{R} = 32000 \text{ m}$ (vgl. Abbildung 8.4, rechts unten) mit der variablen Geschwindigkeit

- $V_A = 400 \text{ km/h}$ und
- $V_{min} = 350 \text{ km/h} \leq V_T \leq V_{max} = 400 \text{ km/h}$

verursacht maximale Δy -Werte von (vgl. Abbildung 8.6, Abweichungen von der y -Spalte)

$$\begin{aligned} &-0.556\text{m} \quad (\nu_A = 3.5\%, \hat{R} = 32000\text{m}), \\ &+0.678\text{m} \quad (\nu_A = 5.0\%, \hat{R} = 32000\text{m}), \\ &+5.353\text{m} \quad (\nu_A = 10.0\%, \hat{R} = 32000\text{m}) \quad \text{bzw.} \\ &+13.527\text{m} \quad (\nu_A = 20.0\%, \hat{R} = 32000\text{m}). \end{aligned}$$

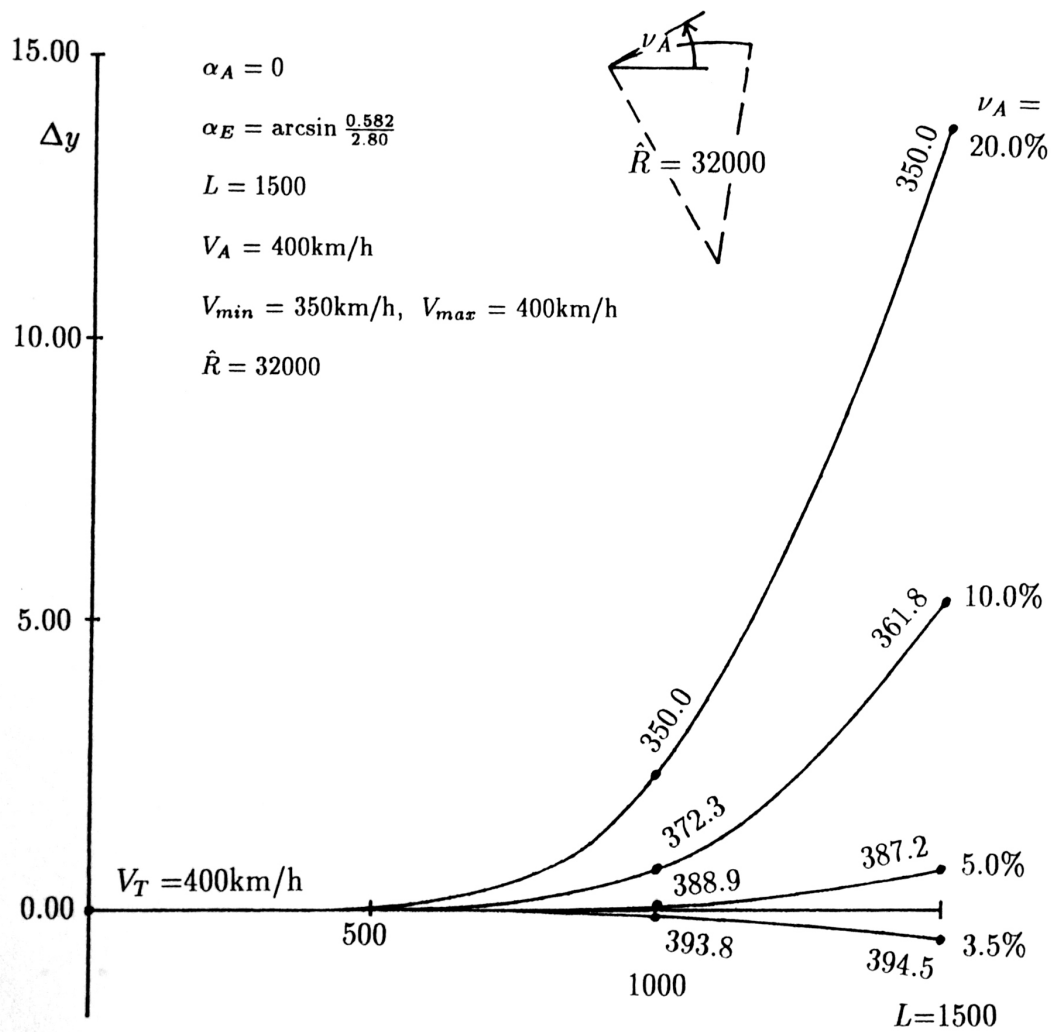
Die Abbildung 8.7 veranschaulicht die Absolutbeträge der jeweiligen Änderungen der Gesamtbeschleunigung $|\dot{b}|$ (vgl. (5.64)), d. h. der dritten Ableitungen des Ortsvektors nach der Zeit, des ersten Übergangsbogens in der Abbildung 8.3. Für die *Trassierungs*-Geschwindigkeit $V_T = 400 \text{ km/h}$, die so definiert ist, dass keine Lateralbeschleunigung (vgl. Kapitel 5.9) auftritt (vgl. Abbildung 8.8), wird gerade der Grenzwert 0.30 m/s^3 (vgl. Abbildung 8.7) erreicht. Aus vorgegebenen Toleranzgrenzen für die

- Änderung der Gesamtbeschleunigung $|\dot{b}|$ (vgl. Abbildung 8.7) und
- Lateralbeschleunigung b_L (Abbildung 8.8)

ergeben sich untere und obere Schranken, bis zu denen die tatsächlichen Geschwindigkeiten von der *Trassierungs*-Geschwindigkeit V_T abweichen dürfen. Da sich für

- $|\dot{b}|_{max} = 0.40 \text{ m/s}^3$ und
- $b_L = \pm 1.00 \text{ m/s}^2$

lediglich das Intervall von ca. 280 km/h (vgl. Abbildung 8.8, unten) bis ca. 440 km/h (vgl. Abbildung 8.7) ergibt, ist die Länge des Übergangsbogens $L = 1500 \text{ m}$ eher zu kurz als zu lang gewählt.



l	$\nu = 0, \hat{R} = \infty$		Δy
	y	x	
0	0.000	0.000	0.000
100	0.005	100.000	0.005
200	0.025	200.000	0.020
300	0.083	300.000	0.045
400	0.235	400.000	0.080
500	0.582	499.999	0.125
600	1.267	599.997	0.179
700	2.476	699.989	0.245
800	4.418	799.970	0.320
900	7.316	899.928	0.404
1000	11.383	999.844	0.499
1100	16.807	1099.696	0.604
1200	23.735	1199.455	0.718
1300	32.268	1299.089	0.842
1400	42.463	1398.567	0.976
1500	54.340	1497.858	1.119

Abbildung 8.6: Räumliche Übergangsbogen mit Berücksichtigung der CORIOLIS-Beschleunigung

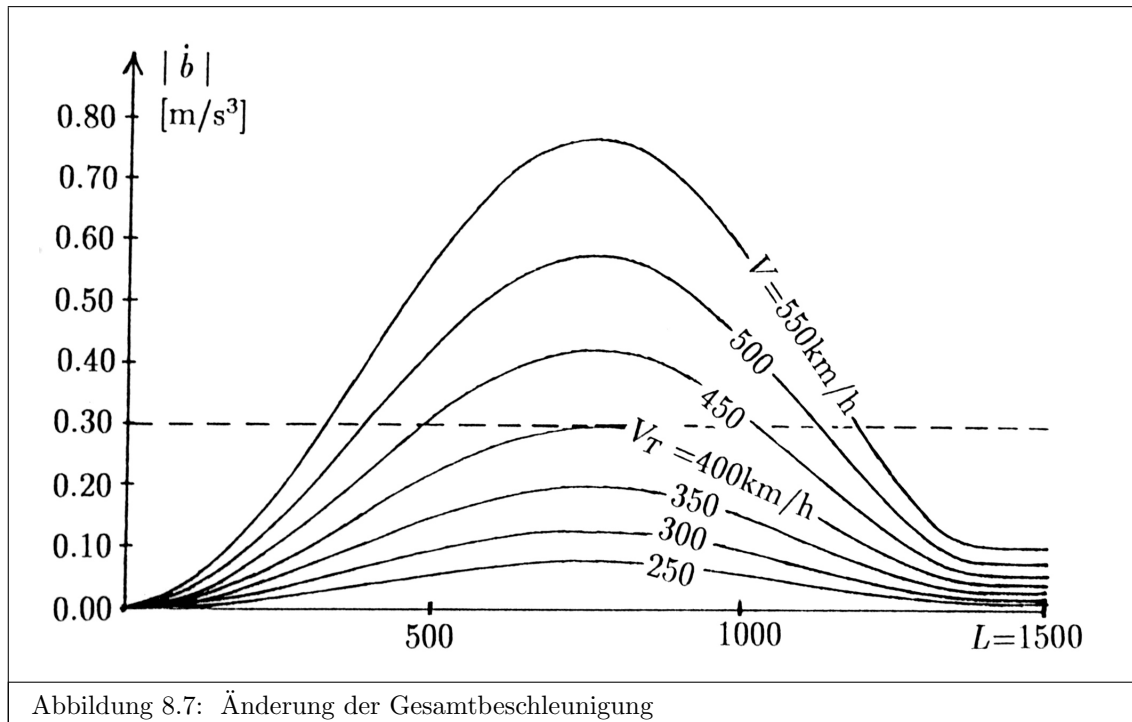


Abbildung 8.7: Änderung der Gesamtbeschleunigung

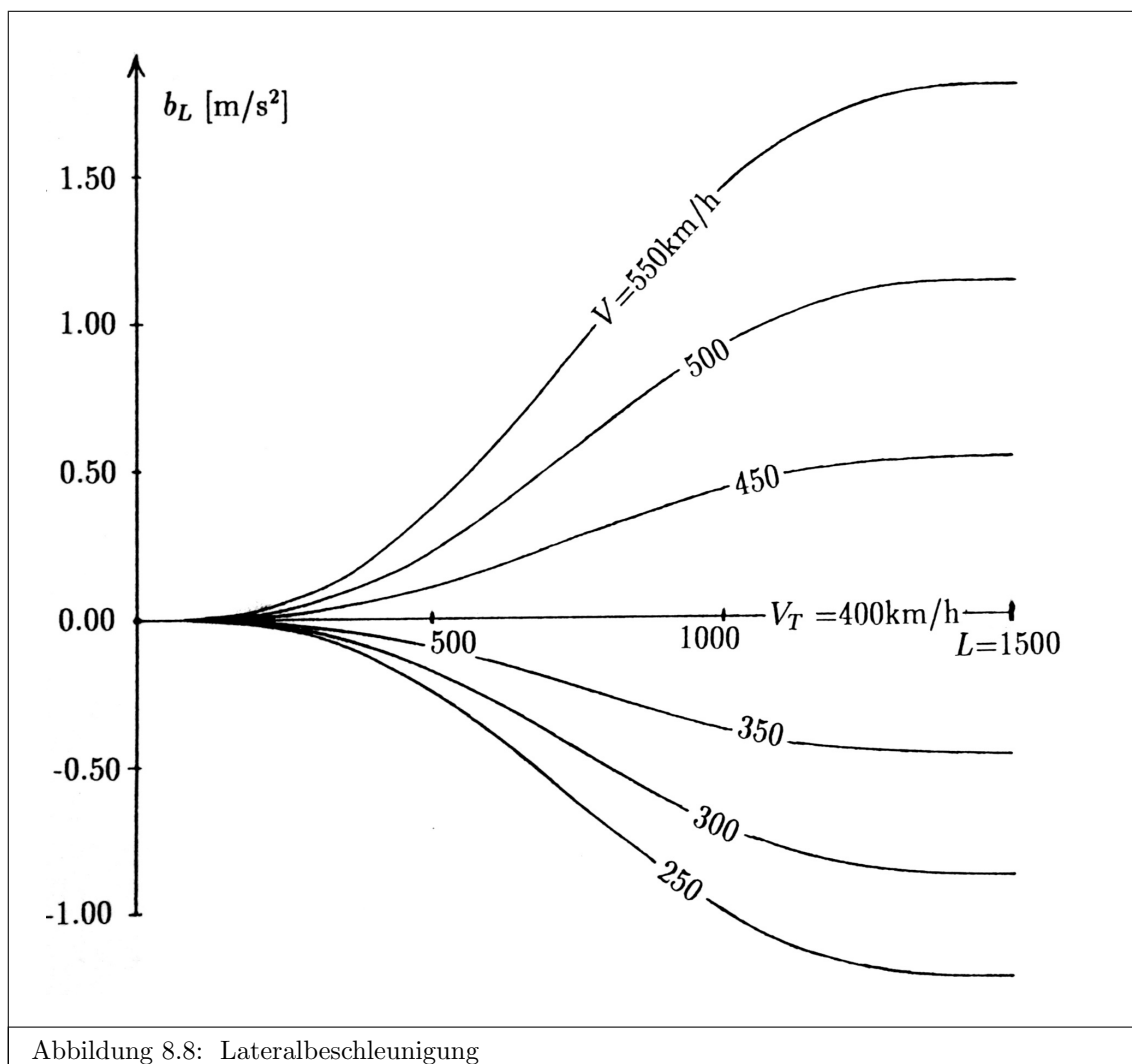


Abbildung 8.8: Lateralbeschleunigung

9 Ausblick

Die vorstehende Untersuchung ist ein Beitrag zur Weiterentwicklung der Übergangsbogenformen. Sie enthält neue Ansätze und Verfahren zur Feintrassierung von Übergangsbogen für Bahnen mit hohen Fahrgeschwindigkeiten. Dabei konnten die im Kapitel 2 aufgeführten Ziele realisiert werden.

Das entwickelte Computerprogramm (vgl. Kapitel 7) ist zur Berechnung von

- ebenen Übergangsbogen mit zueinander proportionalen Überhöhungs- und Krümmungsbildern,
- ebenen Übergangsbogen mit großen Querneigungen und
- räumlichen Übergangsbogen

geeignet. Sein Einsatz ist jedoch vor allen Dingen für die zweite und dritte Gruppe – *d. h. für die eigentlichen Neuentwicklungen in dieser Abhandlung* – uneingeschränkt zu empfehlen. Bei der ersten Gruppe, die gewissermaßen das Verbindungsglied zum vorherigen Entwicklungsstand darstellt, verursachen die bisherigen Reihenentwicklungen dagegen einen etwas geringeren Rechenaufwand.

Das dieser Publikation zugrunde liegende intensive Literaturstudium wurde dadurch erschwert, dass

- die Problematik der Übergangsbogen bereits in vielen weniger gut zugänglichen älteren Schriften behandelt wird und
- in auffällig vielen *älteren und neueren* Fällen jeder Bezug zu vorherigen Veröffentlichungen fehlt.

So hat z. B. noch MATTHEWS 1948 den von ihm favorisierten Ansatz von WATOREK 1907 ohne Quellenangabe erneut hergeleitet. Die Dissertation von STOFFEL 1969 enthält die Übergangsbogen von VOJACEK 1868 und BLOSS 1936, ohne dass die Namen im Literaturverzeichnis vorkommen. Deshalb kann letztlich keine absolute Garantie dafür übernommen werden, dass es vollständig gelungen ist, alle Erstveröffentlichungen der zitierten Übergangsbogen aufzuspüren.

HELMERT 1872 entwickelte trotz der Existenz des Übergangsbogens von VOJACEK 1868 einen weiteren Übergangsbogen mit stetig differenzierbarer Krümmungslinie. Er strebte dabei aus damaliger Sicht jedoch keinerlei Qualitätsverbesserungen, sondern ausschließlich rechentechnische Vereinfachungen an. Sein Ansatz, welcher mit den gleichen Näherungen, die der kubischen Parabel zugrunde liegen¹, auf die sehr einfach zu berechnende biquadratische Parabel führt, diente einzig und allein diesem Zweck.

Die modernen EDV-Anlagen haben dagegen den seinerzeitigen Entwicklungen von Ersatzkurven die Ausgangsbasis vollständig entzogen. Angesichts der heutigen Rechnerkapazitäten sind die Approximation

- der Klothoide durch die kubische Parabel und
- des Übergangsbogens mit parabelförmiger Krümmungslinie nach HELMERT 1872 durch die biquadratische Parabel

nicht mehr begründet. Darüber hinaus ist der ebene Übergangsbogen nach HELMERT 1872 lediglich der Klothoide überlegen. Er weist jedoch ungünstigere geometrische und physikalische Eigenschaften auf als die Übergangsbogen nach VOJACEK 1868, WATOREK 1907, BLOSS 1936 und KLEIN 1937 (vgl. Kapitel 4.5). Deshalb sollte er für neue Hochgeschwindigkeitsstrecken durch den Übergangsbogen mit sinusförmig modulierter Krümmungslinie nach KLEIN 1937 ersetzt werden (vgl. Abbildung 8.2, Nr. 6 anstelle von Nr. 3)².

Wird dagegen in bestehenden Streckennetzen mit geringeren Geschwindigkeiten³ unter Inkaufnahme gewisser Qualitätseinbußen primär eine Erhöhung der zulässigen Geschwindigkeit angestrebt, ist häufig ein Ersatz der Klothoiden durch Übergangsbogen nach BLOSS 1936 besonders effektiv (vgl. (4.22)).

¹ Abszisse x = Bogenlänge l und Ordinate y nach (4.6) anstelle von (4.7)

² oder dem nahezu gleichwertigen Übergangsbogen nach WATOREK 1907 (vgl. Abbildung 8.2, Nr. 4)

³ z. B. bis zu 200 km/h

Für räumliche Übergangsbogen bietet sich ebenfalls der Ansatz nach KLEINN 1937 (vgl. Abbildung 5.1, Nr. 6)⁴ an.

Die Fragen,

- bis zu welcher Geschwindigkeit ebene Übergangsbogen ausreichen und
- welche Längen für räumliche Übergangsbogen erforderlich sind,

lassen sich nicht generell beantworten. Letztlich geht es um eine gerade noch tolerierbare Komfortschwelle, die von den

- aktuellen Trassierungsparametern,
- Einbau- und Unterhaltungstoleranzen,
- einzusetzenden Fahrzeugen sowie
- vertretbaren Beschleunigungswerten

abhängt. Als Faustregeln werden vorgeschlagen,

- für *Trassierungs*-Geschwindigkeiten⁵ ab 300 km/h exakt berechnete räumliche Übergangsbogen zu bevorzugen und
- die sich nach (8.6) ergebenden Längen als Mindestgrößen anzusehen.

In diese Publikation sind so wenig fahrzeugabhängige Größen wie irgend möglich eingeflossen. Gleichwohl sei angemerkt, daß die anzustrebende Koinzidenz zwischen der Fahrbahnachse und der Schwerpunktbahn durch eine beiderseitige Aufhängung und gleichmäßige Ausdehnung des Fahrgastraumes nach oben und unten zu realisieren wäre. Eine derartige Tendenz⁶ ist beim Übergang von der Eisenbahn zum Transrapidfahrzeug mit elektromagnetischer Schwebetechnik bereits erkennbar.

Darüber hinaus sei besonders darauf hingewiesen, dass auch bei hochwertiger Trassierung für Fahrzeuge, die mit einer von der *Trassierungs*-Geschwindigkeit abweichenden aktuellen Geschwindigkeit fahren, spezielle Wagenkastensteuerungen für optimale Kurvenanpassungen zweckmäßig sind.

⁴oder der nahezu gleichwertige Ansatz nach WATOREK 1907 (vgl. Abbildung 5.1, Nr. 4)

⁵im Sinne einer strengen Erfüllung von (4.2)

⁶abnehmende Schwerpunkthöhe

Literaturverzeichnis

- ALIAS, J.; VERRIER, G.: *Le tracé de la ligne nouvelle Paris-Sud-Est, données de base*. Revue générale des chemins de fer 95(1976)11,659...667.
- BAUER, F. L.; RUTISHAUSER, H.; STIEFEL, E.: *New aspects in numerical quadrature*. Proceedings of symposia in applied mathematics of the american mathematical society 15(1963)199...218.
- BAUER, F.; HEINHOLD, J.; SAMELSON, K.; SAUER, R.: *Moderne Rechenanlagen*. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1. Auflage 1964.
- BAUMANN, R.: *ALGOL-Manual der ALCOR-Gruppe*. Oldenbourg Verlag, München und Wien, 3. Auflage 1968.
- BIRMANN, F.: *Gleisgeometrie und Konstruktion des Oberbaues von Schnellfahrstrecken*. Eisenbahntechnische Rundschau 17(1968)12,513...532.
- BLOSS, A. E.: *Der Übergangsbogen mit geschwungener Überhöhungsrampe*. Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Neue Folge 73(1936)15,319...320.
- BRASS, H.: *Quadraturverfahren*. Verlag Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1977.
- BRONSTEIN, I.; SEMENDJAJEW, K.: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Zürich und Frankfurt(M), 6. Auflage 1966.
- BULIRSCH, R.: *Bemerkungen zur ROMBERG-Integration*. Numerische Mathematik 6(1964)1,6...16.
- BULIRSCH, R.; STOER, J.: *Fehlerabschätzungen und Extrapolation mit rationalen Funktionen bei Verfahren vom RICHARDSON-Typus*. Numerische Mathematik 6(1964)5,413...427.
- BULIRSCH, R.; STOER, J.: *Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods*. Numerische Mathematik 8(1966)1,1...13(A).
- BULIRSCH, R.; STOER, J.: *Asymptotic upper and lower bounds for results of extrapolation methods*. Numerische Mathematik 8(1966)2,93...104(B).
- BULIRSCH, R.; STOER, J.: *Handbook series numerical integration, numerical quadrature by extrapolation*. Numerische Mathematik 9(1967)4,271...278.
- CASPARY, W.: *Trassierung von Hochgeschwindigkeitsbahnen*. Berichte des Vereins Deutscher Ingenieure Nr. 472(1983)97...103.
- CHERBULIEZ, A.: *Die Gestaltung der Übergangs- und Verbindungsbogen in Eisenbahngleisen*. Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Neue Folge 53 (1916)22,355...387.
- DIEKHOFF, H.-J.; LORY, P.; OBERLE, H.J.; PESCH, H.-J.; RENTROP, P.; SEYDEL, R.: *Comparing routines for the numerical solution of initial value problems of ordinary differential equations in multiple shooting*. Technische Universität München, Institut für Mathematik, Gruppe Numerische Mathematik, Bericht 7520(1975).
- EBO = *Eisenbahn-Bau- und Betriebsordnung* vom 8.5. 1967; Stand 21.06.2005.
- FRANCKE, A.: *Gleisbögen mit unendlich großem Krümmungshalbmesser in den Bogenanfängen*. Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Neue Folge 36 (1899)12,265...268.
- FREDERICH, F.: *Unbekannte und ungenutzte Möglichkeiten der Rad/Schiene Spurführung. Zur Konzeption neuartiger Schienenfahrzeug-Fahrwerke*. Zeitschrift für Eisenbahnwesen und Verkehrstechnik (GLASER's Annalen) 109(1985)2/3,41...47.
- GRAGG, W. B.: *On extrapolation algorithms for ordinary initial value problems*. Journal of the society for industrial and applied mathematics, series B: numerical analysis 2(1965)3,384...403.
- GRIGORIEFF, R. D.: *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen I*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1. Auflage 1972.
- GROSSMANN, W.: *Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung*. Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart, 2. Auflage 1964.
- HALLADE, M.: *Nouvelle méthode de raccordement des courbes*. Revue générale des chemins de fer 31(1908)4, 261...282.
- HARTMANN, J., LAY, E.; BECK, A.: *Hochgeschwindigkeitsstrecke Köln-Rhein/Main*. Eisenbahntechnische Rundschau 55(2006)6,372...378.
- HELMERT, F. R.: *Die Uebergangscurven für Eisenbahn-Geleise*. Mayer Verlag, Aachen, 1872.
- HELMERT, F. R.: *Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie*. Teubner Verlag, Leipzig, 1880.
- HILLIGES, D.; MÖLZER, P.; RASCHBICHLER, H.-G.; ZUREK, R.: *Der Fahrweg der Transrapid Versuchsanlage Emsland (TVE)*. Zeitschrift für Eisenbahnwesen und Verkehrstechnik (GLASER's Annalen) 105 (1981)7/8,205...215.
- HOFMANN-WELLENHOF, B.; LICHTENEGGER, H.; COLLINS, J.: *GPS - Theory and Practice*. Springer, Wien and NewYork, Fifth edition 2001.
- JACOBS, E.; MARX, H.-J.: *Vermessungsarbeiten für den Betonfahrweg der Magnetschwebebahn Transrapid-Versuchsanlage Emsland - TVE*. Der Vermessungsingenieur 34(1983)2,41...51.

- JORDAN-ENGELN, G.; REUTTER, F.: *Numerische Mathematik für Ingenieure*. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien und Zürich, 3. Auflage 1982.
- KAPFER, W.: *Integrationsmethoden für elektronische Digital-Rechenanlagen*. Elektronische Datenverarbeitung 8(1966)3,97...102.
- KICK, W.: Von HELMERT über NALENZ zu den Richtverfahren – die natürliche Geometrie für Bahnen. Allgemeine Vermessungsnachrichten 76(1969)8,321...331.
- KLEIN, R.: Beitrag zur Gestaltung der Übergangsbögen. Gleistechnik und Fahrbahnbau 13(1937)9/10,97...102 und 23/24,224...227.
- KNEISSL, M. in Jordan/Eggert/Kneißl: *Handbuch der Vermessungskunde, Band IV*. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 10. Auflage 1959.
- LANGE, A.: Beitrag zur Form des Übergangsbogens. Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Neue Folge 74(1937)22,417...418.
- LUDWIG, H. in Hütte: *Des Ingenieurs Taschenbuch, Band V, Teil B, Verkehrstechnik (Eisenbahntechnik)*. Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin, 28. Auflage 1955.
- MATTHEWS, K.: *Übergangskurven im Eisenbahngleis und das Problem ihrer Absteckung*. Dissertation, Technische Hochschule Hannover, 1948.
- MEGYERI, J.: Maßgebende geometrische Ausbildung von Eisenbahngleisbogen für höhere Geschwindigkeiten. Archiv für Eisenbahntechnik Nr. 36(1981)68...71.
- MÖLZER, P.; ZUREK, R.: *Trassierungselemente für Schnellbahnen mit elektromagnetischer Schwebetechnik*. Eisenbahntechnische Rundschau 26(1977)4,197...206.
- MÖLZER, P.; STÖCKL, R.: *Trassierungselemente für Schnellbahnen*. Schriftenreihe des wissenschaftlichen Studiengangs Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, Nr. 6(1982)43...50.
- MORITZ, H.: *Geodetic Reference System 1980*. Bulletin Geodesique 54(1980)395...495.
- PSARIANOS, B.: *Ein Beitrag zu der Entwicklung des räumlichen Trassierungsprozesses von Verkehrswegen und insbesondere von Straßen*. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 113, 1982.
- RUCH, O.: *Uebergangsbogen*. Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Neue Folge 40(1903)3,59...62 und 4,71...74.
- RUTISHAUSER, H.: *Vorlesungen über numerische Mathematik I*. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1. Auflage 1976.
- SCHMIDT, J.: *Asymptotische Einschließung bei konvergenzbeschleunigenden Verfahren*. Numerische Mathematik 8(1966)2,105...113.
- SCHNÄDELBACH, K.: *Berechnung der geodätischen Linien durch konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel*. Deutsche Geodätische Kommission, München, Reihe C, Nr. 185, 1972.
- SCHNÄDELBACH, K.: *Transformationen mit ebenen konformen Koordinaten*. Festschrift Kobold, Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, Fachblatt III/IV(1975)166...171.
- SCHÖDLBAUER, A.: *Rechenformeln und Rechenbeispiele zur Landesvermessung, Teil 1*. Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1. Auflage 1981.
- SCHRAMM, G.: *Beitrag zur Gleisbogengestaltung für hohe Fahrgeschwindigkeiten*. Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Neue Folge 71(1934)23,427...434.
- SCHRAMM, G.: *Entwicklung und Stand der Übergangsbogenfrage*. Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Neue Folge 74(1937)10,175...184.
- SCHUHR, P.: *Ein HP9830-Standardprogramm zur Berechnung von Absteckungsmaßen für vermarkte Gleise*. Der Eisenbahningenieur 29(1978)7,327...331.
- SCHUHR, P.: *Exakte Berechnung des Übergangsbogens mit parabelförmig geschwungener Krümmungslinie*. Zeitschrift für Vermessungswesen 104(1979)5,197...203.
- SCHUHR, P.: *Reihenentwicklungen für die Einrechnung des Übergangsbogens mit sinusförmig modulierter Krümmungslinie*. Zeitschrift für Vermessungswesen 105(1980)9,426...440.
- SCHUHR, P.: *Reihenentwicklungen zur Berechnung des Übergangsbogens von BLOSS*. Vermessungswesen und Raumordnung 45(1983)8,420...425.
- SOMMERFELD, A.; FUES, E.: *Vorlesungen über theoretische Physik, Band 1: Mechanik*. Harri Deutsch Verlag, Thun und Frankfurt(M). Nachdruck der 8. Auflage 1977.
- STIEFEL, E.: *Einführung in die numerische Mathematik*. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1. Auflage 1961.
- STOER, J.: *Über zwei Algorithmen zur Interpolation mit rationalen Funktionen*. Numerische Mathematik 3(1961)285...304.
- STOER, J.; BULIRSCH, R.: *Einführung in die Numerische Mathematik II*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg und New York, 1. Auflage 1973.
- STOFFEL, F.: *Geometrische und kinematische Probleme der Gestaltung von Straßen in Grund- und Aufriß*. Dissertation, Universität Bonn 1969.
- STRUBECKER, K.: *Differentialgeometrie I*. Sammlung Götschen, Band 1113/1113a. Walter de Gruyter & Co Verlag, Berlin, 2. Auflage 1964.
- TORGE, W.: *Geodäsie*. Walter de Gruyter, Berlin und New York, 2. Auflage 2003.

- VOJACEK, L.: *Ueberhöhung der Geleise in Curven*.
Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure 12(1868)
10,617...624.
- VOJACEK, L.: *Ein Diagramm für Uebergangscurven*.
Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Neue
Folge 14(1877)2,48...52.
- WATOREK, K.: *Übergangsbogen*. Organ für die Fort-
schritte des Eisenbahnwesens, Neue Folge 44(1907)9,
186...189 und 10,205...208.
- WEBER, W.: *Computergerechte Methoden zur Berech-
nung von Gleisnetzen unter Berücksichtigung geome-
trischer und dynamischer Bedingungen*. Deutsche
Geodätische Kommission, München, Reihe C, Nr.
158, 1970.
- ZEUGE, H.: *Bautechnische Planungskriterien für die
Neubaustrecken der Deutschen Bundesbahn im Rah-
men der Zielsetzungen des Europäischen Infrastruk-
tur-Leitplans*. Schienen der Welt 6(1975)3,153...178.

Anhang Ergänzungen zu den Formelherleitungen

A.1 Übergang von (5.10) nach (5.11)

$$\begin{aligned}
 \vec{o}^{\prime 2} = |\vec{o}'|^2 &= \cos^2 \varphi \cdot k^2 \cdot \cos^4 \nu + \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \nu \cdot \hat{k}^2 + 2 \cdot \cos \varphi \cdot k \cdot \cos^2 \nu \cdot \sin \varphi \cdot \sin \nu \cdot \hat{k} \\
 &+ \sin^2 \varphi \cdot k^2 \cdot \cos^4 \nu + \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \nu \cdot \hat{k}^2 - 2 \cdot \sin \varphi \cdot k \cdot \cos^2 \nu \cdot \cos \varphi \cdot \sin \nu \cdot \hat{k} \\
 &+ \cos^2 \nu \cdot \hat{k}^2 \\
 &= k^2 \cdot \cos^4 \nu + \hat{k}^2
 \end{aligned}$$

A.2 Zu (5.15)

$$\begin{aligned}
 \text{STRUBECKER 1964, Seite 169, (11.10) und (11.11): } \quad \tan \alpha &= \frac{p}{a} \quad \kappa = \frac{a}{a^2 + p^2} \\
 \alpha \rightarrow \nu \quad \text{und} \quad a \rightarrow R: \quad \tan \nu &= \frac{p}{R} \rightarrow p = r \cdot \tan \nu \\
 \kappa &= \frac{R}{R^2 + p^2} \rightarrow \kappa = \frac{R}{R^2 + R^2 \cdot \tan^2 \nu} = \frac{1}{R \cdot (1 + \tan^2 \nu)}
 \end{aligned}$$

A.3 Übergang von (5.29) nach (5.33) durch Einsetzen von (5.30) bis (5.32) in (5.29) (nur Zähler Z)

$$\begin{aligned}
 Z &= y' \cdot x'' \cdot z''' + x' \cdot z'' \cdot y''' + z' \cdot y'' \cdot x''' - y' \cdot z'' \cdot x''' - x' \cdot y'' \cdot z''' - z' \cdot x'' \cdot y''' \\
 &= (-\sin^2 \varphi \cdot k \cdot \cos^3 \nu + \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu \cdot \hat{k}) \cdot z''' \\
 &+ (-\cos \varphi \cdot \cos^2 \nu \cdot \hat{k}) \cdot y''' \\
 &+ (\cos \varphi \cdot k \cdot \sin \nu \cdot \cos^2 \nu + \sin \varphi \cdot \sin^2 \nu \cdot \hat{k}) \cdot x''' \\
 &- (\sin \varphi \cdot \cos^2 \nu \cdot \hat{k}) \cdot x''' \\
 &- (-\cos^2 \varphi \cdot k \cdot \cos^3 \nu - \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu \cdot \hat{k}) \cdot z''' \\
 &- (\sin \varphi \cdot k \cdot \sin \nu \cdot \cos^2 \nu - \cos \varphi \cdot \sin^2 \nu \cdot \hat{k}) \cdot y''' \\
 &= (-k \cdot \cos^3 \nu) \cdot z''' \\
 &+ (\sin \varphi \cdot k \cdot \sin \nu \cdot \cos^2 \nu - \cos \varphi \cdot \hat{k}) \cdot y''' \\
 &+ (\cos \varphi \cdot k \cdot \sin \nu \cdot \cos^2 \nu + \sin \varphi \cdot \hat{k}) \cdot x''' \\
 &= k \cdot \sin \nu \cdot \cos^3 \nu \cdot \hat{k}^2 + k \cdot \cos^4 \nu \cdot \hat{k}' \\
 &- \sin^2 \varphi \cdot k^3 \cdot \sin \nu \cdot \cos^5 \nu + \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot k \cdot k' \cdot \sin \nu \cdot \cos^4 \nu \\
 &+ 3 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot k^2 \cdot \sin^2 \nu \cdot \cos^3 \nu \cdot \hat{k} - \sin^2 \varphi \cdot k \cdot \sin \nu \cdot \cos^3 \nu \cdot \hat{k}^2 \\
 &+ \sin^2 \varphi \cdot k \cdot \sin^2 \nu \cdot \cos^2 \nu \cdot \hat{k}' + \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot k^2 \cdot \cos^3 \nu \cdot \hat{k} - \cos^2 \varphi \cdot k' \cdot \cos^2 \nu \cdot \hat{k} \\
 &- 3 \cdot \cos^2 \varphi \cdot k \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu \cdot \hat{k}^2 \\
 &+ \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \nu \cdot \hat{k}^3 - \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin \nu \cdot \hat{k} \cdot \hat{k}' \\
 &- \cos^2 \varphi \cdot k^3 \cdot \sin \nu \cdot \cos^5 \nu - \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot k \cdot k' \cdot \sin \nu \cdot \cos^4 \nu \\
 &- 3 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot k^2 \cdot \sin^2 \nu \cdot \cos^3 \nu \cdot \hat{k} - \cos^2 \varphi \cdot k \cdot \sin \nu \cdot \cos^3 \nu \cdot \hat{k}^2 \\
 &+ \cos^2 \varphi \cdot k \cdot \sin^2 \nu \cdot \cos^2 \nu \cdot \hat{k}' - \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot k^2 \cdot \cos^3 \nu \cdot \hat{k} - \sin^2 \varphi \cdot k' \cdot \cos^2 \nu \cdot \hat{k} \\
 &- 3 \cdot \sin^2 \varphi \cdot k \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu \cdot \hat{k}^2 \\
 &- \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \nu \cdot \hat{k}^3 + \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin \nu \cdot \hat{k} \cdot \hat{k}' \\
 &= k \cdot \sin \nu \cdot \cos^3 \nu \cdot \hat{k}^2 + k \cdot \cos^4 \nu \cdot \hat{k}' - k^3 \cdot \sin \nu \cdot \cos^5 \nu \\
 &- k \cdot \sin \nu \cdot \cos^3 \nu \cdot \hat{k}^2 + k \cdot \sin^2 \nu \cdot \cos^2 \nu \cdot \hat{k}' - k' \cdot \cos^2 \nu \cdot \hat{k} - 3 \cdot k \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu \cdot \hat{k}^2 \\
 &= k \cdot \cos^2 \nu \cdot \hat{k}' - k^3 \cdot \sin \nu \cdot \cos^5 \nu - k' \cdot \cos^2 \nu \cdot \hat{k} - 3 \cdot k \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu \cdot \hat{k}^2 \\
 &= (k \cdot \hat{k}' - k^3 \cdot \sin \nu \cdot \cos^3 \nu - k' \cdot \hat{k} - 3 \cdot k \cdot \tan \nu \cdot \hat{k}^2) \cdot \cos^2 \nu
 \end{aligned}$$

A.4 Übergang von (5.26) mit (5.7) nach (5.34)

$$\begin{aligned}
 k' &= \frac{dk}{d\bar{l}} = \frac{(g \cdot \sin \nu \cdot \hat{k} - \hat{k}' \cdot v_T^2 - 2 \cdot \hat{k} \cdot v_T \cdot v_T') \cdot \tan \alpha \cdot \cos^2 \nu \cdot v_T^2}{\cos^4 \nu \cdot v_T^4} \\
 &+ \frac{(g \cdot \cos \nu - \hat{k} \cdot v_T^2) \cdot \frac{\alpha'}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \nu \cdot v_T^2}{\cos^4 \nu \cdot v_T^4} \\
 &- \frac{(2 \cdot \cos \nu \cdot \sin \nu \cdot \hat{k} \cdot v_T^2 + 2 \cdot \cos^2 \nu \cdot v_T \cdot v_T') \cdot (g \cdot \cos \nu - \hat{k} \cdot v_T^2) \cdot \tan \alpha}{\cos^4 \nu \cdot v_T^4}
 \end{aligned}$$

A.5 Übergang von (5.38) nach (5.39) (vgl. Abbildung 5.7)

Auf die Grundrissprojektion von $\vec{v}_T$ bezogene Komponenten:

$$\begin{aligned}
 \vec{b}_C &= 2 \cdot [\vec{v}_T \times \vec{\omega}] = 2 \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_y & \vec{e}_x & \vec{e}_z \\ 0 & v_{T,H} & v_{T,V} \\ -\omega_H \cdot \sin A & \omega_H \cdot \cos A & \omega_V \end{pmatrix} \\
 &= 2 \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_y & \vec{e}_x & \vec{e}_z \\ 0 & v_T \cdot \cos \nu & v_T \cdot \sin \nu \\ -\omega \cdot \cos B \cdot \sin A & \omega \cdot \cos B \cdot \cos A & \omega \cdot \sin B \end{pmatrix} \\
 &= 2 \cdot v_T \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} \cos \nu \cdot \sin B - \sin \nu \cdot \cos B \cdot \cos A \\ -\sin \nu \cdot \cos B \cdot \sin A \\ \cos \nu \cdot \cos B \cdot \sin A \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Rotation um die Längsneigung ν ¹:

$$\begin{aligned}
 x_\nu &= x \cdot \cos \nu + z \cdot \sin \nu \\
 z_\nu &= -x \cdot \sin \nu + z \cdot \cos \nu \\
 \vec{b}_C &= 2 \cdot v_T \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \nu & \sin \nu \\ 0 & -\sin \nu & \cos \nu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \nu \cdot \sin B - \sin \nu \cdot \cos B \cdot \cos A \\ -\sin \nu \cdot \cos B \cdot \sin A \\ \cos \nu \cdot \cos B \cdot \sin A \end{pmatrix} \\
 &= 2 \cdot v_T \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} \cos \nu \cdot \sin B - \sin \nu \cdot \cos B \cdot \cos A \\ 0 \\ \cos B \cdot \sin A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{C,H} \\ 0 \\ b_{C,S} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

A.6 Übergang von (5.41) mit (5.7) nach (5.51)

$$\begin{aligned}
 k' &= \frac{dk}{d\bar{l}} = \frac{(g' \cdot \cos \nu + g \cdot \sin \nu \cdot \hat{k} - \hat{k}' \cdot v_T^2 - 2 \cdot \hat{k} \cdot v_T \cdot v_T' - b'_{C,S}) \cdot \tan \alpha \cdot \cos^2 \nu \cdot v_T^2}{\cos^4 \nu \cdot v_T^4} \\
 &+ \frac{((g \cdot \cos \nu - \hat{k} \cdot v_T^2 - b_{C,S}) \cdot \frac{\alpha'}{\cos^2 \alpha} + b'_{C,H}) \cdot \cos^2 \nu \cdot v_T^2}{\cos^4 \nu \cdot v_T^4} \\
 &- \frac{((g \cdot \cos \nu - \hat{k} \cdot v_T^2 - b_{C,S}) \cdot \tan \alpha + b_{C,H}) \cdot 2 \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu \cdot \hat{k} \cdot v_T^2}{\cos^4 \nu \cdot v_T^4} \\
 &- \frac{((g \cdot \cos \nu - \hat{k} \cdot v_T^2 - b_{C,S}) \cdot \tan \alpha + b_{C,H}) \cdot 2 \cdot \cos^2 \nu \cdot v_T \cdot v_T'}{\cos^4 \nu \cdot v_T^4}
 \end{aligned}$$

¹liefert auf $\vec{v}_T$ bezogene Komponenten