

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

PHILOSOPHISCH-HISTORISCHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE, HEFT 113

Die älteste lateinische Schrift über das
indische Rechnen nach al-Ḥwārizmī

Edition, Übersetzung und Kommentar

von

Menso Folkerts

unter Mitarbeit von

Paul Kunitzsch

MÜNCHEN 1997

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI DER C. H. BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG MÜNCHEN

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
PHILOSOPHISCH-HISTORISCHE KLASSE
ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE, HEFT 113

Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen nach al-Ḥwārizmī

Edition, Übersetzung und Kommentar
von
Menso Folkerts
unter Mitarbeit von
Paul Kunitzsch

Vorgelegt von Herrn Paul Kunitzsch
am 8. November 1996

MÜNCHEN 1997

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI DER C.H. BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG MÜNCHEN

Mit 16 Tafeln

ISSN 0005-710X
ISBN 3 7696 0108 4

© Bayerische Akademie der Wissenschaften, München 1997
Texterfassung durch den Autor
Reproduktion der Tafeln: Brend'amour, Simhart GmbH & Co., München
Druck und Bindung: C.H.Beck'sche Buchdruckerei, Nördlingen
Gedruckt auf säurefreiem, alterungsbeständigem Papier
(hergestellt aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff)
Printed in Germany

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	V
Kapitel 1: Frühe indische und arabische Texte über das Rechnen	1
Kapitel 2: Frühe lateinische Algorismustraktate	7
Kapitel 3: Leben und Werke von al-Ḥwārizmī	13
Kapitel 4: Handschriften. Bemerkungen zur Edition und Übersetzung	19
Kapitel 5: Edition und Übersetzung von DA	27
Kapitel 6: Kommentar	109
Kapitel 7: Zusammenfassung	157
Summary	163
Anhang 1: Kurzverzeichnis des Inhalts	185
Anhang 2: Verzeichnis der Aufgaben	191
Anhang 3: Glossar	193
Anhang 4: Verzeichnis der im Glossar erwähnten arabischen Wörter	205
Bibliographie	209
Faksimile der Handschrift N	215

VORWORT

Die Ziffern, mit denen heute in weiten Teilen der Welt die Zahlen geschrieben werden, stammen bekanntlich aus Indien und gelangten im Mittelalter über die Araber nach Europa. Auch unser elementares Rechnen geht auf Verfahren zurück, die die Araber benutzten. Die älteste bekannte arabische Schrift über die „indischen Ziffern“ und das Rechnen mit ihnen wurde in der ersten Hälfte des 9. Jahrhunderts in Bagdad von Muḥammad ibn Mūsā al-Ḥwārizmī verfaßt und im 12. Jahrhundert wahrscheinlich in Spanien aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzt. Dieses Werk wurde der Ahnherr für zahlreiche Schriften, die das neue Rechnen lehrten und bald Eingang in den Universitätsunterricht fanden. Aus dem Namen des Autors, über den zu dieser Zeit im Westen nichts mehr bekannt war, entwickelte sich die Bezeichnung „Algorismus“ für das in seiner Schrift gelehrt Rechnen; der Ausdruck „Algorithmus“ hat denselben Ursprung.

Aus heutiger Sicht mag verwundern, daß von der arithmetischen Schrift von al-Ḥwārizmī trotz ihrer Bedeutung bislang keine arabische Handschrift gefunden wurde. So stützt sich unser Wissen über sie auf lateinische Textfassungen aus dem 12. Jahrhundert, die auf sie zurückgehen. Bis vor kurzem war von der Übersetzung ins Lateinische, die damals angefertigt wurde, nur eine Handschrift einer Bearbeitung bekannt, die zudem mitten im Text abbricht. Dieser Codex, der sich heute in Cambridge befindet, ist inzwischen mehrfach ediert und ins Englische, Französische und Russische übersetzt worden. Es gibt aber noch eine zweite Handschrift, die bisher völlig unbekannt war und die den vollständigen Text überliefert. Sie liegt in New York in der Bibliothek der Hispanic Society of America. Mit Hilfe dieses Codex können jetzt erstmals sichere Aussagen über den Inhalt der gesamten Schrift gemacht werden. Allerdings wird in der New Yorker ebenso wie in der Cambridger Handschrift nicht die ursprüngliche Übersetzung aus dem Arabischen überliefert, sondern eine Bearbeitung dieser Übersetzung, die vermutlich noch im 12. Jahrhundert angefertigt wurde; hierbei wurde der Text etwas geglättet und auch durch Einbeziehung westlicher Elemente „latinisiert“. Die beiden Handschriften verkörpern verschiedene Fassungen dieser Bearbeitung, lassen aber ihren gemeinsamen Ursprung erkennen.

In der vorliegenden Arbeit wird die neu gefundene Handschrift erstmals kritisch ediert und ins Deutsche übersetzt. Parallel zur lateinischen Ausgabe des New Yorker Codex wird auch die Fassung der Cambridger Handschrift präsentiert, um Vergleiche zu ermöglichen. Um den Text historisch besser einordnen zu können, wird auf die Entstehung der neuen Ziffern und das Rechnen mit ihnen bei den Indern und Arabern (Kapitel 1) ebenso eingegangen wie auf frühe lateinische Texte, die auf der Schrift von al-Ḥwārizmī beruhen (Kapitel 2). Kapitel 3 informiert über Leben und Werk von al-Ḥwārizmī. In Kapitel 4 werden die beiden Handschriften beschrieben, in denen der lateinische Text überliefert ist; es werden die früheren Ausgaben und Übersetzungen des Cambridger Codex erwähnt und die Prinzipien dargestellt, nach denen bei

der vorliegenden Edition verfahren wurde. Diese bildet zusammen mit der deutschen Übersetzung das Kapitel 5. In Kapitel 6 werden die einzelnen Abschnitte der Schrift kommentiert, wobei auch auf Beziehungen zu anderen arabischen und lateinischen Texten hingewiesen wird. Kapitel 7 bringt eine Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse. Zur leichteren Information über die Schrift gibt es eine Kurzdarstellung des Inhalts der einzelnen Abschnitte (Anhang 1) und eine Auflistung der Aufgaben, die im Text behandelt werden (Anhang 2). Als Anhang 3 folgt ein Glossar der lateinischen Fachausdrücke mit ihrer deutschen Entsprechung und ihren arabischen Äquivalenten (soweit diese aus einem Vergleich des lateinischen Textes mit anderen einschlägigen arabischen Schriften erschlossen werden können). Anhang 4 gibt ein Verzeichnis der im Glossar erwähnten arabischen Wörter. Den Abschluß des Bandes bilden die Bibliographie und ein Faksimiledruck des Textes in der New Yorker Handschrift. Schließlich gibt es noch eine ausführliche Zusammenfassung des Inhalts dieser Arbeit in englischer Sprache.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, all denen zu danken, die mir bei der Arbeit an diesem Band geholfen haben. Besonderen Dank schulde ich Dr. H. L. L. Busard (Venclo), von dessen einzigartigem Wissen über die mittelalterliche westliche Mathematik ich jetzt schon seit fast 30 Jahren profitieren kann, sowie Prof. Dr. Paul Kunitzsch und Dr. Richard Lorch (beide München), die mir auf alle das Arabische betreffende Fragen stets bereitwillig antworteten. Ohne die Mitarbeit von Prof. Kunitzsch, der seine hervorragenden philologischen und wissenschaftshistorischen Kenntnisse zur Verfügung stellte, hätte das Buch in dieser Form nicht entstehen können. Zu Dank verpflichtet bin ich auch Herrn Gerhard Brey, M.A., der technische Probleme bei der Erstellung der Druckfassung in bewährter Weise löste. Für die Editionen wurde das Editionsprogramm EDMAC benutzt (John Lavagnino / Dominik Wujastyk). Die Hispanic Society of America gestattete freundlicherweise den Druck eines Faksimiles ihrer Handschrift. Schließlich danke ich der Bayerischen Akademie der Wissenschaften für die Aufnahme des Bandes in ihre „Abhandlungen“ und der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung für die Betreuung des Drucks der Arbeit.

München, 22. Juni 1996

Menso Folkerts

KAPITEL 1

FRÜHE INDISCHE UND ARABISCHE TEXTE ÜBER DAS RECHNEN

Das Dezimalsystem mit unseren 9 Ziffern und der Null stammt aus Indien. Wann es dort entstanden ist, läßt sich nicht sicher feststellen; die Meinungen indischer und nichtindischer Wissenschaftler differieren in diesem Punkt stark¹. Unbestritten ist, daß sich die Zahlzeichen aus den Brāhmī-Ziffern entwickelt haben. Zunächst gab es Individualzeichen für die Einer und für die Zehner. Der entscheidende Schritt bestand darin, daß irgendwann die Zeichen über 10 nicht mehr geschrieben wurden, so daß durch Aneinanderreihung der Einerziffern ein Stellenwertsystem auf der Basis 10 entstand.

Man nimmt an, daß das dezimale Positionssystem schon in den ersten Jahrhunderten n. Chr. bekannt war. Als ältestes Beispiel von Zahldarstellungen auf Inschriften gilt die Gurjara-Inschrift aus dem Jahre 595. Seit dem 8. Jahrhundert steigt die Zahl von Inschriften und Manuskripten mit Ziffern im Positionssystem. Die Null in Kreisform ist in Indien erst seit 870 nachweisbar (Gwalior-Inschriften); sie heißt *śūnya* (= das Leere). In anderen Dokumenten wird die Null als Punkt dargestellt². Früher als in Indien, nämlich schon im 7. Jahrhundert, ist das „indische“ Dezimalsystem in Inschriften aus Südostasien belegt (Kambodscha, Sumatra, Java).

Spätestens im 7. Jahrhundert war das dezimale Positionssystem der Inder auch außerhalb Indiens bei Wissenschaftlern bekannt. Der syrische Gelehrte Severus Sēbōkt erwähnt um 662 die indischen Ziffern und rühmt, „daß ihre Zahlenschreibweise, die mit Hilfe von 9 Zeichen vorgenommen wird, über jedes Lob erhaben sei“ [Sezgin 1974, S.20]. Somit sind schon vor den Übersetzungsaktivitäten der Araber Gelehrte anderer Nationen im Nahen Osten mit den neuen Ziffern in Berührung gekommen.

Die wichtigsten Quellen, aus denen wir unser Wissen über die indische Mathematik schöpfen, stammen von Āryabhaṭa I, Brahmagupta, Mahāvīra, Śrīdhara und Bhāskara II. Āryabhaṭa I verfaßte im Jahre 498/499 in Versform eine Abhandlung über Astronomie und Mathematik (*Āryabhaṭīya*), in der auch ein System für die mündliche Wiedergabe von Zahlen beschrieben und arithmetische Aufgaben gelöst werden. Inhaltsreicher ist die „Vervollkommnung der Lehre Brahmas“ (*Brāhmasphuṭasiddhānta*), die Brahmagupta um 628 verfaßte. Drei Kapitel des ersten Buchs sind der Arithmetik gewidmet. Um 850 schrieb Mahāvīra seinen „Kurzen Lehrgang der Lehre vom Rechnen“ (*Gaṇita-sāra-saṅgraha*). Śrīdhara verfaßte wohl um 990 mehrere Abhandlungen über die Lehre vom Rechnen, insbesondere zwei Schriften *Pāṭiganita* und *Triśatikā*. Der Höhepunkt der indischen Mathematik ist der „Kranz der Wissenschaften“ (*Sid-*

¹Siehe z.B. [Bose / Sen / Subbarayappa 1971, S.175-179]; [Ifrah 1986, Kap. 31]; [Smith 1925, S.65-72]; [Juschkevitch 1964a, S.102-109]; [Tropfke 1980, S.43-45]; [Lemay 1982].

²Einen Überblick über die Entwicklung der indischen Ziffern und ihre Formen im indischen und arabischen Bereich findet man in [Tropfke 1980, S.66].

dhānta-śīromaṇi), den Bhāskara II um 1150 schrieb. Der erste Teil mit dem Titel *Līlāvati* behandelt hauptsächlich die Arithmetik und Geometrie³.

Die meisten indischen mathematischen Schriften geben allgemeine Regeln in Form von Merkversen; Zahlenbeispiele wurden oft erst von Kommentatoren hinzugefügt. Auch die Arithmetik wurde in eine große Zahl von Regeln aufgegliedert. So nennt Śrīdhara acht Rechenarten mit ganzen Zahlen einschließlich Quadrieren und Bilden der dritten Potenz, ferner das Radizieren; unter „Addition“ und „Subtraktion“ behandelt er Aufgaben über arithmetische Folgen und Reihen.

Sämtliche komplizierteren Berechnungen wurden von den Indern zunächst auf dem Rechenbrett mit Hilfe von Muscheln vorgenommen; geschriebene Ziffern wurden lange Zeit nicht zum Rechnen, sondern nur zur Angabe von Zahlen in Texten benutzt. Später ging man dazu über, schriftlich auf einem Brett zu rechnen, das mit Staub oder Sand bedeckt war. Die Ziffern wurden darauf mit Hilfe eines gespitzen Stäbchens geschrieben, und Zwischenergebnisse wurden „weggewischt“. Man konnte Rechnungen von links nach rechts oder von rechts nach links durchführen. Für das Multiplizieren gab es verschiedene Verfahren, u.a. eines, bei dem die Stellen des Multiplikanden nach und nach gelöscht und durch die Teile des Produkts ersetzt wurden. Bei der Division wird der Divisor unter den Dividenden geschrieben; vom Dividenden wird ein geeignetes Vielfaches des Divisors subtrahiert; dann wird die Operation mit dem Rest und dem verschobenen Divisor wiederholt.

Für das Rechnen im Stellenwert ist es notwendig, das Operieren mit der Null zu kennen. Daher findet man – in Worten formuliert – bei den indischen Mathematikern die folgenden Regeln: $a \pm 0 = a$, $0 + a = a$, $a - a = 0$, $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, $0 : a = 0$.

Die Bruchrechnung wurde von den Indern ausführlich behandelt. Der Zähler wurde über den Nenner geschrieben (ohne Bruchstrich); bei gemischten Zahlen setzte man den ganzzahligen Anteil noch über den Zähler. Für das Rechnen mit Brüchen gibt Śrīdhara 14 Regeln an. Für die Addition wird nicht der Hauptnenner, d.h. das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner, gebildet, sondern einfach das Produkt der Nenner. Die Stammbrüche spielten bei den Indern eine große Rolle, jedoch wurde auch mit gewöhnlichen Brüchen gerechnet. Demgegenüber fanden die Sexagesimalbrüche in Indien keine größere Verbreitung, anders als bei den Griechen, wo sie für astronomische Berechnungen selbstverständlich benutzt wurden.

Eine Beschreibung der Ausziehung einer Quadrat- oder Kubikwurzel findet man schon bei Āryabhaṭa I, allerdings in einer schwer verständlichen Form. Das Verfahren, das in ähnlicher Weise auch von Śrīdhara dargestellt wird, beruht natürlich auf der Formel für das Quadrat eines Binoms. Wichtig ist die ständige Verwendung des verdoppelten Wurzelteils und die Halbierung des Ergebnisses am Ende der Rechnung. Brüche $\frac{a}{b}$, deren Nenner keine Quadratzahl ist, wurden auf die Form $\frac{ab}{b^2}$ gebracht. Um eine größere Genauigkeit beim Radizieren zu erreichen, wurde der Zähler mit einer geraden Potenz von 10 multipliziert. Bei Āryabhaṭa I und Brahmagupta findet man auch die Regel $\sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$ zur angenäherten Bestimmung der Quadratwurzel. All diese Verfahren lassen sich auch bei al-Ḥwārizmī und anderen arabischen Autoren

³Die grundlegende Darstellung zur indischen Mathematik ist noch immer [Datta / Singh 1935-1938]. Eine gute Zusammenstellung gibt [Juschkewitsch 1964a, S.89-174]. Die folgenden Ausführungen beruhen auf Juschkewitschs Darstellung der Arithmetik der Inder (S.109-118).

nachweisen. Der Fachausdruck im Sanskrit für „Wurzel“ (*mūla*) bezeichnet ebenso die Wurzel einer Pflanze wie die Basis oder den Ursprung. Er wurde im Arabischen durch *ǧidr* und dies im Lateinischen durch *radix* wiedergegeben.

Da während des Rechenvorgangs die Zwischenergebnisse ausgelöscht wurden, war eine Überprüfung des Rechnens nur schwer möglich. Wahrscheinlich aus diesem Grunde war die Neunerprobe bei den Indern sehr populär, um die Richtigkeit der Rechnung zu bestätigen; demgegenüber wurde von der Möglichkeit, eine Rechnung mit Hilfe der inversen Operation zu überprüfen, kaum Gebrauch gemacht. Auch wenn sich eine Beschreibung der Neunerprobe in indischen Texten erst im 10. Jahrhundert feststellen läßt, wird man annehmen dürfen, daß sie schon vorher bekannt war, da sie auch von arabischen Mathematikern angewandt wurde.

Bevor die Araber die indischen Verfahren, Zahlen darzustellen und mit ihnen zu rechnen, kennenlernten, benutzten sie im täglichen Leben für die Zahldarstellung die Formen, die in den von ihnen eroberten Gebieten üblich waren⁴. Dies war im östlichen Mittelmeerraum das auf dem Alphabet beruhende griechische Zahlssystem. Um 760 waren die indischen Ziffern und die Null zumindest in Gelehrtenkreisen bekannt, da sie Ġābir ibn Ḥaiyān in jener Zeit erwähnt. Das älteste bisher bekannte arabische Dokument mit indischen Ziffern ist ein Papyrus, der die Jahreszahl 260 H. (= 873/74 n.Chr.) enthält. Die Null ist dabei durch einen Punkt dargestellt⁵. In der Folgezeit verbreiteten sich die indischen Ziffern im gesamten arabischen Bereich bis nach Innerasien und Spanien. Im *Fihrist* (um 987) gibt es einen Abschnitt über die Schreibweise der Zahlen bei den Indern; dort wird erwähnt, daß man 9 Ziffern kannte und die Zehner, Hunderter, Tausender durch 1, 2 bzw. 3 Punkte unter den entsprechenden Zahlzeichen kennzeichnete⁶. Die Ziffernformen bei den Arabern waren nicht einheitlich. Vielmehr entwickelten sich zwei Systeme: eines, das in Ägypten und in den Ländern östlich davon verbreitet war, und ein anderes, das in Nordafrika und in Spanien benutzt wurde. Beide unterscheiden sich in der Form mehrerer Ziffern⁷. Das bisher älteste bekannte ostarabische Zeugnis für alle 9 Ziffern und die Null ist eine Handschrift, die um 970 in Iran geschrieben wurde⁸. Auch aus der Folgezeit gibt es zahlreiche Belege aus dem östlichen Bereich⁹. Dagegen kennt man die Formen der westarabischen Ziffern erst aus späteren Textzeugnissen¹⁰.

⁴Zu den verschiedenen Möglichkeiten der Araber, Zahlen wiederzugeben, siehe die zusammenfassende Darstellung in [Tropfke 1980, S.49-59], mit Hinweisen auf weiterführende Literatur.

⁵Siehe [Smith / Karpinski 1911, S.56]. Abbildung (Photographie) bei [Grohmann 1935], Tafel LVI, 12 (dazu Text S.453f. [Nr.12]). Nach W. Diem, Köln, (Brief vom 6.8.1996) ist die Auffassung als Jahreszahl nicht sicher, da nicht – wie sonst in den Papyri üblich – das Wort „Jahr“ davorgesetzt ist. [Gandz 1931, S.394] bezeichnet diese Ziffern irrtümlich als „earliest Arabic documents containing the ghubār numerals“.

⁶[Flügel 1871-1872, 1, S.18-19]. Siehe hierzu [Karpinski 1910-1911].

⁷Die verschiedenen Formen sind z.B. wiedergegeben in [Tropfke 1980, S.66].

⁸Paris, BN, ar. 2457, f.81r-86r. Die dort benutzten Ziffernformen sind z.B. wiedergegeben in Zeile 3 der Tafel in [Smith / Karpinski 1911, S.69].

⁹Z.B. sind die Ziffernformen einer Handschrift, die im Jahre 1082 geschrieben wurde (Oxford, BL, Or. 516), wiedergegeben in [Irani 1955-1956, S.4-10, Spalte A]. In demselben Aufsatz sind auch Ziffernformen aus jüngeren ostarabischen Handschriften abgebildet.

¹⁰Die ältesten Beispiele, die bei [Labarta / Barceló 1988] angegeben sind, stammen aus dem 14. Jahrhundert. Ziffern mit westarabischem (maghrebinischem) Duktus, die recht alt zu sein scheinen

Im Jahre 773 gelangte mit einer indischen Gesandtschaft auch ein Gelehrter mit astronomischen und mathematischen Kenntnissen an den Hof des Kalifen al-Manṣūr nach Bagdad. Durch ihn wurde die indische Astronomie am Hof des Kalifen bekannt. Dieser veranlaßte eine arabische Übersetzung eines indischen astronomischen Textes¹¹. Im allgemeinen wird dies als Anfang der Beschäftigung mit der Astronomie bei den Arabern angesehen. Allerdings dürften schon vorher aus der Antike stammende astronomische bzw. astrologische Kenntnisse vorhanden gewesen sein, wobei aus Persien übernommenes griechisches Wissen eine Rolle spielte. So wurde z.B. 762 bei der Grundsteinlegung für die Residenz Bagdad ein Kollegium von Astrologen einberufen, das die geeignete Stunde zu bestimmen hatte. Hierfür waren die wichtigsten theoretischen Grundkenntnisse Voraussetzung, die die Araber nur von außen her kennengelernt haben können.

Etwas später, unter dem Kalifen al-Ma'mūn (reg. 813-833), erreichte in Bagdad die Übersetzertätigkeit ihren Höhepunkt, durch die die wichtigsten griechischen Texte zur Mathematik und Astronomie ins Arabische übersetzt wurden. Dieser Phase der Rezeption folgt unmittelbar die Assimilation des fremden Wissens und, darauf aufbauend, die eigenständige Weiterentwicklung.

Zu den frühesten Gelehrten, die mathematische Schriften in arabischer Sprache verfaßten, gehört Muḥammad ibn Mūsā al-Ḥwārizmī (um 780 – 850). Er lebte unter al-Ma'mūn und ist vor allem durch seine Arbeiten zur Arithmetik und Algebra bekannt, die den Anfang der arabischen Aktivitäten auf diesen Gebieten markieren. Während seine Schrift zur Algebra auf arabisch erhalten ist, gibt es von der Arithmetik nur lateinische Fassungen. Mit ihnen beschäftigt sich der vorliegende Band. Auf al-Ḥwārizmī's Abhandlung zur Algebra und seine sonstigen Schriften wird im Kapitel 3 eingegangen.

Die ältesten Texte über das Rechnen der Inder, die in arabischer Sprache erhalten sind, sind mehr als hundert Jahre jünger als die Schrift von al-Ḥwārizmī. Ihre Autoren, al-Uqlīdisī, Kūšyār ibn Labbān und al-Baḡdādī, lebten im 10. bzw. im frühen 11. Jahrhundert.

Abū l-Ḥasan Aḥmad b. Ibrāhīm al-Uqlīdisī, über dessen Leben nichts bekannt ist, verfaßte im Jahr 952/953 in Damaskus eine Schrift über das indische Rechnen unter dem Titel *al-Fuṣūl fī l-ḥisāb al-hindī* („Abschnitte über das indische Rechnen“). Sie ist die älteste in arabischer Sprache erhaltene Schrift über das neue Rechnen¹². Die Abhandlung wurde 1973 nach der einzigen Handschrift Istanbul, Yeni Cami 802 (datiert: Juli 1157) ediert [Saidan 1973] und später mit einem umfangreichen Kommentar ins Englische übersetzt [Saidan 1978]. Das Werk ist in vier Bücher eingeteilt. Buch I behandelt die indische Arithmetik, soweit sie damals bei den Arabern bekannt war. Buch II geht auf Merkwürdigkeiten und Sonderfälle des in Buch I behandelten Rechnens ein. Buch III enthält Antworten auf Fragen zum indischen Rechnen, während in

und schon aus dem 12. Jahrhundert stammen könnten, findet man in einer Notiz auf dem Vorsatzblatt der Handschrift Tunis, Nationalbibliothek 07116. Diese Handschrift, die die arabische Übersetzung des „Almagest“ durch Ishāq ibn Ḥunain enthält, wurde im Jahr 1085 geschrieben. In der betreffenden Notiz werden die Jahre von Adam bis zu Mohammed angegeben.

¹¹Siehe [Juschkewitsch 1964a, S.179] und [Saidan 1978, S.6].

¹²Siehe [Sezgin 1974, S.296] und [Saidan 1978, S.17-18].

Buch IV das indische Rechnen mit Papier und Tinte, ohne Tafel und „Wegwischen“, dargestellt wird [Saidan 1978, S.353].

Abū l-Ḥasan Kūšyār ibn Labbān lebte in der 2. Hälfte des 10. Jahrhunderts¹³. Außer einem astronomischen Tafelwerk, das er um 964 verfaßte, stammt von ihm auch eine Schrift „Über die Elemente des Rechnens der Inder“ (*Fī uṣūl ḥisāb al-hind*), die 1965 im Faksimile mit englischer Übersetzung nach der Handschrift Istanbul, Aya Sofya 4857 (datiert: 1283/84), unter Berücksichtigung der hebräischen Übersetzung von Shalom ben Joseph ‘Anabi herausgegeben wurde [Levey / Petruck 1965]. Die Schrift besteht aus zwei Teilen. Der erste behandelt das Rechnen mit ganzen Zahlen, der zweite das Rechnen mit Sexagesimalbrüchen und das Ausziehen der Kubikwurzel. Im einzelnen werden folgende Themen behandelt¹⁴:

Buch 1: ZG, AG, SG+HG, MG+MBs, DG+DB, QG+QB, MGp+DGp+QGp.

Buch 2: Multiplikationstafel, ABs, SBs, HBs, MBs, DBs, QBs, MBp+DBp+QBp, KG.

Etwas jünger als die beiden genannten Schriften ist die Abhandlung von Abū Maṣṣūr ‘Abd al-Qāhir ibn Ṭāhir al-Baġdādī, der 1037 in Isfarāyīn starb¹⁵. Seine Schrift mit dem Titel *Kitāb at-takmila fī l-ḥisāb* (Buch über die Vollendung des Rechnens), die 1985 nach der Handschrift Istanbul, Laleli 2708 (geschrieben vor 1232/33), und der jüngeren Handschrift Kairo, Riyāḍa 793, herausgegeben wurde [Saidan 1985], behandelt das Rechnen mit ganzen Zahlen und mit Brüchen sowie die Bestimmung von Quadrat- und Kubikwurzeln. Im einzelnen sind die sieben Bücher folgenden Themen gewidmet¹⁶:

Buch I: Grundregeln des indischen Rechnens, auf der Tafel (*taht*), nicht mit der Hand

Buch II: Grundregeln des indischen Rechnens mit Brüchen

Buch III: Grundregeln des Rechnens mit Graden und Minuten

Buch IV: Handrechnen

Buch V: Wurzel- und Kuben-Rechnen

Buch VI: Über die spezifischen Eigenschaften (*ḥawāṣṣ*) der Zahlen

Buch VII: Über Geschäftsrechnen (*mu‘āmalāt*) und andere Fragen.

Neben den Schriften von al-Uqlīdisī, Kūšyār ibn Labbān und al-Baġdādī gibt es zahlreiche andere arabische Texte über das Rechnen¹⁷. A. S. Saidan hat in seiner grundlegenden Arbeit [Saidan 1978] die bisher untersuchten Schriften mit der von al-Uqlīdisī verglichen und ist dabei auch auf indische Werke eingegangen. Da die späteren arabischen Traktate zum Verständnis der arithmetischen Abhandlung von al-Ḥwārizmī nichts Neues beitragen, können sie hier vernachlässigt werden.

¹³Zu Kūšyār ibn Labbān siehe [Sezgin 1974, S.343-345] und [Levey / Petruck 1965, S.3-6].

¹⁴Hier und im folgenden werden die Themen durch zwei große und gegebenenfalls einen kleinen Buchstaben abgekürzt. Der erste große Buchstabe bezeichnet die Rechenart (Z = Zahlenschreibweise, A = Addition, S = Subtraktion, H = Halbierung, V = Verdopplung, M = Multiplikation, D = Division, Fg = geometrische Folgen, Fa = arithmetische Folgen, Q = Quadratwurzel, K = Kubikwurzel), der zweite Buchstabe gibt an, ob es sich um ganze Zahlen (G) oder Brüche (B) handelt. Falls zwischen Sexagesimal- und gewöhnlichen Brüchen unterschieden wird, ist noch ein kleiner Buchstabe hinzugefügt (Bs = Sexagesimalbruch, Bg = gewöhnlicher Bruch). Ein angehängtes p bezeichnet die Probe zu der jeweils angegebenen Rechenart.

¹⁵Siehe [Sezgin 1974, S.357].

¹⁶Siehe auch die Auflistung in [Saidan 1978, S.23-28].

¹⁷Eine Auflistung findet man bei [Saidan 1978, S.3-5. 19].

Die edierten Schriften von al-Uqlidīsī, Kūšyār und al-Baġdādī wurden für diese Arbeit zu Vergleichszwecken herangezogen. Die im Kommentar und im Glossar eingeführten Zitate arabischer Termini sind diesen Texten entnommen.

KAPITEL 2

FRÜHE LATEINISCHE ALGORISMUSTRAKTATE

Schon bevor arabisches Wissen durch lateinische Übersetzungen zugänglich wurde, kannte man im Abendland die indischen Ziffern. Der älteste Beleg sind zwei lateinische Handschriften, die gegen Ende des 10. Jahrhunderts in Spanien entstanden, in denen die Ziffern von 1 bis 9 in der westarabischen Form wiedergegeben sind, allerdings nicht im Zusammenhang mit einem mathematischen Text¹.

Eine größere Verbreitung erlangten die Ziffernformen dadurch, daß sie auf dem Rechenbrett (Abakus) benutzt wurden. Über seinen Gebrauch informieren zahlreiche Arbeiten, die vom Ende des 10. bis zum 12. Jahrhundert entstanden. Die älteste derartige Schrift stammt von Gerbert (um 940 – 1003), der von 999 bis 1003 als Sylvester II. den Papstthron inne hatte. Gerbert hielt sich 967–970 in der spanischen Mark (südlich der Pyrenäen) auf. Im Kloster Ripoll oder in Vich dürfte er die indisch-arabischen Ziffern kennengelernt haben. Gerbert benutzte die Ziffern aber nicht zum schriftlichen Rechnen, sondern, um mit ihrer Hilfe die Steine auf dem Rechenbrett zu markieren; sie dienten als Kopffzahlen, um den Wert eines Rechensteins zu kennzeichnen². Namen für diese Ziffern werden seit dem 11. Jahrhundert sowohl in Texten als auch in Abbildungen des Rechenbretts³ überliefert; z.T. handelt es sich um latinisierte arabische Zahlwörter⁴. Mit dem Aussterben des „Gerbertschen Abakus“ im 12. Jahrhundert verschwand auch die Kenntnis dieser Namen.

Die indischen Ziffern von 1 bis 9 in ihrer westarabischen Form sind auch bekannt unter dem Namen „Ghubar-Ziffern“ (vom arab. *ḡubār* = Staub). Dies ist die Gestalt, in der uns diese Ziffern im Westen auf dem Rechenbrett⁵ und etwas später in den Abhandlungen über das neue Rechnen (dazu siehe unten) begegnen. R. Lemay vertritt die Ansicht, daß die Ghubar-Ziffern in frühen westlichen Handschriften einige Elemente der westgotischen Schrift enthalten und sich daher nur in Spanien in dieser Weise

¹Codex Vigilanus aus dem Kloster Albelda (vollendet 976), heute Escorial, d-I-2, und Codex Emilianus aus San Millán de la Cogolla bei Burgos (vollendet 992), heute Escorial, d-I-1. In beiden Handschriften (d-I-2, f.12v; d-I-1, f.9v) sind die Ziffern 1 bis 9 (ohne Null) in einem Zusatz zum Kapitel III.1 von Isidors *Etymologiae* angegeben, in dem die römischen Zahlwörter behandelt werden; siehe [Smith / Karpinski 1911, S.138]. Die betreffenden Seiten aus beiden Handschriften sind abgebildet in [van der Waerden / Folkerts 1976, S.54. 55].

²Hierzu siehe z.B. [Vogel 1985]. Die maßgebliche Ausgabe von Gerberts mathematischen Schriften ist immer noch [Bubnov 1899]. Die wichtigsten neueren Arbeiten über die arithmetischen Studien Gerberts sind [Lindgren 1976] und [Bergmann 1985].

³Siehe hierzu [Folkerts 1997].

⁴Die üblichen Namenformen sind (von 1 bis 9): *igin*, *andras*, *ormis*, *arbas*, *quimas*, *caltis*, *zenis*, *temenias*, *celentis*; dazu kommt noch das aus dem Griechischen stammende Wort *sipos*, das zunächst nicht die Null bezeichnete, sondern den Merksteins, den man auf dem Abakus benutzte. Zur Deutung der Namen siehe vor allem [Ruska 1917, S.82–92].

⁵Eine Zusammenstellung der Ziffernformen aus der Boethius zugeschriebenen Geometrie II, die in der Tradition Gerberts steht, findet man bei [Folkerts 1970, Tafel 1 und 2].

entwickeln konnten ([Lemay 1977, S.451-459]; [Lemay 1982, S.391-392]). Unterschiede in den Handschriften lassen sich dadurch erklären, daß die Ziffern auf runden Steinchen verzeichnet waren, die in verschiedener Weise auf das Rechenbrett gelegt werden konnten; im allgemeinen können sie durch Drehung ineinander überführt werden⁶.

Der endgültige Durchbruch der indisch-arabischen Ziffern im Westen beginnt mit der Übersetzungstätigkeit aus dem Arabischen im 12. Jahrhundert. Zu den zahlreichen arabischen Werken, die damals vor allem im Bildungszentrum Toledo vom Arabischen ins Lateinische übertragen wurden, gehörte auch das Rechenbuch des arabischen Gelehrten al-Ḥwārizmī. In der lateinischen Bearbeitung dieser Schrift, die hier – wie auch in früheren Publikationen – nach den Anfangsworten *Dixit Algorizmi* mit DA bezeichnet werden soll, sind die wesentlichen Bereiche angesprochen, die auch in der Folgezeit in den Schriften über das neue Rechnen behandelt werden: Schreibweise der ganzen Zahlen; Operationen mit ganzen Zahlen (Addieren, Subtrahieren, Halbieren, Verdoppeln, Multiplizieren, Dividieren); Operationen mit Brüchen (Multiplizieren, Dividieren, Schreibweise, Addieren, Subtrahieren, Verdoppeln, Halbieren); Ausziehen der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen und Brüchen. Unter Benutzung der Abkürzungen für diese Gebiete, die in Kapitel 1 eingeführt wurden, ergibt sich folgende Abfolge: ZG, AG+SG, HG+VG, MG, VGp+MGp, DG, MB, DB+DBp, ZB, AB, SB, VB+HB, MB, DB, QG, QB. Nicht behandelt werden also insbesondere die arithmetischen und geometrischen Folgen und Reihen sowie die Bestimmung der Kubikwurzel⁷.

Wirkungsgeschichtlich bedeutsamer als der auf al-Ḥwārizmī zurückgehende Text DA wurden mehrere darauf beruhende Bearbeitungen des 12. Jahrhunderts. Es handelt sich um drei Schriften bzw. Gruppen von Traktaten: den *Liber Ysagogarum Alchorismi* (LY), den *Liber Alchorismi* (LA) und den *Liber pulveris* (LP). Ein paar Bemerkungen dazu⁸:

Der *Liber Ysagogarum* (LY) ist der Entwurf zu einem Werk, das das ganze Quadrivium umfassen sollte. Von den fünf Büchern behandeln die ersten drei die Arithmetik, das vierte die Geometrie und das fünfte die Astronomie; im Titel des Buchs 4 erscheint auch die Musik. Der Text, den die Handschriften überliefern, differiert teilweise stark⁹. Allard unterscheidet drei Versionen des *Liber Ysagogarum*: LY I, II und III. Im allgemeinen wird angenommen, daß die Grundfassung, LY I, schon vor 1143 entstanden ist, jedoch ist diese Ansetzung nicht unbedingt zwingend¹⁰. In den geometrischen und astronomischen Teilen ist LY I durch hebräische Texte beeinflusst. LY II ist eine auf LY I beruhende, erweiterte Fassung. In einer Handschrift wird gesagt, sie sei *a Magistro*

⁶Siehe hierzu [Beaujouan 1948].

⁷Nähere Informationen zum Inhalt findet man in Kapitel 6.

⁸Nähere Informationen findet man bei André Allard im Zusammenhang seiner Edition dieser Texte [Allard 1992] und in [Allard 1991].

⁹Eine Kurzinformation über den Inhalt des ganzen Werks findet man in [Burnett 1987, S.173-174]. Allard hat nur die arithmetischen Bücher 1-3 herausgegeben. Eine Ausgabe aller Bücher findet man in der unveröffentlichten Dissertation von C. Dickey [1982, S.251-328].

¹⁰Die Jahreszahl 1143 wird in der Handschrift Wien, ÖNB 275, auf f.29r in einer komputistischen Schrift als das „gegenwärtige Jahr“ erwähnt: *Sunt itaque anni domini in presenti 1143*. Diese Schrift folgt unmittelbar auf ein Bruchstück einer verkürzten Fassung von LY I, das auf f.27r von derselben Hand wie der Computus geschrieben wurde. Daraus folgt nur, daß das Jahr 1143 ein *terminus post quem* für die Entstehung der Handschrift Wien 275 war. Über die Entstehungszeit von LY I lassen sich daraus keine zwingenden Schlüsse ziehen. Ähnlich vorsichtig äußert sich auch [Burnett 1996, S.224].

A compositus. Dies hat dazu geführt, daß man Adelard von Bath als Autor angesehen hat. Allard urteilt vorsichtiger; er nimmt lediglich an, daß Buch 4 und 5 von Adelard von Bath – und auch von Petrus Alfonsi – beeinflusst worden sind. **LY III** ist eine andere Bearbeitung des ursprünglichen *Liber Ysagogarum*, die in Frankreich entstand.

Etwas einfacher ist die Situation beim zweiten Text, der auf der „Arithmetik“ von al-Ḥwārizmī beruht: Von diesem sog. *Liber Alchorismi* (**LA**) gibt es nur eine Fassung. **LA** zeigt spanische Einflüsse. Als Autor wird ein „magister Iohannes“ genannt. Es ist unklar, ob dies Johannes von Sevilla (Hispalensis) ist, der zwischen 1133 und 1142 in Toledo lebte und auch zahlreiche astronomische Texte aus dem Arabischen übersetzte¹¹.

Der dritte Text, der sog. *Liber pulveris* (**LP**), ist teilweise mit **LA** identisch, enthält aber auch originelle Teile. Dieser Text wurde früher für eine Bearbeitung von **LA** gehalten, nach Allard ist er aber älter als **LA**.

Die drei Bearbeitungen **LY**, **LA** und **LP** behandeln im Prinzip dieselben arithmetischen Probleme, die man auch in der lateinischen Fassung von al-Ḥwārizmīs „Arithmetik“ findet. Die Darstellung ist – verglichen mit al-Ḥwārizmīs Schrift – ausführlicher und manchmal klarer. Dies gilt insbesondere für **LA/LP**: Man erkennt das Bemühen der Autoren, den Stoff systematisch und gründlich zu präsentieren. In der Reihenfolge der Kapitel gibt es Unterschiede zwischen **LA/LP** und **LY**, wie die folgende Zusammenstellung zeigt¹²:

LA/LP: ZG, AG+AGp, SG+SGp, VG+VGp, HG+HGp, MG+MGp, DG+DGp, MB, DB, ZB, AB, SB, VB, HB, MBg, DBg, QG, QB, QBg.

LY I: ZG, MG, MGp, AG, SG, HG, VG, VGp, DG, DGp+MGp, MB, DB, ZB, AB, SB, VB+HB, MB, DB, QG, QB.

Im 12. Jahrhundert entstand noch eine weitere – wenig verbreitete – Schrift, in der das arabische Rechnen erklärt wurde. Eine der beiden Handschriften nennt „H. Ocreatus“ als Verfasser dieses Traktats *Helceph Saracenicum*¹³. Der Autor kennt die Methoden des Algorismus, benutzt aber die römischen und nicht die arabischen Ziffern und verwendet Termini aus westlichen mathematischen Schriften, z.B. aus Boethius und aus den Abakustraktaten, die in der Tradition Gerberts stehen. Er behandelt nur eine kleine Auswahl der Themen, die mit der neuen Mathematik zusammenhängen, nämlich die Darstellung der Zahlen im Dezimalsystem und dann (nach Zusätzen, u.a. über die Bildung des geometrischen Mittels) die Multiplikation ganzer Zahlen, die Überprüfung mit Hilfe der Division, die Division ganzer Zahlen und die Darstellung des Rests als Bruch¹⁴.

Nicht die Ocreatus zugeschriebene Schrift, sondern die Übersetzung der „Arithmetik“ von al-Ḥwārizmī und die drei auf ihr beruhenden Bearbeitungen wurden zum Vorbild für eine Reihe von Texten über das Rechnen mit den indisch-arabischen Ziffern, die allgemein als „Algorismus-Traktate“ bezeichnet werden. Das Wort „Algorismus“

¹¹Zu den möglichen Autoren, zu denen auch Johannes Ocreatus zu zählen ist, siehe jetzt [Allard 1991, S.242-257], [Allard 1992, S.VIII-XVII und Addenda auf S.269-270] und [Burnett 1996, S.243-244].

¹²Zur Bedeutung der Abkürzungen siehe die Auflistung in Kapitel 1.

¹³Ediert und ins Englische übersetzt in [Burnett 1996, S.261-297]. Der Name „Helceph“ stammt aus dem arabischen *al-ḥisāb*, „das Rechnen“.

¹⁴Siehe auch die zusammenfassende Darstellung bei [Burnett 1996, S.238-241].

geht auf den Namen von al-Hwārizmī zurück, der im Mittelalter (in Unkenntnis der historischen Zusammenhänge) zur Bezeichnung der neuen Verfahren benutzt wurde. Die Algorismus-Schriften wurden zunächst in Latein verfaßt und beschreiben die Darstellung natürlicher Zahlen mit Hilfe der indisch-arabischen Ziffern sowie das Rechnen mit ihnen (einschließlich der Sexagesimal- und gewöhnlichen Brüche). Vom 12. bis zum 15. Jahrhundert wurde eine große Anzahl derartiger Texte geschrieben; wie viele es wirklich sind, ist heute noch nicht bekannt.

Während in DA, LY und LA/LP das Rechnen sowohl mit ganzen Zahlen als auch mit Brüchen behandelt wird, beschäftigen sich die Algorismus-Traktate in der Folgezeit im allgemeinen nur mit einem dieser beiden Gebiete; man unterscheidet zwischen *Algorismus de integris* und *Algorismus de minuciis*. Unter den Schriften über das Rechnen mit ganzen Zahlen gibt es mindestens vier Traktate, die mit großer Wahrscheinlichkeit noch im 12. Jahrhundert entstanden: zwei Algorismen in Londoner Handschriften, die wahrscheinlich auf eine gemeinsame Quelle zurückgehen¹⁵; der sog. „Salem-Algorismus“¹⁶ und ein Text aus Frankenthal¹⁷. Beispiele, die durchgerechnet werden, sind nur im Salem-Algorismus vorhanden. Obwohl die vier Texte hinsichtlich des Umfangs voneinander abweichen, sind die Übereinstimmungen im Inhalt recht groß¹⁸. Folgende Themen werden behandelt¹⁹:

Algorismen in Londoner Handschriften: ZG, AG, SG, VG, HG, MG, DG, Fa, ZG, Zusätze.

Salem-Algorismus: ZG, AG, AGp+SG, VG+VGp+HG, MG, DG, Fg, QG.

Frankenthal-Algorismus: ZG, AG, SG, (VG), HG, MG, DG, QG.

In der 1. Hälfte des 13. Jahrhunderts entstanden zwei Algorismus-Schriften, die sehr schnell ungeheure Verbreitung fanden: das „Carmen de algorismo“ von Alexander de Villa Dei († um 1240) und der „Algorismus vulgaris“ des Johannes de Sacrobosco († 1236 ?). Die Schrift von Alexander de Villa Dei²⁰ ist in Versform geschrieben und besteht aus 284 Hexametern. Etwas jünger ist das Werk von Johannes de Sacrobosco²¹, da in ihm drei Verse aus dem Gedicht von Alexander de Villa Dei zitiert werden. Beide Schriften beschränken sich auf das Rechnen mit ganzen Zahlen. Der Erfolg dieser beiden Schriften liegt sicher in ihrer leichten Faßlichkeit: man stellt relativ knapp die erforderlichen Schritte dar, erläutert sie aber nicht durch Beispiele. Behandelt werden die üblichen Themen, und zwar in dieser Reihenfolge:

Alexander de Villa Dei: ZG, AG, SG+SGp, VG, HG+HGp, MG+MGp, DG+DGp, QG, KG.

Johannes de Sacrobosco: ZG, AG, SG+SGp, HG, VG+VGp+HGp, MG, DG+DGp, Fa, QG, KG.

¹⁵British Library, Royal 15 B IX, f.77v, und Egerton 2261, f.225v-227v; beide ediert in [Karpinski 1921]. Karpinski hält es für möglich, daß der Text in Royal 15 B IX eine Übersetzung aus dem Arabischen sein könnte: „The shorter of the two complete treatises on the Hindu art of reckoning may be a translation direct from the Arabic, possibly of another discussion of arithmetic by Al-Khowarizmi, different from that in the translation published by Boncompagni“ (S.413).

¹⁶Heidelberg, UB, Salem IX.23, f.159v-166v; ediert: [Cantor 1865].

¹⁷Erhalten in Vat. Pal. lat. 288, f.301r-302r; ediert: [Allard 1978].

¹⁸Hierzu siehe [Allard 1978, S.122-128].

¹⁹Zu den Abkürzungen siehe Kapitel 1.

²⁰Herausgegeben [Steele 1922, S.72-80].

²¹Zuletzt herausgegeben in [Pedersen 1983, S.174-201].

Außer den genannten Schriften von Alexander de Villa Dei und Johannes de Sacrobosco entstanden im 13. Jahrhundert im Umfeld von Jordanus Nemorarius eine Reihe von Traktaten, die sich nicht darauf beschränken, die Praxis des neuen Rechnens zu lehren, sondern die auch allgemeinere Fragen wissenschaftlich erörtern²². Die wahrscheinlich älteste Abhandlung dieser Art, die nach ihren Anfangsworten „*Communis et consuetus*“ genannt wird, behandelt die Rechenverfahren mit ganzen Zahlen (die von allgemeinen Sätzen unterbrochen werden) in folgender Reihenfolge: AG, SG, VG, HG, MG, DG, QG. In den Handschriften folgt diesem Traktat eine Abhandlung über Brüche (*Tractatus minutiarum*). Darin wird (neben allgemeinen Sätzen über Proportionen u.a.) auch das Rechnen mit Brüchen gelehrt, und zwar in dieser Reihenfolge: AB, SB, VB, HB, MB, DB, QB. Beim Ausziehen der Quadratwurzel erwähnt der Autor das Verfahren, durch Anhängen von Nullen einen genaueren Wert zu erhalten, mit den Worten: *Supponitur autem ab Algorismi quedam subtilis commoditas in radicis extractione et est huiusmodi* [Eneström 1913-1914, S.53]. Er hat also die Schrift von al-Ḥwārizmī direkt oder indirekt benutzt. Recht verbreitet war eine andere Abhandlung mit dem Titel *Algorismus demonstratus*, die in manchen Handschriften dem „Magister Gernardus“ zugeschrieben wird; sie behandelt das Rechnen mit ganzen Zahlen und das Bruchrechnen. Die Frage der Autorschaft dieser Traktate ist noch nicht endgültig geklärt. Obwohl sie in zahlreichen Handschriften überliefert werden, waren sie bei weitem nicht so bekannt wie die beiden zuvor genannten Abhandlungen.

Noch im 13. Jahrhundert muß eine weitere kleine Schrift über das Bruchrechnen entstanden sein, die in einer Handschrift dem „magister Richardus Anglicus“ zugeschrieben wird²³. Der Autor dieser Abhandlung kannte die Schrift des Gernardus; andererseits war sie Johannes de Lineriis bekannt, der um 1320 seinen *Algorismus de minutiis* schrieb²⁴. Dieser Traktat erlangte für das Bruchrechnen eine ähnlich große Bedeutung wie für das Rechnen mit ganzen Zahlen die Schriften von Johannes de Sacrobosco und von Alexander de Villa Dei. Das Werk von Johannes de Lineriis lehrt die verschiedenen Rechenarten mit Brüchen in folgender Reihenfolge: AB, SB, VB, HB, MB, DB, QB, KB. Es ist wenig originell, eignet sich aber dadurch, daß keine Beweise, sondern nur Regeln und Rechenbeispiele gegeben werden, ähnlich gut wie die Abhandlung von Johannes de Sacrobosco für das Erlernen der Verfahren.

Daher verwundert es nicht, daß die arithmetischen Arbeiten von Johannes de Sacrobosco und Alexander de Villa Dei (ebenso wie der Bruchalgorithmus von Johannes de Lineriis) rasch Eingang in die Universitäten fanden und zu den Standardlehrbüchern der Arithmetik in der Fakultät der *artes liberales* wurden. So ist es erklärlich, daß heute noch von beiden Texten mehrere hundert Handschriften existieren sowie zahlreiche Kommentare und Übersetzungen in die Nationalsprachen. Sie sind (neben der Arithmetik des Boethius) die am weitesten verbreiteten mathematischen Werke des Mittelalters. Anhand der Schriften dieser beiden Autoren wurde an den Universitäten

²²Die verschiedenen Traktate sind bei [Thomson 1976, S.107-112] mit Angabe der Handschriften und der Sekundärliteratur aufgelistet.

²³Incipit: *Minutiarum vulgarium scribes superius numeratorum*. Eine Edition dieser Schrift bereitet H. L. L. Busard vor.

²⁴Ediert bei [Busard 1968].

und in den anderen Gelehrtschulen das Rechnen mit den indisch-arabischen Ziffern erlernt, und auch die Schriften der Rechenmeister gehen letztlich auf sie zurück.

KAPITEL 3

LEBEN UND WERKE VON AL-ḤWĀRIZMĪ

Leben

Über das Leben von Abū ‘Abdallāh Muḥammad b. Mūsā al-Ḥwārizmī ist sehr wenig bekannt. Die Blütezeit seines Schaffens fällt in die Jahre um 830. Al-Ḥwārizmī stand im Mittelpunkt einer Gruppe von Mathematikern und Astronomen, die unter dem Kalifen al-Ma'mūn am „Haus der Weisheit“ (*Bait al-Ḥikma*) in Bagdad gewirkt haben. Er verfaßte Werke über Arithmetik, Algebra, Astronomie, Geographie und Kalenderrechnung. Berühmt wurde er vor allem durch seine mathematischen Schriften¹.

Werke

Algebra

Al-Ḥwārizmī verfaßte als einer der ersten arabischen Autoren eine Schrift über die Algebra. Sie muß vor seiner Abhandlung zur Arithmetik entstanden sein, da er in ihr seine „Algebra“ zitiert.

Der Titel der algebraischen Schrift von al-Ḥwārizmī lautet: *al-Kitāb al-muḥtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala*, d.h. „Kurzes Buch über das Rechnen der Algebra und Almuqābala“. *al-ğabr* und *al-muqābala* sind technische Fachausdrücke für algebraische Operationen: *al-ğabr* (lateinisch: *restauratio*) bedeutet das „Rückversetzen“ eines Gliedes an seinen rechten Platz (ursprünglich also ein Terminus der Medizin), d.h. die Beseitigung einer abgezogenen Größe durch Addition auf beiden Seiten der Gleichung; *al-muqābala* (lateinisch: *oppositio*) ist der Ausdruck für das „Bilanzieren“, d.h. die Tilgung gleicher Glieder auf beiden Seiten.

Die Frage, welche Quellen al-Ḥwārizmī für seine algebraische Schrift zur Verfügung standen, ist noch nicht geklärt. Vermutlich übernahm er orientalisches Wissen, wobei offenbleibt, ob es sich dabei um mesopotamische oder indische Ursprünge oder um Mischformen handelt. Möglicherweise gab es auch eine mündlich überlieferte, subwissenschaftliche algebraische Tradition, an die al-Ḥwārizmī anknüpfen konnte. Eine direkte Übernahme griechischen Wissens ist nicht anzunehmen: Zwar benutzt al-Ḥwārizmī wie die Griechen geometrische Verfahren zur Konstruktion der Wurzeln einer quadratischen Gleichung, doch unterscheidet sich seine Behandlungsweise sehr wesentlich von der sogenannten „geometrischen Algebra“ der Griechen².

¹Zu Leben und Werken siehe insbesondere [Toomer 1973] und [Sezgin 1974, S.228-241]. – Die folgenden Ausführungen beruhen auf einem Vortrag, der von M. Folkerts und R. Lorch am 12. Dezember 1994 während des Vème Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes in Hammamet (Tunesien) gehalten wurde.

²Zur Problematik siehe z.B. [Sezgin 1974, S.228-229. 231-238].

Die „Algebra“ von al-Ḥwārizmī besteht aus drei Teilen:

1. Zunächst enthält sie einen eigentlich algebraischen Abschnitt. Ihm folgt ein kurzes Kapitel über kaufmännische Berechnungen. Es lehrt nach indischem Vorbild die einfache Dreisatzrechnung (*regula de tri*), d.h. die Bestimmung einer Zahl x , die mit drei gegebenen Zahlen a , b und c die Proportion $a : b = c : x$ bildet³.

2. Der nicht allzu umfangreiche Teil 2 betrifft die Geometrie; er behandelt Messungen unter Verwendung der Algebra.

3. Der 3. Teil, der etwas mehr als die Hälfte des ganzen Buches ausmacht, beschäftigt sich mit der Berechnung von Nachlässen („Erbschaftsrechnen“).

Im 1. Teil behandelt al-Ḥwārizmī die Lehre vom Auflösen linearer und quadratischer Gleichungen mit Zahlenkoeffizienten. Dabei führt er folgende sechs Klassen von Gleichungen ein, die alle denkbaren Typen umfassen (die Koeffizienten sind dabei stets positive Zahlen):

1. Die Quadrate sind den Wurzeln gleich: $ax^2 = bx$.
2. Die Quadrate sind einer Zahl gleich: $ax^2 = c$.
3. Die Wurzeln sind einer Zahl gleich: $ax = c$.
4. Die Quadrate und Wurzeln sind einer Zahl gleich: $ax^2 + bx = c$.
5. Die Quadrate und Zahlen sind den Wurzeln gleich: $ax^2 + c = bx$.
6. Die Wurzeln und Zahlen sind den Quadraten gleich: $bx + c = ax^2$.

Al-Ḥwārizmī verwendet keine Symbole, und seine Überlegungen sind rein verbal. Am Schluß des Abschnitts über die sechs Normalformen der Gleichungen sagt al-Ḥwārizmī, daß jede andere Gleichung durch das Verfahren von *al-ğabr* und *al-muqābala* auf eine der sechs Normalformen gebracht werden könne. Er erklärt die Auflösung der Gleichungen, dann gibt er für sie Regeln, die an Zahlenbeispielen erläutert werden. Die Richtigkeit dieser Regeln wird geometrisch bewiesen. Nachdem al-Ḥwārizmī die Auflösung von Gleichungen der Normaltypen erklärt hat, erläutert er an Beispielen die Grundregeln für das Operieren mit algebraischen Ausdrücken (Monomen, Binomen, Operationen mit Radikalen).

Der geometrische Abschnitt in al-Ḥwārizmīs algebraischer Schrift ist das älteste bekannte arabische Zeugnis für die Vermessungslehre der Muslime (*misāḥa*)⁴. Dieser Teil enthält Regeln zur Berechnung geometrischer Figuren (Dreiecke, Vierecke, Kreis, Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel, Pyramidenstumpf) und Anwendungen der Algebra auf die Geometrie. Der Inhalt stimmt teilweise mit Heron überein, sogar in der Wahl der Zahlenwerte (z.B. beim Dreieck mit den Seiten 13, 14 und 15), aber die Lösungsmethoden sind verschieden: al-Ḥwārizmī geht algebraisch, Heron geometrisch vor. Es ist sehr wahrscheinlich, daß der geometrische Teil in der „Algebra“ von al-Ḥwārizmī ebenso wie ähnliche Schriften in hebräischer und lateinischer Sprache letztendlich auf Heron oder seine Schule zurückgehen. Gandz' Annahme, daß al-Ḥwārizmī in diesem Teil von der hebräischen Schrift *Mishnat ha-Middot* abhängt, die sich ebenfalls mit Vermessungsproblemen beschäftigt [Gandz 1936], wird heute im allgemeinen nicht mehr geteilt.

³Siehe [Juschkewitsch 1964a, S.118]. Eine deutsche Übersetzung dieses Teiles der Algebra findet sich bei [Ruska 1917, S.99-100].

⁴Herausgegeben von [Gandz 1932, S.61-85].

Im 3. Teil der Schrift werden zum Teil komplizierte Erbteilungsaufgaben formuliert und gelöst. Derartige Probleme gehören zum festen Bestand der arabischen Mathematik. Sie sind ein Element des islamischen Rechtswesens. Die ältesten Ansätze dazu (bei islamischen Rechtsgelehrten) gehen bereits auf die „vorwissenschaftliche“ Zeit (d.h. vor der Bekanntschaft der Muslime mit der griechischen und indischen Mathematik) zurück. Dieser Abschnitt wurde in allen Einzelheiten von S. Gandz untersucht [Gandz 1938].

Von der „Algebra“ existieren mehrere arabische Handschriften (siehe [Sezgin 1974, S.240. 401]). Der arabische Text wurde schon 1831 unter Benutzung der Handschrift Oxford, Hunt. 214/1, durch F. Rosen zusammen mit einer englischen Übersetzung herausgebracht [Rosen 1831]; eine neue Ausgabe erschien 1939 in Kairo [Mušarrafa / Aḥmad 1939]. Das Werk wurde (ohne die Einleitung und die geometrischen und erbrechtlichen Abschnitte) zweimal ins Lateinische übersetzt: von Robert von Chester in Segovia (1145) und von Gerard von Cremona in Toledo. Von beiden Texten gibt es relativ neue Editionen von Barnabas Hughes ([Hughes 1986]: Gerhard von Cremona; [Hughes 1989]: Robert von Chester). Ob es eine weitere Übersetzung der „Algebra“ durch Guglielmo de Lunis gab, ist strittig. Möglicherweise ist ihm eine Bearbeitung zuzuschreiben, von der zwei Handschriften bekannt sind⁵.

Arithmetik

Die arithmetische Abhandlung al-Ḥwārizmīs ist das älteste bekannte arabische Werk, in dem nach indischem Vorbild die Zahlendarstellung im dezimalen Stellenwertsystem und die Grundrechenarten mit ihnen erläutert werden. Folgende Themen werden behandelt: Ziffernformen und Schreibweise der Zahlen im dezimalen Stellenwertsystem; Rechnen mit ganzen Zahlen (Addition und Subtraktion; Halbierung und Verdopplung; Multiplikation; Neunerprobe; Division); Sexagesimalbrüche und gewöhnliche Brüche (Multiplikation; Division; Probe; Schreibweise; Addition; Subtraktion; Halbierung; Verdopplung); Bestimmen der Quadratwurzel (aus ganzen Zahlen und aus Brüchen). Da diese Schrift das Thema der vorliegenden Arbeit bildet, muß an dieser Stelle nicht näher darauf eingegangen werden.

Astronomische Tafeln

Al-Ḥwārizmī verfaßte auch ein astronomisches Tafelwerk (*Ziğ*), das auf indischen Quellen beruhte. Der arabische Originaltext ist verloren; erhalten sind nur die lateinische Übersetzung einer Bearbeitung und lateinische und hebräische Übersetzungen eines Kommentars. Der *Fihrist* berichtet, daß es zwei Ausgaben des *Ziğ* gab. Eine Textfassung wurde von Maslama al-Mağrīṭī († 1007/08) bearbeitet, wobei er die Tafeln teilweise auf den Meridian von Cordoba umstellte. Im frühen 12. Jahrhundert wurde diese Bearbeitung des Maslama von Adelard von Bath ins Lateinische übersetzt. Von dieser Übersetzung gibt es mehrere Handschriften, die verschiedene Fassungen überliefern; zwei von ihnen werden Petrus Alfonsi zugeschrieben, und eine enthält die Überarbei-

⁵Vat. lat. 4606, f.72r-77r, und Oxford, Bodl. Library, Lyell 52, f.42r-49v; die letztere Handschrift wurde von W. Kaunzner ediert [Kaunzner 1986].

tung von Robert von Chester⁶. Einen Kommentar zum *Ziğ* verfaßte Ibn al-Muṭannā. Das arabische Original davon ist ebenfalls verloren, aber es gibt eine lateinische Übersetzung von Hugo Sanctallensis und zwei hebräische Fassungen⁷.

Die verschiedenen erhaltenen Textfassungen des *Ziğ* zeigen eine Mischung aus indischem und griechischem Material. Die meisten astronomischen Parameter lassen ihren indischen Ursprung erkennen, aber einige sind ptolemäisch. Manchmal wird eine indische Aussage mit Hilfe des Satzes von Menelaos begründet.

Die Hauptthemen, die al-Ḥwārizmī behandelt, sind: Kalenderfragen; die mittleren Bewegungen der Planeten; Stellungen von Sonne, Mond und Planeten; die direkte und rückläufige Bewegung der Planeten; Apogäum und Perigäum; Bestimmung der Sinuswerte; Deklinationen und Rektaszensionen; Konjunktion und Opposition; Sonnen- und Mondfinsternisse; astrologische Fragen.

Geographie

Von al-Ḥwārizmī stammt eine Abhandlung zur Geographie mit dem Titel *Kitāb sūrat al-arḍ* („Buch über die Form der Erde“). Das Werk besteht fast ausschließlich aus Listen der geographischen Koordinaten von Städten und Gegenden. Sie sind nach den auf die Griechen zurückgehenden sieben Klimata eingeteilt. Beziehungen zur „Geographie“ des Ptolemaios sind unverkennbar, obwohl die Schrift von al-Ḥwārizmī keine Übersetzung davon ist. Der Text der „Geographie“ wurde 1926 nach der einzigen erhaltenen Handschrift herausgegeben [Mžik 1926].

Astrolab

In einer Handschrift wird ein fragmentarischer Text über den Gebrauch des Astrolabs überliefert, der al-Ḥwārizmī zugeschrieben ist⁸. Er beschäftigt sich mit den üblichen Anwendungen des Instruments, z.B., um mit Hilfe der Höhe der Sonne oder eines Sterns die Zeit zu bestimmen. Die Schrift gehört zu den ältesten arabischen Abhandlungen zu diesem Thema. Leider läßt sich nicht genau angeben, wo sie endet, und es könnte sein, daß einige Anwendungen, die am Ende des Fragments erwähnt werden, nicht zum ursprünglichen Text von al-Ḥwārizmī gehören.

In derselben Handschrift gibt es unmittelbar vor al-Ḥwārizmīs Abhandlung über den Gebrauch des Astrolabs auch einen kurzen Text über die Herstellung des Astrolabs. Es gibt gute Gründe für die Annahme, daß auch diese Abhandlung von al-Ḥwārizmī stammt: Der *Fihrist* berichtet, daß al-Ḥwārizmī ein „Buch über die Konstruktion des Astrolabs“ (*Kitāb ‘amal al-aṣṭurlāb*) und ein „Buch über den Gebrauch der Astrolaben“ (*Kitāb al-‘amal bi-l-aṣṭurlābāt*) geschrieben hat, und der Stil der Abhandlung paßt

⁶Siehe hierzu [Björnbo 1914], [Neugebauer 1962] und [Pedersen 1992]. Zu Ibn aṣ-Ṣaffārs Rolle bei der Bearbeitung des *Ziğ* siehe [Castells / Samsó 1995].

⁷Siehe [Millás Vendrell 1963] und [Goldstein 1967].

⁸Berlin, Landberg 56, ab f.81v. Eine deutsche Übersetzung dieses Textes mit Einleitung wurde 1922 veröffentlicht [Frank 1922]. Mit diesem Text könnte ein kurzes Bruchstück in der Handschrift Istanbul, Aya Sofya 4830, f.198v-200r, über die Bestimmung des Azimuts usw. mit Hilfe des Astrolabs, zusammenhängen.

zu al-Ḥwārizmī⁹. Innerhalb dieses Textes gibt es auch eine Tafel zur Bestimmung der Größe der Almukantarate¹⁰. Es muß noch untersucht werden, ob es Beziehungen zwischen den Methoden und Tafeln in dieser Abhandlung und denjenigen von al-Fargānī gibt. Falls diese Schrift wirklich von al-Ḥwārizmī stammt, wäre es die früheste bekannte arabische Abhandlung über die Theorie der stereographischen Projektion.

Andere Schriften

Al-Ḥwārizmī verfaßte auch eine Abhandlung über den jüdischen Kalender (*Istihṛāğ ta'rīḥ al-yahūd*)¹¹. Sie behandelt u.a. folgende Themen: den 19jährigen Zyklus; Regeln, um den Wochentag zu bestimmen, auf den der erste Tag des Monats Tishri fällt; Bestimmung des Zeitintervalls zwischen der jüdischen Ära (Erschaffung von Adam) und der Seleukidenära; Regeln zur Bestimmung der mittleren Länge von Sonne und Mond mit Hilfe des jüdischen Kalenders. Ähnliches Material findet man auch in Schriften von al-Bīrūnī (973–1048) und Maimonides († 1204).

In einigen arabischen Handschriften in Berlin, Istanbul, Taschkent, Kairo und Paris¹² gibt es weiteres Material, das sicher oder mit einiger Wahrscheinlichkeit von al-Ḥwārizmī stammt. Zu den Schriften, die ihm ausdrücklich zugeschrieben werden, gehört eine Abhandlung über Sonnenuhren, die im *Fihrist* erwähnt wird und die in einer Istanbul Handschrift vorhanden ist¹³. Andere, z.B. über die Bestimmung der Richtung von Mekka, betreffen die sphärische Astronomie¹⁴.

Besonderes Interesse verdienen auch zwei Texte über die Morgenweite (*Ma'rifat sa'at al-mašriq fī kull balad*) und die Bestimmung des Azimuts aus der Höhe (*Ma'rifat as-samt min qibal al-irtifa'*)¹⁵, weil in ihnen indische Formeln in geometrischem Gewand gegeben werden und es so aussieht, als ob sie mit Hilfe eines Sinusquadranten berechnet worden wären. Ähnliche Verfahren, die aber komplizierter sind, begegnen uns später in Abhandlungen von Ḥabaš und von al-Māhānī¹⁶. Falls die beiden genannten kurzen Texte zur sphärischen Astronomie wirklich von al-Ḥwārizmī stammen, wie es den Anschein hat, so zeigen sie, daß schon in der frühen arabischen Astronomie graphische Methoden benutzt wurden. Eine kurze Abhandlung über den Sinusquadranten, die sich in einer Berliner Handschrift findet¹⁷, könnte ebenfalls von al-Ḥwārizmī stammen. Hierfür spricht auch, daß dieses Instrument von dem im 13. Jahrhundert lebenden

⁹[Flügel 1871-1872, 1, S.274,26-27]. Siehe auch [King 1983, S.23-27 und 33-34, Anm. 7]. Der Text steht auf f.77v-81v der Handschrift.

¹⁰Auf f.78v.

¹¹Nähere Informationen über diese Abhandlung gibt [Kennedy 1964].

¹²Insbesondere am Ende der Handschriften Berlin, Landberg 56, und Istanbul, Aya Sofya 4830, sowie in Taschkent, Orientalisches Institut 177,3. Weitere Handschriften sind: Kairo, Taymūr *riyāda* 103,2; Kairo, Ṭal'at *falak fārisī*; Paris, BN arab. 6913. Siehe [King 1983, S.4. 12].

¹³Aya Sofya 4830, f.231v-235r. Eine russische Übersetzung erschien in dem Sammelband, der aus Anlaß des 1200. Geburtstags von al-Ḥwārizmī herausgegeben wurde [al-Ḥwārizmī 1983, S.221-234].

¹⁴Siehe [King 1983, S.12-16]. Diese Abhandlungen wurden von Ahmedov ins Russische übersetzt (in [Bulgakov / Karimov 1991]).

¹⁵Siehe [Rosenfeld 1993].

¹⁶Siehe Paris, BN arab. 2457, f.241r-250v, zu Ḥabaš und [Rosenfeld 1993] zu al-Māhānī.

¹⁷Landberg 56, f.96v-97v.

al-Marrākušī als *ǧaib al-Ḥwārizmī* bezeichnet wird¹⁸. All dies deutet darauf hin, daß der Sinusquadrant entweder als Instrument oder als graphisches Verfahren schon im 9. Jahrhundert benutzt wurde.

In der Istanbuler Handschrift Aya Sofya 4830 gibt es auch eine anonyme Beschreibung des Stundenquadranten, dessen Berechnung auf der von den Indern her bekannten Basis 150 beruht. Auch dieser Text könnte von al-Ḥwārizmī stammen¹⁹.

Ein Text in der schon genannten Berliner Handschrift, der nicht explizit al-Ḥwārizmī zugeschrieben wird, enthält eine merkwürdige Tafel des „Sinus der Stunden“. Es ist nicht klar, wozu genau diese Tafel diente, aber eine gründliche Analyse hat ergeben, daß sie auf einer bekannten Näherungsformel für die Bestimmung der Tageszeit aus der Sonnenhöhe beruht. Die Sinustafel, die ihr zugrunde liegt, geht auf indische Quellen zurück²⁰.

Weitere kürzere Texte, die möglicherweise von al-Ḥwārizmī stammen, behandeln die Sichtbarkeit des Neumondes, die Zeiten für die Gebete, Wasseruhren, einen speziellen Zirkel und ein Instrument zur Bestimmung von Mondfinsternissen²¹.

¹⁸Siehe [King 1983, S.28-30].

¹⁹Siehe [King 1983, S.31]. Diese Abhandlung wurde von Ahmedov ins Russische übersetzt (in: [Bulgakov / Karimov 1991]).

²⁰Siehe [Hogendijk 1991] und [King 1983, S.7-11].

²¹Siehe [King 1983] und Ahmedov, in: [Bulgakov / Karimov 1991].

KAPITEL 4

HANDSCHRIFTEN. BEMERKUNGEN ZUR EDITION UND ÜBERSETZUNG

4.1 Handschriften

Von al-Hwārizmī's Arithmetik ist bis jetzt keine arabische Handschrift bekannt, sondern nur die Bearbeitung einer lateinischen Übersetzung aus dem Arabischen, die im 12. Jahrhundert angefertigt wurde. Diese Fassung wird hier, wie auch in früheren wissenschaftshistorischen Arbeiten, nach dem Anfang des Textes (*Dixit Algorismi*) als DA bezeichnet. Von DA gibt es (mindestens) zwei Handschriften: New York, Hispanic Society of America, HC 397/726, f.17r-24v (im folgenden mit N bezeichnet), und Cambridge, University Library, li. 6.5, f.104r-111v (im folgenden mit C bezeichnet). Sie weichen zwar in vielen Kleinigkeiten voneinander ab, lassen aber doch erkennen, daß sie auf ein und denselben Text zurückgehen. Die Handschrift N überliefert den vollständigen Text, während die Handschrift C mitten in Kapitel 12 abbricht.

* * *

Beschreibung der Handschrift N

SIGNATUR: New York, Hispanic Society of America, HC 397/726

ÄUSSERES, DATIERUNG, HERKUNFT: Pergament, 21,2×14,7 cm. II + 120 + II Blätter.

Die Handschrift besteht aus zwei Teilen (f.1-50, 51-120), die wahrscheinlich beide im 13. Jahrhundert in Spanien geschrieben wurden, wobei Teil 1 etwas älter als Teil 2 ist. Teil 1 ist (bis auf die in der Beschreibung angegebenen Teile) von nur einer Hand geschrieben worden. Der Codex befand sich bis zur 2. Hälfte des 18. Jahrhunderts in der Universidad Complutense in Alcalá de Henares und wurde etwa 1910 über den Leipziger Buchhändler Karl W. Hiersemann von der Hispanic Society erworben.

ALLGEMEINE BESCHREIBUNG: [Faulhaber 1983]. Entsprechend der Gepflogenheit dieses Katalogs sind die Einzelstücke der Handschrift an verschiedenen Stellen beschrieben, und zwar (die Zahlen in Klammern bezeichnen die einzelnen Nummern): f.1r-6v: S.409f. (424); f.6v-7r: S.401 (415); f.7v-10r: S.399f. (413); f.10v-14r: S.400f. (414); f.14r-16v: S.398f. (412); f.17r-24v: S.404f. (421); f.25r-30r: S.410f. (425); f.30v-43v: S.397f. (410); f.44r-47r: S.389 (402); f.47v-48v: S.453 (460); f.49r-50r: S.396 (408); f.51r-60v: S.403 (419); f.60v-71v: S.401 (416); f.71v-78r: S.402f. (418); f.78v-87v: S.416 (430); f.87v-90r: S.416f. (431); f.90r-112v: S.398 (411); f.113r-120v: S.402 (417). Allgemeine Angaben zum ersten Teil der Handschrift (f.1-50) stehen unter der Nummer 424, zum zweiten Teil (f.51-120) unter der Nummer 419. – Die Blätter 9-16 sind falsch zusammengebunden. Dies ist von Faulhaber nicht bemerkt worden. Dementsprechend sind seine Beschreibungen der Texte auf diesen Blättern nicht korrekt. – Für Hinweise zu den Texten von Hermannus Contractus und aus

seinem Umfeld, die sich in dieser und der folgenden Handschrift befinden, danke ich Prof. Dr. Arno Borst, Konstanz.

INHALT:

1. f.1r-6v: Martianus Capella, *De nuptiis philologiae et Mercurii*, Buch VIII. Inc.: *Que dum geruntur et deorum sacer senatus ...* Expl.: ... *aut in latitudinem declinare aut retrogradari facit*. Ed. [Dick 1925, S.422-469]. TK 1183.
2. f.6v-7r: Anonymer astrologischer Text (*Prophetia seu pronostica futurorum*), im 15. Jahrhundert hinzugefügt. Inc.: *Heu nobili. iam completa est sexta coniunctio. videlicet Era. M^a CC^a XX^a I^a. et secundum albu<masar> septem sunt notabiles coniunctiones ...* Expl.: ... *prophetam precipitabit dominus inclitum uniuerse terre in monte sion (?) idest in iherusalem*. („Era 1221“ entspricht dem Jahr 1183 n.Chr.)
3. f.7v-9v: Hermannus Contractus, *De mensura astrolabii*. Inc.: *Incipit compositio astrolabij* (spätere Hand). *HERMANNVS christi pauperum perhypsima. et philosophie tyronum asello immo limace tardior assecla. B. amico suo iugem in domino salutem. Cum a pluribus sepe amicis rogarer ut mensuram astrolabii ...* Expl.: ... *libellum astrolapsus relegenti et ingenium in huiusmodi rerum usu exercitanti. alias debet notificari*. Ed. [Drecker 1931, S.203-212]. TK 611.
4. f.9v, 14r-15v, 12r-13v, 10r: *De utilitatibus astrolabii*. Inc. (Kapitelverzeichnis): *De utilitatibus astrolabij. Descriptio eius perigraphiarum. De colligendo signo et gradu solis ...* Inc. (Text): *Incipit cognicio astrolabij* (spätere Hand). *Quicumque astronomice periciam discipline et celestium sperarum. circulatorum. geometricaliumque mensurarum altioremq; scientiam ...* Expl.: ... *tu ipse per predictam waltachoram idest speram planam diuersa poteris fabricare horologia. EXPLICIT TRACTATVS ASTROLABII*. Ed. [Bubnov 1899, S.114,5-147,15]. TK 1236.
5. f.10v-11r: Hermannus Contractus, *Mensura horologii*. Inc.: *Incipit compositio horologii* (spätere Hand). *COMponitur quoddam simplex et paruulum natoribus (!) horologium (!) ...* Expl.: ... *Si ad triplam; sub tripla. et ita in ceteris*. Ed. [Migne 1882, Sp.405-408]. TK 240. Siehe [Bergmann 1985, S.168-172].
6. f.11r-v, 16r: Hermannus Contractus, Exzerpte. Inc.: *De mensuratione mundi* (spätere Hand). *Quamuis ambrosii. theodosii auctoritate ...* Expl.: ... *probatur. in totius mundi circuituionem*. TK 1163. – Inc.: *Item de mensuratione mundi* (spätere Hand). *ARatostenes philosophus. geometriaque sagacissimus ...* Expl.: ... *in sinistra parte ultimam lineam in XXX diuide*. TK 503. – Inc.: *Descriptio cursoris* (spätere Hand). *Deinde circulum intimum de parte dextra a prima hora incipiens ...* Expl.: ... *Considera cui hore perpendicularum superiaceat. et hoc est quantus labor exquirat*. TK 1236. Ed. [Migne 1882, Sp.408-410].
7. f.16r: *Geometria incerti auctoris*, Kapitel III,6. Inc.: *Ad altum mensurandum* (spätere Hand). *Si uis alicuius arboris. aut columpne vel terris. vel cuiusdam talium in plano dumtaxat loco stantis altitudinem per umbram ipsius inuenire ...* Expl.: ... *hypothense uicem dinoscitur habere*. Ed. [Bubnov 1899, S.321,22-322,20], [Migne 1882, Sp.410-411].

8. f.16r-v: *Horologia Gerbertina*. Inc.: *De ortu et occasu signorum* (spätere Hand). *PRIMO climate equinoctio die medio gnomini. VII. umbram IIII. pedes longam reddis ...* Expl.: ... *occidunt II horis et XII^a parte horum.*
9. f.16v: Beda, *De natura rerum*, Kapitel 13, 15, 16, mit Zusatz wie in Oxford, BL, Digby 174, f.209v-210r. Inc.: *Noticia planetarum* (spätere Hand). *Sumum planetarum saturni sidus est natura gelidum ...* Expl.: ... *de quibus in quarto anno bissextus ORITVR.* Ed. [Jones 1975, S.204,2-208,12].
10. f.17r-24v: al-Ḥwārizmī, *Arithmetik*. Inc.: *INCIPIT ARISMETHICA ALCHOARISMI. DIXIT alchoarizmi. Laudes deo rectori nostro atque defensori dicamus dignas ...* Expl.: ... *unus gradus et XXIII minuta et L secunda ac XXIII tertia. Finit liber cum dei adiutorio et eius laude.* TK 448.
11. f.25r-30r: Māṣā'allāh, *De cogitationibus ab intentione*, übersetzt von Johannes Hispalensis. Inc. (Prolog): *In nomine domini et eius auxilio incipit messahalat de respectibus a magistro iohanne hispanensi translatus. PRECEPIT Messehallath. ut constituas ascendens per gradum suum atque minutum et domos certissime ...* Expl. (Prolog): ... *per quod uniuersas interrogationes et rerum significationes poteris percipere si deus VOLVERIT.* Inc. (Text): *Interrogatio cuius ascendens fuit taurum X gradus ...* Expl.: ... *et ipse erat leuior utrisque stellis. Ideoque coniungebatur ad hoc nutu dei.* [Carmody 1956, S.28-29]. TK 1081.
12. f.30v-43v: al-Fargānī, *Liber differentiarum*, übersetzt von Johannes Hispalensis. Inc.: *In nomine domini et eius auxilio. Incipit liber alfragani in scientia astrorum. et radicibus motuum celestium. idest differentia. DIFFERENTIA prima in annis arabum et latinorum ...* Inc. (Text): *Prima differentia in annis arabum et latinorum et nominibus mensium eorum. NVMERUS mensium arabum et latinorum est XII. Menses arabum incipiunt ...* Expl.: ... *Iamque patefecimus (!) de eclipsi solis et lune quod suficiet si deus uoluerit. Perfectus est liber alfragani in sciencia astrorum et radicibus motuum celestium interpretatus in luna a iohanne hispanensi atque lunensi. Et expletus est die lune uicesima quarto die quinti mensis lunaris anni arabum quingentimissimi (?) XXVIII. existente X die mensis marcij ere M^aCLXXIII. Sub laude dei et auxilio suo amen.* [Carmody 1956, S.113-115]. TK 429.
13. f.44r-47r: 'Abd al-'Azīz ibn 'Uṭmān al-Qabiṣī, *Liber introductorius ad totam artem astronomie*. Zwei Teile eines Werks? Inc. (Index): *PRIMA DIFFERENTIA in esse circuli signorum essentiali et accidentali ...* Inc. (Text): *IN nomine domini nithat circuli signorum diuiditur in XII partes equales secundum divisionem ...* (f.46v) Expl.: ... *in XII partes que nominantur domus. Nominaturque (!) et anguli cuspides seu turres. cuius opus expositum est in ezich idest in libro cursus siderum.* (f.47r) Inc. (Text): *PRINCIPIUM autem diuisionis est horoscopus cuius initium est super circulum emisperii orientalis ...* Expl. (Text bricht ab): ... *quorum ac delictorum fidei ac religionis mandator ac legator //* [Carmody 1956, S.144-149]. TK 1090.
14. f.47v-48r (Zusatz von einer Hand des 14. Jahrhunderts): Johannes Heremita, *Profecia quam vidit in caucaso monte*. Am oberen Seitenrand: *plura dixit iste heremita quam scripta sint hic sed ea sunt hic scripta que sibille antea predi-*

- xerunt. Inc.: Incipit profecia iohannis heremite quam uidit in caucaso monte. Nocte fere media. tenebrisque per aera fuis opere quo temptant seruare silencia cuncti ... Expl.: ... protinus e celo michi uox sic nunciat ista. Audi. percipe. dic. uideas. studeas. caueasque.*
15. f.48r-v (Zusatz von einer Hand des 14. Jahrhunderts): Johannes Heremita, *Profecia de partibus ultramarinis*. Inc.: *Profecia de partibus ultramarinis. belua tarda uenit ab eo partibus istuc mortiferum morsura lupum. qui sanguine carne ... Expl.: ... galli percusus rostra morietur in vndis. que postquam finiunt (?) gallus morietur in ismon.*
 16. f.49r-50v: Konkurrenten-, Regularen- und Ostertafeln für die Jahre 1064 bis 1558. Unter der ersten steht: *Huius tabule noticiam nemo compoti inscius sibi arrogare vel attemptare presumat ...*; unter der zweiten: *Litteram punctatam in alia tabula inuentam in hac quoque tabula inquire ...* Auf f.50v: *Regulares feriales ad feriam scilicet terminorum inueniendam. Qui ex feriis primi anni tocus seculi orti sunt ...* TK 1346.
 17. f.51r-60v: Hunain ibn Ishāq, *Introductio ad artem parvam Galieni* (= Johannitus, *Isagoge in tegni galieni*). Inc.: *Incipiunt ysagoge Iohannicij ad tegni Galieni. Medicina diuiditur in duas partes in theoricam et practicam ... Expl.: ... V modis fit. qualitatis et quantitatis. et ordinis boni et mali discretione. Expliciunt ysagoge Iohannicij.* TK 856.
 18. f.60v-71v: Hippocrates, *Aphorismi*, übersetzt von Constantinus Africanus. Inc.: *Incipiunt amphorismi ypocratis. prima pars. Vita brevis ars vero longa tempus acutum experimentum fallax ... Expl.: ... fames enim desiccatur corpora. Si a febre habita tumore non existente in collo suffocatio repente innascitur et deglutire non possunt mortale est.* TK 1704.
 19. f.71v-78r: Hippocrates, *Prognostica*, übersetzt von Constantinus Africanus. Inc. (Prolog): *Liber pronosticorum ypocratis de signis mortalibus et uitalibus prologus. Omnis qui medicine artis studio seu gloriam seu delectabilem amicorum copiam ...* (f.72r:) Expl. (Prolog): *... salutem nunquam in altero miretur acusacionem.* Inc. (Text): *Significationes faciei. Oportet te ergo sollicitum fieri circa acutas ualitudines ...* Expl. (Text): *... Quia determinantur quecumque nostro numero dierum creticorum nostro quoque sunt exposite ordine preceptorum.* TK 1002.
 20. f.78v-87v: Theophilus Protospatharios, *Liber de urinis*, übersetzt aus dem Griechischen. Inc.: *Incipit liber vrinarum theofili. De vrinarum differentia negocium multi veterum medicorum agressi sunt scribere. Quorum primus omnium ypocras ... Expl.: ... et de urinarum quidem disciplinis et secundum genera et secundum species et differentias conuenienter exposuimus. explicit liber vrinarum.* TK 393.
 21. f.87v-90r: Theophilus Protospatharios, *Liber pulsuum*, übersetzt aus dem Griechischen. Inc.: *Incipit liber pulsuum philareti. INTentionem habemus in presenti conscripcione de pulsuum negocio compendiosam exponere tradicionem ... Expl.: ... fit. et mortem significat et hec nobis sufficiant ad presentia. Explicit liber pulsuum philaretj. et incipit liber tegni Galieni.* TK 764.

22. f.90r-112v: Pseudo-Galienus, *Microtegni*, übersetzt von Constantinus Africanus. Inc. (Prolog): *TRes sunt omnes doctrine que ordine habentur ...* Expl. (Prolog): *... secundum explicacionem demonstratorum dicentur nunc.* Inc. (Text): *Medicina est sciencia sanorum et egrorum ...* Expl. (Text): *... facimus calculacionem que et prescribens quot sunt et qualia determinabo oracionem in eis.* TK 1585.
23. f.113r-120v: Hippocrates, *De regimento acutarum egritudinum*. Inc.: *Incipit liber ypocratis de Regimento acutarum egritudinum. QVi de egrotantium acciditibus in singulis egritudinibus tractantes pocius cosensisse (!) ...* Expl.: *... et in hiis minus congruum est qui solo dietantur potu. sed et illis aliquando conueniens est. Explicit liber ypocratis.* TK 1205.

BENUTZTER ABSCHNITT: f.17r-24v. Vollständiger Text.

* * *

Beschreibung der Handschrift C

SIGNATUR: Cambridge, University Library, Ii. 6.5

ÄUSSERES, DATIERUNG, HERKUNFT: Pergament, 17,6×12,0 cm. 126 Blätter, von verschiedenen Händen geschrieben. Der größte Teil der Handschrift stammt wohl aus dem 13. Jahrhundert. Die letzten beiden Lagen (ab f.112) wurden im frühen 12. Jahrhundert geschrieben¹. Ein Inhaltsverzeichnis auf dem vorderen Vorsatzblatt zeigt, daß sie früher dem Kloster Bury St. Edmunds gehörte. In diesem Inhaltsverzeichnis werden einige theologische Schriften genannt, die sich nicht mehr in der Handschrift befinden.

ALLGEMEINE BESCHREIBUNG: [Hardwick / Luard 1858], S.500-501.

INHALT:

1. f.3r-86r: Constantinus Africanus, *Viaticum*. Inc.: *Quoniam quidem ut in Rethorice Tullius omne inquit ...* Expl.: *... Nec moveatur nisi in fine dierum.* TK 1298.
2. f.86v-89r (andere Hand): Roger Bacon (?), *De sompno et vigilia*. Inc.: *Sompnus ergo et vigilia desribuntur multis modis ...* Expl.: *... et admirata de illa spiritualitate subtili. Explicit.* TK 1519. [Little 1914, S.408]. – f.89v leer.
3. f.90r-96v (andere Hand): Sammlung medizinischer Rezepte. Inc.: *Medicamen contra rupturam sive carnes ruptas ...* Expl.: *... fuit prius in cura eius.* TK 854. – f.97r leer.
4. f.97v: astronomische Tafel mit verschiedenen kurzen Texten.
5. f.98r-101v: Roger Bacon, *Rogerina minor*. Inc.: *Cum medicinalis artis due sint partes integrales scilicet theorica et practica ...* Expl.: *... data in mane cum aqua calida.* TK 317. [Little 1914, S.417].
6. f.102 fehlt. Auf f.103r-v stehen später hinzugefügte kurze Texte. Mit f.104 beginnt eine neue Handschrift.

¹Es ist unwahrscheinlich, daß die ganze Handschrift dem 12. Jahrhundert angehört, wie Allard unter Bezug auf eine ungedruckte Arbeit von Ron B. Thomson vermutet ([Allard 1991, S.241] und [Allard 1992, S.XXXV]). Zumindest ist der Text ab f.112 von einer viel früheren Hand geschrieben als die vorangehenden Teile der Handschrift.

7. f.104r-111v: al-Ḥwārizmī, Arithmetik, unvollständig. Inc.: *Dixit Algorizmi laudes deo rectori nostro ...* Expl.: ... *et sub eis tres. et sub tribus XI. Sicque constitues VIII.*
 8. f.112r-121r (andere Hand): *De utilitatibus astrolabii*, Kap. 2, 4-6, 8-10, 19. Inc.: *Est quidem guazalcora tabula ad celi rotunditatem conformata ...* Expl.: ... *quod cuilibet probandum dimittitur.* Zwischen f.119 und 120 sind Blätter ausgefallen, die vermutlich den Text der Kapitel 11 – 19 Anfang enthalten haben. Vorhanden sind (gemäß der Ausgabe [Bubnov 1899]): S.117,6-123,21; 127,12-129,24; 130,9-131,3; 131,22-133,22; 144,10-146,9. TK 513.
 9. f.121r-122r: Ascelinus, *Compositio*, Kapitel 5-6. Inc.: *Soluelli (!) quod alii recte. alii rotam nuncupant. per subscriptam sententiam tene compositionem ...* Expl.: ... *adscriptum cuique stelle.* [Bergmann 1985, S.224].
 10. f.122r-124v: Beda (?), *De cursu solis*, Kapitel 1-4. Inc.: *Bissextili anno prima ...* Expl.: ... *XVI. Kal. Aprilis.* Ed. [Jones 1980, S.649,2-653,46]. – Ohne Absatz folgt:
 11. f.124v-125r: Text über das Schattenquadrat auf der Rückseite des Astrolabs. Inc.: *Componitur in abstrolabio (!) ...* Expl.: ... *sint sibi respondentia.* Ungedruckt.
 12. f.125r-126v: Ascelinus, *Compositio*, Anhang. Inc.: *Qualiter horae distinguere debeant in astrolabio. Ad horas vero ...* Expl.: ... *et transductae lineae justissime transeat.* – Auf dem Deckblatt des hinteren Einbands (f.127r) eine in 12 Teile geteilte Figur der drei konzentrischen Kreise des Astrolabs.
- BENUTZTER ABSCHNITT: f.104r-111v. Der Text wurde von mehreren Händen geschrieben; Schreiberwechsel z.B. auf f.106r. Die Abschrift ist unvollständig; sie bricht im Kapitel 12 ab.

4.2 Frühere Ausgaben und Übersetzungen

Alle bisher erschienenen Ausgaben, Faksimiledrucke und Übersetzungen von DA beruhen auf der einzigen bisher bekannten Handschrift C. Es gibt drei Ausgaben und drei Faksimiledrucke; ferner Übersetzungen ins Russische, Englische und Französische.

Die Erstausgabe des lateinischen Textes nach der Handschrift C erschien 1857 in Rom durch Baldassarre Boncompagni [Boncompagni 1857]. Sie enthält zahlreiche Fehler. 1963 veröffentlichte Kurt Vogel einen Faksimiledruck des Texts der Handschrift C zusammen mit einer zeilengetreuen Transkription [Vogel 1963]. Die Ausgabe bedeutet gegenüber Boncompagnis Edition einen großen Fortschritt, ist aber ebenfalls nicht fehlerfrei. Die neueste Edition von André Allard [Allard 1992, S.1-22] bildet den ersten Teil seiner Ausgabe der frühesten lateinischen Algorismusschriften; es folgen Editionen der verschiedenen Fassungen des sogenannten „Liber Ysagogarum“ (LY) und des „Liber Alchorismi / Liber pulveris“ (LA/LP).

Außer in der schon genannten Ausgabe von Vogel wurde ein Faksimile der Seiten der Handschrift C, die den Text von DA enthalten, im Jahre 1964 von A. P. Juschkewitsch als Anhang seiner Arbeit über diese Schrift veröffentlicht [Juschkewitsch 1964, S.55-63]. Eine überarbeitete russische Fassung dieses Artikels, dem ebenfalls ein Fak-

simile der lateinischen Handschrift beigegeben wurde; erschien 1983 in Taschkent im Tagungsband zu Ehren von al-Ḥwārizmī [Juschkeuitch 1983, S.185-202].

In demselben Tagungsband wurde die lateinische Fassung nach der Handschrift C erstmals in eine moderne Sprache übersetzt [Kopelevič / Juschkeuitch 1983]. Der russischen Übersetzung folgte 1990 eine englische [Crossley / Henry 1990] und schließlich 1992 eine französische [Allard 1992, S.1-22].

Alle diese Editionen und Übersetzungen sind naturgemäß unvollständig, da sie nur auf der Handschrift C beruhen und N noch nicht kennen.

4.3 Bemerkungen zur Edition und zur Übersetzung

Da die Texte in N und in C zwei teilweise verschiedene Überarbeitungen der Übersetzung von al-Ḥwārizmī's Arithmetik ins Lateinische repräsentieren und an vielen Stellen nicht geklärt werden kann, welche Fassung der ursprünglichen Übersetzung am nächsten kommt, wäre ein Versuch, aus beiden Versionen einen gemeinsamen Text zu konstituieren, zum Scheitern verurteilt. So kann eine Edition von DA nur die in den zwei Handschriften vorliegenden Textfassungen dokumentieren. Demzufolge wurden beide Texte nebeneinander ediert, auch in den Anfangskapiteln, in denen die Abweichungen zwischen N und C im allgemeinen noch gering sind.

Der Text der Handschrift N wird hier erstmals veröffentlicht. Eingriffe in die überlieferte Fassung wurden nur dort vorgenommen, wo es sich um offenkundige Schreibversehen handelt, jedoch werden derartige Änderungen selbstverständlich im kritischen Apparat vermerkt. Nur die Interpunktion wurde der besseren Lesbarkeit halber stillschweigend modernisiert; ferner sind die römischen Zahlen stets mit großen Buchstaben und ohne Punkte vor und nach der Zahl wiedergegeben, Eigennamen sind mit großen Anfangsbuchstaben geschrieben, und die wenigen Stellen, an denen der Schreiber für den *ae*-Laut nicht das einfache *e*, sondern *e caudata* schreibt, wurden zu *e* angeglichen. Davon abgesehen, wurde auf eine Vereinheitlichung der Schreibweise verzichtet, so daß auch Formen wie *-ti-* und *-ci-* entsprechend der Handschrift N wiedergegeben sind. Eckige Klammern [] bezeichnen Wörter oder Wortteile, die in N vorhanden, aber zu tilgen sind, während spitze Klammern < > Ergänzungen bedeuten, die in der Handschrift fehlen, aber erforderlich sind. Absätze wurden nur dann eingerückt, wenn dies auch in der Handschrift N der Fall ist.

Dieselben Regeln gelten auch für die Edition der Textfassung in der Handschrift C. Da hier mit der Ausgabe von Allard (1992) eine relativ gute Edition vorliegt, konnte sein Text im Prinzip übernommen werden. Die Varianten zwischen den Editionen von Allard und Vogel wurden nicht verzeichnet, da man sie bei Allard findet. Selbstverständlich wurden aber alle Abweichungen der Handschrift C von dem hier gedruckten Text im Apparat vermerkt; auch hier sind die Groß- und Kleinschreibung der Eigennamen und die Punkte vor und nach den römischen Zahlen davon ausgenommen. Es wurde darauf verzichtet, die Interpunktion im Text von C, der auf Allards Ausgabe beruht, und im Text von N einander anzugleichen. Wenn im Apparat nichts anderes angegeben ist, entsprechen Veränderungen des von C überlieferten Textes der Ausgabe von Allard. Der hier gebotene Text der Handschrift C weicht nur dann von Allards Edition ab, wenn Allard ohne Grund die Textfassung in C nicht übernommen

hat. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn er Wörter in C nicht richtig gelesen hat². Stellen, an denen Allard im Apparat Lesarten von C unkorrekt wiedergibt, wurden in unserem Apparat dann nicht vermerkt, wenn sie auf die Textgestaltung keinen Einfluß haben³. Die römischen Zahlen wurden so geschrieben, wie man sie in C vorfindet, während Allard z.B. „IIII^{or}“ stets in „quatuor“ auflöst, auch in Kombinationen mit anderen römischen Zahlen⁴.

Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wurde der lateinische Text in Kapitel und Paragraphen unterteilt. Die Kapiteleinteilung folgt der Gliederung der Handschrift N, in der die einzelnen Abschnitte durch Überschriften kenntlich gemacht wurden; in C gibt es keine Kapitelüberschriften.

Die deutsche Übersetzung beruht auf der Textfassung von N. Sie ist eine relativ wortgetreue Wiedergabe des lateinischen Textes. Es war nicht beabsichtigt, dem modernen Leser eine möglichst glatte deutsche Fassung zu bieten, sondern einen Text, der der lateinischen Vorlage, soweit möglich, entspricht und der, darüber hinaus, einige Eigenheiten des ursprünglichen arabischen Textes nachbildet, die noch in vielen Ausdrücken bzw. Formeln der lateinischen Fassung hervorscheinen⁵; zum Verständnis des Inhalts wird auf den Kommentar in Kapitel 6 verwiesen. Lediglich beim Gebrauch der Tempora und Modi konnte etwas freier verfahren werden, da diese – entsprechend den Gepflogenheiten der Übersetzungen aus dem Arabischen – oft in einer ungewohnten Weise gebraucht werden. So sind Formen des Perfektstamms vielfach durch Formen des Präsensstamms wiedergegeben, und Futur und Konjunktiv werden öfter wie Imperative übersetzt. Das Wort *illud* bezeichnet in den Übersetzungen aus dem Arabischen und auch in diesem Text oft nicht spezifisch „jenes“, sondern allgemeiner „es“ oder „das“; dem wurde in der Übersetzung Rechnung getragen. Auch die Kombination *iam* + Perfekt ist typisch arabisch: sie imitiert die arabische Partikel *qad*, die vor dem (arabischen) Perfekt stehen und eine Bestätigung bedeuten kann; daher wurde sie im Deutschen meist nicht wiedergegeben.

²Z.B. S.5,7 *perfertur* statt *pertinet*; S.6,3 *vero* statt *uno*; S.15,11 *multiplicaverimus* statt *multiplicaveris*; S.15,21 *eritque* statt *eruntque*; S.15,23 *erit* statt *erunt*; S.18,31 *fuert* statt *fuertint*; S.20,5 *VII centa* statt *VI centa*. (Hier und im folgenden beziehen sich die Seitenzahlen auf die Ausgabe von Allard.)

³Z.B. S.7,33: C hat *debueris*, nicht, wie Allard schreibt, *debuis*; S.13,15: C hat *quod*, nicht *quem*; S.16,3: C hat *scriberemus*, nicht *scribemus*; S.18,13: C hat *Eritque*, nicht *Eratque*; S.18,16: C hat *inferiorem*, nicht *inferiore*; S.19,15: C hat *quem*, nicht *que*.

⁴Dies führt zu seltsamen Mischformen wie „CXL quatuor“ statt „CXLI^{III}^{or}“ (S.8,32f. Allard).

⁵Ein Beispiel ist die häufig vorkommende arabische partitive Konstruktion *mā ... min*, „was ... an ...“. Das lateinische *quod exierit de/ex radice* bedeutet danach nicht „was aus der Wurzel herauskommt“, sondern „was (dabei) an Wurzel herauskommt“.

KAPITEL 5
EDITION UND ÜBERSETZUNG VON **DA**

MS N

17r | *Incipit arismethica Alchoarismi.*

⟨1.1⟩ Dixit Alchoarizmi: Laudes deo
 rectori nostro atque defensori dicamus
 dignas, que et debitum ei reddant et
 5 augendo multiplicent laudem. Deprece-
 murque eum ut nos dirigat in semitam
 rectitudinis et ducat in viam veritatis
 et ut auxilietur nobis super bonam vo-
 luntatem in his que decrevimus expo-
 10 nere ac patefacere de numero Indorum
 per IX litteras, quibus disposuerunt uni-
 versum numerum suum causa levitatis
 atque ad abbreviationis, ut hoc opus sci-
 licet redderetur levius querenti arisme-
 15 thicam, id est numerum tam maximum
 quam exiguum et quicquid in eo est ex
 multiplicatione et divisione, collectione
 quoque ac dispersione, et cetera. ⟨1.2⟩
 Dixit Alchoarizmi: Cum vidissem Indos
 20 constituisse IX litteras universo numero
 suo propter dispositionem suam quam
 disposuerunt, volui patefacere de opere,
 quod fit per eas, aliquid, quod esset levi-
 us discentibus, si deus voluerit. Si autem
 25 Indi hoc voluerunt et intentio eorum in
 his IX litteris fuit causa que michi paruit,
 deus direxit me ad hoc. Si vero alia de
 causa preter eam, quam ego exposui, hoc
 fecerunt, per hoc, quod ego exposui, ea-
 30 dem causa certissime et absque ulla du-
 bitatione poterit inveniri, leviterque pa-
 tebit aspicientibus et discentibus. ⟨1.3⟩
 Fecerunt igitur IX litteras, quarum figu-
 re sunt he: 9 (8 7 6 5 4 3 2) 1. Est quo-
 35 que diversitas inter homines in figuris earum.
 Fit autem hec diversitas in figura
 quinte littere ac VI., VII. quoque et oc-
 tave. Sed in hoc nullum impedimentum
 est. Sunt enim note signantes numerum,
 40 et he sunt figure, in quibus illa est di-

1 inscr. rubro colore scr. N 34 9 ... 1 rubro
 colore scr. N

MS C

⟨1.1⟩ | Dixit Algorizmi: laudes Deo 104r
 rectori nostro atque defensori dicamus
 dignas, que et debitum ei reddant et
 augendo multiplicent laudem. Deprece-
 murque eum ut nos dirigat in semita rec- 5
 titudinis et ducat in viam veritatis, et
 ut auxilietur nobis super bona voluntate
 in his que decrevimus exponere ac pa-
 tefacere de numero Indorum per IX li-
 teras quibus exposuerunt universum nu- 10
 merum suum, causa levitatis atque ad-
 abbreviationis, ut hoc opus scilicet redde-
 retur levius querenti arithmetica, idest
 numerum tam maximum quam exigui- 15
 um et quicquid in eo est ex multiplicati-
 one et divisione, collectione quoque ac
 dissipatione et cetera.

⟨1.2⟩ Dixit Algorizmi: cum vidissem
 Yndos constituisse IX literas in univer- 20
 so numero suo propter dispositionem
 suam quam posuerunt, volui patefacere
 de opere quod fit per eas aliquid quod
 esset levius discentibus, si Deus voluerit.
 Si autem Indi hoc voluerunt et intentio
 eorum in his IX literis fuit causa que mihi 25
 patuit, Deus direxit me ad hoc. Si vero
 alia de causa preter eam quam ego ex-
 posui hoc fecerunt, per hoc quod ego ex-
 posui eadem causa certissime et absque
 ulla dubitatione poterit inveniri, leviter- 30
 que patebit aspicientibus et discentibus.

⟨1.3⟩ Fecerunt igitur IX literas qua-
 rum figure sunt he (9 8 7 6 5 4 3 2 1).
 Est quoque diversitas inter homines in fi-
 guris earum; fit autem hec diversitas in 35
 figura quinte litere et sexte, septime quo-
 que et octave. Set in hoc nullum impe-
 dimentum est; sunt enim note signantes
 numerum et he sunt figure in quibus est

1 Deo] deo C 22 fit] sit C 23 Deus] deus
 C 26 Deus] deus C

Es beginnt die Arithmetik von al-Ḥwārizmī.

(1.1) Al-Ḥwārizmī hat gesagt: Wir wollen Gott, unserem Herrn und Beistand, das ihm zukommende Lob aussprechen, das ihm das Geschuldete abstattet und durch Vermehren sein Lob vervielfältigt. Und wir wollen ihn bitten, daß er uns auf den Pfad der Geradlinigkeit und auf den Weg der Wahrheit führt und daß er uns hilft bei unserer guten Absicht hinsichtlich dessen, was wir beschlossen haben darzulegen und zu erörtern über die Rechenweise der Inder mit Hilfe von 9 Symbolen, mit denen sie jede einzelne Zahl um der Leichtigkeit und abgekürzten Form willen darstellen, damit nämlich dieses Verfahren leichter wird für denjenigen, der sich um die Arithmetik bemüht, d.h. sowohl um eine sehr große als auch eine sehr kleine Zahl und um all das, was mit ihr geschieht an Multiplikation und Division, Addition und Zerlegung, und um die übrigen Dinge.

(1.2) Al-Ḥwārizmī hat gesagt: Als ich sah, daß die Inder 9 Symbole für jede ihrer Zahlen aufgestellt hatten, um sie nach ihrem System darzustellen, da wollte ich von dem Verfahren, das mit ihnen (= den Symbolen) geschieht, etwas offenkundig machen, was leichter für die Lernenden sein würde, so Gott will. Wenn aber die Inder dies gewollt hatten und ihre Absicht mit diesen 9 Symbolen die Sache war, die ich annahm, so hat Gott mich darauf hingelenkt. Wenn sie dies aber aus einem anderen Grund als dem, den ich darlege, getan haben, so kann durch das, was ich darlege, eben diese Sache mit völliger Gewißheit und ohne jeden Zweifel gefunden werden, und sie wird denjenigen, die (mein Werk) anschauen und lernen, leicht klar werden.

(1.3) Sie machten also 9 Symbole, deren Formen die folgenden sind: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Es gibt auch unter den Leuten einen Unterschied bei deren Formen. Dieser Unterschied besteht bei der Form des 5., 6., 7. und 8. Symbols. Aber dadurch entsteht kein Hindernis. Es sind nämlich Zeichen, die die Zahl bezeichnen, und dies sind die

MS N

versitas: [9 8 7 6] 5 4 3 2 [1]. Et iam
patefeci in libro algebr et almucabalah,
id est restaurationis vel recuperationis
et oppositionis, quod universus numerus
45 sit compositus et quod universus nume-
rus componatur super unum. Unum er-
go invenitur in universo numero, et hoc
est, quod in alio libro arismethice dici-
tur, quia unum est radix universi nume-
50 ri et est extra numerum. Radix numeri
est, quia per eum invenitur omnis nume-
rus. Extra numerum vero est, quia in-
venitur absque aliquo alio numero. Re-
liquus autem numerus sine uno inveniri
55 non potest. Cum enim dicimus unum, in
inventionem sui non indiget uno alio nu-
mero. Reliquus autem numerus indiget
uno, quia non potes dicere duo vel tria,
nisi precedat unum. Nichil aliud ergo est
60 numerus nisi unitatum collectio. Et hoc
[est] quod diximus: non potes dicere duo
vel tria, nisi precedat unum, non de voce
diximus, sed de re. Non enim possunt es-
se duo vel tria, si unum auferatur. Unum
65 vero potest esse absque secundo vel ter-
cio. Igitur nichil aliud sunt duo nisi uni-
us dupplicitas vel geminatio, et similiter
tria nichil aliud sunt nisi eiusdem unius
triplicatio. Sic intellige de reliquo nume-
70 ro. Redeamus ad librum. (1.4) Et inve-
ni, inquit Alchoarizmi, omne, quod pot-
est dici ex numero, esse quicquid exce-
dit unum usque ad novem, id est, quod
est inter unum et novem. Id est, dup-
75 plicatur unum et fiunt duo. Triplicatur
unum et fiunt tria, et sic de ceteris us-
que in novem. Deinde ponuntur decem
in loco unius et duplicantur x ac tri-
plicantur, quemadmodum factum est de
80 uno, fiuntque ex eorum dupplicitate xx
et ex eorum triplicitate xxx et ita usque

41 9 ... 1 rubro colore scr. N 58 uno] eo uno
et del. eo N

MS C

illa diversitas ⟨...⟩. Et iam patefeci in li- 40
bro algebr et almucabalah, idest restau-
rationis et oppositionis, quod universus
numerus sit compositus et quod univer-
sus numerus componatur super unum.
Unum ergo invenitur in universo nume- 45
ro. Et hoc est quod in alio libro arith-
metice dicitur quia unum est radix uni-
versi numeri et est extra numerum: ra-
dix numeri est quia per eum invenitur
omnis numerus; extra numerum vero est 50
quia invenitur per se, idest absque alio
aliquo numero. Reliquus autem numerus
sine uno inveniri non potest. Cum enim
unum dicis, inventionem sui non indiget
alio numero; reliquus autem numerus in- 55
diget uno, quia non potes dicere duo, vel
tria, nisi precedat unum. Nichil aliud est
ergo numerus nisi unitatum collectio, et
hoc quod diximus non potes dicere duo,
vel tria, nisi precedat unum. Non de vo- 60
ce diximus, ut ita dicam, set de re. Non
enim | possunt esse duo, vel tria, si unum 104v
auferatur; unum vero potest esse abs-
que secundo vel tercio. Igitur nichil aliud
sunt duo nisi unius dupplicitas vel gemi- 65
natio, et similiter tria nichil aliud sunt
nisi eiusdem unitatis triplicatio. Sic de
reliquo numero intellige. Set nunc red-
eamus ad librum.

(1.4) Inveni, inquit Algorizmi, omne 70
quod potest dici ex numero et esse quic-
quid excedit unum usque in ix, id est
quod est inter ix et unum. Id est du-
plicatur unum et fiunt duo, et triplica-
tur idem unum fiuntque tria, et sic in 75
ceteris usque in ix. Deinde ponuntur x
in loco unius, et duplicantur x ac tri-

55-56 indiget] indiget indiget C 64 nichil] nil
C 67 triplicatio] praplicatio C 68 numero
om. Allard 70 Inveni corr. C ex Invenit
70 inquit] inquit C 76 Deinde] § Deinde C
76 ponuntur] ponitur C

Formen, bei denen jener Unterschied besteht: 5 4 3 2. Und ich habe in dem Buch über Algebra und Almucabala, d.h. über die Wiederherstellung oder Wiedererlangung und über die Gegenüberstellung, erörtert, daß jede einzelne Zahl zusammengesetzt ist und daß jede einzelne Zahl aus der Eins zusammengesetzt wird. Die Eins wird also in jeder einzelnen Zahl gefunden. Und dies ist das, was in einem anderen Buch über die Arithmetik gesagt wird, (nämlich) daß die Eins die Wurzel jeder einzelnen Zahl ist und (selbst) außerhalb der Zahl ist. Die Wurzel der Zahl ist sie, weil sich durch sie jede Zahl ergibt. Außerhalb der Zahl ist sie aber, weil sie sich ohne irgendeine andere Zahl ergibt. (Jede) übrige Zahl aber kann sich nicht ohne die Eins ergeben. Denn wenn wir die Eins nennen, so braucht sie, um zu existieren, keine andere Zahl. (Jede) übrige Zahl aber braucht die Eins, weil man nicht „Zwei“ oder „Drei“ sagen kann, wenn nicht die Eins vorausgeht. Eine Zahl ist also nichts anderes als eine Ansammlung von Einheiten. Und das, was wir gesagt haben: du wirst nicht „Zwei“ oder „Drei“ sagen können, wenn nicht die Eins vorausgeht, haben wir nicht von dem Wort gesagt, sondern von der Sache. Denn zwei oder drei können nicht existieren, wenn die Eins weggenommen wird. Die Eins aber kann existieren ohne die Zwei oder die Drei. Also ist die Zwei nichts anderes als die Verdopplung oder die Verzweifachung der Eins, und ähnlich ist die Drei nichts anderes als die Verdreifachung eben dieser Eins. So sieh es (auch) bei (jeder) übrigen Zahl. Laßt uns (jetzt) zum Buch zurückkehren.

(1.4) Und ich habe gefunden, sagt al-Ḥwārizmī, daß alles, was an Zahl(en) (mit Worten) ausgedrückt werden kann, das ist, was Eins übertrifft bis zur Neun, d.h., was zwischen Eins und Neun ist. D.h.: Eins wird verdoppelt, und es entsteht die Zwei. Eins wird verdreifacht, und es entsteht die Drei, und ebenso bei den übrigen (Zahlen) bis zur Neun. Dann wird die Zehn an den Platz der Eins gesetzt, und die 10 wird verdoppelt und verdreifacht, so wie es mit der Eins geschehen ist, und aus ihrer Verdopplung

MS N

in xc^{ta}. Post hec redeunt centum in loco
unius et duplicantur ibi ac triplicantur,
quemadmodum factum est in uno et x,
85 et efficiuntur ex eis CC et CCC et cetera
usque in DCCCC. Rursum ponuntur M in
loco unius, et duplicando et triplican-
do, ut diximus, fiunt ex eis duo M et tria
M et cetera usque ad infinitum numerum
90 secundum hunc modum.

(1.5) Et inveni, quod operati sunt
Indi differentias ex hoc. Quarum prima
est differentia unitatum, in qua duppli-
catur et triplicatur quicquid est inter
95 unum et novem. Secunda differentia de-
cenorum, in qua duplicatur et triplica-
tur quicquid est inter x et xc. Tercia
differentia centenorum, in qua duppli-
catur et triplicatur quicquid est inter C
100 et DCCCC^{ta}. Quarta differentia milium,
in qua duplicatur et triplicatur quic-
quid est inter M et IX M. Quinta diffe-
170 rentia x milium hoc | [hoc] modo: quo-
cienscumque ascendit numerus, addun-
105 tur differentie. Et erit dispositio nume-
ri ita. Omne unum cum fuerit in priori
differentia, unum erit, in posteriori vero
erit x, et quod fuerit x in posteriori, erit
unum in priori. Et erit initium differen-
110 tiarum in dextera scriptoris, et hec erit
prima earum, et ipsa posita est unita-
tibus. Cum autem ponerentur x in loco
unius et fierent in secunda differentia es-
setque figura eorum figura unius, necesse
115 fuit eis figure decenorum aliquid prepo-
nere, ut per hoc scirent quid esset x. Pre-
posuerunt igitur ei loco differentie circu-
lum parvum in similitudine o littere, ut

82 XC^{ta}] lx^{ta} N 97 XC] lx N 110 post erit
add. et del. N in (?) 116-117 Preposuerunt
corr. N ex Proposuerunt (?)

MS C

plicantur quemadmodum factum est de
uno, fiuntque ex eorum duplicatione XX,
ex triplicatione xxx, et ita usque ad xc. 80
Post hec redeunt C in loco unius, et du-
plicantur ibi atque triplicantur quemad-
modum factum est de uno et x, efficiun-
turque ex eis CC et CCC et cetera usque in
DCCCC. Rursum ponuntur mille in loco 85
unius, et duplicando et triplicando ut di-
ximus, fiunt ex eis II milia et III et cetera
usque in infinitum numerum secundum
hunc modum. (1.5) Et inveni quod ope-
rati sunt Yndi ex his differentiis. Qua- 90
rum prima est differentia unitatum, in
qua duplicatur et triplicatur quicquid
est inter unum et IX, secunda differen-
tia decenorum, in qua duplicatur vel tri-
plicatur quicquid est a x in nonagin- 95
ta, tertia differentia centenorum, in qua
duplicatur vel triplicatur quicquid est a
C in DCCCC. Quarta vero est differentia
milionum, in qua duplicatur ac triplicatur
quicquid est a mille in IX M. Quinta dif- 100
ferentia est $\bar{x}$ hoc modo: quocienscum-
que ascenderit numerus adduntur diffe-
rentie. Erit dispositio numeri ita: omne
unum quod fuerit in superiori differen-
tia erit in inferiori que est ante ipsam x, 105
et quod fuerit x in inferiori erit unum in
superiori que precedit eam. Et erit initi-
um differentiarum in dextera scriptoris,
et hec erit prima earum, et ipsa posita
est unitatibus. Cum autem ponerentur x 110
in loco unius et fierent in secunda diffe-
rentia, essetque figura eorum figura uni-
us, necesse fuit eis figura decenorum eo
quod similis esset figura unius, ut scirent
per eam quod essent x. Preposuerunt igitur 115
ei unam differentiam et posuerunt in

81 Post] § Post C 91 differentia] diferentia C
104 superiori] superiora C 106 in (1.) om. C
115 eam corr. C ex eum 115 Preposuerunt]
Proposuerunt C

entsteht 20 und aus ihrer Verdreifachung 30, und so bis zu 90. Danach kommt die Hundert an den Platz der Eins, und sie wird dort verdoppelt und verdreifacht, wie es mit der Eins und der 10 geschehen ist, und aus ihr ergeben sich 200 und 300 und die übrigen (Zahlen) bis zu 900. Wiederum wird 1000 an den Platz der Eins gesetzt, und durch Verdoppeln und Verdreifachen, wie wir es gesagt haben, entstehen aus ihr 2000 und 3000 und die übrigen (Zahlen) bis zur unbegrenzten Zahl nach dieser Art.

(1.5) Und ich habe gefunden, daß die Inder hieraus die Stellen ausgearbeitet haben. Die erste hiervon ist die Stelle der Einer, bei der alles, was zwischen Eins und Neun ist, verdoppelt und verdreifacht wird. Die zweite ist die Stelle der Zehner, bei der alles, was zwischen 10 und 90 ist, verdoppelt und verdreifacht wird. Die dritte ist die Stelle der Hunderter, bei der alles, was zwischen 100 und 900 ist, verdoppelt und verdreifacht wird. Die vierte ist die Stelle der Tausender, bei der alles, was zwischen 1000 und 9000 ist, verdoppelt und verdreifacht wird. Die fünfte ist die Stelle der Zehntausender in folgender Weise: Jedesmal, wenn die Zahl ansteigt, werden Stellen hinzugefügt. Und die Darstellung einer Zahl geschieht folgendermaßen: Jede Eins bedeutet, wenn sie an der früheren (= ersten) Stelle steht, eins, an der späteren (= zweiten) (Stelle) aber 10, und was 10 an der späteren Stelle bedeutet, bedeutet eins an der früheren. Und der Anfang der Stellen ist auf der rechten Seite des Schreibers, und diese ist die erste von ihnen, und sie selbst steht für die Einer. Wenn aber 10 an den Platz der Eins gesetzt wird und an der zweiten Stelle steht und wenn seine Form die Form der Eins ist, so war es für sie nötig, der Form der Zehner etwas voranzustellen, damit sie dadurch wußten, was die 10 ist. Sie stellten also diesem Platz der Stelle einen kleinen Kreis voran, der

MS N

per hoc scirent quod differentia unita-
 120 tum esset vacua et nichil numeri esset in
 ea preter circulum parvum, de quo di-
 ximus, qui occuparet eam et ostenderet,
 quod numerus, qui esset in sequenti dif-
 ferentia, esset decenus, et quod hoc esset
 125 differentia secunda, que est differentia
 decenorum, et posuerunt post circulum
 in predicta secunda differentia quicquid
 voluerunt ex numero decenorum de hoc,
 quod est inter x et xc. Et hee sunt figu-
 130 re decenorum: figura x est hec: 10, et
 hec figura xx: 20, et hec xxx: 30, et
 ita usque ad novem. Erit scilicet circulus
 in prima differentia et character pertinens
 135 ad ipsum numerum in secunda differen-
 tia. Hoc autem sciendum est, quod ca-
 racter qui significat in prima differentia
 unum, in secunda significat x et in ter-
 tia c et in quarta m. Et similiter quique
 140 significat in prima differentia duo, in se-
 cunda significat xx et in tertia cc et in
 quarta duo milia, et sic de ceteris intel-
 ligendum est. Nos autem redeamus ad
 librum. (1.6) Post differentiam deceno-
 rum sequitur differentia centenorum, in
 145 qua duplicatur et triplicatur quicquid
 est inter c et dcccc, et eius figura est
 sicut figura unius in tertia differentia po-
 sita ita: 100, et figura ducentorum est
 sicut figura duorum posita similiter in
 150 tertia differentia ita: 200. Figura quo-
 que trecentorum est figura trium posi-
 ta in tertia differentia ita: 300, et sic
 usque ad dcccc. Hanc quoque sequitur
 155 differentia milium, in qua similiter du-
 plicatur et triplicatur quicquid est in-
 ter mille et ix milia, cuius figura sicut

120 numeri corr. N ex ? 129 xc] lx N
 130 10 rubro colore scr. N 131 20 rubro
 colore scr. N 131 30 rubro colore scr. N
 148 100 rubro colore scr. N 150 200 rubro
 colore scr. N 152 300 rubro colore scr. N

MS C

ea circulum parvum in similitudine o-
 litere, ut per hoc scirent quod differen-
 tia unitatum esset vacua et nichil nume-
 120 ri esset in ea preter circulum parvum
 quem diximus occupare eam, et osten-
 derent quod numerus qui est in sequenti
 differentia esset decenus et quod hec es-
 set differentia secunda que est differentia
 decenorum. Et posuerunt post circulum
 125 in predicta differentia secunda quicquid
 voluerunt ex numero decenorum de hoc
 quod est inter x et xc. Et he sunt figure
 decenorum: figura x est hec 10, figu-
 ra xx, 20, et similiter figura xxx est
 130 ita 30. | Et ita usque ad ix erit scilicet
 105r circulus in prima differentia et character
 pertinens ad ipsum numerum in secun-
 da differentia. Hoc autem sciendum est
 quod character qui significat in prima dif-
 135 ferentia unum in secunda significat x, in
 tertia c, atque in quarta i. Et similiter
 qui significat in prima differentia duo in
 secunda significat xx, et in tertia cc, et
 in quarta ii. Et sic de ceteris intellige;
 140 nos autem redeamus ad librum.

(1.6) Post differentiam decenorum
 sequitur differentia centenorum in qua
 duplicatur ac triplicatur quicquid est a
 c in dcccc, et eius figura est sicut figu-
 145 ra unius in tertia differentia posita ita
 100, et figura ducentorum est sicut figu-
 ra duorum posita similiter in tertia dif-
 ferentia ita 200. Figura quoque trecen-
 150 torum est figura trium posita in tertia
 differentia ita 300, et sic usque ad non-
 gentos. Hanc quoque sequitur differentia
 milium in qua similiter duplicatur et tri-
 plicatur quicquid est a mille in ix. Cuius
 figura est sicut figura unius in quarta dif-
 155 ferentia posita ita 1000; figura duorum

119 nichil] hī C 121–122 ostenderent] osten-
 deret C 123 hec] hoc C 143 sequitur] sequi-
 tur sequitur C

dem Buchstaben *o* ähnelt, damit sie dadurch wußten, daß die Stelle der Einer leer war und daß keine Zahl an ihr stand außer dem kleinen Kreis, von dem wir gesprochen haben, der sie einnehmen und zeigen sollte, daß die Zahl, die an der nächsten Stelle stand, ein Zehner war und daß dies die zweite Stelle war, die die Stelle der Zehner ist; und sie setzten nach dem Kreis an die vorher genannte zweite Stelle, was auch immer sie wollten aus der Zahl der Zehner von dem, was sich zwischen 10 und 90 befindet. Und dies sind die Formen der Zehner: Die Form der X ist folgende: 10; und dies ist die Form der XX: 20; und dies XXX: 30; und so bis zur Neun. Es ist nämlich ein Kreis an der ersten Stelle und ein Symbol, das sich auf die Zahl selbst bezieht, an der zweiten Stelle. Dies aber muß man wissen, daß das Symbol, das an der ersten Stelle Eins bezeichnet, an der zweiten 10 bezeichnet und an der dritten 100 und an der vierten 1000. Und ähnlich bezeichnet (das Symbol), das an der ersten Stelle Zwei bezeichnet, an der zweiten 20 und an der dritten 200 und an der vierten 2000, und so muß man es auch bei den übrigen verstehen. Wir aber wollen zum Buch zurückkehren.

⟨1.6⟩ Nach der Stelle der Zehner folgt die Stelle der Hunderter, bei der alles, was zwischen 100 und 900 liegt, verdoppelt und verdreifacht wird, und ihre Form ist wie die Form der Eins, die an die dritte Stelle gesetzt wird, (nämlich) so: 100; und die Form der 200 ist so wie die Form der Zwei, die in gleicher Weise an die dritte Stelle gesetzt wird, (nämlich) so: 200. Ebenso ist die Form der 300 (gleich) der Form der Drei, die an die dritte Stelle gesetzt wird, (nämlich) so: 300; und so bis zu 900. Dieser (Stelle) folgt auch die Stelle der Tausender, bei der in gleicher Weise alles, was sich zwischen 1000 und 9000 befindet, verdoppelt und verdreifacht wird. Ihre Form ist

MS N

figura unius in quarta differentia posita ita: 1000. Figura duorum milium est sicut figura duorum in quarta differentia ita: 2000. Et ita usque ad novem milia. Ponuntur autem in differentia quarta ante characterem tres circuli, ut ostendatur quid sit in quarta differentia, sicut positi sunt in secunda differentia unus et in tertia duo, ut ostenderetur que sunt differentie decenorum vel centenorum, et hoc fit, cum non fuerit ante ipsum numerum alius numerus in eadem differentia. Si autem fuerit cum numero qui ponitur in his differentiis aliquis numerus infra eum, debet poni in ea differentia, que sibi debetur. Verbi gratia. Si fuerit cum decem aliquis numerus de his qui sunt infra eum, ut pote undecim vel duodecim, ponuntur ita: 11. In prima scilicet differentia, ubi positus erat circulus in decem, ponatur unum, et in secunda differentia ponitur etiam unum, quod significat x. Similiter si fuerit cum centum alius numerus de his qui sunt infra eum, ponatur in differentia, que sibi debetur. Quod ostendamus sub quodam exemplo et dicamus, quod esset numerus CCC et XXV. Quem cum vellemus ponere in suis differentiis, posuimus ita: incepimus a dextera scriptoris et posuimus ita in prima differentia v et in secunda eundo versus sinistram partem scriptoris xx, et in tertia differentia CCC, unumquemque numerum scilicet in sua differentia, id est unitates in differentia unitatum, que est prima, et decenos in differentia decenorum, que est secunda, centenos vero in differentia centenorum, que est tertia, et hec est figura

158 1000 rubro colore scr. N 160 2000 rubro colore scr. N 166 decenorum] ducentorum N 175 11 rubro colore scr. N 186 dextera] dextera N 192–193 decenos] decenas N et scr. o supra a

MS C

milium est sicut figura duorum in quarta differentia posita ita 2000, et ita usque ad ix milia. Ponuntur autem in differentia quarta ante characterem tres circuli ut ostendatur quid sit in quarta differentia, sicut positus est in secunda differentia unus, et in tertia duo, ut ostenderetur quod essent differentie decenorum vel centenorum, et hoc fit cum non fuerit ante ipsum numerum alius numerus in eadem differentia. Si autem fuerit cum numero qui ponitur in his differentiis alius numerus infra eum, debet poni in ea differentia que sibi debetur. Verbi gratia. Si fuerit cum x aliquis numerus de his qui sunt infra eum, utpote xi vel xii, ponuntur ita 11. In prima scilicet differentia ubi positus erat circulus ponatur unus, et in secunda differentia ponatur etiam unum quod significat x. Similiter si fuerit cum c alius numerus de his qui sunt infra eum, ponatur in differentia que sibi debetur. Quod ostendamus sub quodam exemplari, et dicamus quod esset numerus CCCXXV. Quem cum vellemus ponere in suis differentiis, posuimus ita: incepimus a dextera scriptoris et posuimus in prima differentia v, et in secunda eundo versus sinistram partem scriptoris xx, et in tertia differentia CCC, unumquemque numerum in differentia sua, id est unitates in differentia unitatum, que est prima, et decenos in differentia decenorum, que est secunda, centenos vero in differentia centenorum, que est tertia. Et hec est figura 325. Et similiter erit in aliis differentiis secundum hunc ordinem, id est quocienscumque augmentatus fuerit numerus et creverint differentie, ponatur unumquodque genus numeri in sua diffe-

161 quid] quod C 163 unus] unius C 180 exemplari] explari C

wie die Form der Eins, die an die vierte Stelle gesetzt wird, (nämlich) so: 1000. Die Form der 2000 ist wie die Form der Zwei an der vierten Stelle, (nämlich) so: 2000; und so bis zu 9000. Es werden aber an der vierten Stelle vor dem Symbol drei Kreise gesetzt, damit gezeigt wird, was an der vierten Stelle steht, so wie an der zweiten Stelle ein (Kreis) gesetzt wurde und an der dritten (Stelle) zwei, damit gezeigt wurde, was die Stellen der Zehner oder Hunderter sind, und dies geschieht, wenn sich nicht vor der Zahl selbst eine andere Zahl an derselben Stelle befindet. Wenn sich aber zusammen mit der Zahl, die an diesen Stellen steht, (noch) eine (andere) Zahl unter ihr befindet, so muß sie an die Stelle gesetzt werden, die ihr zukommt. Zum Beispiel: Wenn mit 10 eine Zahl von denen ist, die unterhalb von ihr sind, wie 11 oder 12, so werden sie so gesetzt: 11. An der ersten Stelle nämlich, wo der Kreis zur (Bezeichnung der) Zehn gesetzt war, möge die Eins gesetzt werden, und an der zweiten Stelle wird auch die Eins gesetzt, die 10 bezeichnet. In ähnlicher Weise möge, wenn mit 100 eine andere Zahl von denen ist, die unterhalb von ihr sind, sie an der Stelle gesetzt werden, die ihr zukommt. Das wollen wir an einem Beispiel zeigen, und wir wollen sagen, daß die Zahl 325 sein soll. Wenn wir sie an ihre Stellen setzen wollen, setzen wir sie so: wir fangen von der rechten Seite des Schreibers an und setzen so an der ersten Stelle die 5 und an der zweiten Stelle, indem wir in Richtung auf die linke Seite des Schreibers gehen, 20 und an der dritten Stelle 300, nämlich jede Zahl an ihre Stelle, d.h. die Einer an die Stelle der Einer, die die erste ist, und die Zehner an die Stelle der Zehner, die die zweite ist, die Hunderter aber an die Stelle der Hunderter, die die dritte ist. Und

MS N

ra: [325] . Et similiter erunt alie diffe-
 rentie secundum hunc ordinem, id est,
 quocienscumque augmentatus fuerit nu-
 merus et creverint differentie, ponatur
 200 unumquodque genus numeri in sua diffe-
 rentia, que ei debetur. (1.7) Cum autem
 collecti fuerint in aliqua differentiarum
 x vel plus, erigantur ad posteriorem dif-
 ferentiam, et fiat de unoquoque x unum
 205 in posteriori differentia. Rursum si fuerit
 in eadem differentia, ad quam pervenerit
 numerus ascendendo, alter numerus, ad-
 datur desuper et colligatur in simul, et si
 fuerit in eo x vel plus, fiat de unoquoque
 210 x unum et erigatur ad posteriorem diffe-
 rentiam. Id est: si collecti fuerint in pri-
 ma differentia x, fiat de eis unum et po-
 natur in secunda differentia, et si in ea-
 dem differentia fuerit numerus, iungatur
 215 ei, et si fuerint ibi x, fiat de eis unum et
 (erigatur etiam ad terciam differentiam.
 Verbi gratia: Si in prima differentia, que
 est differentia unitatum, habueris x, fac
 de eis unum et) pone ipsum in secunda
 220 differentia. In prima vero differentia po-
 ne circulum, sicut diximus, ut ostendan-
 18r tur | due esse differentie. Si vero fuerint
 undecim, fac de x unum et pone illud in
 secunda differentia scilicet ut supra, et
 225 dimitte unum in prima. Si autem inveneris
 in secunda differentia, ubi posuisti ip-
 sum unum, quod fecisti de x^{cem} , aliquem
 numerum, iunge eum cum illo. Et si fue-
 rint x vel plus, fac de x unum et iterum
 230 pone illud in tercia differentia, et quod
 remanserit infra x, maneat in suo loco.
 Quod autem diximus plus x, hoc perti-
 net ad multum numerum. Verbi gratia:
 Si fuerit in secunda vel tercia differen-
 235 tia magnus numerus, utpote si inveneris

196 [325] rubro colore scr. N 196 alie] due
 N 205 Rursum] R rubro colore scr. N 216-
 219 erigatur ... et om. N (addidi ex C)

MS C

rentia que debetur ei. (1.7) Cum autem
 collecti fuerint in aliqua differentiarum x
 vel plus, erigantur ad superiorem diffe- 200
 rentiam et fiat de unoquoque x in supe-
 riori differentia unum. Rursum si fuerit
 in eadem differentia ad quam pervenerit
 numerus ascendendo alter numerus, ad-
 datur desuper et colligantur insimul, et 205
 si fuerint in eo x vel plus, fiat de uno-
 quoque x unum et erigatur ad superio-
 rem differentiam. Idest si collecti fuerint
 in prima differentia decem, | fiat de eis 105v
 unum et ponatur in secunda differentia, 210
 et si in eadem differentia similiter fue-
 rit numerus, iungatur ei, et si fuerint ibi
 x, fiat de eis unum et erigatur etiam ad
 terciam differentiam. Verbi gratia. Si in
 prima differentia que est differentia uni- 215
 tatum habueris x, fac de eis unum et po-
 ne ipsum in secunda differentia. In pri-
 ma vero differentia pone circulum sicut
 diximus, ut ostendatur due esse differen-
 tie. Si vero fuerint xi, fac de x unum et 220
 pone eum in secunda differentia ut su-
 pra, et dimitte unum in prima. Si autem
 inveneris in secunda differentia ubi po-
 suisti ipsum numerum quem fecisti de x
 aliquem numerum, iunge eum cum illo, 225
 et si fuerint x vel plus, fac de x unum
 et iterum pone eum in differentia ter-
 cia, et quod remanserit infra x maneat
 in suo loco. Quod autem diximus plus x
 hoc pertinet ad multum numerum. Ver- 230
 bi gratia. Si fuerit in secunda vel ter-
 cia differentia magnus numerus, utpote
 si inveneris in differentia tercia que est
 differentia centenorum ix, et si fuerint in
 differentia secunda x, facies de x unum 235
 et mutabis eum ad terciam differentiam,
 ibique iunges eum cum ix et fiunt x. Fa-

201 unoquoque] unoque C 206 fiat corr. C ex
 fiet 223-224 posuisti] posuistis C 229 dixi-
 mus] dicis C 230 pertinet] perfertur Allard

so sieht (die Zahl) aus: $\boxed{325}$. Und auf ähnliche Weise sind die anderen Stellen nach dieser Ordnung, d.h., sooft eine Zahl vergrößert wird und die Stellen wachsen, soll jede Art der Zahl an ihre Stelle gesetzt werden, die ihr zukommt.

(1.7) Wenn aber an einer Stelle 10 oder mehr angesammelt sind, sollen sie zu der späteren Stelle gebracht werden, und es soll von jeder 10 eine Eins an der späteren Stelle gemacht werden. Wenn wiederum sich an derselben Stelle, zu der eine Zahl beim Ansteigen gelangt, eine andere Zahl befindet, so soll sie oberhalb hinzugefügt und zu einer zusammengefügt werden, und wenn sich in ihr 10 oder mehr befinden, so soll aus jeder Zehn eine Eins gemacht und zur späteren Stelle gebracht werden. Das heißt: Wenn an der ersten Stelle 10 angesammelt sind, so soll aus ihnen eine Eins gemacht und an die zweite Stelle gesetzt werden, und wenn sich an derselben Stelle eine Zahl befindet, so soll sie mit ihr verbunden werden, und wenn sich dort 10 befinden, so soll aus ihnen eine Eins gemacht und (an die dritte Stelle gebracht werden. Zum Beispiel: Wenn du an der ersten Stelle, die die Stelle der Einer ist, 10 hast, so mache aus ihnen eine Eins und) setze sie an die zweite Stelle. An die erste Stelle aber setze einen Kreis, wie wir es gesagt haben, damit gezeigt wird, daß es zwei Stellen sind. Wenn es aber 11 sind, so mache aus 10 eine Eins und setze sie an die zweite Stelle wie zuvor, und lasse die Eins an der ersten (Stelle). Wenn du aber an der zweiten Stelle, wo du eben die Eins, die du aus 10 gemacht hast, aufgestellt hast, irgendeine Zahl findest, so verbinde sie mit jener. Und wenn es 10 oder mehr sind, so mache aus 10 eine Eins und setze jene wiederum an die dritte Stelle, und was unter 10 übrig bleibt, soll an seinem Platz bleiben. Wenn wir aber sagen: „mehr als 10“, so bezieht sich das auf eine hohe Zahl. Zum Beispiel: Wenn sich an der zweiten oder dritten Stelle eine große Zahl befindet,

MS N

in tercia differentia, que est differentia
centenorum, IX et fuerit in differentia se-
cunda x, facies de decem unum et muta-
bis illud ad terciam differentiam, ibique
240 iunges illud cum IX et erunt x. Facies
iterum de x unum et mutabis illud ad
quartam differentiam, et ibi erit mille.
Si vero invenisses in secunda differentia
xx et faceres de eis duo adderesque duo
245 super novem in tercia differentia et fie-
rent XI, faceres iterum de x unum et mu-
tares illud ad quartam differentiam, ubi
esset mille, et remaneret unum in ter-
cia differentia. Et ideo dicit: x vel plus.
250 Et hoc sciendum est, quia, cum mutave-
ris numerum et posueris eum in sequenti
differentia, debes ponere per characteres
suos. Scilicet si fuerit x, pones pro eo
characterem, qui significat in prima dif-
255 ferentia unum, et si fuerint xx, pones
pro eis characterem, qui significat in pri-
ma differentia duo, et sic de ceteris in-
tellige. Si vero remanserit in eadem dif-
ferentia, de qua mutasti numerum, ali-
260 quod ex numero, dimitte illud similiter
per characteres suos, id est: si remanse-
rit unum vel duo, dimittes illud ibi per
characterem, qui significat eundem nume-
rum in prima differentia seorsum. Si re-
265 manserit unum, describes ei characterem
unius, et si remanserint duo, tunc de-
scribes characterem duorum, etc. Sed si-
gnificabit in unaquaque secundum quod
fuerit differentia, id est, in prima diffe-
270 rentia significabit unitates et in secun-
da decenos etc, sicut supradictum est.
Sed redeamus ad librum. (1.8) Si autem
fuerit numerus multus et volueris scire,
quotus sit vel quot differentie sint in eo,

252 characteres] carecteres N 256 characterem]
carecterem N 261 characteres] carecteres N
263 characterem] carecterem N 267 caracte-
rem] carecterem N

MS C

cies unum de ipsis x et mutabis eum in
quartam differentiam, et ibi erit mille. Si
vero invenisses in secunda differentia xx, 240
et faceres de eis duo adderesque duo su-
per IX in tercia differentia, et fierent XI.
Faceres iterum de x unum et mutares
eum ad quartam differentiam ubi esset
mille, et remaneret unum in tercia diffe- 245
rentia. Et ideo dicit x vel plus. Et hoc
sciendum quia cum mutaveris numerum
et posueris eum in sequenti differentia,
debes ponere per characteres suos. Idest
si fuerint x, pones pro eis characterem qui 250
significat in prima differentia unum, et si
fuerint xx, pones pro eis characterem qui
significat in prima differentia duo. Et sic
de ceteris intellige. Si vero remanserit in
eadem differentia de qua mutasti nume- 255
rum quid, ex numero dimitte eum simi-
liter per characteres suos, idest si reman-
serit unum vel duo, dimittes eum ibi per
characterem qui significat eundem nume-
rum. Idest si remanserit unum, describes 260
ibi characterem unius, et si remanserint
duo, describes ibi characterem duorum, et
cetera. Set significabit unaqueque figura
secundum quod fuerit differentia, idest
in prima differentia significabit unitates, 265
in secunda decenos, in tercia centenos,
et cetera sicut supra dictum est.

241 faceres] facies C 245 remaneret] reñet C
246 dicit] dixit Allard 247 cum] tum C

nämlich wenn du an der dritten Stelle, die die Stelle der Hunderter ist, 9 findest und wenn an der zweiten Stelle 10 ist, so mache aus 10 eine Eins und bringe jene an die dritte Stelle, und dort verbinde sie mit 9, und es sind 10. Mache wiederum aus der 10 eine Eins und bringe sie an die vierte Stelle, und dort ist sie Tausend. Wenn du aber an der zweiten Stelle 20 gefunden hättest und aus ihnen zwei machen und die Zwei zur Neun an der dritten Stelle addieren würdest und 11 entstünden, so würdest du wiederum aus 10 eine Eins machen und sie an die vierte Stelle bringen, wo sie Tausend bedeuten würde, und es würde eine Eins an der dritten Stelle übrig bleiben. Und daher sagt er: „10 oder mehr“. Und das muß man wissen, daß du, wenn du eine Zahl veränderst und an der folgenden Stelle schreibst, sie durch ihre Symbole schreiben mußt. Nämlich: wenn es 10 war, so setze anstelle dessen das Symbol, das an der ersten Stelle die Eins bezeichnet, und wenn es 20 war, so setze dafür das Symbol, das an der ersten Stelle Zwei bezeichnet, und so verstehe es für die übrigen (Zahlen). Wenn aber an derselben Stelle, an der du die Zahl verändert hast, etwas von der Zahl übrig bleibt, so lasse es in gleicher Weise durch seine Symbole. D.h.: Wenn Eins oder Zwei übrig bleiben, so lasse es dort durch das Symbol, das dieselbe Zahl an der ersten Stelle für sich bezeichnet. Wenn Eins übrig bleibt, so schreibe dafür das Symbol der Eins, und wenn Zwei übrig bleiben, dann schreibe das Symbol der Zwei, usw. Aber (das Symbol) wird an jeder Stelle das bezeichnen, was (dem Wert) der Stelle entspricht. D.h.: an der ersten Stelle bezeichnet es Einer und an der zweiten Zehner, usw., wie es oben gesagt worden ist. Aber wir wollen zum Buch zurückkehren.

MS N

275 ut scribas eum in libro vel loquaris de
eo, scito quod non sit in aliqua differen-
tia plus novem nec minus uno, nisi sit
circulus, qui nichil est. Cum ergo volue-
ris hoc scire, numera differentias incipi-
280 ens a prima, que erit in dextera parte,
et hec erit differentia unitatum. Relique
vero differentie erunt descripte per suc-
cessionem suas versus sinistram partem
scriptoris, ex quibus secunda erit diffe-
285 rentia decenorum et tertia centenorum,
quarta milium et quinta x milium. Sex-
ta vero differentia erit centum milium
et septima mille milium. Rursum octava
erit decies mille milium et nona centies
290 mille milium et decima milies mille mi-
lium et undecima decies milies mille mi-
lium et duodecima centies milies mille
miliu[m] et terciadecima milies mille mil-
le milium. Et similiter in omni differen-
295 tia ex differentiis addes numerum dicen-
do. Quod si super tres differentias, id est
decenorum, centenorum et milium, resi-
duum fuerit unum, erit x m ipsorum mi-
lium, que exierunt tibi in dictis. Si ve-
300 ro remanserint duo, erunt centum mi-
lia ex ipsis milibus. Et iam constitui ti-
bi exemplar, quo poteris scire ac proba-
re, quicquid augmentatur super nume-
rum vel minuitur ex eo, et hec est figura
305 eiusdem: 1.180.703.051.492.863. Que lit-
tere cum eas colligeris, erunt secundum
quod diximus de his notis omnia milia,
et hoc erit milies mille mille milia
310 quinque vicibus secundum numerum
characterum qui sunt sub eis, et centies
milies mille mille milia III^{or} vicibus se-
cundum numerum characterum qui sunt
sub eis, et octuaginta milia milia milia

281 Relique] Reliqua N 283 versus] usus N
290 milies] milles N 290 mille (2.) corr. N
ex milium (?) 305 1.180.703.051.492.863]
318070305149286544030307 (rubro colore) N

MS C

⟨1.8⟩ Si autem fuerit numerus multus
et volueris scire quotus sit vel quot diffe-
270 rentie sint in ipso, ut scribas eum in libro
vel loquaris de eo, scito quod non sit in
aliqua differentia plus IX nec minus uno,
nisi circulus sit qui nichil est. Cum er-
go volueris hoc scire, numera differentias
incipiens a prima que erit in dextera par-
275 te, et hec erit differentia unitatum. Re-
lique vero differentie erunt descripte per
successiones suas versus sinistram par-
tem scriptoris, ex quibus secunda erit
differentia decenorum, et tertia cente-
280 norum, et quarta milium, et quinta x
miliu[m], et septima mille milium. Rursum
VIII^{va} erit x milia milium, | et nona C
106r milia milium, et decima mille milia mi-
285 liu[m] tribus vicibus, et undecima x milia
milia milium tribus vicibus, et duodeci-
ma C milia milia milium tribus vicibus,
et XIII^a mille milia milia milium quatu-
290 or vicibus. Et similiter in omni differen-
tia ex differentiis numeri addes in locu-
tione tua. Quod super tres differentias,
id est decenorum et centenorum et mili-
um, residuum fuerit unum, erunt x mi-
295 lia ipsorum milium que exierunt tibi in
dictis. Si vero remanserint duo, erunt C
milia ex ipsis milibus. Et iam constitui
tibi exemplar quo poteris scire ac proba-
re per eum quicquid augmentatur super
300 numerum vel minuitur ex eo. Et hec est
figura eiusdem ⟨1 180 703 051 492 863⟩.

Due litere cum collegeris eas secun-
dum quod diximus de his notis, erit
numerus milium earum notarum mille

272 uno] vero Allard 273 nichil] nil C, nil
Allard 284 VIII^{va}] octava Allard 285 milia
(2.)] mille C 286 milia] millia C 288 milia
(1.) corr. C ex milla 289 milia milia] mille
mille C 293 decenorum et centenorum] cente-
norum et decenorum C, corr. C¹

⟨1.8⟩ Wenn es aber eine große Zahl ist und du wissen willst, wie groß sie ist oder wie viele Stellen in ihr sind, damit du sie in einem Buch schreiben oder sie aussprechen kannst, so sollst du wissen, daß an keiner Stelle mehr als neun und weniger als eins stehen kann, außer, wenn (dort) ein Kreis steht, der „nichts“ bedeutet. Wenn du dies also wissen willst, so zähle die Stellen, indem du von der ersten anfängst, die auf der rechten Seite ist, und dies ist die Stelle der Einer. Die übrigen Stellen werden aber geschrieben durch ihr Aufeinanderfolgen in Richtung auf die linke Seite des Schreibers hin. Von ihnen ist die zweite die Stelle der Zehner, die dritte die der Hunderter, die vierte die der Tausender und die fünfte die der Zehntausender. Die sechste Stelle aber ist die der Hunderttausender und die siebte die der Millionen, die achte die der Zehnmillionen, die neunte die der Hundertmillionen, die zehnte die der Milliarden, die elfte die der Zehnmilliarden, die zwölfte die der Hundertmilliarden, die dreizehnte die der Billionen. Und in gleicher Weise wirst du bei jeder von den Stellen die Zahl hinzufügen, indem du (sie gleichzeitig) aussprichst. Wenn nun über die drei Stellen, d.h. der Zehner, Hunderter und Tausender, hinaus eins übrig bleibt, so sind dies zehntausend von den Tausendern selbst, die sich dir beim Sprechen ergeben haben. Wenn aber zwei übrig bleiben, so sind es hunderttausend von den Tausendern selbst. Und ich habe für dich ein Beispiel geschrieben, durch das du all das wissen und beweisen kannst, was zu einer Zahl hinzugefügt oder von ihr subtrahiert wird. Und so sieht sie aus: 1.180.703.051.492.863. Wenn du diese Symbole zusammenfügst, sind sie gemäß dem, was wir über diese Zeichen gesagt haben, alle Tausender, und dies heißt: tausend tausend tausend tausend, fünfmal, gemäß der Zahl der Symbole, die unter ihnen stehen; und hundert tausend tausend tausend tausend, viermal, gemäß der Zahl der Symbole, die unter ihnen stehen; und achtzig tausend tausend tausend tausend,

MS N

315 milium III^{or} vicibus secundum quod est
ex eis [ex] characteribus, deinde septin-
genta milia milia milium tribus vicibus
secundum characteres qui sunt sub eis, et
tria milia milia milium tribus vicibus, et
320 quinquaginta unum milia milium duabus
vicibus, et quadringenta milia, et nona-
ginta duo milia, et octingenti sexaginta
18v tres. |

⟨2⟩ *Capitulum augmentationis et di-
minutionis.*

325 ⟨2.1⟩ Cum volueris numerum adde-
re super numerum vel minuere nume-
rum de numero, pone utrosque nume-
ros in duobus ordinibus, unum scilicet
ex eis sub altero, et sit differentia uni-
tatum sub differentia unitatum et diffe-
330 rentia decenorum sub differentia deceno-
rum. Quod si volueris colligere utrosque
numeros, addere scilicet unum super al-
terum, addes unamquamque differenti-
335 am super differentiam que est super eam
ex genere suo, id est unitates super uni-
tates et decenos super decenos. Cumque
collecti fuerint in aliqua differentiarum,
id est in differentia unitatum vel dece-
340 norum sive in aliqua alia, decem, pones
eos unum et eriges illud ad superiorem
differentiam, id est, si habueris in prima
differentia, que est differentia unitatum,
x, facies de eis unum et sublevabis illud
345 ad differentiam decenorum, et ibi signi-
ficabit x. Si autem remanserit aliquid de
numero, quod sit infra x, vel fuerit ip-
se numerus infra x, dimittes eum eadem
differentia. Et si nichil remanserit, po-

315-316 septingenta] septuaginta N 319
unum milia corr. N ex milia unum 323-324
inscr. rubro colore scr. N 342 id est corr. N
ex et (?)

MS C

milia milia milia milium quinque vici- 305
bus secundum numerum characterum qui
sunt sub eis, et centum millia milia milia
milium quatuor vicibus secundum nu-
merum characterum qui sunt sub eis, et
octoginta milia milia milia milium qua- 310
tuor vicibus secundum quod est ex eis
characteribus, deinde septingenta milia
milia milium tribus vicibus secundum
characteres qui sunt sub eis, et tria milia
milia milium tribus vicibus, et quinqu- 315
aginta unum milia milium duabus vici-
bus, et quadringenta milia, et nonaginta
duo milia, et octingenta sexaginta tres.

⟨2.1⟩ Cum volueris addere numerum
super numerum vel minuere numerum 320
de numero, pone utrosque numeros in
duobus ordinibus, unum scilicet ex eis
sub altero, et sit differentia unitatum
sub differentia unitatum et differentia
decenorum sub differentia decenorum. 325
Quod si volueris colligere utrosque nu-
meros, addere scilicet unum super alte-
rum, addes unamquamque differentiam
super differentiam que est super eam de
genere suo, id est unitates super unitates 330
et decenos super decenos. Cum collecti
fuerint in aliqua differentiarum, id est in
differentia unitatum vel decenorum sive
in alia aliqua, decem, pones pro eis unum
et eriges eum ad superiorem differenti- 335
am. Idest si habueris in prima differen-
tia que est differentia unitatum decem,
facies de eis unum et sublevabis eum ad
differentiam decenorum, et ibi significa-
bit decem. Si autem remanserit aliquid 340
de numero quod sit infra x vel fuerit ipse
numerus infra x, dimittes eum in eadem

305 milia milia milia] mille mille C 305 mi-
lium] millium C 306 characterum] caractera-
rum C 308 quatuor] quatuorum C 313 mi-
lium] milium milium C 323 altero] atero C
340 autem] aut C 342 dimittes] dimittens C

viermal, gemäß dem, was sich aus ihren Symbolen ergibt; dann siebenhundert tausend tausend tausend, dreimal, gemäß den Symbolen, die unter ihnen stehen; und drei tausend tausend tausend, dreimal; und einundfünfzig tausend tausend, zweimal, und vierhunderttausend; und zweiundneunzigtausend; und achthundertdreihundsechzig.

* * *

⟨2⟩ *Kapitel über die Vergrößerung (= Addition) und Verringerung (= Subtraktion)*

⟨2.1⟩ Wenn du eine Zahl zu einer Zahl addieren willst oder eine Zahl von einer Zahl subtrahieren, so schreibe beide Zahlen in zwei Zeilen, d.h. eine von ihnen unter die andere, und es sei die Stelle der Einer unter der Stelle der Einer und die Stelle der Zehner unter der Stelle der Zehner. Wenn du nun beide Zahlen zusammenfügen willst, d.h. eine zur anderen addieren, so addiere jede Stelle zu der Stelle, die über ihr von ihrer Art ist, d.h. Einer zu Einern und Zehner zu Zehnern. Und wenn an irgendeiner der Stellen, d.h. an der Stelle der Einer oder Zehner oder an irgendeiner anderen (Stelle), 10 angesammelt sind, so setze sie als Eins und bringe jene (Eins) zur darüberliegenden Stelle; d.h.: Wenn du an der ersten Stelle, die die Stelle der Einer ist, 10 hast, so mache aus ihnen eine Eins und hebe sie zur Stelle der Zehner, und dort wird sie 10 bezeichnen. Wenn aber etwas von der Zahl, die unterhalb von 10 ist, übrig bleibt oder wenn die Zahl selbst unterhalb von Zehn ist, so lasse sie an derselben Stelle. Und wenn nichts

MS N

350 nes circulum, ut non sit differentia vacua, sed sit in ea circulus qui occupet eam, ne forte, cum vacua fuerit, minuantur differentie et putetur secunda esse prima et sic decipieris in numero tuo.

355 Sic quoque facies in omnibus differentiis. Similiter cum collecti fuerint in secunda differentia x, facies de eis unum et sublevabis illud ad terciam differentiam, ibique significabit centum, et quicquid remanserit infra x, remanebit ibi. Si vero nichil remanserit, pones ibi circulum ut supra. Sicque facies in ceteris differentiis, si plus fuerit.

(2.2) Si vero volueris minuere unum numerum, scilicet de alio numero, minues unamquamque differentiam de illa differentia, que est super se ex genere suo, ut supradictum est. Quod si non fuerit in superiori differentia tantus numerus, de quo possis minuere numerum inferioris differentie, id est, si fuerit minus vel nichil ibi fuerit, accipies de secunda differentia, que est altior illa superiori, unum et facies de eo x, minuesque de eo quod habueris, et quod remanserit, dimittes in eadem superiori differentia. Si vero nichil remanserit, pones ibi circulum. Si autem in secunda differentia a superiori nichil fuerit, accipe unum de tertia differentia, de illa scilicet, que est altior superiori, et facies de eo x in secunda differentia a superiori, accipiesque iterum de ipsis decem unum, quod erit x in superiori differentia, et de his minues quod volueris, et quod remanserit infra x, dimittes illud in eadem superiori differentia. Si vero nichil remanserit, facies ibi circulum. Incipe ergo semper in augmentatione vel diminutione ab altiori differentia, postea ab ea que eam succedit, quia utilius ac levius erit opus,

370 quo] qua N

MS C

differentia. Et si nichil remanserit, pones circulum, ut non sit differentia vacua sed sit in ea circulus qui occupet eam, ne forte, cum | vacua fuerit, minuantur differentie et putetur secundam esse primam et sic decipieris in numero tuo. Sic quoque facies in omnibus differentiis. Similiter cum collecti fuerint in secunda differentia x, facies de eis unum et sublevabis eum ad differentiam terciam, ibique significabit centum, et quicquid remanserit infra x remanebit ibi. Si vero nichil remanserit, pones ibi circulum ut supra. Sic facies in ceteris differentiis si plus fuerit. (2.2) Si vero volueris minuere unum de alio numerum, scilicet de numero, minues unamquamque differentiam de alia differentia que est super se ex genere suo, sicut supra dictum est. Quod si non fuerit in superiori differentia tantus numerus de quo possis minuere numerum inferioris differentie, id est si fuerit minus vel nichil ibi fuerit, accipies de secunda differentia que est altior illa superiori unum et de eo facies decem, minuesque de eo quod debueris, et quod remanserit dimittes in eadem superiori differentia. Si vero nichil remanserit, pones ibi circulum ut supra. Si autem in secunda differentia a superiori nichil fuerit, accipe unum de tertia differentia et erunt x in secunda. Et rursum ex illis x accipias unum et fac de eo ut supra, et remanebunt in secunda ix. Et incipe semper in augmentatione vel diminutione ab altiori differentia, postea a sequenti que eam succedit, quia utilius ac levius erit opus, si Deus voluerit. (2.3)

345 sed] s; C, set *Allard* 347–348 secundam esse primam] secunda esse prima C 350 fuerint] fuerit C 355 post nichil *add. et del.* C in ceteris, [in ceteris] *add. Allard* 357 Si] § Si C 365 fuerit] fuit C 380 Deus] deus C

übrig bleibt, so setze einen Kreis, damit die Stelle nicht leer ist, sondern (damit) sich an ihr ein Kreis befindet, der ihre Stelle einnimmt, damit die Stellen nicht zufällig, wenn sie leer ist, verringert werden und man glaubt, daß die zweite (Stelle) die erste ist, und du so in deiner Zahl getäuscht wirst. So mache es auch bei allen Stellen. Auf ähnliche Weise mache, wenn an der zweiten Stelle 10 angesammelt sind, aus ihnen eine Eins und hebe sie zur dritten Stelle, und dort bezeichnet sie Hundert. Und was unterhalb von 10 übrig geblieben ist, bleibt dort. Wenn aber nichts übrig geblieben ist, so setze dort, wie oben, einen Kreis. Und so mache es (auch) an den übrigen Stellen, wenn es mehr gibt.

(2.2) Wenn du aber eine Zahl subtrahieren willst, d.h. von einer anderen Zahl, so subtrahiere jede Stelle von der Stelle, die über ihr von ihrer eigenen Art ist, wie oben gesagt wurde. Wenn nun an der darüberliegenden Stelle nicht eine so große Zahl steht, von der du die Zahl der darunterliegenden Stelle subtrahieren kannst, d.h. wenn sie kleiner ist oder (wenn) dort nichts steht, so nimm von der zweiten Stelle, die höher ist als jene darüberliegende, eine Eins und mache aus ihr 10 und subtrahiere von ihr, was du hast, und was übrig bleibt, lasse an derselben darüberliegenden Stelle. Wenn aber nichts übrig bleibt, so setze dort einen Kreis. Wenn aber an der zweiten Stelle an der darüberliegenden (Stelle) nichts steht, so nimm eine Eins von der dritten Stelle, d.h. von jener, die höher als die darüberliegende ist, und mache aus ihr 10 an der zweiten Stelle von der darüberliegenden (Stelle), und nimm wieder von den 10 selbst eine Eins, die an der darüberliegenden Stelle 10 bedeutet, und von ihnen subtrahiere, was du willst, und was unter 10 übrig bleibt, das lasse an derselben darüberliegenden Stelle. Wenn aber nichts übrig bleibt, so mache dort einen Kreis. Fange also immer bei der Vergrößerung oder Verringerung bei der höchsten Stelle an; später bei der, die ihr folgt; weil dieses Verfahren nützlicher und leichter ist, so Gott will.

MS N

si deus voluerit. (2.3) Quod ut facile intelligatur, necesse est ut hoc sub exemplo notemus, et hoc dicam tibi duobus
 395 modis, ne quis in eo aliquo modo turbetur. Constituamus igitur aliquem numerum et dicamus verbi gratia: ponamus
 sex milia quadringentos viginti duo per differentias suas et dicamus quod volumus
 400 minuere tria milia ducentos XI. Ponamus itaque in prima differentia, que est [ita] in dextris, duo et in secunda XX,
 in tertia quoque CCC^{tos} et in quarta VI milia, et ponamus etiam ipsum numerum,
 405 quem volumus minuere de eo, sub ipso per consimiles differentias ita, ponamus scilicet unum sub duobus in prima
 differentia et X sub viginti in secunda, CC^{os} quoque sub CCC^{tis} in tertia et
 410 tria milia sub VI milibus in quarta, et hec est eorum figura:

6422
3211

Cumque vellemus minuere unum numerum de alio, minorem scilicet de maiori, cepimus a superiori differentia, id est a quarta. Minuimus itaque tres de VI, et remanserunt III^a in quarta differentia. Minuimus quoque II^o de III^{or}, et remanserunt in tertia differentia duo. Minuimus etiam unum de duobus, et remansit unum in secunda differentia. Et similiter remansit unum in prima differentia, cum minueremus de duobus, que erant superius, unum, et hec est remanentium figura:
 425 3211. (2.4) Rursum ponamus alium numerum alio modo, de quo parum remaneat in suis differentiis. Sitque numerus noster mille quadringenti X(L)III^{or},
 430 de quibus minuamus CX(L)III, et con-

398 milia] M N 400 milia] M N 412-413
 notas numerorum lineasque rubro colore scr. N
 426 3211 rubro colore scr. N

MS C

Quod ut facilius intelligatur, necesse est ut hoc sub exemplo notemus et hoc dicamus tribus modis, ne quis in eo aliquo modo turbetur. Constituamus ergo aliquem numerum et dicamus verbi gratia:
 385 ponamus sex milia quadringentos viginti duo per differentias suas et dicamus quod volumus minuere de eis tria milia ducentos undecim. Ponamus itaque
 in prima differentia que est in dextris 390 duo, et in secunda XX, in tertia quoque quadringentos, et in quarta sex milia. Et ponamus etiam ipsum numerum quem volumus minuere de eo sub ipso per consimiles differentias ita. Ponamus scilicet
 395 unum sub duobus in prima differentia, et X sub XX in secunda, ducentos quoque sub quadringentis in tertia, et tria milia sub VI milibus in quarta. Et hec est eorum figura:
 400

6422
3211

Cumque vellemus minuere unum numerum de alio, minorem scilicet de maiore, incepimus a superiori differentia, id est a quarta. Minuimus itaque III de VI, et remanserunt tria in quarta differentia. Minuimus quoque duo de III^{or} et remanserunt in tertia differentia duo. Minuimus etiam unum de II^{obus}, et remansit
 410 unum in secunda differentia. Et similiter remansit in prima differentia unum, cum minuerimus de duobus que erant super eum unum. Et hec | remanentium figura
 107r est 3211. (2.4) Rursum ponamus alium
 415 numerum alio modo ad placitum de quo nichil remaneat in differentiis suis. Sitque numerus noster mille centum quadraginta quatuor de quibus minuamus

401-402 figuram om. C 404-405 maiore] maiori C 405 incepimus] cepimus C 408 III^{or}] quatuor Allard 410 II^{obus}] duobus Allard

(2.3) Damit dies leichter verstanden wird, ist es notwendig, daß wir dies durch ein Beispiel kenntlich machen, und ich werde es dir auf zwei Arten sagen, damit keiner dabei in irgendeiner Weise verwirrt wird. Wir wollen also irgendeine Zahl aufstellen und zum Beispiel sagen: Wir wollen sechstausendvierhundertzweiundzwanzig gemäß seinen Stellen aufschreiben und sagen, daß wir dreitausendzweihundertelf subtrahieren wollen. Setzen wir also an der ersten Stelle, die an der rechten (Seite) ist, die Zwei und an der zweiten 20, an der dritten 400 und an der vierten 6000, und setzen wir auch die Zahl selbst, die wir von ihr subtrahieren wollen, unter sie an die entsprechenden Stellen folgendermaßen, d.h. die Eins unter die Zwei an der ersten Stelle und 10 unter 20 an der zweiten, 200 auch unter 400 an der dritten und 3000 unter 6000 an der vierten, und so sehen sie aus:

6422
3211

Und wenn wir eine Zahl von der anderen subtrahieren wollen, d.h. die kleinere von der größeren, beginnen wir mit der obersten Stelle, d.h. mit der vierten. Wir subtrahieren also drei von 6, und es bleiben 3 an der vierten Stelle übrig. Wir subtrahieren auch 2 von 4, und es bleiben an der dritten Stelle 2 übrig. Wir subtrahieren auch 1 von 2, und es bleibt 1 an der zweiten Stelle übrig. Und auf ähnliche Weise bleibt 1 an der ersten Stelle übrig, wenn wir von der Zwei, die oben steht, die Eins subtrahieren, und so sieht das, was übrig bleibt, aus:

3211

.

(2.4) Wir wollen wiederum eine andere Zahl auf eine andere Art aufstellen, von der wenig an ihren Stellen übrig bleibt. Und unsere Zahl sei tausendvierhundertvierundvierzig. Von ihnen wollen wir 144 subtrahieren. Und wir wollen jede Zahl unter der

MS N

stituamus unumquemque numerum sub
simili sibi per suas differentias, scilicet
III^{or} sub III^{or} in prima differentia et ite-
rum III^{or} sub III^{or} in secunda differentia,
435 que sunt x(L), deinde unum sub III^{or} in
tercia differentia, et hec est figura:

1444
144

Minuamus itaque unum de superioribus
440 III^{or} in tercia differentia, et remanebunt
.19r tria superius. Item minuamus | in se-
cunda III^{or} de III^{or}, et nichil remane-
bit superius. Ponamusque superius ni-
chil. Et iterum minuamus in prima dif-
445 ferentia III^{or} de III^{or} superioribus, et ni-
chil remanebit, et ponamus superius ni-
chil. Remanebit igitur in quarta differen-
tia superioris numeri unum, quod signifi-
cat mille, et in tercia differentia tria, que
450 significant CCC, in secunda vero et in pri-
ma nichil remanebit. Et hec est huius rei
figura:

1300

.

⟨3⟩ *Capitulum tercium, quomodo de-
beamus duplicare numerum vel mediare.*

455 Cum volueris accipere medietatem
alicuius numeri, incipe a prima differen-
tia [superiori] et accipe medietatem eius.
Quod si fuerit in ea numerus impar, ac-
cipe medietatem parium, et remanebit
460 unum. Cuius medietatem debes ita ac-
cipere: accipies scilicet medietatem per
xxx, id est, auferes ipsum numerum et
scribes sub eo xxx. Deinde accipe medie-
tatem numeri, qui est in sequenti diffe-
465 rentia, si fuerit numerus par. Si vero im-
par fuerit, accipe medietatem paris nu-
meri et accipe medietatem unius, quod
remansit, per v^{que}, id est, aufer ipsum

432 scilicet] si N 437-438 *notas numerorum
lineasque rubro colore scr.* N 452

1300

*rubro
colore scr.* N 453-454 *inscr. rubro colore scr.*
N

MS C

CXLIIII^{or}. Et constituamus unumquem- 420
que ex eis sub alio hoc modo:

1144
144

⟨3⟩ Cum volueris mediare aliquem
numerum, accipe a prima differentia 425
et media eam. In qua si fuerit nume-
rus impar, media pares, et remanebit
unum quod mediabis, idest divides in
duas medietates, constituesque medietate-
tem unam triginta partem ex sexaginta 430
ta que faciunt unum, et pone sub ea-
dem differentia xxx. Deinde mediabis
sequentem differentiam, si fuerit nume-
rus eius par. Et si fuerit impar, accipe
medietatem paris et pone eam in loco 435
eius, et constitue medietatem unius re-
sidui quinque, et pone eos in differentia
que est ante ipsam. Si autem non fue-

420 CXLIIII^{or}] CXL quatuor Allard 422-423
figuram om. C 427 impar] impar Allard

ihr ähnlichen an ihren Stellen aufstellen, nämlich 4 unter 4 an der ersten Stelle und wiederum 4 unter 4 an der zweiten Stelle, die 40 bedeuten; dann 1 unter 4 an der dritten Stelle; und so sieht es aus:

1444
144

Wir wollen also 1 von den oberen 4 an der dritten Stelle subtrahieren, und 3 bleiben oben übrig. Ebenso wollen wir an der zweiten (Stelle) 4 von 4 subtrahieren, und nichts bleibt oben übrig, und wir wollen oben das „Nichts“ setzen. Und wiederum wollen wir an der ersten Stelle 4 von den oberen 4 subtrahieren, und nichts bleibt übrig, und wir wollen oben das „Nichts“ setzen. Es bleibt also an der vierten Stelle der oberen Zahl eine Eins übrig, die 1000 bezeichnet, und an der dritten Stelle 3, die 300 bezeichnen; an der zweiten aber und an der ersten bleibt nichts übrig; und so sieht diese Sache aus:

1300

* * *

⟨3⟩ *Das dritte Kapitel, wie man eine Zahl verdoppeln oder halbieren muß*

Wenn du die Hälfte irgendeiner Zahl nehmen willst, so fange an der ersten Stelle an und nimm die Hälfte davon. Wenn nun an ihr eine ungerade Zahl steht, so nimm die Hälfte der geraden, und es bleibt eine Eins übrig. Deren Hälfte mußt du so nehmen: Nimm nämlich die Hälfte als 30, d.h. nimm die Zahl selbst weg und schreibe unter ihr 30. Dann nimm die Hälfte der Zahl, die an der nächsten Stelle ist, wenn (dies) eine gerade Zahl ist. Wenn sie aber ungerade ist, so nimm die Hälfte der geraden Zahl und nimm die Hälfte der Eins, die übrig geblieben ist, als 5, d.h. nimm die Zahl selbst

MS N

470 numerum ab eadem differentia et scri-
 be ^{v^{que}} in precedenti differentia, scilicet
 versus dexteram. Si autem ⟨non⟩ fuerit
 in eadem differentia, cuius medietatem
 vis accipere, nisi unum tantum, scribe
 475 in loco eius in eadem differentia circu-
 lum et scribe in precedenti differentia
^{v^{que}}. Quod similiter facies in omnibus
 differentiis. Cum ergo volueris duplicare
 numerum, incipe ab altiori differentia et
 duplica eam, et cum tibi collecti fuerint
 480 x, fac de ipsis unum et scribe in poste-
 riori differentia, et invenies, si deus vo-
 luerit.

⟨4⟩ *Capitulum in multiplicatione.*

485 ⟨4.1⟩ ⟨I⟩am patefeci in alio libro meo
 quod necesse est omni numero, qui mul-
 tiplicatur in quolibet numero, ut du-
 plicentur unius eorum secundum nume-
 rum unitatum alterius. Cum ergo volue-
 ris multiplicare unum numerum in alio
 490 per litteras Indorum, necesse est tibi sci-
 re multiplicationem numeri, qui est ab
 uno in novem, in invicem, sive concor-
 daverit numerus sive diversus fuerit, et
 hunc cordetenus omnino retinere. Cum-
 495 que volueris multiplicare aliquem nume-
 rum in alio, pone unum ex eis secundum
 quantitatem differentiarum eius in tabu-
 la vel in quo volueris. Post hec pone in-
 icium alterius numeri sub altiori diffe-
 500 rentia primi numeri. Eritque prima diffe-
 rentia eius sub novissima alterius nume-
 ri, quem constituisti. Et erunt differen-
 tie precedentes numerum primum ver-
 sus sinistram. ⟨4.2⟩ Cuius exemplar est:
 505 Cum voluissemus multiplicare duo milia
 CCC^{tos} et viginti sex per litteras Indorum
 in ducentis et XIII^{cim}, posuimus duo mi-
 lia CCC et XXVI per litteras Indorum in
 III^{or} differentiis, fueruntque in prima dif-

483 *inscr. rubro colore scr. N*

MS C

440 rit in eadem differentia quam volueris
 mediare nisi tantum unum, pone in loco
 eius circulum, et pone quinque in diffe-
 rentia que est ante ipsam. Et similiter
 operare in universis differentiis. Et cum
 volueris duplare, incipe a superiori dif-
 445 ferentia, et dupla. Et cum numerus cre-
 scendo excesserit x, fac de decem unum,
 et pone eum in sequenti differentia. Et
 invenies, si Deus voluerit.

450 ⟨4.1⟩ Et iam patefeci in libro quod
 necesse est omni numero qui multiplica-
 tur in aliquo quolibet numero ut dupli-
 cetur unus ex eis secundum unitates al-
 terius. Cumque volueris multiplicare ali-
 quem numerum in alio per litteras In-
 455 dorum, necesse est retinere multiplica-
 tionem numeri qui est inter unum et
 IX in invicem, sive concors fuerit nume-
 rus, sive diversus. Cumque volueris mul-
 tiplicare numerum in altero, pone unum
 460 ex eis secundum quantitatem mansio-
 num eius in tabula vel in qualibet re
 alia quam volueris. Deinde pone primam
 differentiam alterius numeri sub altio-
 ri differentia primi, eritque prima man-
 465 sio eiusdem numeri sub ultima mansio-
 ne primi numeri quem posuisti, et erit
 mansio secunda precedens primum nu-
 merum versus sinistram. ⟨4.2⟩ Cuius rei
 exemplar est. Quod cum vellemus mul-
 tiplicare duo milia trecentos XXVI in
 470 CCXIII^{or}, posuimus duo milia trecentos
 XXVI per indas litteras in III^{or} differentiis,

448 Deus] deus C 449 Et iam] Etiam C
 451–452 duplicetur] multiplicetur Allard 471
 CCXIII^{or}] CCX quatuor Allard 472 III^{or}]
 quatuor Allard

von derselben Stelle weg und schreibe 5 an der vorangehenden Stelle, d.h. nach rechts. Wenn aber an derselben Stelle, deren Hälfte du nehmen willst, nichts außer einer Eins ist, so schreibe an seinem Platz an derselben Stelle einen Kreis und schreibe an der vorangehenden Stelle 5. Dies mache in gleicher Weise an allen Stellen. Wenn du aber eine Zahl verdoppeln willst, so fange an der höchsten Stelle an und verdopple sie, und wenn für dich 10 angesammelt sind, so mache aus diesen eine Eins und schreibe sie an der späteren Stelle, und du wirst es finden, so Gott will.

* * *

⟨4⟩ *Kapitel über die Multiplikation*

⟨4.1⟩ Ich habe in einem anderen Buch von mir erörtert, daß es für jede Zahl, die mit einer beliebigen Zahl multipliziert wird, nötig ist, daß (die Stellen) einer dieser (Zahlen) gemäß der Zahl der Einheiten der anderen (Zahl) vervielfältigt werden. Wenn du also eine Zahl mit einer anderen mit Hilfe der Symbole der Inder multiplizieren willst, so ist es für dich notwendig, das Multiplizieren einer Zahl, die zwischen Eins und Neun liegt, miteinander zu kennen, ob die Zahl nun (mit der anderen) übereinstimmt oder verschieden ist, und diese (Zahl) ganz auswendig zu behalten. Und wenn du eine Zahl mit einer anderen multiplizieren willst, so schreibe eine von ihnen gemäß der Größe ihrer Stellen auf eine Tafel oder wohin du willst. Danach setze den Anfang der anderen Zahl unter die höchste Stelle der ersten Zahl, und ihre erste Stelle wird (also) unter der letzten der anderen Zahl sein, die du aufgestellt hast. Und die Stellen, die der ersten Zahl vorausgehen, werden nach links sein.

⟨4.2⟩ Ein Beispiel dafür ist: Wenn wir zweitausenddreihundertsechszwanzig in den Symbolen der Inder mit zweihundertvierzehn multiplizieren wollen, so setzen wir zweitausenddreihundertsechszwanzig in den Symbolen der Inder an vier Stellen,

MS N

510 ferentia versus dexteram VI et in secun-
da duo, qui sunt XX. In tertia vero tria,
que sunt trecenti, et in quarta duo, que
sunt duo milia. Post hec posuimus sub
duobus milibus III^{or}, deinde in sequenti
515 differentia versus sinistram unum, quod
est X. Postea in sequenti differentia duo,
que sunt CC^{ti}. Et hec est eorum figura:

2326
214

520 Post hec incipies ab altiori differentia et
multiplicabis eam in ultima differentia
inferioris numeri, qui est sub eo, et quod
exierit de multiplicatione, pones illud
desuper. Deinde facies etiam similiter in
525 alia differentia, que succedit eam ver-
sus dexteram, et quod exierit, similiter
pones desuper, et similiter facies, donec
multiplicaveris altiorem differentiam su-
perioris numeri in universis differenti-
is inferioris numeri. Et cum hoc feceris,
530 mutabis inferiorem numerum una diffe-
rentia versus dexteram. Eritque prima
differentia inferioris numeri sub differen-
tia secunda, que sequitur altiorem diffe-
rentiam, quam multiplicavimus, versus
535 scilicet dexteram. Post hec pones diffe-
rentias eius per successionem et multi-
plicabis hunc numerum, sub quo posui-
mus primam differentiam inferioris nu-
meri, in ultima differentia superioris nu-
meri, deinde in ea, que succedit, donec
540 pertranseas omnes, quemadmodum fe-
cisti in prima differentia. Et quicquid
collectum fuerit nobis de multiplicatio-
ne uniuscuiusque differentie, notavimus
illud desuper. Et cum hoc perfecimus,
545 iterum mutabis ex eo unam differentiam

513 Post] P rubro colore scr. N 516 Postea]
P rubro colore scr. N 518-519 notas numero-
rum lineasque rubro colore scr. N 520 Post]
P rubro colore scr. N

MS C

fueruntque in prima differentia que est in
dextra VI, et in secunda duo qui sunt XX,
et in tertia tres qui sunt trecenti, et in 475
quarta duo qui sunt duo milia. Post hec
posuimus sub duobus milibus III^{or}, dein-
de in precedenti versus sinistram unum
qui sunt X, postea in tertia duo qui sunt
ducenti. Et hec est figura eorum: 480

2326
214

| Post hec incipias ab ultima diffe- 107v
rentia superiori et multiplica eam in ul-
tima differentia inferioris numeri qui est 485
sub eo, et quod exierit de multiplicatio-
ne scribes desuper. Postea scribes eti-
am in differentia que succedit redeun-
do versus dexteram inferioris numeri. 490
Deinde facies similiter donec multiplices
ultimam differentiam superioris numeri
in universis differentiis inferioris nume-
ri. Et cum hoc perfeceris, mutabis nu-
merum inferiorem una differentia versus
dexteram, eritque prima differentia infe- 495
rioris numeri sub differentia que succe-
dit numerum quem multiplicasti versus
dexteram. Deinde pones reliquas diffe-
rentias per successiones eorum. Post hec
multiplicabis etiam ipsum numerum sub 500
quo posuisti primam differentiam infe-
rioris numeri ultima mansionem inferioris
numeri, deinde in ea que succedit, donec
perficias omnes quemadmodum fecisti in
prima differentia. Et quicquid collectum 505
fuerit ex multiplicatione uniuscuiusque
differentie scribes eum in differentia que
est super ipsum. Et cum hec feceris, mu-
tabis etiam eum numerum, scilicet tu-
um, una differentia, et facies de eo quem- 510

474 dextra] dextra C 474 secunda] secundo
C 477 III^{or}] quatuor Allard 481-482 figu-
ram om. C 498 dexteram] dextram Allard

und an der ersten Stelle nach rechts ist 6 und an der zweiten 2, die 20 bedeuten, an der dritten aber 3, die 300 bedeuten, und an der vierten 2, die 2000 bedeuten. Danach setzen wir unter zweitausend eine 4, dann an der nächsten Stelle nach links eine 1, die 10 bedeutet, danach an der nächsten Stelle 2, die 200 bedeuten, und so sehen sie aus:

2326
214

Danach fange an der höchsten Stelle an und multipliziere sie mit der letzten Stelle der unteren Zahl, die unter ihr steht, und was aus der Multiplikation herauskommt, das setze oberhalb hin. Danach mache es auch in gleicher Weise an der anderen Stelle, die ihr nach rechts folgt, und was herauskommt, setze in gleicher Weise oberhalb hin, und mache es in gleicher Weise, bis du die höchste Stelle der oberen Zahl mit allen Stellen der unteren Zahl multipliziert hast. Und wenn du das gemacht hast, verschiebe die untere Zahl um eine Stelle nach rechts. Und die erste Stelle der unteren Zahl wird unter der zweiten Stelle stehen, die der höchsten Stelle, die wir multipliziert haben, folgt, nämlich nach rechts. Danach stelle ihre Stellen nacheinander auf und multipliziere die Zahl, unter die wir die erste Stelle der unteren Zahl gesetzt haben, mit der letzten Stelle der oberen Zahl; danach mit der (Stelle), die (ihr) folgt, bis du sie alle durchlaufen hast, wie du es mit der ersten Stelle gemacht hast. Und was für uns aus der Multiplikation jeder Stelle angesammelt worden ist, das notieren wir oberhalb. Und wenn wir das vollendet haben, so verschiebe von ihr wiederum eine Stelle, und wir machen mit ihr

MS N

et faciemus de ea, quemadmodum fecimus de primis differentiis. Et non desines ita facere, donec pertransieris omnes
 550 differentias. Sicque multiplicabis universum numerum superiorem universo numero inferiori. (4.3) Cum autem acciderit, ut prima differentia numeri veniat sub differentia, in qua nullus sit numerus, in qua videlicet fuerit circulus, transeamus cum ea ad sequentem differentiam, que eam succedit versus dexteram, quia omnis circulus, qui multiplicatur in aliquo numero, nichil est et ipse
 555 nichil est. Similiter quicquid multiplicatur in circulo, nichil est. Cumque mutaverimus differentias semel versus dexteram, postea multiplicaverimus superiorem numerum in omnes differentias inferioris numeri, augebimus, quod exierit nobis de multiplicatione, super differentiam, que est supra ipsam differentiam, in qua multiplicamus. Et cum collectum fuerit nobis in aliqua differentiarum
 570 x, faciemus de eis unum in differentia, que sequitur eam versus sinistram. Et si aliquid remanserit, notabimus illud in loco suo. Si | vero nichil remanserit, ponemus in loco eius circulum, ne aliquid minuatur ex differentiis. Et quocienscumque perduxerit nos multiplicatio ad primam differentiam inferioris numeri, delebimus, quicquid fuerit in superiori differentia, que est super eam, et notabimus illud, quod exierit nobis ex multiplicatione, in loco eius. Et similiter facies, donec multiplicaveris universas differentias superioris numeri in universis differentiis inferioris numeri. Et tunc sciemus
 580 nos iam multiplicasse unum ex eis secundum quantitatem unitatum alterius. Finita est igitur multiplicatio, et hec est

569 multiplicamus *corr.* N *ex* multiplicavimus

MS C

admodum fecisti in differentiis primis. Et non cessabis ita facere donec perficias omnes differentias, sicque multiplicabis universum numerum superiorem in universo numero inferiori. (4.3) Cumque
 515 evenierit ut prima differentia inferioris numeri sit sub aliqua differentia in qua nullus sit numerus, idest in qua fuerit circulus, faciamus eam transire ad succedentem differentiam in qua fuerit numerus versus dexteram. Quia omnis circulus qui multiplicatur in aliquo numero nichil est, idest nullus numerus surgit ex eo, et quicquid multiplicatur in circulo similiter nichil, cumque mutaverimus
 520 differentias versus dextram, postea multiplicaverimus ipsum numerum superiorem in unaquaque differentia ex numero inferiori, addemus quod exierit nobis de multiplicatione super differentiam que est super illam differentiam, in qua multiplicavimus, dumque, crescente numero, collecti fuerint nobis in aliqua differentia x. Faciemus ex eis unum
 535 ponemusque eum in sequenti differentia versus sinistram, et si aliquid remanserit, notabimus eum in loco suo. Si vero nichil remanserit, ponemus in loco eius circulum ne minuatur aliquid ex differentiis. Et cum produxerit multiplicatio
 540 ad primam differentiam numeri inferioris, delebimus quicquid fuerit in differentia que est super eam, et notabimus id quod exierit nobis ex multiplicatione in loco eius. Sicque faciemus donec multiplicemus universas differentias superioris numeri in universis differentiis inferioris. Et sic multiplicabimus | numerum
 545 ex eis secundum numerum unitatum alterius et perficietur multiplicatio. Et hec est figura numeri qui exivit nobis de mul-

511 fecisti | fecistis C 515 Cumque | Cuque C
 533 fuerint | fuerit C

das, was wir mit den ersten Stellen gemacht haben. Und höre nicht auf, so zu tun, bis du alle Stellen durchlaufen hast. Und so multiplizierst du jede einzelne obere Zahl mit jeder einzelnen unteren Zahl.

⟨4.3⟩ Wenn es sich aber ereignet, daß die erste Stelle der Zahl unter eine Stelle kommt, an der keine Zahl ist, an der nämlich ein Kreis steht, so wollen wir mit ihr an die nächste Stelle hinübergehen, die ihr nach rechts folgt, weil jeder Kreis, der mit irgendeiner Zahl multipliziert wird, „nichts“ ist und weil (der Kreis) selbst „nichts“ ist. In gleicher Weise ist alles, was mit einem Kreis multipliziert wird, „nichts“. Und wenn wir die Stellen einmal nach rechts verschoben (und) danach die obere Zahl mit allen Stellen der unteren Zahl multipliziert haben, fügen wir das, was für uns aus der Multiplikation herauskommt, der Stelle hinzu, die über der Stelle selbst steht, mit der wir multiplizieren. Und wenn für uns an irgendeiner Stelle 10 angesammelt ist, so machen wir aus ihnen eine Eins an der Stelle, die ihr nach links folgt. Und wenn etwas übrig bleibt, so notieren wir es an seinem Platz. Wenn aber nichts übrig bleibt, so setzen wir an dessen Platz einen Kreis, damit nicht irgendetwas von den Stellen verringert wird. Und immer wenn uns die Multiplikation zur ersten Stelle der unteren Zahl hinführt, tilgen wir all das, was an der obersten Stelle ist, die sich über ihr befindet, und wir notieren an dessen Platz das, was für uns aus der Multiplikation herausgekommen ist. Und mache es in gleicher Weise, bis du alle Stellen der oberen Zahl mit allen Stellen der unteren Zahl multipliziert hast. Und dann werden wir wissen, daß wir eine von diesen (Zahlen) gemäß der Größe der Einheiten der anderen multipliziert haben. Also ist die Multiplikation beendet, und so sieht das aus, was für uns herausgekommen ist

MS N

figura eius, quod nobis exivit de multi-
 590 plicatione duum milium et trecentorum
 et viginti sex in ducentis quatuordecim,
 et sunt quadringenta et nonaginta VII
 milia ac septingenti sexaginta quatuor,
 quorum hec est figura: 497764.

595 *⟨5⟩ Capitulum in probatione duplica-
 tionis ac multiplicationis.*

Cum volueris scire, utrum inveneris
 vel erraveris in duplicatione tua, acci-
 pe numerum quem volueris duplicare
 600 et divide eum per novem novem, et quod
 remanserit minus novem, duplica. In quo
 si fuerint novem, proice eos et retine
 quod remanserit. Post hec duplica nu-
 merum tuum et divide eum per novem
 605 novem, et quod remanserit si fuerit simi-
 le eius, quod prius remanserat tibi, dum
 duplicares eum, iam invenisti. Sin au-
 tem, errasti. Et cum volueris multipli-
 care aliquem numerum in aliquo et vo-
 610 lueris hunc probare, videlicet si volue-
 ris multiplicare XX per LX, divide XX per
 novem et similiter LX, et quod remanse-
 rit de primo, multiplica in eo, quod re-
 manserit de secundo. Et hoc dicit: divi-
 615 de primum numerum per novem novem,
 et serva quod remanserit minus novem.
 Deinde divide alium, scilicet numerum,
 per novem novem et serva quod reman-
 serit. Post hec multiplica, quod reman-
 620 serit tibi ex primo numero, in eo, quod
 remansit tibi ex secundo, et proice ex eo
 novem, si fuerint in eo. Quod si non fu-
 erint in eo novem, hec erit nota. Si vero
 fuerint in eo novem, proice IX et serva
 625 quod remanserit, quia illud erit nota, in-
 tellige. Post hec multiplica numerum tu-
 um et divide quod exierit tibi per novem
 novem, et quod remanserit si fuit simile
 note, invenisti, intellige.

594 497764 rubro colore scr. N 595–596 in-
 scr. rubro colore scr. N

MS C

tificatione duorum milium et trecento-
 rum viginti sex in ducentis XIII que sunt
 quadringenta milia et nonaginta septem
 milia et septingenta LXIII:

555

497764
214

⟨5⟩ Cum volueris scire utrum inveni-
 sti vel errasti in duplatione tua vel mul-
 tiplicatione, accipe numerum quem vo-
 560 lueris duplare et divide eum per IX et IX,
 et quicquid remanserit minus IX duplica
 eum. In quo si fuerint IX, proice eos et
 quod remanserit serva. Post hec duplica
 numerum tuum, idest ipsum numerum
 565 quem volueris duplare, et divide eum per
 IX et IX, et quod remanserit si fuerit simi-
 le illi qui prius remanserat dum duplica-
 veras eum, iam invenisti, sin autem erra-
 sti. Et cum multiplicare volueris aliquem
 570 numerum in aliquo, et volueris probare
 ut supra, divide numerum quem multi-
 plicasti per IX, et quod remanserit infra
 IX serva. Iterum divide alium numerum
 per IX, et quod remanserit infra IX ser-
 575 va. Deinde multiplica quod remanserit
 de primo in eo quod remanserit tibi de
 secundo, et proice ex eo quod collectum
 fuerit IX, si fuerint ibi, et si non fuerint
 580 ibi IX, quod remanserit erit nota. Si au-
 tem fuerint ibi IX, proice IX et serva quod
 remanserit, et quia hoc erit nota intelli-
 ge. Post hec multiplica unam multiplica-
 tionem in alia, et divide quod collectum
 fuerit per IX, et quod remanserit si fue-
 585 rit simile illi quod dixi tibi de nota, scito
 quia invenisti. Si vero non fuerit simile,
 errasti, intellige.

552–553 trecentorum] tercentorum C 556–
 557 figuram om. C 572–573 multiplicasti] du-
 plicasti C 577 remanserit] remanserint C

aus der Multiplikation von zweitausenddreihundertsechszwanzig mit zweihundertvierzehn, und es sind vierhundertsiebenundneunzigtausend und siebenhundertvierundsechzig; dies sieht so aus: 497764 .

* * *

⟨5⟩ *Kapitel über die Probe der Verdopplung und Multiplikation*

Wenn du wissen willst, ob du bei deiner Verdopplung (das Richtige) gefunden oder geirrt hast, nimm die Zahl, die du verdoppeln wolltest, und teile sie immerfort durch neun, und was übrig bleibt kleiner als neun, verdopple. Wenn in ihm neun sind, so wirf sie ab und behalte, was übrig geblieben ist. Danach verdopple deine Zahl und teile sie immerfort durch neun, und wenn das, was übrig bleibt, gleich dem ist, was dir früher übrig geblieben war, als du sie verdoppeltest, so hast du (das Richtige) gefunden; wenn aber nicht, so hast du dich geirrt. Und wenn du irgendeine Zahl mit irgendeiner (Zahl) multiplizieren willst und diese (Zahl) überprüfen willst, nämlich wenn du 20 mit 60 multiplizieren willst, so teile 20 durch 9 und auf gleiche Weise 60, und was vom ersten übrig bleibt, multipliziere mit dem, was vom zweiten übrig bleibt, und in dieser Hinsicht sagt er: Teile die erste Zahl immerfort durch neun und behalte, was kleiner als neun übrig geblieben ist. Dann teile die andere, d.h. Zahl, immerfort durch neun und behalte, was übrig geblieben ist. Danach multipliziere das, was dir von der ersten Zahl übrig geblieben ist, mit dem, was dir von der zweiten Zahl übrig geblieben ist, und wirf von ihm (= dem Produkt) 9 ab, wenn sie in ihm waren. Wenn in ihm nicht 9 waren, so wird dies das Zeichen (= der Neunerrest) sein. Wenn aber in ihm 9 waren, so wirf die 9 ab und behalte, was übrig geblieben ist, weil dies das Zeichen ist; (das) mußt du verstehen. Danach multipliziere deine Zahl und teile das, was dir herauskommt, immerfort durch neun, und wenn das, was übrig bleibt, gleich dem Zeichen (= Neunerrest) ist, so hast du (das Richtige) gefunden; (das) mußt du verstehen.

* * *

MS N

630 <6> *Capitulum divisionis.*
 In divisione autem cum volueris di-
 videre aliquem numerum super aliquem,
 constitues numerum quem volueris per
 differentias suas. Deinde pones nume-
 635 rum, per quem volueris dividere, sub eo,
 ponesque ultimam differentiam illius nu-
 meri, super quem vis dividere, sub ulti-
 ma differentia superioris numeri, quem
 vis dividere, id est altiore sub altiori.
 640 Quod si fuerit numerus, qui est in ulti-
 ma differentia superioris numeri, minus
 numero, qui est in ultima differentia in-
 ferioris numeri, retrahe differentias infe-
 645 rius numeri retro una differentia ver-
 sus dexteram, id est, pone ultimam dif-
 ferentiam inferioris numeri sub penulti-
 ma differentia superioris numeri, quem
 dividis. Post hec aspice primam differen-
 tiam inferioris numeri, super quem di-
 650 vidis, et scribe in directo eius super al-
 torem numerum, quem dividis, vel sub
 eo aliquid ex numero, quod cum multi-
 plicaveris in ultima differentia inferioris
 numeri, super quem dividis, erit simile
 655 numero, qui est in differentia superioris
 numeri, vel prope eum. Cumque sciveris
 eum, multiplica eum in ultima differen-
 tia inferioris numeri et minue, quod exie-
 rit tibi de multiplicatione, de superiori
 660 numero, quem dividis. Deinde multipli-
 ca eum in secunda differentia inferioris
 numeri, que est in dextera parte eiusdem
 ultime differentie, et minue quod collec-
 tum fuerit de superiori numero ut supra,
 665 id est, facies in diminutione, quemadmo-
 dum diximus in inicio libri, cum volue-
 ris minuere numerum ex numero. Dein-
 de facies similiter, donec multiplices eum
 in universis differentiis inferioris nume-

630 *inscr. rubro colore scr.* N 637 *super su-*
prascr. N 656 *sciveris*] *se nus* (= numerus) N
 666 *libri, cum*] *libri. Cum* N

MS C

 <6> In divisione autem pones nume-
 rum quem volueris dividere per differen- 590
 tias suas. Postea pones ipsum numerum
 super quem vis dividere sub eo, sitque
 ultima differentia numeri super quem
 dividis sub ultima differentia superioris
 numeri quem dividis. Si autem fuerit nu- 595
 merus qui est ultima differentia supe-
 rioris numeri quem vis dividere minus
 illo qui est ultima differentia inferioris
 numeri super quem dividis, retrahe ip-
 sam differentiam versus dexteram donec 600
 sit numerus superioris differentie plus,
 idest pone ultimam differentiam inferio-
 ris numeri super quem dividis sub dif-
 ferentia secunda que succedit ultimam
 differentiam superioris numeri. Post hec 605
 aspice primam differentiam numeri su-
 per quem vis dividere, et pone in direc-
 to eius super numerum superiorem quem
 dividis, vel sub eo in directo eius, ali-
 quem | numerum quem cum multiplica- 108v
 veris in ultima differentia inferioris nu-
 meri super quem dividis, erit similis il-
 lius numeri qui fuerit in superiori diffe-
 rentia vel prope eum qui sit minus il-
 lo. Cumque sciveris eum, multiplica eum 615
 in ultima differentia inferioris numeri, et
 minue quod exierit tibi de multiplicatio-
 ne de eo quod est supra eum ex superiori
 numero qui dividitur. Iterum multiplica
 eum in secunda differentia que succedit 620
 ultimam differentiam versus dextram, et
 minue eum de eo quod est super eum, et
 fac in diminutione quemadmodum feci-
 mus in inicio libri cum volueras minue-
 re aliquem numerum de aliquo numero. 625
 Et similiter fac donec multiplices eum
 in universis differentiis inferioris nume-

608 *superiorem*] *superiorem* C 618 *superi-*
ori] *inferiori* C 624 *libri cum*] *libri. Cum* C
 624 *volueras*] *volueris* C

〈6〉 Kapitel über die Division

Bei der Division aber schreibe, wenn du eine Zahl durch eine (andere) teilen willst, die Zahl, die du (teilen) willst, mit ihren Stellen auf. Dann setze die Zahl, durch die du (sie) teilen willst, unter sie, und setze die letzte Stelle der Zahl, durch die du teilen willst, unter die letzte Stelle der oberen Zahl, die du teilen willst, d.h. die höchste (Stelle) unter die höchste. Wenn nun die Zahl, die an der letzten Stelle der oberen Zahl steht, kleiner ist als die Zahl, die an der letzten Stelle der unteren Zahl steht, so ziehe die Stellen der unteren Zahl um eine Stelle nach rechts zurück, d.h., setze die letzte Stelle der unteren Zahl unter die vorletzte Stelle der oberen Zahl, die du teilst. Danach betrachte die erste Stelle der unteren Zahl, durch die du teilst, und schreibe in gerader Richtung über der oberen Zahl, die du teilst, oder unter ihr etwas an Zahl, das, wenn du es mit der letzten Stelle der unteren Zahl, durch die du teilst, multiplizierst, gleich ist der Zahl, die an der Stelle der oberen Zahl steht, oder nahe bei (dieser Zahl) ist. Und wenn du sie kennst, multipliziere sie mit der letzten Stelle der unteren Zahl und subtrahiere das, was für dich aus der Multiplikation herauskommt, von der oberen Zahl, die du teilst. Dann multipliziere sie mit der zweiten Stelle der unteren Zahl, die auf der rechten Seite derselben letzten Stelle ist, und subtrahiere das, was angesammelt wurde, von der oberen Zahl wie oben, d.h. mache es bei der Verringerung (= Subtraktion), wie wir es am Anfang des Buches gesagt haben, wenn du eine Zahl von einer Zahl subtrahieren willst. Dann mache es in gleicher Weise, bis du sie mit allen Stellen der unteren Zahl multipliziert (hast), durch die du teilst. Danach

MS N

670 ri, super quem dividis. Post hec mutabis
 universas differentias inferioris numeri,
 super quem dividis, una differentia ver-
 sus dexteram et quere numerum, quem
 pones etiam in directo prime differentie
 675 inferioris numeri ad instar illius, quem
 prius posuisti. Quem cum multiplicave-
 ris in ultima differentia inferioris nume-
 ri, consumet numerum super se positum,
 aut sit prope eum. Quem cum inveneris,
 680 multiplica in ultima differentia inferioris
 numeri et minue, quod exierit tibi, de su-
 periori numero ut supra, faciesque sic in
 omnibus differentiis. Quod si remanserit
 ex differentiis superioris numeri aliquid
 685 et oportuerit te [te] mutare inferiores dif-
 ferentias causa illius, mutabis differenti-
 as inferiores versus dexteram una diffe-
 rentia, donec veniat prima differentia in-
 ferioris numeri in directo unius differen-
 690 tie superioris numeri. Si autem fuerit in
 aliqua differentiarum superioris numeri,
 quem dividis, circulus perveneritque mu-
 20r tatio ad eum, | non transeas eum, quem-
 admodum fecisti in multiplicatione, sed
 695 pones in directo eius aliquem numerum,
 quem multiplicabis, quemadmodum nar-
 ravimus. Cum vero perfeceris hec omnia,
 quicquid exierit tibi ex differentiis in di-
 recto inferioris numeri, super quem divi-
 700 dis, ipsum erit, quod debetur uni. Si ali-
 quid remanserit ex numero, erunt partes
 unius ex numero, quem dividis, et num-
 quam remanebit nisi quod fuerit minus
 numero, super quem dividis. Quid si plus
 705 remanserit, errasti, reitera.

MS C

ri super quem dividis. Post hec muta
 universas differentias inferioris numeri,
 super quem dividis una differentia ver- 630
 sus dexteram, et pone in directo prime
 differentie illius ad similitudinem illius
 quod prius posuisti. Quod cum multi-
 plicaveris in ultima differentia inferioris
 numeri super quem dividis, consumet id 635
 quod supra eum est vel quod fuerit pro-
 pe eum. Et multiplica illud quod posu-
 isti in directo eius in ultima differentia
 numeri inferioris, et minue quod exierit
 tibi de multiplicatione de eo quod supra 640
 eum est. Et sic facies in universis dif-
 ferentiis. Et si remanserit de differentiis
 numeri superioris quem dividis aliquid
 quod debeat dividi, semper muta diffe-
 rentias inferioris numeri una differentia 645
 donec sit prima differentia eius in direc-
 to alicuius differentie superioris numeri.
 Quod si fuerit in aliqua differentia ex dif-
 ferentiis numeri quem dividis circulus et
 pervenerit mutatio ad eum, non transeas 650
 eum quemadmodum fecisti in multipli-
 catione, sed pones in directo eius aliquid
 quod multiplicabis quemadmodum nar-
 ravimus. Cumque perfeceris hec omnia,
 quicquid exierit tibi ex differentiis in di- 655
 recto numeri quem dividis, illud debetur
 uni. Et si aliquid remanserit, erit pars
 unius ex eo numero quem dividis, et nun-
 quam remanebit nisi quod erit minus illo
 quem dividis. Si autem plus remanserit, 660
 scito quod errasti.

629 numeri *om.* Allard 635 consumet] con-
 sument C 652 sed] s; C, set Allard
 660 quem] quod C

verschiebe alle Stellen der unteren Zahl, durch die du teilst, um eine Stelle nach rechts und suche eine Zahl, die du auch in gerader Richtung der ersten Stelle der unteren Zahl setzt ganz so wie jene, die du vorher gesetzt hast. Wenn du diese (Zahl) mit der letzten Stelle der unteren Zahl multiplizierst, wird sie die über ihr stehende Zahl aufbrauchen oder ihr nahekommen. Wenn du sie gefunden hast, multipliziere (sie) mit der letzten Stelle der unteren Zahl und subtrahiere das, was für dich herauskommt, von der oberen Zahl wie oben, und mache es so bei allen Stellen. Wenn nun etwas von den Stellen der oberen Zahl übrig bleibt und es nötig ist, daß du die darunterliegenden Stellen deswegen veränderst, so verschiebe die darunterliegenden Stellen nach rechts um eine Stelle, bis die erste Stelle der unteren Zahl in gerader Richtung mit einer Stelle der oberen Zahl kommt. Wenn aber an irgendeiner Stelle der oberen Zahl, die du teilst, ein Kreis ist und die Veränderung zu ihm kommt, dann übergehe ihn nicht, wie du es bei der Multiplikation getan hast, sondern setze in gerader Richtung zu ihm irgendeine Zahl, die du multiplizieren wirst, wie wir es dargelegt haben. Wenn du aber dies alles vollendet hast, wird das, was für dich an Stellen herauskommt, die in gerader Richtung (über) der unteren Zahl liegen, durch die du teilst, eben das sein, was der Eins zukommt. Wenn etwas von der Zahl übrig bleibt, so werden es Teile der Eins sein aus der Zahl, die du teilst, und niemals wird etwas übrig bleiben außer etwas, das kleiner als die Zahl ist, durch die du teilst. Wenn nun mehr übrig bleibt, so hast du geirrt; (dann) wiederhole (es).

* * *

MS N

⟨7⟩ *Capitulum in opere divisionis.*

710 ⟨7.1⟩ Et scito quod divisio sit simili-
lis multiplicationi, sed est versa. Cuius
exemplar est: Si vellem dividere XL^a
VI milia et quadringentos LXVIII super
CCCXXIII, ponerem ex primo numero
versus dexteram VIII in prima differen-
tia. Postea ponerem in secunda VI ver-
sus sinistram, que sunt LX, deinde III^{or}
715 versus sinistram, que sunt quadringenta,
postea VI, que sunt VI milia, deinde III^{or}.
Eruntque in ultima differentia versus si-
nistram III^{or} et in prima versus dex-
teram VIII. Post hec describerem sub eis
720 numerum, per quem superius numerus
dividitur. Scriberemque in ultima diffe-
rentia inferioris numeri, ⟨super⟩ quem
dividimus, figuram trium, et sunt CCC,
sub ultima differentia superioris nume-
725 ri, qui dividitur, in qua sunt III^{or}, eo
quod esset minus illo, quod est super se.
Et si esset plus illo, reducerem eum re-
tro una differentia, poneremque eum sub
sex, qui sunt in penultima. Sed quia fuit
730 minus, posui eum sub III^{or}, qui sunt in
ultima differentia. Deinde posui nume-
rum, qui succedit eum, id est figuram
duorum, que sunt XX, sub VI, postea III,
que succedunt, sub III^{or}. Et hec est figu-
735 ra eorum:

46468
324

740 Post hec inciperem scribere in directo
prime differentie superioris numeri desu-
per, id est super differentiam, in qua
sunt III^{or}, unum. Et si ponerem illud sub
ipsa differentia, esset conveniens. Mul-

706 *inscr. rubro colore scr. N* 708 est versa
corr. N ex ? 709–710 XL^a VI corr. N ex xvi
722 inferioris] superioris N 726 quod (2.)]
quid N 734 III^{or} corr. N in iii^{to} (?) 736–737
notas numerorum lineasque rubro colore scr. N

MS C

665 ⟨7.1⟩ Et scito quod divisio sit simili-
lis multiplicationi, sed hec fit e converso,
quia in divisione minuius et ibi addi-
mus, id est in multiplicatione. Cuius ex-
emplar est. Quod cum vellemus divide-
re quadraginta sex milia et quadringen-
tos sexaginta octo super trecentos XXIII,
posuimus primum in dextera parte oc-
to. Postea posuimus sex versus sinistram 670
qui sunt sexaginta, deinde III^{or} qui sunt
quadringenti, postea sex que sunt VI mi-
lia, postea III^{or} que sunt quadringen-
ta milia. Eruntque ultima harum diffe-
rentiarum versus sinistram III^{or}, et pri- 675
ma earum octo versus | dexteram. Post
109r hec scribes sub eis numerum super quem
dividis, scribesque ultimam differentiam
numeri super quem dividis, que est figu-
ra trium et sunt trecenti, sub ultima dif- 680
ferentia numeri superioris que sunt III^{or},
eo quod sit minus illo quod est supra
eum. Et si esset plus illo, retraheremus
eum una mansionem poneremusque eum
sub sex. Post hec ponemus in ea que suc- 685
cedit tres figuram duorum, que sunt XX,
sub sex. Postea ponemus in ea que suc-
cedit ⟨sub⟩ III^{or} idem III^{or}. Et hec est
figura earum:

46468
324

690

Post hec incipientes scribamus in
directo prime differentie numeri super

663 sed] s; C, set Allard 665 Cuius] eius
C 668 trecentos] tercentos C 671 III^{or}]
quatuor Allard 673 III^{or}] quatuor Al-
lard 673–674 quadringenta] quadringenta C
675 III^{or}] quatuor Allard 677 scribes] cri-
bes C 680 trecenti] tercenti C 681 III^{or}]
quatuor Allard 683 retraheremus] retrahe-
mus C 684 poneremusque] ponemusque C
687 ponemus] ponemus C 688 III^{or} (bis)]
quatuor Allard 688 est om. C 690–691 figu-
ram om. C 692 incipientes] insipientes C

⟨7⟩ *Kapitel über das Verfahren der Division*

⟨7.1⟩ Und wisse, daß die Division ähnlich der Multiplikation ist, aber umgekehrt. Ein Beispiel dafür ist: Wenn ich 46468 durch 324 teilen will, so setze ich von der ersten Zahl nach rechts die 8 an die erste Stelle. Danach setze ich an der zweiten (Stelle) nach links 6, was 60 bedeutet; dann nach links 4, was 400 bedeutet; danach 6, was 6000 bedeutet; dann 4. An der letzten Stelle nach links steht die 4 und an der ersten nach rechts die 8. Danach schreibe ich unter sie die Zahl, durch die die obere Zahl geteilt wird. Ich schreibe an der letzten Stelle der unteren Zahl, durch die wir teilen, die Form (= das Symbol) der Drei – und sie bedeuten 300 – unter die letzte Stelle der oberen Zahl, die geteilt wird, an der die 4 steht, deshalb, weil sie kleiner als jene ist, die über ihr steht. Und wenn sie mehr als jene wäre, so würde ich sie um eine Stelle zurücknehmen und sie unter die 6 setzen, die an der vorletzten (Stelle) steht. Aber weil sie kleiner ist, setze ich sie unter die 4, die an der letzten Stelle steht. Dann setze ich die Zahl, die ihr folgt, d.h. die Form (= das Symbol) der Zwei, die 20 bedeutet, unter die 6; danach die 4, die folgt, unter die 4. Und so sehen sie aus:

46468
324

Danach fange ich an, in gerader Richtung zur ersten Stelle der oberen Zahl oberhalb, d.h. über der Stelle, an der die 4 steht, eine Eins zu schreiben. Und wenn ich jene (Eins) unter die Stelle selbst schreibe, so wäre es (auch) passend. Multipliziere daher

MS N

tiplicabis itaque ipsum unum in tribus,
 que sunt in inferiori differentia, et mi-
 745 nues, quod collectum fuerit, de superiori
 differentia, que est super illud, in qua
 sunt III^{or}, remanebitque unum. Deinde
 multiplicabis illud in duobus, que sunt in
 sequenti differentia, et minues, quod col-
 750 lectum fuerit, de eo, quod est supra illud,
 quod est VI, et remanebunt III^{or}. Ite-
 rum multiplicabis illud in quatuor et mi-
 nues, quod collectum fuerit, de eo, quod
 est supra ipsum, id est quatuor, et ni-
 755 chil remanebit, ponesque ibidem circu-
 lum. Post hec mutabis primam differen-
 tiam inferioris numeri, qui est III^{or}, una
 differentia versus dexteram, id est, po-
 nes eam sub VI. Eruntque duo sub cir-
 760 culo et tria sub III^{or}. Postea scribes in
 directo III^{or} aliquem numerum in ordine
 unius, quod prius scripsisti, et hic nume-
 rus erit III^{or}. Quem multiplicabis in tria,
 et erunt XII, minuesque eum de superio-
 765 ri numero, qui est XIII, et remanebunt
 duo. Deinde multiplicabis etiam ipsa III
 in ipsis duobus, que succedunt tria, et
 erunt VIII. Minuesque, quod collectum
 fuerit, de superiori numero, qui est XX,
 770 et remanebunt XII, duo scilicet super duo
 et unum super III^a. Post hec etiam mul-
 tiplicabis III^{or} in III^{or}, que succedunt
 (versus) dexteram, et erunt XVI, minues-
 que, quod collectum fuerit, de eo, quod
 775 supra illud est, id est CXXVI, et rema-
 nebit super III^{or} circulus et super duo
 unum et super tria unum. Iterum mu-
 tabis primam differentiam inferioris nu-
 meri, in qua sunt III^{or}, ponesque ipsa
 780 III^{or} sub VIII. Eruntque duo sub cir-
 culo et tria sub uno. Post hec describes in
 directo III^{or} super numerum superiorem,
 quem dividis, vel sub eo in eo ordine, sci-
 licet III^{or} atque unius, tria scribes, que
 783 eo (1.) corr. N ex meo

MS C

quem dividimus, super numerum supe-
 riorem quem dividimus, qui sunt quatu- 695
 or, unum. Et si posuissemus eum sub
 III^{or}, esset conveniens. Multiplicemus-
 que ipsum in tribus, et minuemus eum
 de eo quod supra ipsum est, et remane-
 700 bit unum. Deinde multiplicemus eum in
 duobus, et minuemus eum de eo quod
 supra ipsum est, qui sunt VI, et remane-
 bunt III^{or}. Post hec multiplicemus eum
 iterum in III^{or}, et minuemus eum de eo
 quod supra ipsum est, que sunt III^{or}, 705
 et nichil remanebit; ponemusque in lo-
 co eius circulum. Postea mutabis inici-
 um numeri super quem dividis, vel III^{or},
 sub VI, et erunt duo sub circulo, et III
 sub III. Deinde scribes in directo inferior- 710
 is numeri aliquid in ordine unius, idest
 III, quos multiplicabis in tribus et erunt
 XII, minuesque eos de eo quod est su-
 per tres, qui sunt XIII, et remanebunt II.
 Post hec multiplicabis etiam ipsos III^{or} 715
 in duobus qui succedunt tres, et erunt
 VIII, quos minues de eo quod supra ip-
 sum est, qui sunt XX, et remanebunt XII,
 duo scilicet supra II^o et unum supra tres.
 Iterum multiplicabis III in III qui succe- 720
 dunt versus dexteram, et erunt XVI, mi-
 nuesque eos de eo quod supra ipsos est,
 qui sunt CXXVI, et remanebunt supra III
 circulus, et supra duos unum, et super
 725 tres unum. Iterum mutabis numerum su-
 per quem dividis, idest III^{or}, sub VIII;
 erunt duo sub circulo et tres sub uno.
 Postea scribes in directo III super nume-
 rum superiorem quem dividis, in ordine
 695-696 quatuor] quater C 697 III^{or}] qua-
 tuor Allard 703 III^{or}] quatuor Allard
 704 III^{or}] quatuor Allard 704 minuemus]
 minuimus C 705 III^{or}] quatuor Allard
 708 III^{or}] quatuor Allard 715 III^{or}] qua-
 tuor Allard 719 II^o] duo Allard 721 ver-
 sus om. C 721 dexteram] dexterum C
 726 III^{or}] quatuor Allard 728 scribes] cri-
 bes C

die Eins selbst mit 3, die an der darunterliegenden Stelle steht, und subtrahiere das, was angesammelt ist, von der darüberliegenden Stelle, die über jener ist – an ihr sind 4 –, und es bleibt eine Eins übrig. Dann multipliziere jenes (= die Eins) mit 2, die an der nächsten Stelle steht, und subtrahiere das, was angesammelt ist, von dem, was über jenem steht – dies ist die 6 –, und es bleiben 4 übrig. Wiederum multipliziere jenes (= die Eins) mit 4 und subtrahiere das, was angesammelt ist, von dem, was über ihm steht – dies ist die 4 –, und es bleibt nichts übrig, und setze an eben diese Stelle einen Kreis. Danach verschiebe die erste Stelle der unteren Zahl – dies ist die 4 – um eine Stelle nach rechts, d.h., setze sie unter die 6. Und es werden 2 unter dem Kreis sein und 3 unter der 4. Danach schreibe in gerader Richtung zur 4 irgendeine Zahl in der Zeile der Eins, die du früher geschrieben hast, und diese Zahl ist 4. Diese multipliziere mit 3, und es sind 12, und subtrahiere sie von der oberen Zahl – sie ist 14 –, und es bleiben 2 übrig. Dann multipliziere auch dieselbe 4 mit der 2 selbst, die der 3 folgt, und es sind 8, und subtrahiere das, was angesammelt ist, von der oberen Zahl – sie ist 20 –, und es bleiben 12 übrig, nämlich 2 über der 2 und 1 über der 3. Danach multipliziere auch 4 mit 4, die nach rechts folgen, und es sind 16, und subtrahiere das, was angesammelt ist, von dem, was über jenem ist – das ist 126 –, und es bleibt über 4 ein Kreis übrig und über 2 eine 1 und über 3 eine 1. Wiederum verschiebe die erste Stelle der unteren Zahl, an der die 4 ist, und setze eben diese 4 unter die 8. Und es werden 2 unter dem Kreis sein und 3 unter der 1. Danach schreibe in gerader Richtung zur 4 über die obere Zahl, die du teilst, oder unter sie in dieser Zeile, nämlich (in der Zeile) der 4 und der

MS N

785 cum multiplicaveris in tribus, erunt IX.
Minuesque ea IX de superiori numero,
qui est supra ipsa III, qui est XI, et re-
manebunt super tria duo. Multiplicabis
quoque tria in duo, que succedunt tria,
790 et erunt VI, que minues de numero, qui
est super tria, qui est XX, et remanebunt
XIII. Postea etiam multiplicabis ipsa tria
in III^{or}, que succedunt duo, et erunt XII.
Minuesque ea de numero, qui est super
795 ea, qui est CX(L)VIII, et remanebunt su-
per III^{or} VI et super duo tria et super
tria unum. Exhibitque nobis, quod debe-
tur uni, ex eis, et hoc est CX(L)III. Et
remanebunt CXXXVI partes ex tricesima
800 et vicesima quarta parte unius, et hec
est figura eorum:

143
136
324

805 <7.2> Et cum volueris dividere plures dif-
ferentias per unam, ut mille octingen-
tos super IX, scribe mille octingentos,
quorum figura est, ut ponas versus dex-
teram duos circulos, deinde VIII, <postea
810 unum>. Post hec pones IX sub VIII, quia
sunt plus VIII. Postea scribes in directo
eius supra VIII aliquid, quod, cum mul-
tiplicaveris, consumet, quicquid est su-
pra se, id est X et VIII, que sunt supra
815 IX. Quod invenies duo. Multiplicabis er-
go duo per IX, et erunt | decem et oc-
20v to. Quos minues de superiori numero,
et nichil remanebit. Post hec mutabis
IX una differentia versus dexteram, erit-
820 que sub circulo, ponesque desuper ali-
quid, quod, cum multiplicaveris in IX,
nichil erit, quia supra IX est circulus et
nullus numerus est ibidem. Scribe ergo
circulum in directo IX sursum, in ordi-

787 III] ix. N 802–804 notas numerorum li-
neasque rubro colore scr. N

MS C

III atque unius, tres, quos multiplicabis 730
in tribus et erunt IX, minuesque eos de
eo quod est supra tres, qui sunt XI, et
remanebunt super tres duo. Multiplica-
bis quoque tres in duobus qui succedunt
735 tres, et erunt VI, quos minues de eo quod
est supra tres qui sunt XX; remanebunt
XIII. Iterum multiplicabis predictos tres
in III^{or} qui succedunt duos, et erunt XII,
minuesque eos de eo quod supra illos est,
740 qui sunt CXLVIII, et remanebunt supra
III sex, et supra duos tres, et super tres
unum. Exhibitque nobis quod debetur uni
ex eis et hoc erit CXLIII et CXXXVI par-
tes de CCCXXIII partibus unius. Et hec
745 figura eorum:

143
136
324

<7.2> | Et si volueris dividere diffe- 109v
rentias plures super unam, utpote mil- 750
le DCCC per IX, scribes mille octingen-
tos, quorum figura est, ut ponas versus
dexteram duo circulos postea VIII, dein-
de unum. Post hec ponas IX sub VIII, eo
quod sint plus VIII. Deinde scribes in di- 755
recto eius super octo aliquid quod, cum
multiplicaveris in IX, consumet quod est
super se, idest XVIII qui sunt super IX.
Inveniensque illud esse duo, quos multi-
plicabis in IX, et erunt XVIII, minuesque 760
eos de eo quod est desuper et nichil re-
manebit. Deinde muta IX una differen-
tia versus dexteram, et fient sub circu-
lo. Ponesque aliquid desuper quod, cum
multiplicaveris in IX, nichil erit, quia est 765

735 quos] quo C 738 III^{or}] quatuor Allard
740 CXLVIII] cxviii. C 746–748 figuram om.
C 751 scribes] cribes C 755 VIII] XVIII
Allard 757 multiplicaveris] multiplicaverimus
Allard 760 in] ix. C

1, eine 3. Wenn du sie mit 3 multiplizierst, sind es 9. Und subtrahiere diese 9 von der oberen Zahl, die über eben dieser 3 steht – sie ist 11 –, und es bleiben über 3 2 übrig. Multipliziere auch 3 mit 2, die der 3 folgen, und es sind 6. Diese subtrahiere von der Zahl, die über der 3 steht – sie ist 20 –, und es bleiben 14 übrig. Danach multipliziere auch eben diese 3 mit 4, die der 2 folgen, und es sind 12. Und subtrahiere diese von der Zahl, die über ihr steht – sie ist 148 –, und es bleiben über der 4 6 übrig und über der 2 3 und über der 3 1. Und es kommt für uns aus ihnen das heraus, was der Eins zukommt, und dies ist 143. Und es bleiben 136 Teile von dem 324. Teil von Eins übrig. Und so sehen sie aus:

143
136
324

⟨7.2⟩ Und wenn du mehrere Stellen durch eine teilen willst, wie (z.B.) 1800 durch 9, so schreibe 1800, was (so) aussieht, daß du nach rechts zwei Kreise setzt, dann die 8, dann die 1. Danach setze 9 unter die 8, weil (die 9) mehr als 8 ist. Danach schreibe in gerader Richtung dazu über der 8 etwas, das, wenn du es multiplizierst, all das aufbraucht, was über ihr steht, d.h. 18, das über der 9 steht. Du findest, daß dies die 2 ist. Multipliziere also 2 mit 9, und es sind 18. Diese subtrahiere von der oberen Zahl, und es bleibt nichts übrig. Danach verschiebe 9 um eine Stelle nach rechts, und sie steht unter dem Kreis, und setze oberhalb etwas, das, wenn du es mit 9 multiplizierst, nichts ist, weil über der 9 ein Kreis steht und an eben dieser Stelle keine Zahl ist. Schreibe also den Kreis in gerader Richtung der 9 nach oben, nämlich in der Zeile der

MS N

825 ne scilicet duorum, multiplicabisque IX
 (in circulo, eritque circulus, id est nichil.
 Post hec muta etiam IX ad differentiam,
 que est ante eam, que est prima diffe-
 rentia, eritque IX) etiam sub circulo. Fac
 830 ergo de hoc, sicut fecisti de priori cir-
 culo, eruntque ibidem duo circuli, ante
 quos erunt duo, que sunt CC. Et hoc erit,
 quod debetur uni, et nichil remanebit de
 numero, qui dividitur. Et quocienscum-
 835 que divideris aliquem numerum per ali-
 um et remanserit(n)t de diviso numero
 circuli, post quos nullus fuerit numerus,
 accipe quod residuum fuerit ex circu-
 lis supra primam differentiam inferioris
 840 numeri, super quem dividis, versus dex-
 teram, et auge illud super numerum, qui
 exivit de divisione, et quod fuerit, ipsum
 erit, quod debetur uni. Et hec est proxi-
 ma divisio, id est adabbreviatio. Quod au-
 845 tem diximus primum, est modus opera-
 tionis. Cuius exemplar est, quod, cum
 poneremus mille et octingentos, fuerunt
 duo circuli. In tertia autem differentia
 fuerunt VIII et in quarta unum. Posui-
 850 mus ergo IX sub VIII eo, quod essent plus
 illo numero, qui erat in ultima differen-
 tia superioris numeri, fuitque hec figura
 eorum: 1800. Cum autem posuissemus
 in directo IX supra VIII duo multiplica-
 855 vissemusque ea in IX, fuerunt X et VIII.
 Que cum minuissemus de superiori nu-
 mero, remanserunt duo circuli, ante quos
 nullus numerus erat. Pones itaque duos
 circulos in ordine duorum, qui sunt su-
 860 pra IX, et erunt CC. Et hec figura eorum:
200. Hec sunt igitur universa, que ne-
 cessaria sunt hominibus ex divisione et
 multiplicatione in integro numero et in
 ceteris, que secuntur. His peractis inci-
 826–829 in circulo ... eritque IX *om.* N; *ad-*
didi ex C 836 diviso *corr.* N *ex diverso (?)*
 853 1800 *rubro colore scr.* N 861 200 *ru-*
bro colore scr. N

MS C

circulus super IX et nullus numerus est
 ibidem. Pones ergo circulum in directo
 IX in ordine duorum, et multiplicabis IX
 in circulo eritque circulus, idest nichil.
 Post hec muta etiam IX ad differentiam 770
 que est ante eam, que est prima differen-
 tia, eruntque IX sub circulo. Et fac de eis
 quemadmodum fecisti de circulo qui erat
 (ante) eos, eruntque ibidem duo circuli
 post quos erunt duo qui sunt ducenti, et 775
 hoc est quod debetur uni, et non rema-
 nebit ex eo quod dividitur quicquam. Et
 quocienscumque divideris aliquem nume-
 rum super aliquem et remanserint de eo
 quod dividitur circuli ante quos nullus 780
 sit numerus, accipe quod residuum fue-
 rit ex circulis ab inicio differentiarum di-
 visi numeri versus dexteram, et addes
 eos super id quod exierit de divisione, et
 quod fuerit ipsum est quod debetur uni. 785
 Et hec est quedam abbreviatio propin-
 qua. Ordo autem primus est ordo operis.
 Cuius rei exemplar est. Quod cum scri-
 beremus mille DCCC, fuerunt duo circuli,
 et VIII in tertia differentia, atque unum 790
 in quarta. Posuimus IX sub VIII, eo quod
 sint plus illo quod est in ultima differen-
 tia, fuitque figura eorum ita:

1800
 9

795

Cumque scriberemus in directo IX su-
 pra VIII duo multiplicaremusque ea in
 IX, fueruntque XVIII, quos cum minue-
 remus de eo quod est supra IX, remanse-
 runt duo circuli nullum habentes ante se 800
 numerum. Scripsimus ergo duos circulos

772 eruntque] eritque *Allard* 774 ibidem]
 ibide C 775 erunt] erit *Allard* 778 aliquem]
 alique C 786–787 propinqua] propitia *Al-*
lard 788–789 scriberemus] criberemus C
 790 VIII] et *add.* C 794–795 figuram *om.* C

2, und multipliziere die 9 mit dem Kreis, und es ist ein Kreis, d.h., nichts. Danach verschiebe die 9 auch an die Stelle, die vor ihr ist – dies ist die erste Stelle –, und die 9 ist auch unter einem Kreis. Mache es also mit diesem, wie du es mit dem früheren Kreis gemacht hast, und es werden dort zwei Kreise sein, vor denen eine 2 ist, das heißt: 200. Und dies wird das sein, was der Eins zukommt, und es wird nichts von der Zahl, die geteilt wird, übrig bleiben. Und immer, wenn du eine Zahl durch eine andere teilst und von der geteilten Zahl Kreise übrig bleiben, nach denen keine Zahl steht, dann nimm das, was übrig ist von den Kreisen über der ersten Stelle der unteren Zahl, durch die du teilst, nach rechts und füge jenes der Zahl hinzu, die aus der Division herausgekommen ist, und das, was sich ergibt, wird das sein, was der Eins zukommt. Und dies ist die leichteste Division, d.h. eine abgekürzte Form. Was wir aber zuerst gesagt haben, ist die Art des Vorgehens. Ein Beispiel dafür ist, daß, als wir 1800 setzten, (dort) zwei Kreise waren. An der dritten Stelle aber war eine 8 und an der vierten eine 1. Wir haben also 9 unter die 8 deswegen gesetzt, weil (die 9) mehr als jene Zahl war, die an der letzten Stelle der oberen Zahl war, und so sah sie aus: 1800. Als wir aber in gerader Richtung von 9 über der 8 die 2 setzten und sie mit 9 multiplizierten, waren es 18. Als wir sie von der oberen Zahl subtrahierten, blieben zwei Kreise übrig, vor denen keine Zahl war. Setze also zwei Kreise in die Zeile der 2, die über der 9 steht, und es sind 200. Und so sieht dies aus: 200.

MS N

865 piemus narrare multiplicationem fractionum et divisionem earum sive radices, si deus voluerit.

870 <8> *Capitulum in multiplicatione fractionum.*

870 <8.1> Scito quod fractiones nominentur multis nominibus, quorum numerus innumerabilis est et infinitus, ut medietas scilicet et tertia, quarta, nona, et decima, et una pars ex tredecim, et una
875 pars ex x et viii, etc. Sed Indi posuerunt exitum partium suarum de LX. Nominaveruntque unam partem ex LX minutum, et sic nominaverunt ceteras partes minuta. Rursum diviserunt unumquodque minutum per LX partes, quas vocaverunt secunda. Erit igitur una pars de tribus milibus et sexcentis secundum, et unumquodque secundum divisum per LX tertium. Eritque una pars de ducentis milibus et sexdecim milibus tertium.
880 Et unumquodque tertium dividitur per LX, que nominantur quarta. Et ita fiunt differentie usque ad infinitum numerum. Prima igitur differentia est differentia graduum, in qua est integer numerus, et in secunda fiunt minuta. In tertia vero differentia erunt secunda. Et in quarta est differentia tercianorum. Et similiter usque ad nonam et decimam. Et scito
890 868-869 *inscr. rubro colore scr. N* 879 *minuta.*] *in marg. add. alia manu:* (min)utum est una pars de lx^a 883 *divisum*] *multiplicatum* N

MS C

in ordine duorum qui sunt supra ix et fuerunt cc. Quorum hec est figura:

200
0000
9

805

Hec sunt universa que necessaria sunt hominibus ex divisione et multiplicatione in eo numero qui fuerit integer. Et nunc incipiemus tractare de multiplicatione fractionum, et earum divisione, et de extractione radicum, si Deus voluerit.

<8.1> Scito quod fractiones appellantur multis nominibus innumerabilibus | 110r
atque infinitis, ut medietas, tertia, quarta, nona et decima, et una pars ex xiii, et pars ex xviii^{to}, et cetera. Set Indi posuerunt exitum partium suarum ex sexaginta. Diviserunt enim unum in LX 820
partes, quas nominaverunt minuta, iterum unumquodque minutum in LX partes, quas vocaverunt secunda. Eritque unum ex LX minutum, et unum ex tribus milibus et sexcentis erit secundum. Et 825
unumquodque secundum iterum dividitur in LX, eritque unum ex ducentis milibus et xvi milibus tertium. Et unumquodque tertium dividitur in LX quarta. Et ita usque ad infinitum erunt differentie. Prima igitur est differentia graduum, in qua est numerus integer, et in secunda mansione erunt minuta. In tertia quoque sunt secunda, et in quarta tertia, et ita usque in ix^a et x^a mansione. 830
Et scito quod omnis numerus integer qui 835

804-806 *figuram om. C* 812 *Deus*] *deus C* 814 *fractiones*] *fracionis C* 814-815 *appellantur*] *appellentur C* 818 *xviii^{to}*] *octoginta Allard* 818 *et cetera*] *etc. C* 835 *ix^a*] *nona Allard* 835 *x^a*] *decima Allard*

Dies ist also alles, was notwendig ist für die Menschen an Division und Multiplikation mit einer ganzen Zahl und bezüglich der übrigen Dinge, die damit zusammenhängen. Nachdem dies vollbracht ist, werden wir (damit) beginnen, die Multiplikation von Brüchen und deren Division darzulegen und das Wurzel(ziehen), so Gott will.

* * *

⟨8⟩ *Kapitel über die Multiplikation von Brüchen*

⟨8.1⟩ Wisse, daß die Brüche mit vielen Namen genannt werden, deren Zahl unzählbar und unbegrenzt ist, wie z.B. Hälfte, Drittel, Viertel, Neuntel und Zehntel und ein Dreizehntel und ein Achtzehntel usw. Aber die Inder setzten den Ausgangspunkt ihrer Teile auf 60. Und sie nannten einen Teil von 60 „Minute“, und so nannten sie die übrigen Teile Minuten. Wiederum teilten sie jede Minute in 60 Teile, die sie „Sekunden“ nannten. Es ist also ein Teil von 3600 eine Sekunde und jede Sekunde, wenn sie durch 60 dividiert wird, eine Terz. Es ist also ein Teil von 216.000 eine Terz. Und jede Terz wird durch 60 geteilt; diese werden „Quarten“ genannt. Und so werden Stellen gemacht bis zur unbegrenzten Zahl. Die erste Stelle ist also die Stelle der Grade, an der sich eine ganze Zahl befindet, und an der zweiten stehen die Minuten. An der dritten Stelle aber sind die Sekunden. Und an der vierten ist die Stelle der Terzen. Und ähnlich (geht es) bis zur 9. und 10. (Stelle). Und du sollst wissen, daß aus jeder ganzen Zahl, die mit

MS N

895 quod ex omni numero integro, qui mul-
 tiplicatur in integro numero, fiunt unita-
 tes integre. Et si aliquis numerus integer
 multiplicatur in aliqua fractione, quic-
 quid ex eo exierit, erit de genere eius-
 dem fractionis, ut duo gradus in duobus
 900 minutis multiplicati: quatuor minuta. Et
 tres gradus in sex terciis: XVIII tercia.
 Minuta quoque in minutis: secunda, et
 secunda in secundis: quarta, et tercia in
 905 terciis: sexta. Quarta vero in quartis: oc-
 tava. Et hoc fit, quia colligis utrasque
 differentias, quas multiplicas, unam ex
 eis in alteram, et quod colligitur, ex nu-
 mero differentiarum efficitur. Exemplar
 910 eius, quod exit de multiplicatione utri-
 usque numeri invicem, ut septem minu-
 ta in VI minutis faciunt $X\langle L\rangle II$ secunda,
 quia sex minuta sunt partes VI ex LX par-
 tibus unius integri. Et cum multiplicave-
 915 ris partes de LX in partibus de LX, erunt,
 que exierint de multiplicatione, partes de
 LX in sexaginta, id est tria milia sexcen-
 ti. Et similiter VII secunda in IX minu-
 tis faciunt LXIII tercia. Eruntque omnia
 920 sexaginta ex eis unum secundum, et re-
 manebunt tria tercia, quia minuta partes
 sunt de LX, secunda vero partes sunt tri-
 um milium et sexcentorum. Multiplica
 ergo in invicem, et erunt partes ducen-
 925 torum milium et sexdecim milium, que
 sunt tercia. Et sunt LX ex tribus mili-
 bus et sexcentis. (8.2) Cum ergo volueris
 multiplicare unum et dimidium in uno et
 dimidio, pone unum et dimidium minu-
 930 ta, et erunt $LX\langle L\rangle$ minuta. Et iterum po-
 ne unum et dimidium, in quo vis multi-
 plicare, etiam minuta, et erunt similiter
 $LX\langle L\rangle$ minuta. Multiplica igitur unum ex
 eis in alio, et erunt VIII milia et C secun-
 935 da. Deinde divide ipsa secunda per LX,
 et erunt minuta, quia omnia LX secunda
 faciunt unum minutum, exieritque tibi

MS C

multiplicatur in numero integro efficitur
 numerus integer, et omnis numerus inte-
 ger multiplicatus in aliqua fractione ef-
 ficitur ex genere illius fractionis. Erunt-
 840 que duo gradus multiplicati in duobus
 minutis IIII minuta, et tres gradus in sex
 terciis XVIII tercia. Minuta quoque in mi-
 nutis erunt secunda, et secunda in minu-
 tis tercia, et tercia in minutis quarta, et
 845 quarta in minutis quinta, quia coniungis
 utrasque differentias quas multiplicas in-
 vicem, et quod colligitur ex numero frac-
 tionum simile ei quod exit de numero in-
 tegro in invicem multiplicato. Verbi gra-
 850 tia. Sex minuta multiplicata in VII minu-
 tis erunt XLII secunda, quia minuta sunt
 partes ex LX partibus unius integri, et
 cum multiplicaveris partes ex LX in LX,
 erit quod exierit de multiplicatione ex LX
 855 in LX que sunt tria milia sexcenta. Et si-
 militer VII secunda in IX minutis erunt LX
 tria tercia, eruntque omnia quoque LX ex
 eis secundum unum, et remanebunt tria
 860 tercia, quia minuta sunt partes ex LX, et
 secunda partes ex tribus milibus et sex-
 centis. Multiplica ergo ea in invicem, et
 efficientur partes ex ducentis milibus et
 XVI milibus, que sunt tercia, et sunt LX
 ex tribus milibus et sexcentis. 865
 (8.2) Et cum volueris multiplicare
 unum et dimidium in uno et dimidio, fac
 unum et dimidium minuta, et erunt XC.
 Iterum fac unum et dimidium que vis
 multiplicare in eadem minuta, et erunt
 870 similiter XC. Multiplica unum ex eis in
 alio, et erunt VIII milia et C secunda.
 Divide secunda per LX et erunt minu-
 ta, quia omnia queque $LX^{ta} II^{da}$ faciunt
 110v
 844-845 minutis] secundis C 845 minutis]
 terciis C 846 minutis] quartis C 846 con-
 iungis] coniunctis C 851-852 minutis] minu-
 ciis Callard 866 multiplicare] mltiplicare C
 867 uno] duo C 869 que] quam C 874 LX^{ta}
 II^{da}] sexaginta secunda Allard

einer ganzen Zahl multipliziert wird, ganze Einer entstehen. Und wenn irgendeine ganze Zahl mit irgendeinem Bruch multipliziert wird, wird alles, was daraus herauskommt, von der Art desselben Bruches sein. Z.B. (geben) zwei Grad, wenn sie mit zwei Minuten multipliziert werden, 4 Minuten und drei Grad, (multipliziert) mit 6 Terzen, 18 Terzen. Minuten aber (mal) Minuten (ergeben) Sekunden und Sekunden (mal) Sekunden Quarten und Terzen (mal) Terzen Sexten, Quarten aber (mal) Quarten Oktaven. Und dies geschieht, weil du beide Stellen zusammenfügst, die du multiplizierst, eine von ihnen mit der anderen, und was zusammengefügt wird, ergibt sich aus der Zahl der Stellen. Ein Beispiel dessen, was aus der Multiplikation beider Zahlen miteinander herauskommt: z.B. machen 7 Minuten mal 6 Minuten 42 Sekunden, weil 6 Minuten 6 Teile von 60 Teilen eines Ganzen sind. Und wenn du Teile von 60 mit Teilen von 60 multiplizierst, ist das, was aus der Multiplikation herauskommt, Teile von 60 mal 60, d.h. (von) 3600. Und in ähnlicher Weise machen 7 Sekunden mal 9 Minuten 63 Terzen. Und alle 60 von ihnen werden 1 Sekunde sein, und es bleiben drei Terzen übrig, weil Minuten Teile von 60 sind, Sekunden aber Teile von 3600. Multipliziere (sie) also miteinander, und es sind Teile von 216.000, was Terzen sind, und es sind 60 von 3600.

⟨8.2⟩ Wenn du also eins und ein halbes mit einem und einem halben multiplizieren willst, so schreibe eins und ein halbes als Minuten, und es sind 90 Minuten. Und wiederum schreibe eins und ein halbes, mit dem du multiplizieren willst, ebenfalls als Minuten, und es sind in gleicher Weise 90 Minuten. Multipliziere also eins von ihnen mit dem anderen, und es sind 8 Tausend und 100 Sekunden. Dann teile die Sekunden selbst durch 60, und es sind Minuten, weil alle 60 Sekunden eine Minute machen, und

MS N

940 CXXXV minuta. Divide itaque ea per LX,
et erunt gradus, quia sexaginta minuta
faciunt unum gradum, qui est ex nume-
ro integro unus. Exierintque duo gradus
et xv minuta, et hoc est quarta unius
21r integri. |

945 <9> *Capitulum in multiplicatione mi-
nutorum ac secundorum.*

Et si volueris multiplicare ex aliquo
numero duo integra, id est duos gradus,
et x(L)V minuta in tribus integris et x
minutis et xxx secundis, pone duos gra-
950 dus minuta, id est, multiplica duos per
LX, et erunt CXX. Adde quoque desu-
per x(L)V minuta, et erunt CLXV minuta.
Que debes servare, quia iam reddidisti
ea in ultimam differentiam. Deinde verte
955 predictos tres gradus in minuta multipli-
cando eos per LX, et erunt CLXXX, super
que addes x minuta, et erunt CLX(L) mi-
nuta. Deinde vertes ipsa CLX(L) minuta
in secunda multiplicando ea per LX, et
960 erunt XI milia quadringenta. Super que
addes xx(x) secunda, que sunt cum eis,
ut reddas ea ad instar ultime differen-
tie, que est in eis ex fractione, id est,
reddas omnia secunda, eruntque XI milia
965 secunda et quadringenta xx(x) secun-
da. Multiplica itaque ea in CLXV minuta,
et erunt milia milium et octingenta et
LXXXV milia ac nongenta L tertia, quia
multiplicasti minuta in secundis et facta
970 sunt tertia. Divide ergo ea per LX, ut sint
secunda, et exhibunt tibi xxx et unum mi-
lia et quadringenta xxxii secunda, et re-
manebunt xxx tertia. Deinde divide se-
cunda per LX, ut vertantur minuta. Exi-
975 bunt ergo DXXXIII minuta, et remanebunt
superflua LII secunda. Iterum divide mi-
nuta per LX, ut fiant gradus, et ipse est

944-945 *inscr. rubro colore scr. N* 953 reddi-
disti *corr. N ex reddisti* 958 Deinde *corr. N*
ex divide (?) 977 est *supr. N*

MS C

unum minutum. Exhibuntque tibi CXXX^{ta} 875
v^{que} minuta. Et divide ea per LX, et
erunt gradus, quia omnia queque LX^{ta}
minuta faciunt unum gradum, et hoc erit
unum integrum ex numero. Exhibuntque
tibi duo et xv minuta que sunt quarta 880
unius.

<9> Et si volueris multiplicare duo in-
tegra, id est duos gradus, et XLV minuta
in tribus integris et x minutis ac xxx se-
cundis, pone duo integra minuta, id est 885
multiplicabis ea in LX, et erunt CXX. Qui-
bus addes predicta XLV minuta et erunt
CLXV minuta. Serva ea, quia iam reddidi-
sti ea in ultimam differentiam. Post hec
fac predictos tres gradus minuta multi- 890
plicando ea in LX ut supra. Quibus addes
x predicta minuta, et erunt CXC minu-
ta. Deinde pone ipsa CXC minuta secun-
da multiplicando iterum ea in LX, donec
reddas ea in ultimam differentiam, id est 895
in secunda. Erunt XI milia quadringen-
ta, quibus addes xxx secunda que sunt
cum eis, eruntque XI milia quadringenta
<xxx> secunda. Sicque reddes ea in ul-
timum genus fractionis eiusdem numeri. 900
Multiplica hec omnia predicta in CLXV
minuta, et erunt mille milium et octin-
genta octoginta quinque milia ac non-
genta quinquaginta tertia, quia multi-
plicasti ea, id est secunda, in minutis, et 905
facta sunt tertia. Que divides per LX ut
reddantur secunda, exhibuntque tibi XXXI
milia et quadringenta xxx^{ta} II^o secun-
da, et remanebunt xxx^{ta} tertia. Item di-
vides secunda per LX ut reddantur mi- 910

875-876 CXXX^{ta} v^{que}] C triginta quinque Al-
lard 877 LX^{ta}] sexaginta Allard 888 CLXV
corr. C ex lxv. 905 secunda] in secundas
C 905 minutis] minutiis C 906 LX *corr. C*
ex xlx 908 XXX^{ta} II^o] triginta duo Allard
909 XXX^{ta}] triginta Allard 909-910 divides
corr. C in divide

es kommt für dich 135 Minuten heraus. Teile sie daher durch 60, und es sind Grade, weil 60 Minuten 1 Grad machen, der einer von der ganzen Zahl ist. Und es kommen 2 Grade und 15 Minuten heraus, und dies ist ein Viertel eines Ganzen.

* * *

⟨9⟩ *Kapitel über die Multiplikation von Minuten und Sekunden*

Und wenn du von irgendeiner Zahl zwei Ganze, d.h. 2 Grad, und 45 Minuten mit drei Ganzen und 10 Minuten und 30 Sekunden multiplizieren willst, schreibe zwei Grad als Minuten, d.h. multipliziere 2 mit 60, und es sind 120; füge auch außerdem die 45 Minuten hinzu, und es sind 165 Minuten. Diese mußt du behalten, weil du sie schon in die letzte Stelle verwandelt hast. Dann verwandle die vorgenannten 3 Grade in Minuten, indem du sie mit 60 multiplizierst, und es sind 180. Zu ihnen addiere 10 Minuten, und es sind 190 Minuten. Dann verwandle die 190 Minuten selbst in Sekunden, indem du sie mit 60 multiplizierst, und es sind 11400. Zu ihnen addiere die 30 Sekunden, die mit ihnen sind, damit du sie ganz so wie die letzte Stelle des Bruches wiedergibst, die in ihnen ist, d.h. du verwandelst alles in Sekunden, und es sind 11000 Sekunden und 430 Sekunden. Multipliziere sie daher mit 165 Minuten, und es sind 1 Million und achthundert und 85 Tausend und neunhundertfünfzig Terzen, weil du Minuten mit Sekunden multipliziert hast und Terzen entstanden sind. Teile diese also durch 60, damit es Sekunden sind, und es kommen für dich heraus 31432 Sekunden, und es bleiben 30 Terzen übrig. Dann teile die Sekunden durch 60, damit sie in Minuten verwandelt werden. Es kommen also heraus 523 Minuten, und es bleiben übrig 52 Sekunden. Wiederum teile die Minuten durch 60, damit Grade entstehen, und

MS N

980 numerus integer. Eruntque VIII gradus,
 et remanebunt X(L)III minuta. Erit igitur
 omne, quod exierit de multiplicatione,
 VIII gradus X(L)III minuta et LII secunda
 et XXX tercia. Similiter facies in universis
 985 fractionibus. Pones scilicet unumquem-
 que numerum, quem volueris multipli-
 care in invicem, in inferiori differentia.
 Postea multiplicabis unum ex eis in al-
 tero, et servabis quod exierit, et aspicias,
 de qua differentia sit. Post hec divides,
 quod multiplicasti, per LX, quemadmo-
 990 dum dixi tibi, usquequoque reddas illud
 in gradus vel in qualemcumque differen-
 tiam venerit infra gradus. Et quod fue-
 rit, ipsum erit, quod exhibit tibi de mul-
 tiplicatione unius eorum in altero. Est
 995 quoque ei alius modus abbreviatus, sed
 super hunc modum voluerunt Indi figu-
 rare numerum suum.

(10) *Capitulum in divisione fractio-
num.*

1000 (10.1) Et scito quod in omni nume-
 ro et fractione qui dividitur per aliquem
 numerum et fractionem, aut in numero
 et fractione qui dividitur per numerum
 1005 integrum, vel numero integro qui divi-
 ditur per numerum et fractionem, con-
 fringes unumquemque eorum, quousque
 reddas eos ex uno genere, id est, ver-
 tes eos in ultimam fractionem, que fue-
 rit in eis. Id est, si fuerint in uno eorum
 1010 secunda, verte utrosque numeros in se-
 cunda. Et si fuerint in aliquo eorum se-
 cunda et in alio tercia, vertes utrosque
 numeros in tercia. Si autem fuerint cum
 aliquo eorum quarta vel sexta et infra
 1015 hec et alter numerus fuerit integer, ver-
 te utrosque numeros in ultimam frac-
 tionem, que fuerit in eis, id est in ul-

996–997 figurare] finire N 998–999 *inscr. ru-
bro colore scr.* N 1014 *infra*] in N

MS C

nuta, exhibuntque tibi quingenta XX tria
 minuta, et supererunt LII secunda. Rur-
 sum divide minuta (per LX) ut reddan-
 tur gradus, idest numerus integer, erunt-
 que VIII^{to}, et remanebunt XL^{ta} III^a minu- 915
 ta. Eritque omne quod exierit de mul-
 tiplicatione octo gradus et XLIII minuta
 et LII secunda ac XXX tercia. Et simili-
 ter facies de universis fractionibus. Red-
 des scilicet unamquamque ex eis quam 920
 volueris multiplicare in aliam inferiorem
 differentiam que fuerit in unaquaque ex
 eis. Post hec multiplica unam earum in
 aliam, et serva quod exierit, et vide ex
 qua differentiarum sit. Deinde divide per 925
 LX quemadmodum dixi tibi, ut erigas eas
 ad gradus vel quo pervenerint ex diffe-
 rentiis que sunt infra gradus. Et quod
 fuerit ipsum erit quod exivit tibi de mul-
 tiplicatione unius earum in alia. Et est 930
 ei alius modus brevior, sed hic ordo est
 quo usi sunt Indi super quem figurare
 numerum suum.

(10.1) Scito quia cum volueris di-
 videre numerum cum fractione per ali- 935
 quem numerum cum fractione, vel nu-
 merum cum fractione per numerum inte-
 grum, aut numerum integrum per nume-
 rum cum fractione, facies utrumque nu-
 merum unius generis, idest vertes utros- 940
 que numeros in inferiorem differentiam.
 Verbi gratia. Si fuerit inferior differen-
 tia ex secundis, pones utrumque nume-
 rum secunda. Quod si fuerint in uno
 ex eis tercia et cum alio secunda, ver- 945
 tes utrosque in tercia. Et si fuerint cum
 aliquo ex eis quarta, vel sexta, vel ali-

915 VIII^{to}] octo *Allard* 915 XL^{ta} III^a] qua-
 draginta tria *Allard* 931 sed] s; C, set *Allard*
 941 inferiorem] inferiore C 944 fuerint] fue-
 rit *Allard* 946 fuerint] fuerit *Allard* 947 eis
om. C Allard 947–948 aliquid] ad (= aliquid)
 C, aliud *Allard*

die Zahl selbst ist eine ganze Zahl. Und es sind 8 Grad, und es bleiben 43 Minuten übrig. Das Ganze, was aus der Multiplikation herauskommt, ist also: 8 Grad 43 Minuten 52 Sekunden und 30 Terzen. In gleicher Weise mache es bei allen Brüchen. Setze nämlich jede beliebige Zahl, die du miteinander multiplizieren willst, an die niedrigste Stelle (= verwandle in die niedrigste Stelle). Dann multipliziere eine (Zahl) von ihnen mit der anderen und behalte, was herauskommt, und betrachte, zu welcher Stelle es gehört. Danach teile das, was du multipliziert hast, durch 60, wie ich es dir gesagt habe, bis du es in Grade verwandelst oder in eine beliebige Stelle, die unterhalb der Grade kommt. Und was sich ergibt, wird das sein, was für dich aus der Multiplikation einer der (Zahlen) mit der anderen herauskommt. Es gibt dafür auch (noch) eine andere abgekürzte Art, aber in dieser Art wollten die Inder ihre Rechenweise darstellen.

* * *

⟨10⟩ *Kapitel über die Division von Brüchen*

⟨10.1⟩ Und wisse, daß bei jeder Zahl mit Bruch, die durch irgendeine Zahl mit Bruch geteilt wird, oder bei einer Zahl mit Bruch, die durch eine ganze Zahl geteilt wird, oder bei einer ganzen Zahl, die durch eine Zahl mit Bruch geteilt wird, du jede von ihnen zerbrichst, bis du sie zu einer Art machst; d.h.: verwandle sie in den letzten Bruch, der in ihnen ist. D.h.: Wenn in einer von ihnen Sekunden sind, verwandle beide Zahlen in Sekunden. Und wenn in einer von ihnen Sekunden und in einer Terzen sind, verwandle beide Zahlen in Terzen. Wenn aber bei einer von ihnen Quarten oder Sexten oder (Teile) darüber hinaus sind und die andere Zahl ganz ist, so verwandle beide Zahlen in den letzten Bruch, der in ihnen, d.h. in der letzten Stelle, ist. Danach

MS N

1020 tima differentia. Post hec divide quem
volueris super alterum, postquam red-
dideris eos unius generis, et quod exie-
rit erunt gradus, id est numerus integer,
quia omnis numerus qui fuerit unius ge-
neris, si dividatur unus ex eis super alte-
rum, erit quod exierit numerus integer.
1025 <10.2> Ut si xv terciæ super vi terciæ
divise fuerint, exierit de genere divisio-
nis duo et dimidium. Quindecim enim
terciæ faciunt v integros. Cumque divi-
seris eas per vi terciæ, que faciunt du-
os integros, exierit duo et dimidium. Et
1030 similiter fit de divisione medietatum su-
per medietates et quartarum super quar-
tas, minutorum quoque super minuta et
secundorum super secunda et terciorum
1035 super terciæ, scilicet quod exiet semper
numerus integer. <10.3> Cum ergo vo-
lueris dividere x secunda super v minu-
ta, verte minuta in secunda, ut sint uni-
us generis atque unius differentie. Erunt
1040 CCC secunda, super que cum volueris di-
videre x secunda, non poterunt dividi x
per CCC. Scito itaque quia non exivit tibi
unus numerus integer. Pone itaque cir-
culum in loco unius et multiplica x per
1045 LX, et erunt DC, que cum diviseris su-
per CCC, exhibunt duo, que sunt duo mi-
nuta, et hoc est quod debetur uni, quia
quando multiplicares ea per LX et post-
ea divideres, iam minuisti ex eis unam
1050 differentiam, que sunt minuta. <10.4> Et
scito quod omnis numerus, qui exit de
aliquo numero super quem fuerit divisus,
si multiplicetur iterum in eodem nume-
ro super quem divisus est, redit iterum
1055 in ipsum numerum super quem divisus
est. Cuius rei exemplar est, quia si divi-
dis L per x, exhibunt v, que debentur uni.
Quod cum multiplicaveris quod exivit de

1023 unus corr. N ex unius 1031 de] de///
(rasura) N 1048 quando] qn.. (?) N

MS C

quid quod sit his differentiis inferius, al-
ter vero fuerit numerus integer, vertes
utrosque in eam differentiam que fuerit 950
in utrisque inferior. Deinde divide quod
volueris super quod volueris postquam
reddideris utrumque numerum unius ge-
neris, et quod exierit erunt gradus, id est 111r
numerus integer, quia omnes duo nume- 955
ri qui fuerint unius generis, si dividatur
unus eorum per alterum, erit quod exie-
rit numerus integer. <10.2> Verbi gratia.
xv terciæ si dividantur per sex terciæ,
exibunt de equalitate divisionis duo et 960
dimidium, quia xv terciæ faciunt v in-
tegrum, quos cum diviseris per vi terci-
as, qui sunt duo integri, exhibunt duo et
dimidium. Et similiter dividuntur me-
dietates per medietates, et quarte per 965
quartas, minuta quoque per minuta, et
secunda per secunda ac terciæ per terciæ.
<10.3> Et cum volueris dividere x secun-
da super v minuta, pone minuta secun-
da, ut sint unius generis atque unius dif- 970
ferentie, eruntque tercenta secunda, su-
per que dum volueris dividere x secun-
da, non possunt dividi x super tercenta.
Scito itaque quod non exivit unus inte-
ger. Pone ergo circulum in loco unius, 975
et multiplica x in LX, et erunt sexcenti,
quos cum diviseris super tercentos, ex-
hibunt duo que sunt duo minuta. Et hoc
est quod debetur uni, quia cum multipli-
casti ea in LX postea divisisti, iam minu- 980
isti ea una differentia que sunt secunda.
<10.4> Et scito quia omnis numerus qui
dividitur super aliquem numerum, quod
extrahitur de diviso, si multiplicatur in
eo super quem dividitur, redibit nume- 985
rus primus, id est numerus qui dividitur.
Cuius rei exemplar est, quia cum divise-

948 his] in his Allard 966 per minuta] per
minuta per minuta C 972 que] quem C 974-
975 integer] inger C 978 minuta] secunda C

teile die Zahl, die du (teilen) möchtest, durch die andere, nachdem du sie (beide) in (Teile) einer Art verwandelt hast, und das Ergebnis sind Grade, d.h. ganze Zahlen, weil jede Zahl, die von einer Art ist, eine ganze Zahl ergibt, wenn eine von ihnen durch eine andere geteilt wird.

⟨10.2⟩ Wenn etwa 15 Drittel durch 6 Drittel geteilt werden, kommt aus der Art der Division zweieinhalb heraus. Denn 15 Drittel machen 5 Ganze, und wenn du sie durch 6 Drittel teilst, die 2 Ganze machen, kommt zweieinhalb heraus. Und ähnlich geschieht es bei der Division von Halben durch Halbe, Vierteln durch Viertel, von Minuten durch Minuten, Sekunden durch Sekunden und Terzen durch Terzen, daß nämlich immer eine ganze Zahl herauskommt.

⟨10.3⟩ Wenn du also 10 Sekunden durch 5 Minuten teilen willst, so verwandle die Minuten in Sekunden, damit sie von einer Art und von einer Stelle sind. Es sind 300 Sekunden. Wenn du 10 Sekunden durch sie teilen willst, so kann 10 nicht durch 300 geteilt werden. Daher sollst du wissen, daß für dich keine ganze Zahl herauskommt. Setze daher einen Kreis an die Stelle der Eins und multipliziere 10 mit 60, und es sind 600. Wenn du sie durch 300 teilst, kommt 2 heraus. Dies sind 2 Minuten, und das ist es, was der Eins zukommt. Denn wenn du sie mit 60 multiplizierst und später teilen würdest, so hast du sie um eine Stelle verringert, die Minuten sind.

⟨10.4⟩ Und wisse, daß jede Zahl, die sich aus einer Zahl ergibt, durch die sie geteilt worden ist, wenn sie wieder mit derselben Zahl, durch die sie geteilt wurde, multipliziert wird, wieder zu derselben Zahl zurückkehrt, durch die sie geteilt wurde. Ein Beispiel dafür: Wenn du 50 durch 10 teilst, ergeben sich 5, die der Eins zukommen.

MS N

1060 divisione, id est v, in eo super quem di-
 visisti, que sunt x, redibit primus nume-
 rus, id est L. Cum ergo divisissemus x
 secunda per v minuta, exierunt duo mi-
 nuta, que debentur uni. Cumque multi-
 1065 plicavissemus duo minuta, que nobis ex-
 21v | ierunt de divisione, in numero per quem
 | divisimus, que sunt v minuta, fiunt x
 secunda. Et hec est probatio divisionis.
 (10.5) Et cum volueris dividere x minu-
 ta per v tertia, verte minuta in tertia,
 1070 et erunt xxxvi milia tertia. Que divides
 per v tertia, et erunt vii milia cc gra-
 dus, et hoc est quod debetur uni. Cum
 ergo volueris hoc probare, multiplica vii
 milia cc gradus in quinque tertia, et ex-
 1075 ibunt xxxvi milia tertia. Que cum divi-
 seris per LX, exhibunt DC secunda. Iterum
 cum diviseris DC secunda per LX, exhibunt
 x minuta.

1080 (11) *Capitulum in collectione integri
 numeri ac fractionis, que est augmenta-
 tio numeri in invicem.*

(11.1) Cum volueris constituere inte-
 grum numerum ac fractiones, constitue
 1085 integrum numerum in superiori differen-
 tia. Deinde pones quicquid fuerit ex pri-
 ma differentia, id est minuta, sub integro
 numero, et quicquid fuerit de secunda
 differentia, id est secunda, sub minutis,
 et similiter tertia sub secundis, usque in
 1090 differentiam quam volueris. Cuius exem-
 plar est, quod, cum voluissemus consti-
 tuere XII gradus et xxx minuta, x(L)v se-
 cunda et L quarta, constituimus XII gra-
 dus. Deinde posuimus sub eis xxx in dif-
 1095 ferentia minutorum, et sub xx(x) x(L)v
 in differentia secundorum, et pone in dif-
 ferentia tercianorum circulos, quia non

1065 divisione, in numero] divisione numeri N
 1079–1081 *inscr. rubro colore scr. N*

MS C

ris L super x, exhibunt que debentur uni,
 idest quinque. Cumque multiplicaveris
 id quod exivit tibi de diviso, idest quin- 990
 que, in eo super quem dividis, que sunt
 x, redibit numerus primus, idest L. Cum
 ergo divideremus x secunda super v mi-
 nuta, exivit quod debetur uni, idest duo
 995 minuta. Et cum multiplicaremus duo mi-
 nuta, hoc est quod exivit nobis ex divi-
 sione, in eo super quod divisimus, que
 sunt v minuta, facta sunt x secunda. Et
 hec est probatio divisionis. (10.5) Item
 cum volueris dividere x minuta super v 1000
 tertia, verte minuta in tertia, eruntque
 xxxvi milia tertia. Dividesque super v
 tertia, et erunt vii milia ducenti gradus,
 et hoc est quod debetur uni. Cumque
 1005 hoc volueris probare, multiplica vii milia
 ducentos gradus in v tertia, et exhibunt
 xxxvi milia. Que cum diviseris per LX,
 exhibunt vi centa secunda, et cum iterum
 diviseris vi centa secunda, exhibunt de-
 cem minuta. 1010

(11.1) Cum volueris constituere nu-
 merum integrum et fractiones, pone nu-
 merum integrum in altiori differentia.
 Deinde pone quicquid fuerit ex differen-
 1015 tia prima, que sunt minuta, sub numero
 integro, et secunda sub minutis, et simi-
 liter tertia sub secundis, et cetera que
 volueris ex differentiis. Cuius rei exem-
 plar est. Quod cum vellemus constitue-
 1020 re XII gradus et xxx minuta, XL quo-
 que v secunda et L quarta, constituimus
 XII. Post hec posuimus sub eis xxx in
 differentia minutorum, et sub xxx XLV
 in differentia secundorum. In differentia

995 minuta] secunda C 995–996 minuta] se-
 cunda C 1008 VI centa] VII centa *Allard*
 1021 V *corr. C ex vi* 1022 posuimus *corr. C*
ex possumus 1024 differentia (2.) *corr. C ex*
differentiis

Wenn du das, was sich aus der Division ergeben hat, d.h. 5, mit dem multiplizierst, durch das du geteilt hast, nämlich 10, wird sich wieder die erste Zahl ergeben, d.h. 50. Als wir also 10 Sekunden durch 5 Minuten geteilt hatten, ergaben sich 2 Minuten, die der Eins zukommen. Und wenn wir 2 Minuten, die sich für uns aus der Division ergeben haben, mit der Zahl multiplizieren, durch die wir geteilt haben, nämlich 5 Minuten, so entstehen 10 Sekunden. Und dies ist die Probe für die Division.

⟨10.5⟩ Und wenn du 10 Minuten durch 5 Terzen teilen willst, so verwandle die Minuten in Terzen, und es sind 36000 Terzen. Teile diese durch 5 Terzen, und es sind 7200 Grad, und das ist es, was der Eins zukommt. Wenn du dies nun überprüfen willst, so multipliziere 7200 Grad mit 5 Terzen, und es ergeben sich 36000 Terzen. Wenn du sie durch 60 teilst, ergeben sich 600 Sekunden. Wenn du wiederum 600 Sekunden durch 60 teilst, ergeben sich 10 Minuten.

* * *

⟨11⟩ *Kapitel über die Zusammenfügung einer ganzen Zahl und eines Bruches, d.h. die gegenseitige Vergrößerung einer Zahl*

⟨11.1⟩ Wenn du eine ganze Zahl mit Brüchen schreiben willst, so schreibe die ganze Zahl an die oberste Stelle. Dann setze all das, was zur ersten Stelle gehört, d.h. die Minuten, unter die ganze Zahl und all das, was zur zweiten Stelle gehört, d.h. die Sekunden, unter die Minuten und in gleicher Weise die Terzen unter die Sekunden bis zu einer beliebigen Stelle. Ein Beispiel davon ist: Wenn wir 12 Grad, 30 Minuten, 45 Sekunden und 50 Quarten schreiben wollen, schreiben wir 12 Grad. Dann setzen wir unter sie 30 an die Stelle der Minuten und unter die 30 45 an die Stelle der Sekunden, und setze an die Stelle der Terzen Kreise, weil in ihr keine Terzen sind, so daß du weißt,

MS N

1100 sunt in ea tercia, ut scias quia habes quarta[m]. Postea scribes sub circulis L in differentia quartanorum. Et hec est figura eorum:

1105	12	gradus.
	30	minuta.
	45	secunda.
	00	tercia.
	50	quarta.

1110 <11.2> Et similiter constitues universas differentias fractionum sub se invicem. Cum autem collecti fuerint in aliqua differentiarum LX vel plus, ponemus in suo loco quicquid superfluum fuerit supra LX, et ex LX faciemus unum, et ponemus illud in superiori differentia. <11.3> Et similiter si volueris minuere fractiones ex fractionibus, incipies a superiori differentia et minues unamquamque differentiam ex illa, que est ei similis genere. Si autem fuerit in aliqua differentiarum numerus minor illo quem vis minuire ex eo, vel fuerit in ea circulus, minue de superiori differentia, de illa scilicet, que est supra ipsam, de qua vis minuire, unum, quod erit LX in inferiori differentia, id est similis erit fractioni quam operaris. Minue ex eo quod volueris, et adde quod remanserit super imperfectam differentiam. Rursum si fuerit in superiori differentia circulus, minue de differentia que est super illam unum, et fac de eo in inferiori differentia LX. Deinde minue ex eo etiam unum et fac de <eo> LX in differentia quam volueris, et minue de eo quod volueris minuire, et scribe quod residuum fuerit in sua diffe-

1102–1106 *notas numerorum, voces et lineas rubro colore scr.* N 1107 Et] E *rubro colore scr.* N 1107 universas] u^l N 1108 fractionum *corr.* N *ex fractiones* 1134 *supra sua add.* N *eadem*

MS C

vero terciorum posuimus circulos, quia 1025 carebat terciis, et ut sciremus quia adhuc restabant quarta. Deinde posuimus sub circulis quinquaginta in differentia quartorum. Et hec est figura eorum:

1030	12
	30
	45
	00
	50

<11.2> Et similiter universas differen- 1035 tias fractionum sub se in successionem. Et quotienscumque collecta fuerint in aliqua mansione LX vel plus, ponemus in loco eorum, idest in eorum differentia, quicquid residuum fuerit super LX, 1040 et faciemus de omni LX unum; | pone- 111v mus eum in superiori differentia. <11.3> Et similiter si voluerimus minuere fractiones, incipiemus a superiori differentia, 1045 minuemusque unamquamque differentiam de ea que supra ipsam est. Quod si fuerit in eadem superiori differentia minus eo quod volueris minuire ex ea, vel fuerit in ea circulus, minue unum de differentia que est super eam, fietque ip- 1050 sum unum partes LX de fractione quam operaris, et minue ex eo quod operaris, et adde quod residuum fuerit super differentiam imperfectam. Et si fuerit supra ipsam differentiam circulus, minue 1055 de differentia que est supra eam unum, et redde eum partes LX in differentia que est infra ipsam. Deinde minue iterum ex ea etiam unum, et fac eum partes ut supra in differentia quam volueris. 1060 Post hec minue ex ea quod volueris, et

1029 hec] hoc C 1030–1034 *figuram om.* C 1036 in successionem] insucem C 1042 superiori] superiora C 1043 minuire] invenire C 1046 ipsam] ipsa C 1049 minue] minuire C 1053 super] s̄r (= super) C, supra Allard

daß du Quarten hast. Danach schreibe unter die Kreise 50 an der Stelle der Quarten. Und so sehen sie aus:

12	Grad
30	Minuten
45	Sekunden
00	Terzen
50	Quarten

⟨11.2⟩ Und in gleicher Weise schreibe alle Stellen der Brüche untereinander. Wenn aber an irgendeiner Stelle 60 oder mehr angesammelt sind, so setzen wir an ihren Platz das, was über 60 übrig ist, und aus 60 machen wir eine Eins, und wir setzen diese an die darüberliegende Stelle.

⟨11.3⟩ Und in gleicher Weise fange, wenn du Brüche von Brüchen subtrahieren willst, bei der obersten Stelle an und subtrahiere jede Stelle von der, die ihr hinsichtlich ihrer Art gleich ist. Wenn aber an irgendeiner Stelle eine Zahl steht, die kleiner ist als die, die du von ihr subtrahieren willst, oder wenn an ihr eine Null steht, so subtrahiere von der darüberliegenden Stelle, d.h. von jener, die sich über eben der befindet, von der du subtrahieren willst, eine Eins; sie wird 60 in der darunterliegenden Stelle bedeuten, d.h., diese wird gleich sein dem Bruch, den du bearbeitest. Subtrahiere davon das, was du willst, und addiere das, was übrig bleibt, zu der unvollständigen Stelle. Wenn sich aber an der darüberliegenden Stelle ein Kreis befindet, so subtrahiere von der Stelle, die über jener liegt, eine Eins, und mache aus ihr an der darunterliegenden Stelle 60. Dann subtrahiere von ihr auch eine Eins und mache daraus 60 an der Stelle, die du willst, und subtrahiere von ihr das, was du subtrahieren willst, und schreibe das, was übrig bleibt, an eben diese Stelle, an der das, was du wolltest, zu Ende gebracht worden ist.

MS N

- 1135 rentia, in qua finitum est quod voluisti.
 (11.4) Quod si volueris duplicare nu-
 merum vel fractionem, incipe duplicare
 a superiori differentia. Postea ab illa que
 hanc succedit. Et quocienscumque col-
 1140 lectus fuerit in aliqua differentiarum nu-
 merus plus numero parcium eius, scribe
 quod residuum fuerit in sua differentia,
 et unum quod collectum est sublevabis
 ad superiorem differentiam. In medietatibus
 1145 autem incipies ab inferiori differen-
 tia et accipies medietatem eius, deinde
 facies similiter in sequenti differentia. Si
 autem fuerit in aliqua differentiarum nu-
 merus impar, fac de eo quemadmodum
 1150 diximus in initio libri, et invenies, si deus
 voluerit.

(12) *Capitulum aliud in multiplicacione fractionum et divisione earum.*

- (12.1) Et si volueris multiplicare
 1155 fractiones que non fuerint minuta sive
 secunda, ut quartas scilicet et septimas
 ceterasque partes his similes, aut di-
 videre eas super se invicem, erit opus in
 his ut opus in minutis atque secundis.
 1160 Et constituam exemplar tibi, si deus vo-
 luerit. Et iam patefeci tibi in multiplica-
 tione minutorum atque secundorum sive
 tercianorum, qualiter constituas utras-
 que substantias quas vis multiplicare in
 1165 invicem unius generis, id est, qualiter
 constituas utrosque numeros ex genere
 inferioris differentie (...) multiplicando
 eos in invicem quicquid fuerit, scilicet
 tam ex quintis quam ex septimis, ut red-
 1170 das eos ad instar ultime differentie que
 fuerit in eis. Deinde multiplicabis eos in
 invicem, et quod exierit sublevabis illud
 ad numerum integrum, id est, divides
 illud per similitudinem eiusdem generis

1152-1153 *inscr. rubro colore scr. N* 1163 *qualiter*] *q̄l̄r* (r *corr. ex ?*) N 1164 *substantias*] *suba^s* (*aut subq^s*) N

MS C

quod residuum fuerit pone in ea differentia qua finitum est id quod minuitur ex ea.

- (11.4) Et cum duplare volueris aliquem numerum vel fractionem, incipe a differentia altiori, deinde ab ea que eam succedit. Cumque collectum fuerit in aliqua differentiarum aliquid plus numero eius partium, pone superfluum in ea differentia, et subleva unum a differentia que est supra ipsam. In mediatione autem incipies ab inferiori differentia, mediabisque illam, deinde sequentem. Et si inveneris ibi unum, fac de eo quemadmodum exposui tibi in initio libri. (12.1) Et si volueris multiplicare fractiones et numerum ac fractiones extra minuta vel secunda, ut sunt quarte et septime ac cetera partes his similes, et dividere eas in invicem, erit opus in eis sicut opus minutorum et secundorum. Et constituam tibi exemplar, si Deus voluerit. Et iam patefeci tibi in multiplicatione minutorum et secundorum ac terciorum de duobus numeris quos volueris multiplicare in invicem, idest unum eorum in alio, qualiter constitues eos unius generis, ut veritas eos scilicet in genus ultime differentie; idest si fuerit ultima ex secundis, verte eos in secunda, et si fuerit ex terciis, in tertia, et cetera. Similiter facies in partibus, idest si fuerit ultima differentia ex quintis vel ex septimis, reddes numerum tuum ex genere eiusdem partis. Post hec multiplicabis

1065 *volueris om. C* 1069 *aliquid*] *ad* (= *aliquid*) C, *aliud Allard* 1077 *Et*] § *Et C* 1083 *Deus*] *deus C* 1093-1094 *ultima*] *ulti C*

⟨11.4⟩ Wenn du nun eine Zahl oder einen Bruch verdoppeln willst, so fange mit dem Verdoppeln bei der obersten Stelle an, dann bei der, die ihr folgt. Und immer, wenn sich an irgendeiner Stelle eine Zahl angesammelt hat, die mehr ist als die Zahl der Teile dieser (Stelle), schreibe das, was übrig ist, an seine Stelle, und hebe die Eins, die sich angesammelt hat, an die darüberliegende Stelle. Bei den Halben aber fange bei der niederen Stelle an und nimm die Hälfte davon. Dann mache es in gleicher Weise bei der folgenden Stelle. Wenn es aber bei irgendeiner Stelle eine ungerade Zahl gibt, so verfare mit dieser (Zahl), wie wir es am Anfang des Buches gesagt haben, und du wirst es finden, so Gott will.

* * *

⟨12⟩ *Ein anderes Kapitel über die Multiplikation von Brüchen und ihre Division*

⟨12.1⟩ Und wenn du Brüche, die keine Minuten oder Sekunden sind, wie z.B. Viertel und Siebtel und die übrigen Teile, die diesen ähnlich sind, multiplizieren oder sie durcheinander teilen willst, so ist das Verfahren mit ihnen wie das Verfahren mit Minuten und Sekunden. Und ich will dir ein Beispiel geben, so Gott will. Und ich habe dir bei der Multiplikation der Minuten, Sekunden und Terzen klargemacht, wie du beide Werte, die du miteinander multiplizieren willst, in einer Art schreibst, d.h., wie du beide Zahlen in der Art der niedrigeren Stelle schreibst, ⟨...⟩ indem du sie miteinander multiplizierst, was auch immer es ist, nämlich bei den Fünfteln so wie bei den Siebteln, damit du sie ganz so wie die letzte Stelle wiedergibst, die in ihnen vorhanden ist. Dann multipliziere sie miteinander, und hebe das, was herauskommt, zu einer ganzen Zahl, d.h., teile es durch die (Zahl), die gleich ist (der Zahl) derselben Art, die mit der anderen Art multipliziert wurde.

MS N

MS C

1175 multiplicati in alio genere. (12.2) Cuius
exemplar hoc est: Quasi velles multipli-
care III septimas alicuius integri nume-
ri in III^{or} novenis, constitueres septimas
1180 atque novenas in prima differentia or-
dinatim, ut in minuta, et multiplicares
eas (in) invicem, et fierent ex genere am-
barum differentiarum sicut secundorum.
Quas si velles sublevare ad unitates in-
tegras, divideres eas per utrasque diffe-
1185 rentias, id est septimas in novenis. Cum
enim aliquid divisum fuerit et exierit ex
divisione aliquis numerus, erit integer.
Et si non poterit dividi, erunt partes uni-
us generis eiusdem, super quod divisi-
1190 sti, eruntque tres septime in III^{or} nove-
nis XII partes de LXIII partibus ex uno.
Verbi gratia. Cum volueris multiplicare
tres septimas alicuius integri numeri in
III^{or} novenas, scribe III. Postea pone sub
1195 eis VII in secunda differentia ut minu-
22r ta. | Postea scribe in alia prima, scilicet
differentia, III^{or} et sub eis IX in loco
minutorum, et reddas unamquamque ex
eis ex genere ultime differentie, hoc est,
1200 multiplica III^{es} in VII, et erunt XXI. Que
scribes in prima differentia, ut III^a. Dein-
de multiplica III^{or} in IX, et erunt XXXVI,
que pones in loco III^{orum}. Postea mul-
tiplica partes per partes, id est VII in
1205 IX, et venient LXIII, eritque hoc ex ge-
nere secundorum, et serva illud. Iterum
multiplicabis XXI in XXXVI, et erunt sep-
tingenta LVI ex genere secundorum, que
divides illis LXIII, que prius reservasti, et
venient XII, que erunt XII partes de LXIII
1210 partibus unius. (12.3) Cum ergo volueris
multiplicare tres et dimidium in VIII et
tribus partibus de XI, scribe tres. Post-
ea pone sub eis unum et sub uno duo,

eum in invicem, et quod exierit suble-
vabis eum ad numerum integrum, idest
divides eum per similem eiusdem generis
multiplicati in alio genere. (12.2) Qua- 1100
si velles multiplicare III septimas in III^{or}
novenis, essentque ille septime et novene
in prima differentia fractionis quasi mi-
nuta, multiplicaresque eas in invicem, et
fierent in sua differentia ex genere secun- 1105
dorum. Cumque volueris eas sublevare
ad numerum integrum, divides eas per
utrasque differentias que sunt septime
in novenis. Quod si aliquid divisum fue-
rit et exierit de divisione, numerus erit 1110
integer, et si non poterit dividi, erunt
partes unius eiusdem generis per quod
divisisti. Eruntque tres septime in III^{or}
novenis XII partes ex LX tribus partibus
unius. (12.3) Cum ergo volueris multi- 1115
plicare tres et dimidium in VIII et tribus
partibus XI, scribes tres, et pones sub eis
unum, et sub uno duo. Iamque scripsisti
tres et dimidium, quia dimidium est una
pars duorum quemadmodum unum mi- 1120
nutum est una pars de LX partibus unius.
Post hec scribes in alia parte VIII, et sub
eis tres, et sub tribus XI, sicque consti-
tues VIII et tres partes XI.

3	8
1	3
2	11

1125

1101 III^{or}] quatuor Allard 1102 septime]
septene C 1108 septime] septene C 1109 ali-
quid] ad (= aliquid) C, aliud Allard 1113 sep-
time] septene C 1113 III^{or}] quatuor Allard
1124 post VIII des. C. In marg. alia manu ad-
ditum est est quidem 1124 et tres partes XI
om. C 1125–1127 figuram om. C

1183 si superscr. N 1186 ex corr. N ex
dex 1200 multiplica corr. N ex multiplicante
1201 ut] ð. N

⟨12.2⟩ Ein Beispiel dafür ist folgendes: Wenn du drei Siebtel einer ganzen Zahl mit vier Neunteln multiplizieren wolltest, dann würdest du die Siebtel und die Neuntel der Reihe nach an die erste Stelle schreiben wie bei den Minuten, und du würdest sie miteinander multiplizieren, und sie wären nach der Art beider Stellen so wie Sekunden. Wenn du sie zu ganzen Einheiten heben willst, so würdest du sie durch beide Stellen teilen, d.h. durch Siebtel mal Neuntel. Denn wenn etwas geteilt wird und sich aus der Division eine Zahl ergibt, so ist es eine ganze Zahl. Und wenn es nicht geteilt werden kann, so sind es Teile von ein und derselben Art, durch die du teilst, und drei Siebtel, (multipliziert) mit vier Neunteln, sind 12 Teile von 63 Teilen von einem Ganzen. Zum Beispiel: Wenn du drei Siebtel einer ganzen Zahl mit vier Neunteln multiplizieren willst, so schreibe 3. Danach setze unter sie die 7 an der zweiten Stelle als Minuten. Danach schreibe an der anderen ersten Stelle 4 und unter sie 9 an der Stelle der Minuten und mache beide von ihnen von der Art der letzten Stelle, d.h.: multipliziere 3 mit 7, und es ergeben sich 21. Schreibe diese an die erste Stelle wie die 3. Dann multipliziere 4 mit 9, und es ergeben sich 36. Setze diese an die Stelle der 4. Danach multipliziere die Teile mit den Teilen, d.h. 7 mit 9, und es ergeben sich 63, und diese sind von der Art der Sekunden, und behalte sie. Wiederum multipliziere 21 mit 36, und es ergeben sich 756 von der Art der Sekunden. Teile sie durch jene 63, die du zuvor behalten hast, und es kommen 12 heraus. Dies sind 12 Teile von 63 Teilen von einem Ganzen.

⟨12.3⟩ Wenn du also 3 und ein Halbes mit 8 und 3 Teilen von 11 multiplizieren willst, so schreibe 3. Danach setze unter sie eine Eins und unter die Eins 2, und wenn

MS N

- 1215 et cum hoc feceris, iam posuisti tres et
dimidium, quia dimidium est una pars
ex duabus, quemadmodum unum minu-
tum est sexagesima unius. Post hec scri-
be in alia parte VIII et sub eis III^a et sub
1220 tribus XI, et cum hoc feceris, iam posui-
sti VIII et tres partes de XI.

MS N

- Et sic reddas unumquemque ex eis de genere ultime differentie, hoc est, multiplicabis tria in duobus, ad que refertur unum, augesque eis unum, et sic erunt medietates. Erunt igitur VII medietates, quas scribes in loco trium et destrues tria atque unum quod est
1225 sub eis. Multiplicabis VIII quoque in undecim, ad que referentur tria, et adde super ea tria, et sic reddes ea partes de XI. Eruntque LX(L)I, que scribes in loco VIII et destrues VIII atque tria que sunt sub eis. Deinde multiplicabis genus medietatum, que sunt duo, in genere partium, que sunt XI, et erunt X(X)II. Eritque hoc ex genere secundorum, et servabis illud. Item multiplicabis VII medietates in LX(L)^{ma} una parte XI, et erunt
1230 DCXXXVII. Et sunt etiam ex genere secundorum, que divides per XXII, et erunt eiusdem generis. Divide igitur unum ex eis super alium, et quod exierit erit numerus integer, et quod remanserit erunt partes unius de illo numero quem dividis. Et hoc est quod exivit tibi de multiplicatione, XXVIII scilicet et XX una pars ex XX duabus partibus unius. Et similiter erit universa multiplicatio fractionum. (12.4) Et cum volueris dividere de hoc
1235 genere, id est de fractionibus, aliquid super aliud, pone utrumque ex uno genere. Post hec divide unum super aliud, et quod exierit erit numerus integer. Verbi gratia. Si velles dividere XX et duas partes de XIII super tria et terciam unius, que sic describeres:

1240	3	20
	1	2
	3	13

- Et iam notavimus quod tercia sit diversa a duabus partibus de XIII, non enim habent terciam. Multiplica ergo genus tercianorum, quod est tria, in differentia parcium que sunt de XIII, donec sint unius generis. Eritque genus XXXIX. Deinde multiplica XX et duas partes de XIII in XXXIX. Eruntque XX in XXXIX DCC octoginta. Et adde desuper
1245 duas partes XIII^{mas} de XXXIX, que sunt VI, quia XIII^{ma} pars de XXXIX sunt tria. Eruntque DCCLXXXVI. Cumque hoc feceris, iam reddidisti ipsa XX et duas partes de XIII ex genere XXXIX. Post hec multiplica etiam tria et terciam unius in partibus que sunt XXXIX, donec sint utrique unius generis. Erunt igitur tria in XXXIX CXVII, super que addes terciam partem XXXIX, que est XIII, et erunt centum XXX partes de XXXIX. Iamque

1230 XXII corr. N ex xxxii 1238–1240 notas numerorum lineasque rubro colore scr. N 1241 sit corr. N ex sint 1246 Cumque corr. (?) N ex Cum ergo (?) 1246 reddidisti corr. N ex reddisti 1249 XXX corr. N ex xx

du dies getan hast, so hast du 3 und ein Halbes geschrieben, weil ein Halbes ein Teil von zweien ist, so wie eine Minute der sechzigste (Teil) von eins ist. Danach schreibe auf der anderen Seite 8 und unter ihr 3 und unter die 3 11, und wenn du dies getan hast, so hast du 8 und 3 Teile von 11 geschrieben. Und so machst du jede (Zahl) von ihnen von der Art der letzten Stelle, d.h.: du multiplizierst 3 mit 2, auf die sich die Eins bezieht, und fügst ihnen 1 hinzu, und so werden es Halbe sein. Es werden also 7 Halbe sein. Schreibe sie an den Platz der 3 und tilge die 3 und die 1, die unter ihr ist. Multipliziere auch 8 mit 11, auf die sich die 3 bezieht, und addiere dazu 3, und so machst du sie zu Teilen von 11. Und es werden 91 sein. Schreibe sie an den Platz der 8 und tilge die 8 und die 3, die unter ihr ist. Dann multipliziere die Art der Halben, die 2 sind, mit der Art der Teile, die 11 sind, und es werden 22 sein. Und dies wird von der Art der Sekunden sein, und behalte es. Ebenso multipliziere 7 Halbe mit 91 Teilen von 11, und es werden 637 sein. Und sie sind auch von der Art der Sekunden, die du durch 22 teilst, und sie werden von derselben Art sein. Teile also die eine (Zahl) von ihnen durch die andere, und das, was herauskommt, wird eine ganze Zahl sein, und was übrig bleibt, werden Teile von der Eins von der Zahl sein, die du teilst. Und das ist es, was bei dir bei der Multiplikation herauskommt: nämlich 28 und 21 Teile von 22 Teilen von der Eins. Und ähnlich ist die gesamte Multiplikation der Brüche.

(12.4) Und wenn du von dieser Art, d.h. von Brüchen, etwas durch etwas teilen willst, so schreibe beides von einer Art. Danach teile eines durch das andere, und was herauskommt, ist eine ganze Zahl. Zum Beispiel: Wenn du 20 und 2 Teile von 13 durch 3 und ein Drittel von der Eins teilen wolltest, so würdest du sie so schreiben:

3	20
1	2
3	13

Und wir haben erkannt, daß ein Drittel verschieden ist von zwei Teilen von 13, denn sie haben kein Drittel. Multipliziere also die Art der Drittel, d.h. 3, mit der Stelle der Teile, die von 13 sind, bis sie von einer Art sind. Und die Art ist 39. Dann multipliziere 20 und 2 Teile von 13 mit 39. Und 20 (multipliziert) mit 39 ist 780. Und füge außerdem 2 Dreizehntel von 39 hinzu; das sind 6, weil der 13. Teil von 39 3 sind. Und es sind 786. Wenn du dies getan hast, so hast du die 20 und 2 Teile von 13 von der Art 39 gemacht. Danach multipliziere auch 3 und ein Drittel der Eins mit den Teilen, die 39 sind, bis beide von einer Art sind. 3 (multipliziert) mit 39 sind also 117. Dazu addiere den dritten Teil von 39, d.h. 13, und es sind 130 Teile von 39, und sie sind gleich

MS N

- 1250 equaverunt in equali genere. Divide ergo unum super aliud, scilicet septingenta LXXXVI
super CXXX, et quod exierit erit numerus integer. Quod vero remanserit, erit pars
eiusdem numeri, super quem dividis. Eruntque ex numero VI et VI partes ex centum
xxx[i]. Quod si numeri, quos vis dividere unum per alium, fuerint partes equales, ut
1255 unumquemque in genus illius fractionis, quia sunt equales. Post hec divide ipsum quem
vis dividere super alium, et quod exierit, illud est quod debetur uni. Similiter fac in
universis, que volueris dividere ex fractionibus sive ex integro numero, et invenies, si
deus voluerit.

⟨13⟩ *Capitulum radicum extrahendarum.*

- 1260 ⟨13.1⟩ Scito quod cum sint duo numeri equales tam ex integro numero quam ex
fractionibus, cum multiplicaveris unum ex eis in alio, erit numero qui collectus fuerit
radix, quia multiplicatio unius eorum in alio est multiplicatio unius in semet ipso. Et
omnis numerus habens radicem si multiplicaveris eum in numero habente radicem,
sive equales fuerint numeri sive diversi, quod exibat de multiplicatione unius eorum in
1265 | altero [non] habebit radicem. ⟨13.2⟩ Et omnium numerorum quorum unus dividitur
super alterum, maximus scilicet [scilicet] super exiguum sive exiguus super maximum,
si erit illi numero radix qui exierit de divisione, cum multiplicaveris unum ex eis in
altero, erit numero qui collectus fuerit ex multiplicatione unius eorum in altero radix,
quamvis non sit primis numeris radix. Ut XVIII divisa per VIII. Si enim XVIII dividantur
1270 per VIII, exhibunt duo et quarta, et erit huic numero radix, scilicet unum et dimidium.
Rursum si diviseris VIII per XVIII, exhibunt III^{or} novene, et est earum radix due tercie.
Cumque multiplicaveris XVIII in VIII, erunt CX⟨L⟩III, et habent radicem, scilicet XII. Et
similiter VIII in duobus etc. his similia. ⟨13.3⟩ Et scito quod Indi constituerunt differen-
tias sui numeri tali ratione, ut in prima differentia esset unum. Quod multiplicantes in
1275 x est factum x, id est differentia secunda. Deinde multiplicaverunt x in x, et provenit
inde C, id est tercia differentia. Rursum multiplicaverunt C in x, et factum est mille, id
est quarta differentia. Et similiter fecerunt universas differentias quas constituerunt.
Prima ergo differentia eorum est unum et habet radicem. Quod cum multiplicaveris
in x, non erit illi numero qui colligitur radix, quia x caret radice. Cum autem mul-
1280 tiplicaveris x in x, efficitur numero qui colligitur radix. Erit enim quasi multiplicans
C in unum, id est x in x. Cumque multiplicasti eum in semet ipso, factus est numero
qui collectus est radix, et hec est differentia centenorum. Deinde multiplicaverunt C
in x, et factum est milia, quod caret radice eo, quod multiplicaveris aliquid habens

22v

1259 *inscr. rubro colore scr.* N 1269 *divisa corr.* N *ex devisa (?)* 1283 milia] M^a N

gemacht in derselben Art. Teile also die eine (Zahl) durch die andere, d.h. 786 durch 130, und das, was herauskommt, ist eine ganze Zahl. Was aber übrig bleibt, ist ein Teil derselben Zahl, durch die du teilst. Und es sind an (ganzen) Zahl(en) 6 und 6 Teile von 130. Wenn nun Zahlen, von denen du die eine durch die andere teilen willst, gleiche Teile sind, wie Viertel durch Viertel oder Achtel durch Achtel oder Teile von 17 durch Teile von 17, so mache beide von der Art jenes Bruchs, weil sie gleich sind. Danach teile (die Zahl), die du teilen willst, durch die andere (Zahl), und das, was herauskommt, ist das, was der Eins zukommt. Mache es in gleicher Weise bei allen, die du teilen willst, bei Brüchen oder bei einer ganzen Zahl, und du wirst (es) finden, so Gott will.

* * *

⟨13⟩ *Kapitel über das Ausziehen von Wurzeln*

⟨13.1⟩ Wisse, daß, wenn zwei Zahlen gleich sind, sei es von ganzen Zahlen wie von Brüchen, und wenn du eine von ihnen mit der anderen multiplizierst, die Zahl, die zusammengefügt wird, eine Wurzel hat, weil die Multiplikation einer dieser (Zahlen) mit der anderen die Multiplikation der einen mit sich selbst ist. Und von jeder Zahl, die eine Wurzel hat, wird, wenn du sie mit einer Zahl, die eine Wurzel hat, multiplizierst, ob es gleiche Zahlen oder verschiedene sind, das, was bei der Multiplikation einer von ihnen mit der anderen herauskommt, eine Wurzel haben.

⟨13.2⟩ Und von allen Zahlen, von denen eine durch eine andere geteilt wird, nämlich eine sehr große durch eine sehr kleine oder eine sehr kleine durch eine sehr große, wird, wenn die Zahl, die sich aus der Division ergibt, eine Wurzel hat, dann, wenn du die eine von ihnen mit der anderen multiplizierst, (auch) die Zahl, die durch die Multiplikation der einen von ihnen mit der anderen zusammengefügt wird, eine Wurzel haben, auch wenn die ersten Zahlen keine Wurzel haben. Z.B. 18, das durch 8 geteilt wird. Wenn nämlich 18 durch 8 geteilt wird, ergeben sich 2 und ein Viertel, und diese Zahl hat eine Wurzel, nämlich ein Ganzes und ein Halbes. Wenn du wiederum 8 durch 18 teilst, ergeben sich 4 Neuntel, und die Wurzel davon sind 2 Drittel. Und wenn du 18 mit 8 multiplizierst, sind es 144, und sie haben eine Wurzel, nämlich 12. Und ähnlich 8 (multipliziert) mit 2 und anderes, das diesen ähnlich ist.

⟨13.3⟩ Und wisse, daß die Inder die Stellen ihrer Zahl auf eine solche Weise geschrieben haben, daß an der ersten Stelle die Eins war. Wenn sie diese mit 10 multiplizierten, entstand die 10, d.h. die zweite Stelle. Dann multiplizierten sie 10 mit 10, und es entstand daraus die 100, d.h. die dritte Stelle. Wiederum multiplizierten sie 100 mit 10, und es entstand 1000, d.h. die vierte Stelle. Und in gleicher Weise machten sie alle Stellen, die sie geschrieben haben. Die erste Stelle davon ist also die Eins, und sie hat eine Wurzel. Wenn du sie mit 10 multiplizierst, hat die Zahl, die zusammengefügt wird, keine Wurzel, weil 10 eine Wurzel entbehrt. Wenn du aber 10 mit 10 multiplizierst, ergibt sich für die Zahl, die zusammengefügt wird, eine Wurzel. Sie wird nämlich gleichsam (eine Zahl) sein, die 100 mit der Eins multipliziert, d.h. 10 mit 10. Und wenn du sie mit sich selbst multiplizierst, entsteht für die Zahl, die zusammengefügt wurde, eine Wurzel. Und dies ist die Stelle der Hunderter. Dann multiplizierten sie 100 mit 10, und es entstand 1000, das deswegen keine Wurzel hat, weil du etwas, das eine Wurzel

MS N

radicem in aliquo carente radice. Ideoque numero collecto, id est mille, non est inventa
 1285 radix, quia multiplicasti mille in uno, id est x in C, quod est mille multiplicatum in
 uno. Et similiter omnes differentie eorum una habet radicem, et altera caret radice,
 id est, in imparibus differentiis est radix et non in paribus. (13.4) Et similiter quicquid
 fuerit infra unum ex fractionibus, ex minutis scilicet ac secundis ac terciis, quartisque
 ac quintis, quintis quoque quintarum ac septimis septimarum. Prima igitur differentia
 1290 ex fractionibus, que sunt minuta, non habet radicem. Quia voluisti vertere unum in
 minuta, id est, voluisti multiplicare illud in LX, factum est unum minuta. Rursum
 si volueris ipsum vertere in secunda, multiplicabis iterum hoc in LX, quia sunt tria
 milia DC. Cum igitur multiplicares unum in LX, versum est in minuta non habentia
 etiam radicem. Et facta sunt secundis radix, quia multiplicasti tria milia DC in uno et
 1295 facta sunt secunda habentia radicem. Radix igitur secundorum sunt minuta. Terciis
 vero non erit radix, quia multiplicabis unum in ducentis milibus et XVI milibus, que
 non habent radicem, id est, multiplicabis LX minuta in LX minutis, et facta sunt tria
 milia et DC secunda. Iterum multiplicabis ea in LX, et fient ducenta XVI milia tertia
 in uno. Non ergo habent tertia radicem. Deinde multiplicabis tertia in LX, et fient
 1300 quarta, et ista habent radicem, quorum radix sunt secunda, quia quarta sunt LX in LX
 multiplicata quater et secunda super LX bis ducta. Cum ergo multiplicares secunda in
 secundis, facta sunt quarta. Est igitur radix quartanorum secunda. Quinta vero non
 habent radicem. Sextis quoque est radix, et eorum radix sunt tertia, et similiter erit
 omnibus differentiis ex minutis et secundis et terciis. Erit scilicet paribus radix, que
 1305 sunt secunda et quarta et sexta [et quarta et sexta], id est, omnibus differentiis paribus
 est radix, imparibus vero nulla est radix, ut minutis et terciis et quintis et his similibus.
 Et similiter erit in aliis fractionibus, quia illis, que de paribus differentiis fiunt, est
 radix et que de imparibus non est radix. Sextis quoque, octavis [ac nonis] ac decimis,
 et partibus ex XI et XII sive ex XIII, XIII, XV, [XVI] et XVII, XVIII quoque ac XIX etc. Et
 1310 he sunt prime fractiones, que referuntur ad unum, et non habent radicem. Cum enim
 multiplicaveris unum in aliquo genere fractionum semel, non erit ei radix. Cum autem
 multiplicaveris ipsum in eadem differentia bis, erit ei radix. Radix vero est fractio
 prima, ut quinte partes, que carent radice. Quinte autem quintarum habent radicem,
 et earum radix sunt quinte, quia multiplicasti quintas in quintas et facte sunt quinte
 1315 quintarum. Et similiter septime partes non habent radicem. Septime autem septima-
 rum radicem habent septimas. Et similiter partes de XIII non habent radicem. Partes
 autem parcium de XIII, que sunt partes de CLXIX, habent radicem, et earum radix sunt
 partes de XIII. Tercie vero differentie nulla est radix, ut sunt sep|time partes septima-
 rum septimarum, et octave octavarum octavarum, que est sicut differentia tercianorum.

hat, mit etwas, das keine Wurzel hat, multipliziert hast. Und deswegen ergibt sich für die Zahl, die zusammengefügt wurde, d.h. 1000, keine Wurzel, weil du 1000 mit Eins multipliziert hast, d.h. 10 mit 100, was bedeutet: 1000 multipliziert mit Eins. Und in ähnlicher Weise hat bei allen Stellen von ihnen die eine eine Wurzel, und die andere entbehrt eine Wurzel, d.h.: an den ungeraden Stellen gibt es eine Wurzel und nicht an den geraden.

⟨13.4⟩ Und ähnlich ist das, was unterhalb der Eins mit den Brüchen geschieht, d.h. mit Minuten, Sekunden, Terzen, Quarten, Quinten und auch mit Fünfteln von Fünfteln und Siebteln von Siebteln. Die erste Stelle unter den Brüchen, die Minuten, hat also keine Wurzel. Weil du die Eins in Minuten verwandeln wolltest, d.h., weil du sie mit 60 multiplizieren wolltest, sind aus der Eins Minuten geworden. Wenn du sie (= die Eins) wiederum in Sekunden verwandeln willst, multipliziere dies noch einmal mit 60, weil (!) es 3600 sind. Als du also die Eins mit 60 multipliziertest, ist sie in Minuten verwandelt worden, die keine Wurzel haben. Und für die Sekunden hat sich eine Wurzel ergeben, weil du 3600 mit Eins multipliziert hast und sich Sekunden ergeben haben, die eine Wurzel haben. Die Wurzel aus Sekunden sind also Minuten. Die Terzen aber haben keine Wurzel, weil du Eins mit 216000 multiplizierst, die keine Wurzel haben, d.h. 60 Minuten mit 60 Minuten, und es sind 3600 Sekunden entstanden. Wiederum multipliziere sie mit 60, und es werden 216000 Terzen in der Eins entstehen. Also haben die Terzen keine Wurzel. Dann multipliziere die Terzen mit 60, und es werden Quarten entstehen, und diese haben eine Wurzel; ihre Wurzel sind Sekunden, weil die Quarten 60 mit 60 viermal multipliziert sind und Sekunden mit 60 zweimal multipliziert. Als du also Sekunden mit Sekunden multipliziertest, sind Quarten entstanden. Die Wurzel aus den Quarten sind also Sekunden. Die Quinten aber haben keine Wurzel. Die Sexten haben eine Wurzel, und ihre Wurzel sind Terzen. Und in ähnlicher Weise wird es bei allen Stellen von Minuten, Sekunden und Terzen sein. Die geraden nämlich werden eine Wurzel haben, die Sekunden, Quarten und Sexten, d.h., alle geraden Stellen haben eine Wurzel. Die ungeraden aber haben keine Wurzel, wie die Minuten, Terzen, Quinten und diesen ähnliche.

Und ähnlich ist es auch bei anderen Brüchen, weil die, die aus „geraden Stellen“ entstehen, eine Wurzel haben und die aus ungeraden keine Wurzel haben, Sechstel, Achtel, [Neuntel] und Zehntel und Teile von 11, 12, 13, 14, 15, [16,] 17, 18, 19 usw. Und dies sind die „ersten Brüche“, die sich auf Eins beziehen, und sie haben keine Wurzel. Wenn du nämlich Eins mit irgendeiner Art (dieser) Brüche einmal multiplizierst, so hat (der Bruch) keine Wurzel. Wenn du ihn aber an derselben Stelle zweimal multiplizierst, so hat er eine Wurzel. Die Wurzel ist aber der „erste Bruch“, so wie die Fünftel, die keine Wurzel haben. Fünftel von Fünfteln aber haben eine Wurzel, und ihre Wurzel sind Fünftel, weil du Fünftel mit Fünfteln multipliziert hast und Fünftel von Fünfteln entstanden sind. Und auf ähnliche Weise haben die Siebtel keine Wurzel. Siebtel von Siebteln aber haben Siebtel als Wurzel. Und auf ähnliche Weise haben „Teile von 13“ (= Dreizehntel) keine Wurzel. Teile aber von Teilen von 13, das sind „Teile von 169“, haben eine Wurzel, und ihre Wurzel sind Teile von 13. Die „dritte Stelle“ aber hat keine Wurzel, wie z.B. Siebtel von Siebteln von Siebteln und Achtel von Achteln von Achteln, die (so) ist wie die Stelle von Terzen. Und die „vierte Stelle“ hat eine Wurzel,

MS N

1320 Et quarta differentia habet radicem, quia sunt v^{te} partes v^{tarum} v^{tarum} v^{tarum} et est quasi differentia quartanorum, et earum radix sunt quinde partes quintarum. Et ita disponuntur differentie earum ut differentie minutorum et secundorum ac tercianorum et quartanorum.

(14) *Item. Capitulum extractionis radicum.*

1325 Cum volueris extrahere radicem alicuius numeri, scribe numerum secundum differentias suas, et incipe a prima differentia, id est a differentia unitatum, que est versus dexteram, quemadmodum patefeci tibi (in) inicio libri. Post hec scito quod prime differentie sit radix et secunde non erit radix. Tercia quoque habet radicem, et quarta non habet. Et non desines numerare differentias usque in ultimam quocumque

1330 pervenerit, incipiens primum a differentia unitatum, deinde decenorum, post ea centenorum etc. Cuicumque perveneris numerando ad ultimam differentiam, si fuerit numerus eius impar, operaberis in ea, et si fuerit par, non operaberis in ea. Tunc revertere retro, donec sit opus sub impari differentia, que est ante ultimam differentiam, si fuerit ultima par. Operaberis autem ita: pones sub differentia, in qua ceciderit opus,

1335 aliquem numerum, quem cum multiplicaveris in semetipso, consumat numerum qui fuerit super se vel proximum minorem eo. Cumque sciveris eum, multiplicabis eum in seipso et minues de superiori numero. Deinde multiplica bis ipsum numerum, quem in seipso multiplicaveras. Post hec removebis eum una differentia infra differentiam quam multiplicasti, id est, mutabis eum ad secundam differentiam versus dexteram. Deinde

1340 scribes infra eum in secunda, scilicet differentia, que est in dextera eius, aliquid ad instar eius, id est, aliquem numerum quem, cum multiplicaveris in eo quem duplicasti et in semet ipso, consumat superiorem numerum vel proximum minorem eo. Cumque multiplicaveris eum ac minueris de superiori numero, duplica etiam ipsam differentiam, quam non duplicaveras, in loco suo et remove eas una differentia versus dexteram, si

1345 fuerit ibidem numerus vel circulus absque numero. Deinde scribe infra ipsum, quem multiplicaveras, in tertia differentia ad similitudinem numeri, quem secundo multiplicasti, aliquem numerum quem, cum multiplicaveris in duabus differentiis quas prius duplicasti et in semetipso, consumat superiorem numerum vel proximum minorem eo. Et ita semper facies, donec nichil remaneat ex numero, cuius radicem vis extrahere,

1350 vel aliquid remaneat, quod sit minus illo numero quem inferius duplicasti. Si vero remanserit aliquid, quod sit minus illo, erit pars illius numeri, qui exivit tibi inferius, postquam duplicaveris etiam ultimam differentiam, nisi extraxeris radicem de numero non habente radicem minorem eo qui habet in uno tantum. Post hec mediabis illud, quod duplicasti, donec reddas id in eo, quod fuit primum, et quod exierit, erit integra

1355 radix vera, et quod remanserit, erit pars differentiarum duplicatarum vel differentie duplicate vel par illis vel illi. Hec erit radix numeri quem voluisti propior ei, si fuerit de illis qui carent radice. Si vero fuerit de illis qui habent radices, non remanebit ex

1324 *inscr. rubro colore scr. N*

weil es Fünftel von Fünfteln von Fünfteln von Fünfteln sind und es gleichsam die Stelle der Quarten ist, und ihre Wurzel sind Fünftel von Fünfteln. Und so werden ihre Stellen dargestellt wie die Stellen von Minuten, Sekunden, Terzen und Quarten.

* * *

⟨14⟩ *Ebenso ein Kapitel über das Ausziehen von Wurzeln*

Wenn du die Wurzel aus irgendeiner Zahl ziehen willst, so schreibe die Zahl gemäß ihren Stellen und fange mit der ersten Stelle an, d.h. mit der Stelle der Einer, die (nach) rechts ist, wie ich dir am Anfang des Buches klargemacht habe. Danach sollst du wissen, daß die erste Stelle eine Wurzel hat und die zweite keine Wurzel hat. Die dritte hat eine Wurzel und die vierte nicht. Und höre nicht auf, die Stellen bis zur letzten zu zählen, wohin auch immer sie gelangt, indem du zuerst bei der Stelle der Einer anfängst, dann der Zehner, danach der Hunderter usw. Wenn du beim Zählen bis zur letzten Stelle gelangt bist, so arbeite an ihr, wenn ihre Zahl ungerade ist. Und wenn sie gerade ist, so arbeite nicht an ihr; dann gehe rückwärts, bis das Verfahren unter der ungeraden Stelle ist, die vor der letzten Stelle ist, wenn die letzte (Stelle) gerade ist. Arbeite aber so: setze unter die Stelle, an der das Verfahren vor sich geht, eine Zahl, die, wenn du sie mit sich selbst multiplizierst, die Zahl aufbraucht, die über ihr steht, oder die nächste (Zahl), die kleiner als sie ist. Und wenn du sie weißt, multipliziere sie mit sich selbst und subtrahiere sie von der darüber stehenden Zahl. Dann multipliziere eben die Zahl, die du mit sich selbst multipliziert hast, zweimal. Danach bewege sie um eine Stelle unterhalb der Stelle, die du multipliziert hast, d.h. bringe sie an die zweite Stelle nach rechts. Dann schreibe unterhalb von ihr an der zweiten Stelle, die an ihrer rechten Seite ist, etwas ganz so wie sie, d.h. irgendeine Zahl, die, wenn du sie mit der, die du verdoppelt hast, und mit sich selbst multiplizierst, die darüber stehende Zahl aufbraucht oder die nächste Zahl, die kleiner als sie ist. Und wenn du sie multipliziert und von der darüber stehenden Zahl subtrahiert hast, so verdopple auch die Stelle selbst, die du nicht verdoppelt hattest, an ihrem Platz, und bewege diese um eine Stelle nach rechts, wenn dort eine Zahl oder ein Kreis ohne Zahl ist. Dann schreibe unterhalb der (Zahl), die du multipliziert hattest, an der dritten Stelle ähnlich der Zahl, die du beim zweitenmal multipliziert hattest, irgendeine Zahl, die, wenn du sie mit den beiden Stellen, die du vorher verdoppelt hattest, und mit sich selbst multiplizierst, die darüber stehende Zahl aufbraucht oder die nächste, die kleiner als sie ist. Und so mache es immer, bis nichts übrig bleibt von der Zahl, deren Wurzel du ziehen willst, oder bis etwas übrig bleibt, was kleiner ist als die Zahl, die du unten verdoppelt hast. Wenn aber etwas übrig bleibt, was kleiner ist als jene, wird es ein Teil der Zahl sein, die sich für dich unten ergeben hat, nachdem du auch die letzte Stelle verdoppelt hast, außer wenn du die Wurzel aus einer Zahl ziehst, die keine Wurzel hat und nur um Eins kleiner ist als die Zahl, die (eine Wurzel) hat (?). Danach halbiere das, was du verdoppelt hast, bis du es zurückführst auf das, was es zuerst war; und was sich ergibt, wird die ganze wirkliche Wurzel sein, und was übrig bleibt, wird ein Teil der verdoppelten Stellen oder der verdoppelten Stelle sein oder jenen oder jener gleich sein. Diese Wurzel der Zahl, die du wolltest, wird ihr ziemlich nahe sein, wenn sie zu den (Zahlen) gehört, die keine Wurzel haben; wenn sie aber zu denen gehört,

MS N

numero aliquid, et quod exierit de numero, postquam mediaveris, id est, postquam abstuleris duplicatam quem addidisti, efficitur ipsa radix integra absque ulla fractione.

1360 Hec enim erit radix integra per semetipsum.

⟨15⟩ *Aliud capitulum de eodem.*

Etiam patefeci tibi in alio libro meo, quod omnis numerus ex nodis et unitatibus, si multiplicetur in nodis et unitatibus, necesse est ut multiplicetur quater, nodi scilicet in nodis, et nodi in unitatibus, et unitates in nodis, et unitates in unitatibus.
1365 Et similiter nodi nodorum. Duplicavimus igitur primam differentiam, quia iam facta est in loco nodorum, dum facta est infra eam una differentia. Multiplicavimus ergo eam semel in contenti duplicatione illa aut multiplicatione eius bis. Et similiter faciemus, cum voluerimus eam mutare secundo: duplicabimus differentiam quam fecimus, et mutabis eam una differentia, quia facta est in differentia nodorum, dum facta est
1370 infra eam una differentia et facta est prima differentia in differentia centenorum. Iam ergo multiplicavimus eam semel, cum[que] multiplicavissemus nodos in ea bis. Postea in differentia que eam succedit, que fuit etiam duplicata, quasi iam multiplicavimus eam bis, iterum facies similiter, donec finiatur numerus. Post hec mediabis eum, id est, auferes duplicatam, donec reddas eum in eo, quod fuerat, antequam duplicares eum.

1375 ⟨16⟩ | *Capitulum in exemplari extractionis radices.*

23v

⟨16.1⟩ Ponamus verbi gratia, quasi vellemus extrahere radicem v milium et DC et XXV. Cum ergo voluissemus facere, posuimus hunc numerum per differentias suas. Cuius figura est hec: 5625. Fuerunt itaque in prima differentia v et in secunda II^o, que sunt XX, in tertia quoque VI, que sunt DC, et in quarta v, que sunt v milia. Cecidit
1380 autem opus in differentia tertia, que est ante differentiam ultimam. Posuimusque sub eadem differentia aliquid, quod ⟨cum⟩ multiplicaremus in semetipso, consumeret superiorem numerum, scilicet LVI, vel qui in se multiplicatus esset ei proximus. Non autem sustinuit plus VII. Multiplicavimus ergo VII in semetipso, et fuerunt x(L)IX. Quos cum minuissemus de superiori numero, scilicet LVI, remanserunt in secunda differentia
1385 VII. Post hec duplicavimus VII inferiores in loco suo, et factum est unum sub quarta differentia, in qua erant v, et in loco suo IIII^{or}. Mutavimus igitur hunc numerum una differentia versus dexteram, et facta sunt IIII^{or} sub differentia duorum et unum sub VII. Rursum posuimus ante quatuor I, sub prima differentia in ordine eorum, sub v scilicet, aliquid, id est v, quod cum multiplicaremus in uno, postea in IIII^{or}, deinde in semetipso,
1390 consumeret superiorem numerum, qui est DCC[C]XXV. Que cum multiplicaremus in uno, quod est sub VII, et minueremus de superiori numero, remanserunt duo. Item

1361 *inscr. rubro colore scr. N* 1367 in] et N 1367 aut] ā N 1375 *inscr. rubro colore scr. N*
1378 5625 *rubro colore scr. N*

die Wurzeln haben, dann wird von der Zahl nichts übrig bleiben, und was sich an Zahl ergibt, nachdem du sie halbiert hast, d.h., nachdem du die Verdopplung beseitigt hast, die du hinzugefügt hattest, ergibt die ganze Wurzel ohne jeden Bruch. Denn dies wird von sich selbst aus eine ganze Wurzel sein.

* * *

⟨15⟩ *Ein anderes Kapitel über dasselbe*

Ich habe dir in einem anderen Buch von mir klargemacht, daß jede Zahl aus Knoten und Einern, wenn sie mit Knoten und Einern multipliziert wird, notwendigerweise viermal multipliziert wird, nämlich: Knoten mit Knoten, Knoten mit Einern, Einer mit Knoten und Einer mit Einern. Und in gleicher Weise (geschieht es mit) Knoten von Knoten. Wir haben also die erste Stelle verdoppelt, weil sie am Platz der Knoten entstanden ist, während unterhalb von ihr (= an der niedrigeren Stelle) eine Stelle entstanden ist. Wir haben diese also einmal mit jener Verdopplung des (in ihr) Enthaltene multipliziert oder zweimal durch die Multiplikation von ihr. Und ähnlich werden wir es machen, wenn wir sie ein zweitesmal verändern wollen: Wir werden die Stelle, die wir gemacht haben, verdoppeln. Verschiebe sie um eine Stelle, weil sie an der Stelle der Knoten entstanden ist, während unterhalb von ihr (= an der niedrigeren Stelle) eine Stelle entstanden ist und die erste Stelle an der Stelle der Hunderter entstanden ist. Also haben wir sie einmal multipliziert, während wir die Knoten in ihr zweimal multipliziert hatten. Später mache es an der Stelle, die ihr folgt, die auch verdoppelt worden ist, als wenn wir sie zweimal multipliziert haben, wiederum in gleicher Weise, bis die Zahl zu Ende gebracht wird. Danach halbiere sie, d.h., beseitige die Verdopplung, bis du sie zu dem machst, was sie gewesen war, bevor du sie verdoppelt hast.

* * *

⟨16⟩ *Kapitel über ein Beispiel für das Ausziehen einer Wurzel*

⟨16.1⟩ Wir wollen z.B. ansetzen, daß wir die Wurzel aus 5625 ziehen wollen. Wenn wir dies also machen wollen, schreiben wir diese Zahl gemäß ihren Stellen. Sie sieht so aus: 5625. Es sind also an der ersten Stelle 5 und an der zweiten 2, die 20 bedeuten. An der dritten sind 6, die 600 bedeuten, und an der vierten 5, die 5000 bedeuten. Das Verfahren aber geht an der dritten Stelle vor sich, die vor der letzten Stelle ist. Und wir setzen unter derselben Stelle etwas, das, wenn wir es mit sich selbst multiplizieren, die darüber stehende Zahl, nämlich 56, aufbraucht oder, wenn es mit sich multipliziert wird, ihr am nächsten ist. Keine Zahl aber, die mehr als 7 ist, macht dies möglich. Wir multiplizieren also 7 mit sich selbst, und es ergeben sich 49. Wenn wir diese von der darüber stehenden Zahl, d.h. von 56, subtrahieren, bleiben an der zweiten Stelle 7 übrig. Danach verdoppeln wir die unten stehende 7 an ihrem Platz, und es entsteht die Eins unter der vierten Stelle, an der die 5 stand, und an ihrem Platz die 4. Wir verschieben also diese Zahl um eine Stelle nach rechts, und es entstehen 4 unter der Stelle der 2 und 1 unter der 7. Wir setzen wieder vor die 4 die 1 und unter die erste Stelle in ihrer Reihe, d.h. unter die 5, etwas, d.h. die 5, die, wenn wir sie mit 1 multiplizieren, später mit 4 und dann mit sich selbst, die darüber stehende Zahl, d.h. 725, aufbraucht. Wenn wir dies mit der 1 multiplizieren, die unter der 7 steht, und es von der darüber

MS N

- multiplicavimus eadem v in IIII^{or}, et facta sunt xx, que cum minuissemus de superiori
 numero, qui est CCXXV, remanserunt xxv. Deinde multiplicavimus v in semet ipso, et
 facta sunt xxv, que cum minuissemus de superiori numero, que sunt xxv, abierant,
 1395 et nichil remansit. Mediavimus ergo illud, quod prius dupplicaveramus, scilicet XIII, et
 facta sunt VII in loco IIII^{or}, et annullata est differentia unius. Exieruntque nobis
 LXXV, et hec est radix certissima illius numeri, qui fuit v milia DCXXV. Et si aliquid
 remansisset infra hec, esset pars de septuaginta v duplicatis, que sunt CL, vel par.
 (16.2) Si autem extraxeris radicem alicuius numeri et remanserint in eo circuli, ante
 1400 quos sit numerus et post quos nullus sit, tunc, si volueris, duplica ipsam differentiam,
 ad quam pervenisti, et remove eam ad circulum. Postea addes, si volueris, sub eo
 aliquid, quod, cum multiplicaveris in prima differentia, quam duplicasti primum, et
 in semetipso, consumat quod fuerit supra se, et nullus numerus est supra se. Pones
 igitur in loco eius, si volueris, circulum, quia circulus multiplicatus in quolibet numero
 1405 circulus est, et in similitudine sui similiter est circulus. Cum igitur dupplicaveris eum,
 id est circulum, nichil aliud erit nisi circulus. Post hec mutabis eum similiter una
 differentia, donec finiant circuli omnes differentias. (16.3) Si vero volueris aliter hoc
 facere, accipe medietatem circulorum, qui remanserint, et scribe eos sub differentiis,
 quas duplicasti, in ordine scilicet earum versus dexteram. Habebit quod exit de circulis
 1410 paribus, et hec est abbreviatio numeri. Ordo autem operis est, quod diximus primum.
 Cuius exemplar est, quod, cum voluissemus extrahere radicem (x) milium, posuimus ea
 in quinque differentiis, in IIII^{or} scilicet circulo(s) et quinta unum, et posuimus sub ultima
 differentia aliquid, quod cum multiplicarem in semetipso, consumpsit superiorem
 numerum. Qui non substituit nisi unum. Quod cum multiplicarem in seipso, fuit
 1415 unum. Minuimus eum de superiori numero, qui est unum, et nichil numeri remansit, sed
 remanserunt IIII^{or} circuli. Quorum medietatem accepimus, qui sunt duo, et posuimus
 eos infra unum versus dexteram, in ordine scilicet unius, et factum est centum, id est,
 exierunt centum, quod est radix x milium. Hec est abbreviatio. Esset autem opus,
 si duplicarem unum in loco suo. Post hec mutarem illud una differentia versus
 1420 dexteram, secundum quod fecimus in ceteris, et sic exiret nobis, postquam mediarem,
 id est, postquam auferremus duplicitatem quam fecimus, centum. Hoc est igitur opus
 radicis, si fuerit numero certa radix.

1393 et *superscr.* N 1395 XIII *corr.* N ex xiii 1407 finiant *corr.* N ex stant vel fiant

stehenden Zahl subtrahieren, so bleiben 2 übrig. Ebenso multiplizieren wir dieselbe 5 mit 4, und es entstehen 20. Wenn wir sie von der darüber stehenden Zahl, nämlich 225, subtrahieren, bleiben 25 übrig. Dann multiplizieren wir 5 mit sich selbst, und es entstehen 25. Wenn wir sie von der darüber stehenden Zahl, nämlich 25, subtrahieren, so verschwinden sie, und nichts bleibt übrig. Wir halbieren also das, was wir zuvor verdoppelt haben, nämlich 14, und es entstehen 7 am Platz der 4, und die Stelle der 1 ist zu nichts gemacht. Und es ergeben sich für uns 75, und dies ist die ganz genaue Wurzel dieser Zahl, die 5625 war. Und wenn etwas unterhalb davon übrig geblieben wäre, so wäre es ein Teil von den verdoppelten 75, nämlich von 150, oder (ihnen) gleich.

(16.2) Wenn du aber die Wurzel aus irgendeiner Zahl ziehen willst und in ihr Kreise übrig bleiben, vor denen eine Zahl ist und nach denen keine ist, dann verdopple, wenn du es willst, die Stelle selbst, zu der du gelangt bist, und bewege sie zu einem Kreis. Dann füge, wenn du es willst, unter ihm etwas hinzu, das, wenn du es multiplizierst mit der ersten Stelle, die du zuerst verdoppelt hast, und mit sich selbst, das, was über ihm ist, aufbraucht. Und es ist keine Zahl über ihm. Setze also an seinen Platz, wenn du willst, einen Kreis, weil ein Kreis, wenn er mit einer beliebigen Zahl multipliziert wird, ein Kreis ist, und [wenn] mit sich selbst, ebenfalls ein Kreis. Wenn du ihn, d.h. den Kreis, verdoppelst, wird er nichts anderes sein als ein Kreis. Danach verschiebe ihn in gleicher Weise um eine Stelle, bis die Kreise alle Stellen zu Ende bringen.

(16.3) Wenn du dies aber anders machen willst, so nimm die Hälfte der Kreise, die übrig geblieben sind, und schreibe sie unter die Stellen, die du verdoppelt hast, und zwar in der Zeile der (Stellen) nach rechts. Sie wird das haben, was sich an geraden Kreisen ergibt. Und dies ist eine Abkürzung der Rechenweise. Die Anordnung des Verfahrens ist aber das, was wir zuerst gesagt haben. Ein Beispiel dafür: Wenn wir die Wurzel aus 10000 ziehen wollen, so schreiben wir sie mit 5 Stellen, nämlich an 4 (Stellen) Kreise und an der fünften die Eins. Und wir setzen unter die letzte Stelle etwas, das, wenn wir es mit sich selbst multiplizieren, die darüber stehende Zahl verbraucht. Diese erträgt nichts außer der Eins. Wenn man sie mit sich multipliziert, ist es Eins. Wir subtrahieren sie von der darüber stehenden Zahl, die Eins ist, und nichts an Zahl bleibt übrig. Aber es bleiben 4 Kreise übrig. Von ihnen nehmen wir die Hälfte, also 2, und setzen sie unterhalb der 1 nach rechts, nämlich in der Zeile der 1, und es entstehen 100, d.h., 100 ergeben sich; das ist die Wurzel von 10000. Dies ist eine Abkürzung. Denn das Verfahren wäre, wenn wir die Eins an ihrem Platz verdoppelten. Danach würden wir jenes um eine Stelle nach rechts verschieben gemäß dem, was wir bei den übrigen (Zahlen) gemacht haben, und so würde sich für uns, nachdem wir es halbiert hätten, d.h., nachdem wir die Verdopplung beseitigt hätten, die wir gemacht haben, 100 ergeben. Das ist also das Verfahren der Wurzel, wenn eine Zahl eine genaue Wurzel hat.

* * *

MS N

(17) *Item in radice fractionum capitulum.*

- (17.1) Cum volueris extrahere radicem fractionum aut integri numeri cum fractionibus, redde numerum et fractionem ex genere ultime differentie. Quod si fuerit ipsa differentia que habeat radicem, extrahe radicem eius secundum quod prediximus in opere radice, et scito, ex quali differentia sit. Post hec sublevabis eam ad hoc, quod poterit sublevari supra differentiam suam, et quod fuerit, ipsa erit radix eorum, que volueris. Et similiter si volueris extrahere radicem alicuius numeri differentie, que |
 1425 caret radice, et volueris sublevare eum, minue eum, id est, verte eum, donec reddas eum ex differentia, que habet radicem. Et quanto plus minueris eum, tanto magis erit quod exierit de radice propius veritati. Post hec accipe radicem eius, postquam reduxeris eum ad hoc quod volueris, et scito, ex qua differentia sit. Postea sublevabis eum ad differentiam suam. (17.2) Cuius rei exemplar est, quod, cum voluissemus extrahere radicem duorum, vertimus duo in secunda, et facta sunt VII milia et ducenta secunda. Et si redderemus duo quarta vel sexta, opus esset subtilius. Post hec extraximus VII milium radicem et ducentorum secundorum, et fuit, quod exivit de radice, LXXX III^{or} minuta et fractio. Quod cum sublevaremus ad numerum integrum, fuit unum et [s.] XXIII partes de LX, et ipse sunt minuta, et fractio modica. Erit hoc prope veritatem eius. (17.3) Quod si volueris extrahere radicem duorum et tercie unius atque unius partis de XIII, pone terciam et partem de XIII ex uno genere, hoc est, multiplica XIII in tribus, et erunt XXXIX. Eritque eis tercia pars et una pars de XIII. Pone itaque duos et terciam et partem de XIII unius generis, et erit unum ex eis XXXIX, et erunt duo LXXVIII, et erit tercia pars de XXXIX XIII, tredecima pars est III. Addidimus ergo hoc
 1435 super LXXVIII, et fuerunt XCIII. Hec est prima differentia fractionum in ista differentia, et est ex genere minutorum. Post hec multiplica XCIII in XXXIX, donec minuas ea bis, et reddis ex genere secundorum, que sunt tria milia et DCLXVI. Extrahe itaque radicem eorum, sicut prediximus, et exhibunt LX et modica fractio. Et hec LX sunt ex genere unius, id est unius divisionis, que est XXXIX, que est prima differentia, et est ex genere minutorum. Eruntque hec LX unum et XX^{ma} una pars de XXXIX et res modica. Et
 1450 hec est radix, quam voluisti. Et si hoc minueres III differentiiis, tunc multiplicares tria milia DCLXVI in XXXIX bis, essetque quod exiret ex genere quartanorum, et esset radix illius ex genere unius eorum XXXIX, hoc est duo milia et CCCLXI, et est ex affinitate secundorum. Et si hoc faceres, esset, quod exiret de radice, subtilius et propius veritati. Similiter fac de minutis et secundis, et quintis ac septimis. Et de quintis et septimis minue ea semper, id est, vertes ea semper in inferiora, ad hoc quod volueris ex differentiis de his que habent radicem. Post hec accipe radicem eius quo pervenerit, et scito, ex qua differentia sit, ac subleva eam ad hoc quod sublevari poterit ex differentiis.

24r

1423 *inscr. rubro colore scr.* N 1445 XCIII] lxiii. N 1446 XCIII] lxiii. N 1450 LX *corr.* N ex xlx. 1453 duo milia et CCCLXI] mille. d. et xxi. N

⟨17⟩ *Ebenso ein Kapitel über die Wurzel von Brüchen*

⟨17.1⟩ Wenn du die Wurzel aus Brüchen oder aus einer ganzen Zahl mit Brüchen ziehen willst, so mache die Zahl und den Bruch von der Art der letzten Stelle. Wenn das nun eine Stelle ist, die eine Wurzel hat, so ziehe die Wurzel daraus gemäß dem, was wir vorher beim Verfahren der Wurzel gesagt haben. Und merke (dir), von welcher Stelle sie ist. Danach hebe sie zu dem, was über seine Stelle gehoben werden kann, und was es ist, das ist die Wurzel von dem, was du willst. Und in ähnlicher Weise, wenn du die Wurzel irgendeiner Zahl aus einer Stelle, die keine Wurzel hat, ziehen willst und wenn du sie heben willst, so verringere sie, d.h., verwandle sie, bis du sie zu einer Stelle machst, die eine Wurzel hat. Und je mehr du sie verringerst, desto näher wird das, was an Wurzel herauskommt, an der Wahrheit sein. Dann nimm die Wurzel davon, nachdem du sie auf das zurückgeführt hast, was du willst, und merke dir, von welcher Stelle sie ist. Danach hebe sie zu ihrer Stelle.

⟨17.2⟩ Ein Beispiel dafür ist: Wenn wir die Wurzel aus 2 ziehen wollen, so verwandeln wir 2 in Sekunden, und es entstehen 7200 Sekunden. Und wenn wir 2 zu Quarten oder Sexten machen würden, so wäre das Verfahren genauer. Danach ziehen wir die Wurzel aus 7200 Sekunden, und das, was an Wurzel herauskommt, sind 84 Minuten und ein Bruch. Wenn wir das zu einer ganzen Zahl heben, so ist es die Eins und 24 Teile von 60, und das sind Minuten, und ein mäßiger Bruch. Das wird seinem wahren (Wert) nahe kommen.

⟨17.3⟩ Wenn du nun die Wurzel ziehen willst aus 2 und einem Drittel von 1 und einem Teil von 13, so schreibe das Drittel und den Teil von 13 von einer Art, d.h., multipliziere 13 mit 3, und es sind 39. Und davon wird es der dritte Teil und ein Teil von 13 sein. Schreibe nun 2 und ein Drittel und einen Teil von 13 von einer Art, und die Eins wird 39 von ihnen sein und 2 78 (Teile), und der dritte Teil von 39 wird 13 sein; der 13. Teil ist 3. Wir addieren dies also zu 78, und es sind 94. Dies ist die erste Stelle der Brüche an jener Stelle, und sie ist von der Art der Minuten. Danach multipliziere 94 mit 39, bis du sie zweimal verringerst, und mache sie von der Art der Sekunden; davon sind es 3666. Ziehe also die Wurzel daraus, wie wir es vorher gesagt haben, und es werden sich 60 und ein mäßiger Bruch ergeben. Und diese 60 sind von der Art der Eins, d.h. der Teilung der Eins, die 39 ist; sie ist die erste Stelle, und sie ist von der Art der Minuten. Und diese 60 werden eine Eins sein und der 21. Teil von 39 und eine mäßige Sache. Und dies ist die Wurzel, die du gesucht hast. Und wenn du dies um 4 Stellen verringern würdest, dann würdest du 3666 mit 39 zweimal multiplizieren, und das, was sich ergäbe, wäre von der Art der Quarten, und die Wurzel daraus wäre von der Art eines dieser 39, d.h. 2361, und es ist von der Verwandtschaft der Sekunden. Und wenn du dies machtest, so wäre das, was an Wurzel herauskäme, genauer und näher an der Wahrheit. Ähnlich mache es bei Minuten und Sekunden und bei Quinten und bei Septimen. Und bei Quinten und Septimen verringere sie immer, d.h., verwandle sie immer in die niedrigeren (Stellen), zu dem, was du willst an Stellen von denen, die eine Wurzel haben. Danach nimm die Wurzel aus der (Zahl), zu der es gelangt ist. Und merke dir, von welcher Stelle sie ist. Und hebe sie zu derjenigen von den Stellen, die gehoben werden kann.

* * *

MS N

1460 <18> *Item aliud capitulum abbreviatum de radice, quod non est ex opere Indorum, sed ego extraxi illud secundum quod constituerunt Indi. Est autem levius opere Indorum atque subtilius.*

Cum volueris extrahere radicem alicuius numeri, pone ante ipsum numerum per differentias incipiens a parte dextera tot circulos, quot volueris. Sed observa tamen, ut sint pares, et pone secundum quod volueris, id est, pone duos circulos, si volueris, vel
 1465 quatuor vel VI. Et quanto plus fuerint circuli, postquam fuerint pares, tanto subtilius erit hoc, quod exiet de radice. Post hec extrahe radicem eiusdem numeri cum circulis quos addidisti, et quod exierit de integro numero mediato, serva illud. Et si aliquid remanserit superfluum, proice illud et non cures de eo. Et scito tunc, quia numerus cuius radicem voluisti extrahere sit surdus, id est, carens radice. Non enim est de illis,
 1470 qui habent radicem. Si vero nichil remanserit, erit radix certissima absque fractione. Post hec numera a parte dextera a prima, scilicet differentiarum certissime radices, simile dimidii circulorum quos addidisti, et accipe residuum et pone id seorsum ac minue id de loco suo. Et quod fuerit ipsum erit radix. Quod vero remanserit, multiplica in LX, et numera simile dimidii circulorum quos addidisti super numerum, et accipe
 1475 quod residuum fuerit, et pone id seorsum sub numero priori quem minuisti de loco suo, et fac similiter, donec nichil remaneat. Et quicquid remanserit, multiplica in LX, et numera simile dimidii circulorum, et serva illud. Et accipe quod residuum fuerit, et scribe sub numero quem seorsum posuisti, et erunt secunda. Et si aliquid remanserit, iterum multiplicabis illud in LX, quemadmodum fecisti, ac divides illud, quemadmodum
 1480 divisisti, et exhibunt tibi quarta et quinta secundum quod posuisti ex circulis ante numerum.

<19> *Item Capitulum extractionis radicum integri numeri ac fractionum.*

<19.1> Cum volueris extrahere radicem numeri et fractionum vel numeri, ut sunt minuta et secunda vel tertia sive septime partes vel octave vel cetere, redde numerum,
 1485 sive cum integro numero sit fractio sive fuerint fractiones absque numero, ex genere inferioris differentie, que fuerit in eo. | Quod si fuerit de genere, cui radix fuerit, operare per eum. Si vero fuerit de his, qui carent radice, minue eum una differentia, donec sit de his, quibus erit radix, ut sunt secunda et quarta et similia secundorum et similia quartanorum ex fractionibus que referuntur ad minuta, et serva illum. Post hec scribe
 1490 ante eum ex circulis quot volueris de his qui fuerint pares, et extrahe radicem eius qui collectus est [fuerit] secundum quod diximus de opere radicum, et quod exierit de radice ex differentia simile dimidio differentiarum primarum, quas posuisti, antequam adderes super eas circulos. Si autem fuerant secunda, antequam adderes super ea circulos, quod

24v

1459–1461 *inscr. rubro colore scr.* N 1466 *erit*] ad N *et superscr. erit* 1482 *inscr. rubro colore scr.* N 1484 *cetere*] c'. N

(18) *Ebenso ein anderes abgekürztes Kapitel über die Wurzel, das nicht zu dem Verfahren der Inder gehört, sondern ich habe es erarbeitet in Anlehnung an das, was die Inder geschrieben haben. Es ist aber leichter als das Verfahren der Inder und genauer.*

Wenn du die Wurzel einer Zahl ziehen willst, so setze vor die Zahl selbst gemäß ihren Stellen, auf der rechten Seite beginnend, so viele Kreise, wie du willst. Achte jedoch darauf, daß sie gerade sind, und setze sie gemäß dem, was du willst, d.h., setze zwei Kreise, wenn du es willst, oder 4 oder 6. Und je mehr Kreise es sind, sofern sie gerade sind, desto genauer wird das sein, was an Wurzel herauskommt. Danach ziehe die Wurzel aus eben dieser Zahl mit den Kreisen, die du hinzugefügt hast, und was an ganzer halbierter Zahl herauskommt, das behalte. Und wenn etwas übrig bleibt, so wirf es ab und kümmerge dich nicht darum. Und wisse weiter, daß die Zahl, deren Wurzel du ziehen wolltest, taub ist, d.h., keine Wurzel hat. Denn sie gehört nicht zu denen, die eine Wurzel haben. Wenn aber nichts übrig bleibt, so wird es eine ganz genaue Wurzel ohne Bruch sein. Danach zähle von der rechten Seite, d.h. von der ersten Stelle der ganz genauen Wurzel, das, was gleich ist dem Halben der Kreise, die du hinzugefügt hast, und nimm das, was übrig ist, und setze dies für sich und verringere es von seinem Platz. Und das, was sich ergibt, wird die Wurzel sein. Das aber, was übrig bleibt, multipliziere mit 60 und zähle das, was gleich ist dem Halben der Kreise, die du zu der Zahl hinzugefügt hast. Und nimm das, was übrig bleibt, und setze es für sich unter die frühere Zahl, die du von ihrem Platz verringert hast. Und mache es in gleicher Weise, bis nichts übrig bleibt. Und das, was übrig bleibt, multipliziere mit 60 und zähle das, was gleich ist dem Halben der Kreise, und behalte es. Und nimm das, was übrig bleibt, und schreibe es unter die Zahl, die du für sich gesetzt hast, und es werden Sekunden sein. Und wenn etwas übrig bleibt, so multipliziere es wiederum mit 60, wie du es (schon) gemacht hast, und teile es, wie du es (schon) gemacht hast, und es werden für dich Quarten und Quinten herauskommen gemäß dem, was du an Kreisen vor die Zahl gesetzt hast.

* * *

(19) *Ebenso ein Kapitel über das Ausziehen von Wurzeln aus einer ganzen Zahl und Brüchen*

(19.1) Wenn du die Wurzel aus einer Zahl und Brüchen oder aus einer Zahl ziehen willst, etwa Minuten und Sekunden oder Terzen oder Siebtel oder Achtel usw., so mache die Zahl, ob es ein Bruch mit einer ganzen Zahl ist oder Brüche ohne Zahl, von der Art der niedrigsten Stelle, die in ihr ist. Wenn sie nun von einer Art ist, die eine Wurzel hat, so arbeite mit ihr. Wenn sie aber zu denen gehört, die keine Wurzel haben, so verringere sie um eine Stelle, bis sie zu denen gehört, die eine Wurzel haben, etwa Sekunden, Quarten und ähnliche Teile von Sekunden und ähnliche Teile von Quarten von Brüchen, die sich auf Minuten beziehen, und behalte sie. Danach schreibe vor ihr so viele Kreise, wie du willst, von denen, die gerade sind, und ziehe die Wurzel aus der (Zahl), die zusammengefügt wurde, gemäß dem, was wir im Verfahren über die Wurzeln gesagt haben. Und das, was an Wurzel herauskommt aus der Stelle, ist dem Halben der ersten Stellen gleich, die du aufgestellt hast, bevor du zu ihnen Kreise hinzufügtest. Wenn es aber Sekunden waren, bevor du zu ihnen Kreise hinzufügtest,

MS N

- exierit de radice erunt minuta. Et si fuerant sexta, erit radix tertia. Si vero fuerant
 1495 quinte quintarum, erit radix que exierit quinte. Et si fuerint septime septimarum, erit
 radix que exierit septime. Post hec numera ab initio differentiarum quid exivit tibi de
 radice simile dimidii circularum, quos addidisti primum, et accipe radicem eius, quod
 residuum fuerit, secundum quod diximus in precedentibus, et scribe eam seorsum, quia
 est ex eodem genere, quod exivit tibi de radice. Deinde multiplica residuum in LX et
 1500 divide, quemadmodum divisisti, et numera simile dimidii circularum, quos addidisti, et
 accipe superfluum et scribe illud sub hac differentia. Et similiter operare, donec finiatur
 numerus, sicut diximus. Postea si fuerit in prima re que exivit ex differentiis plus LX,
 sublevabis illud ad hoc, quod poterit sublevari ex differentiis que sunt gradus, aut ad
 id, quod est infra hos. Et similiter facies in universis, que necessaria fuerint ex radice
 1505 fractionum sive integri numeri, cum operatus fueris per hoc opus, quia subtilius est et
 levius. (19.2) Cuius rei exemplar est, quod, cum vellemus extrahere radicem duorum,
 posuimus ante eos sex circulos. Et si poneremus IIII^{or} vel II^{os} aut quot nobis visum
 fuisset, posset fieri hoc. Item si poneremus VIII vel X aut XII vel plures, tantum (quod)
 essent pares, esset subtilius ad hoc quod vellemus. Cum ergo constitueremus ante duo
 1510 VI circulos, facte sunt VII differentie, que sunt bis mille milium. Accepimus ergo radicem
 eius, et fuit, postquam mediata est, mille CCCXIII, et remansit modicum superfluum,
 quod proiecimus, et nobis non fuerit cura de eo. Post hec numeravimus ab initio dif-
 ferentiarum simile dimidii circularum quos addideramus, id est tria, et residuum fuit
 unum, quod posuimus seorsum, et delevimus eum de loco suo. Et hoc est quod exivit
 1515 nobis ex integro numero. Post hec multiplicavimus residuum, que sunt CCCXIII, in
 LX, et facta sunt XXIII milia DCCCX(L). Iterum minuimus ab initio differentiarum quasi
 dimidium circularum, qui fuerunt tres, et accepimus superfluum, quod est XXIII, et
 posuimus illud sub uno, factaque sunt XXIII minuta, et remanserunt octingenta X(L).
 Que multiplicavimus in LX, et facta sunt quinquaginta milia et quadringenta. Numeravimus
 1520 ab initio differentiarum III^a et accepimus residuum, quod est L, que posuimus sub
 minutis, et facta sunt L secunda, et remanserunt quadringenta. Que multiplicavimus
 in LX, et facta sunt XXIII milia. Numeravimus quoque tres differentias et accepimus
 residuum et posuimus illud sub secundis, et facta sunt XXIII tertia, et non remansit
 nobis aliquid ex numero quem multiplicaremus in LX, sed remanserunt nobis circuli.
 1525 Exivit ergo radix duorum per hoc opus unus gradus et XXIII minuta et L secunda ac
 XXIII tertia.

Finit liber cum dei adiutorio et eius laude.

1516 initio] ī initio N 1525 XXIII corr. N ex ? 1527 subscr. rubro colore scr. N

wird das, was an Wurzel herauskommt, Minuten sein. Und wenn es Sexten waren, so wird die Wurzel Terzen sein. Wenn es aber Fünftel von Fünfteln waren, wird die Wurzel, die herauskommt, Fünftel sein. Und wenn es Siebtel von Siebteln waren, wird die Wurzel, die herauskommt, Siebtel sein. Danach zähle vom Anfang der Stellen das, was für dich an Wurzel herausgekommen ist und was gleich ist dem Halben der Kreise, die du zuerst hinzugefügt hast, und nimm die Wurzel von dem, was übrig geblieben ist, gemäß dem, was wir vorangehend gesagt haben, und schreibe sie für sich, weil sie von derselben Wurzelart ist, die für dich herausgekommen ist. Dann multipliziere das, was übrig ist, mit 60 und teile, wie du es (vorher) geteilt hast, und zähle das, was gleich ist dem Halben der Kreise, die du hinzugefügt hast, und nimm das, was übrig ist, und schreibe es unter diese Stelle. Und arbeite in gleicher Weise, bis die Zahl so zu Ende gebracht wird, wie wir es gesagt haben. Später hebe, wenn bei der ersten Stelle, die herausgekommen ist, mehr als 60 (entstanden) sind, dies zu dem, was an Stellen, die Grade sind, gehoben werden kann, oder zu dem, was unterhalb von diesen (Graden) ist. Und mache es in gleicher Weise bei allem, was notwendig ist an Wurzel von Brüchen oder ganzer Zahl, wenn du nach diesem Verfahren arbeitest, weil es genauer und leichter ist.

(19.2) Ein Beispiel dafür ist: Wenn wir die Wurzel aus 2 ziehen wollen, setzen wir vor sie sechs Kreise. Und wenn wir 4 oder 2 oder, wie viele uns (gut) scheint, setzen würden, so könnte (auch) dies geschehen. Ebenso würde, wenn wir 8 oder 10 oder 12 oder mehr setzten, wenn sie nur gerade sind, es genauer sein für das, was wir wollen. Wenn wir also vor der 2 sechs Kreise schreiben, entstehen 7 Stellen, die zweitausend Tausend bedeuten. Wir nehmen also die Wurzel davon, und sie ist, nachdem sie halbiert wurde, 1414, und es bleibt ein mäßiger Rest; den werfen wir ab, und wir kümmern uns nicht darum. Danach zählen wir vom Anfang der Stellen etwas, das gleich ist dem Halben der Kreise, die wir hinzugefügt haben, d.h. 3, und das, was übrig ist, ist die Eins. Diese setzen wir für sich, und wir tilgen sie an ihrem Platz. Und das ist es, was für uns herauskommt an ganzer Zahl. Danach multiplizieren wir den Rest, also 414, mit 60, und es entstehen 24840. Wiederum verringern wir vom Anfang der Stellen (an) gleichsam das Halbe der Kreise, also 3, und wir nehmen das, was übrig ist, also 24, und setzen es unter die Eins, und es werden 24 Minuten, und es bleiben 840 übrig. Diese multiplizieren wir mit 60, und es werden 50400. Wir zählen vom Anfang der Stellen 3 und nehmen den Rest, also 50. Diese setzen wir unter die Minuten, und es werden 50 Sekunden, und es bleiben 400 übrig. Diese multiplizieren wir mit 60, und es werden 24000. Wir zählen auch drei Stellen und nehmen den Rest und setzen ihn unter die Sekunden, und es werden 24 Terzen, und es bleibt für uns nichts von der Zahl, die wir mit 60 multiplizierten, sondern es bleiben für uns Kreise. Es ergibt sich also als Wurzel aus 2 durch dieses Verfahren 1 Grad und 24 Minuten und 50 Sekunden und 24 Terzen.

* * *

Zu Ende ist das Buch mit der Hilfe Gottes und seinem Lob.

KAPITEL 6

KOMMENTAR

In diesem Abschnitt wird der Inhalt der einzelnen Kapitel von **DA** kommentiert, d.h. der lateinischen Bearbeitung der arithmetischen Schrift von al-Ḥwārizmī, so wie sie in den beiden Handschriften **N** und **C** vorliegt. Es wird darauf hingewiesen, wie die entsprechenden Themen in anderen lateinischen Texten aus dem 12. Jahrhundert behandelt werden, insbesondere also in den Schriften **LY** und **LA/LP**, die wie **DA** auf die arithmetische Abhandlung von al-Ḥwārizmī zurückgehen. Ausführlich auf Parallelen oder Unterschiede zu späteren arabischen Abhandlungen einzugehen, erübrigte sich, weil Saidan im Abschnitt „Remarks and Comparative Studies“ die arithmetischen Schriften der Araber detailliert analysiert hat [Saidan 1978, S.345-488].

* * *

Kapitel 1: Schreibweise der Zahlen

DA: N, f.17r-18r; C, f.104r-106r (Vogel 9,1-17,18; Allard 1,1-6,33)

Die Überschrift lautet in der Handschrift **N**: *Incipit arismethica Alchoarismi*; in **C** fehlt sie. In den arabischen bio- und bibliographischen Quellen wird die arithmetische Schrift von al-Ḥwārizmī nicht direkt unter seinen Werken genannt. Ausgehend von der lateinischen Fassung in der Handschrift **C**, haben frühere Wissenschaftshistoriker Spekulationen über den arabischen Titel angestellt. Sie stützten sich dabei vor allem auf die Passage „... arismethicam, id est numerum tam maximum quam exiguum et quicquid in eo est ex multiplicatione et divisione, collectione quoque ac dispersione, et cetera“ am Anfang der Schrift: Ruska [1917, S.18] argumentierte, daß *collectio* und *dispersio* die Übersetzungen von *ǧamʿ* und *tafrīq* sind, die im Zusammenhang mit *multiplicatio* und *divisio* nur „Addition“ und „Subtraktion“ bedeuten können, und vermutete als Titel *Kitāb al-ǧamʿ wa-t-tafrīq bi-ḥisāb al-Hind*. Juschekewitschs Ansicht [1964, S.24-25], der Titel habe *Kitāb ḥisāb al-Hind* gelautet, wurde von Sezgin zurückgewiesen [1974, S.238].

Die von allen bisherigen Autoren geäußerte Ansicht, die arithmetische Schrift von al-Ḥwārizmī werde nicht im *Fihrist* erwähnt, trifft nicht zu: Zwar wird weder seine „Arithmetik“ noch seine „Algebra“ im Haupteintrag genannt [Flügel 1871-1872, 1, S.274,23-27], es werden aber Kommentare anderer arabischer Autoren zu diesen Werken erwähnt. Die „Algebra“ kommentierten z.B. im 10. Jahrhundert aṣ-Ṣaidanānī¹, Sinān ibn al-Faṭḥ² und Abū l-Wafā³. Aṣ-Ṣaidanānī schrieb auch einen Kommentar zu al-Ḥwārizmīs arithmetischer Schrift mit dem Titel: *Šarḥ kitābihī* (scil. *Muḥammad b. Mūsā al-Ḥwārizmī*) *fī l-ǧamʿ wa-t-tafrīq*⁴ („Kommentar zu seinem (scil. al-Ḥwārizmīs)

¹[Flügel 1871-1872, 1, S.280,12-13]; siehe auch [Sezgin 1974, S.301].

²[Flügel 1871-1872, 1, S.281,21]; siehe auch [Sezgin 1974, S.301].

³[Flügel 1871-1872, 1, S.283,14]; siehe auch [Sezgin 1974, S.325].

⁴So die Angabe im *Fihrist* [Flügel 1871-1872, 1, S.280,13]; siehe auch [Sezgin 1974, S.301].

Buch über al-ğam‘ und at-tafrīq“). Auch wenn der Titel im *Fihrist* nicht vollständig sein muß, ist dies ein gewichtiges Indiz dafür, daß der Titel von al-Ḥwārizmī arithmetischer Schrift „Buch über al-ğam‘ und at-tafrīq“ gelautet haben dürfte.

Das Incipit in N hilft bei der Frage nach dem arabischen Titel nicht viel weiter: es ist nicht sehr wahrscheinlich, daß es die Übersetzung eines arabischen Titels ist, weil der Ausdruck *arismethica* (der noch zweimal am Anfang der Schrift, nämlich in Kapitel 1.1 und 1.3, vorkommt) eher eine Bezeichnung ist, die der lateinische Bearbeiter wählte.

(1.1) Das erste Kapitel der Schrift, das als einziges keine Überschrift trägt, beschäftigt sich mit der Schreibweise der neuen Zahlen. Die Schrift beginnt mit einer Lobpreisung Gottes, die ihren arabischen Ursprung deutlich erkennen läßt. Auch die einleitenden Worte sind typisch arabisch: *Dixit Alchoarizmi* ist die direkte Nachahmung von *qāla al-Ḥwārizmī*. Dann wird das Ziel des Traktats aufgezeigt, nämlich: „die Rechenweise (*numerus*) der Inder mit Hilfe von 9 Symbolen (*littere*)“ zu erklären, „mit denen sie jede einzelne Zahl um der Leichtigkeit und abgekürzten Form willen darstellen“. Der Begriff *numerus* bezeichnet hier „Rechenweise“ (arab.: *ḥisāb*); derselbe lateinische Ausdruck wird im weiteren Verlauf auch für „Zahl“ verwendet (arab.: *‘adad*). Die *littere* sind natürlich die indisch-arabischen Ziffern, auf deren Formen im Kapitel 1.3 eingegangen wird. Sie dienen dazu, die Operationen (*opus*, arab.: *‘amal*) der Arithmetik zu erleichtern. Der Begriff *arismethica* wird mit Inhalt gefüllt, indem man auf die Schreibweise von sehr großen und kleinen Zahlen hinweist und auf das Rechnen mit ihnen, nämlich die Multiplikation und Division, Addition (*collectio*) und Subtraktion (*dispersio*). Es fällt auf, daß die Multiplikation und Division vor der Addition und Subtraktion genannt werden; im weiteren Verlauf der Schrift ist es umgekehrt (Addition und Subtraktion in Kapitel 2, Multiplikation und Division in Kapitel 4 bzw. 6). Der Begriff *dispersio* wird nur hier benutzt; in Kapitel 2 werden die Addition bzw. Subtraktion als *augmentatio* bzw. *diminutio* bezeichnet.

Zwischen den Texten in N und in C gibt es fast keine Unterschiede. N schreibt *alchoarizmi* (in der Überschrift: *alchoarismi*), C hat *algorizmi*. Die Schreibweise *-choa-* steht vermutlich der eigentlichen Übersetzung noch näher, während *-go-* bereits eine vulgarisierte lateinische Form reflektiert. Bei den lateinischen Übersetzungen der „Algebra“ von al-Ḥwārizmī schreibt Gerhard von Cremona *Alchoarismi* [Hughes 1986, S.233,1], während Robert von Chester *Algaurizmi* hat [Hughes 1989, S.29,5]. – Für „Arithmetik“ schreibt N *arismethica*, C *arithmetica*.

Die einleitenden Abschnitte in den etwas späteren Schriften LY und LA/LP, die beide auf der lateinischen Übersetzung der arithmetischen Schrift von al-Ḥwārizmī beruhen, sind viel weitschweifiger und lassen den arabischen Ursprung kaum noch erkennen. In LY (S.23,1-25,9)⁵ haben nur die letzten vier Zeilen eine Entsprechung im Text von DA; dort werden allerdings „Addition“ und „Subtraktion“ durch *augmentatio* und *diminutio* bezeichnet⁶. Das Anfangskapitel in LA/LP (S.62,1-63,9) geht vor allem

⁵Die Seitenangaben in LY und in LA/LP beziehen sich hier und im folgenden stets auf die Ausgabe [Allard 1992], d.h. bei LY auf die Seiten 23-61 und bei LA/LP auf die Seiten 62-224. Wenn nicht anders vermerkt, beziehen sich die Zeilenzahlen bei zweispaltigen Texten auf die linke Spalte, d.h. bei LY auf die Fassung LY I und bei LA/LP auf den Text LA.

⁶*Oportet itaque eorundem multiplicationem et diuisionem, augmentationem quoque ac diminutionem, tam in maximis quam in minimis integris quam minutiis indagantem subtili calculatione rimari* (S.25,6-9).

auf die Bedeutung der Arithmetik innerhalb der vier Disziplinen der *mathesis*, also des Quadriviums, ein; in diesem Zusammenhang müsse man wissen, was *digiti*, *articuli* und *numeri compositi* seien und auch, wie die vier Grundrechenarten und das Wurzelziehen funktioniere. Anders als in LA/LP, werden hier Addition und Subtraktion vor der Multiplikation und Division genannt; die Addition wird mit *agregatio* bezeichnet⁷.

⟨1.2⟩ Auch der nächste Abschnitt beginnt in DA wieder mit: *Dixit Alchoarizmi*. Der Autor wiederholt seine Absicht, er wolle das Verfahren der Inder mit Hilfe der Ziffern darstellen, um das Schreiben der Zahlen und das Operieren mit ihnen leichter zu machen.

Die Texte von N und C stimmen fast aufs Wort überein. Statt *paruit* (N) hat C *patuit*; beides ist möglich, wenn *paruit* im Sinne von *apparuit* aufgefaßt wird. – Eine entsprechende Formulierung ist weder in LY noch in LA/LP vorhanden.

⟨1.3⟩ Der folgende Abschnitt behandelt zunächst die Darstellung der Formen der neun Ziffern. In C ist an dieser Stelle und auch vier Zeilen später der Platz dafür freigelassen worden; ebenso fehlt die lange Zahl am Ende des Kapitels 1. In späteren Rechnungen kommen nur die Ziffern 1, 2, 3, 5 und 0 vor⁸; über die Gestalt der übrigen Ziffern in C lassen sich keine Aussagen machen. In N werden zwar bei der Aufzählung der 9 Ziffern zu Beginn dieses Abschnitts nur die Ziffern 9 und 1 geschrieben, kurz danach aber erscheinen alle 9 Ziffern und später auch die Null, so daß wir über die Ziffernformen in N vollständig informiert sind. Die Formen der 1, 2 und 3 in N ähneln sehr stark den Ziffern im Codex Vigilanus aus dem Jahre 976, der ältesten bekannten Darstellung der indisch-arabischen Ziffern im Westen⁹; die 4 erinnert an die Form auf den Rechenbrettern in der Tradition Gerberts¹⁰, ebenso wie die 5 bis 9, die in ähnlicher Weise auch in den Handschriften von LY und LA/LP vorkommen¹¹. Die Null ist ein Kreis, der etwas kleiner als die übrigen Ziffern ist. Eine etwas „verzogene“ Form der 4 begegnet uns in der 16stelligen Zahl im Abschnitt 1.8. Es fällt auf, daß die Form der 2 in den Handschriften N und C voneinander abweicht. Alles in allem, ist aber klar, daß die Ziffernformen in N und C der westarabischen Tradition angehören¹².

Es gibt, wie der Verfasser von DA sagt, unter den Leuten Unterschiede in der Schreibweise der Ziffern. Dies könnte schon in al-Ḥwārizmī's arabischem Text gestanden haben. In diesem Fall würde es sich auf Abweichungen der Schreibformen im arabischen Osten beziehen. Auch al-Baġdādī weist auf die abweichende Schreibweise bei der 2, 3 und 8 hin, wobei er die Schreibweise im Osten meint [Saidan 1985, S.33]. Juschkeiwitsch meint dagegen, daß hier auf Unterschiede zwischen den west- und ost-arabischen Ziffernformen oder innerhalb der westarabischen Ziffern angespielt wird¹³.

⁷... *qualiter autem fiant agregationes et diminutiones, multiplicationes et diuisiones, insuper etiam suarum radicum adinventiones* (S.62,26-63,5).

⁸Sie sind abgebildet in [Allard 1992, S.252].

⁹Abgebildet z.B. in [Tropfke 1980, S.67, Zeile 1].

¹⁰Etwa in der Boethius zugeschriebenen sogenannten „Geometrie II“; siehe [Tropfke 1980, S.67, Zeile 2].

¹¹Siehe [Allard 1992, S.252].

¹²Zu den Ziffernformen in arabischen arithmetischen Abhandlungen siehe die Tabelle in [Saidan 1978, S.355].

¹³[Juschkeiwitsch 1964, S.26-27]: „Höchstwahrscheinlich war in der Handschrift der Unterschied zwischen den europäischen, den westarabischen und den ostarabischen Ziffern oder der innerhalb des Systems der westarabischen Zahlenkennzeichnung gemeint, die in den mauretanischen Ländern ge-“

Im Text heißt es ausdrücklich, daß es Unterschiede bei den Formen des 5., 6., 7., 8. Zeichens (*in figura quinte littere ac VI., VII. quoque et octave*) gibt. Dies wurde bisher so interpretiert, als wenn die 5, 6, 7 und 8 gemeint ist. Da im lateinischen Text aber – gemäß der arabischen Schreibrichtung – die neun Ziffern aufsteigend von rechts nach links geschrieben werden, sind das 5. – 8. Zeichen wohl eher die Ziffern 5, 4, 3 und 2. Dies setzt allerdings voraus, daß die Zählung in westlicher Weise von links nach rechts erfolgte. Eine sichere Entscheidung ist nicht möglich, weil die Ziffern, die unterschiedlich geschrieben wurden, in C fehlen (für sie ist Platz freigeblieben), während in N nicht nur die vier fraglichen Ziffern, sondern irrtümlich alle neun Ziffern niedergeschrieben sind.

Die Schreibweise der Ziffern wird selbstverständlich auch in den von al-Ḥwārizmī abhängigen Traktaten LY und LA/LP behandelt. In LY (S.25,9-17) werden die Formen der neun Ziffern angegeben, ohne daß auf Unterschiede hingewiesen wird, und es wird gesagt, daß mit ihrer Hilfe alle ganzen Zahlen und Brüche dargestellt werden können; außerdem wird schon hier die Null erwähnt. Ferner deutet der Autor an, welchen Wert die Ziffern in den einzelnen Spalten besitzen. In LA/LP ist den Ziffernformen ein etwas längerer Abschnitt gewidmet (S.68,25-69,11). Dort wird auch gesagt, daß es Unterschiede bei den einzelnen Ziffern gibt, insbesondere bei der 7 und bei der 4.

In DA folgt nach den Aussagen über die Ziffernformen ein Abschnitt über das Wesen der Eins. Zunächst verweist der Autor auf seine „Algebra“ (*in libro algebræ et almucabalah, id est restaurationis vel recuperationis*¹⁴ *et oppositionis*), in der er dargestellt habe, daß jede Zahl aus der Eins zusammengesetzt ist¹⁵. Dieses Zitat belegt ebenso wie zwei spätere (in Kapitel 4.1 und 15), daß die arithmetische Schrift von al-Ḥwārizmī nach seiner algebraischen entstanden ist. Die Aussage selbst entspricht der griechischen Vorstellung vom Zahlbegriff, demzufolge die Eins keine Zahl ist, sondern der Ursprung der Zahl. Dies wird im folgenden näher ausgeführt. Es hat den Anschein, als ob der Rest des Abschnitts 1.3 nicht aus dem Arabischen stammt, sondern ein Zusatz eines späteren Bearbeiters ist. Dieser beruft sich auf „ein anderes Werk über die Arithmetik“ und kehrt erst am Ende des Abschnitts 1.3 mit den Worten: *Redeamus ad librum* zu al-Ḥwārizmīs Werk zurück.

Im Einschub wird nicht nur gesagt, daß die Eins die Wurzel jeder Zahl ist, weil jede Zahl durch sie entsteht; sie kann auch ohne eine Zahl existieren, während die anderen Zahlen der Eins bedürfen. Die Zahl ist eine Ansammlung von Einheiten (*unitatum collectio*). Die Zwei ist eine Verdopplung (*dupplicitas vel geminatio*), die Drei eine Verdreifachung (*triplicatio*) der Eins. Ganz ähnliche Gedanken findet man in der

bräuchlich war.“ – Verschiedene Formen der west- und ostarabischen Ziffern sind z.B. in [Tropfke 1980, S.66, Zeilen 5-9] abgebildet.

¹⁴Die Worte *vel recuperationis* fehlen in C.

¹⁵Die lateinischen Formulierungen in der „Algebra“ lauten: *repperi totum illud numerum fore, omnemque numerum ab uno compositum esse inveni. Unus itaque inter omnem consistit numerum* (Übersetzung von Gerhard von Cremona; [Hughes 1986, S.233,5-7]), bzw. *Considerans enim omne id quo indigent homines, ex numero inueni id totum esse numerum, et inueni nihil aliud esse numerum, nisi quod ex unitatibus componitur. Vnitas ergo est qua vnaqueque res dicitur vna, et vnitas in omni numero reperitur* (Übersetzung von Robert von Chester; [Hughes 1989, S.29,7-10]).

„Arithmetik“ des Boethius¹⁶, so daß der *alius liber* dieses Werk oder eine andere in der Tradition der Pythagoreer stehende Schrift gewesen sein könnte¹⁷.

Die Texte von N und C sind in diesem Abschnitt bis auf Kleinigkeiten identisch.

Ähnliche allgemeine Abschnitte über das Wesen der Eins und den Aufbau der Zahlen findet man auch in LY und in LA/LP. Der Text von LY (S.25,18-26,23) enthält Aussagen wie: *Unitas est qua dicitur omnis res una* und *Numerus est multitudo ex unitatibus composita* und beschäftigt sich außer mit dem Wesen der Eins auch mit geraden und ungeraden Zahlen, mit vollkommenen Zahlen, Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen. In LA/LP (S.63,10-64,5) stehen ganz ähnliche Formulierungen wie in DA, etwa, daß die Eins zur Existenz keiner Zahl bedarf, während jede Zahl aus der Einheit entsteht; so ist die Zwei *unius duplicatio, siue geminatio*, die Drei *unius triplicatio*. Die Formulierung in LA/LP: *Numerus est unitatum collectio* entspricht fast wörtlich dem Text in DA. – Auch im „Salem-Algorithmus“ gibt es ähnliche Formulierungen¹⁸.

(1.4) Es folgt der Hinweis auf die dekadische Struktur der Zahlreihe: Durch Verdoppeln, Verdreifachen, ..., Verneunfachen der Eins entstehen alle Einer. Dann wird die 10 an die Stelle der Eins gesetzt, und durch entsprechendes Vervielfachen der 10 entstehen die Zehner. Dasselbe gilt für die Hunderter, Tausender usw. bis ins Unendliche (*usque ad infinitum numerum*). Der Ausdruck *omne, quod potest dici ex numero* („alles, was an Zahl(en) mit Worten ausgedrückt werden kann“) am Anfang dieses Abschnitts ist ein Arabismus und entspricht arab. *kullu mā yumkinu an yuqāla/yulfaẓa min al-ʿadad*. Alle in Worten ausdrückbaren Zahlen können mit Hilfe der Ziffern 1–9 erfaßt werden: diese erscheinen in den jeweiligen (dezimalen) Stellen, und so läßt sich (unter Benutzung der Null, die hier noch nicht erwähnt wird) mit 1–9 jede beliebig große Zahl schreiben. Al-Ḥwārizmī vermischt hier Sprachliches (die Zahlwörter) mit dem dezimalen Prinzip. Im Arabischen gibt es eigene Zahlwörter für 1 bis 10, 100 und 1000; die übrigen werden aus diesen zusammengesetzt bzw. abgeleitet. – Der Text in N und C weicht nur in Kleinigkeiten voneinander ab.

Denselben Sachverhalt beschreibt al-Ḥwārizmī auch am Anfang seiner „Algebra“ mit ähnlichen Worten¹⁹. In LA/LP (S.64,5-66,21) erfahren wir, daß die Inder die unendliche Menge der Zahlen in Regeln und Grenzen gezwängt (*sub quibusdam regulis et certis limitibus ... coartatur*) und so als *limites* die Eins, 10, 100, 1000, ... und alle weitere Zehnerpotenzen gewählt haben, die dann durch Multiplikation bis 9 die übrigen Zahlen der gleichen Art erzeugen. Die Zahlen, die aus der Eins entstehen, heißen *digiti*, die von der 10, 100, ... erzeugten heißen *articuli*; Zahlen, die aus beiden zusammengesetzt sind, nennt man *compositi*. In LY (S.26,24-27) wird anstelle dieser

¹⁶Z.B.: *Numerus est unitatum collectio, vel quantitatis acervus ex unitatibus profusus* [Friedlein 1867, S.13,11-12]; *Quare constat primam esse unitatem cunctorum, qui sunt in naturali dispositione, numerorum et eam rite totius quamvis prolixae genitricem pluralitatis agnosci* [Friedlein 1867, S.16,23-26].

¹⁷Juschkewitsch [1964, S.27] vermutet, der *alius liber arismetice* sei die „Algebra“ von al-Ḥwārizmī gewesen. Dies ist wenig wahrscheinlich, da es dort (zu Beginn der Schrift) nur sehr kurze Bemerkungen über das Wesen der Eins und den Aufbau der Zahlen aus der Einheit gibt.

¹⁸*Igitur numerus, sicut a sapientibus decribitur, est collectio unitatum. Quid enim aliud sunt duo nisi unitas duplicata? Quid tria nisi unitas triplicata. Sic omnis numerus ab una generatur, ipsa a nullo* [Cantor 1865, S.2].

¹⁹In der Übersetzung von Gerhard von Cremona [Hughes 1986] auf S.233,7-14; in der Übersetzung von Robert von Chester [Hughes 1989] auf S.29,10-19.

klaren und ausführlichen Darstellung nur ganz kurz gesagt, daß es drei Arten (*species*) von Zahlen gibt: die Einer, die Zehner und die aus beiden zusammengesetzten Zahlen.

(1.5) Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen wird jetzt das Stellenwertprinzip erläutert, das die Inder erarbeitet haben (*quod operati sunt Indi*). In diesem Abschnitt werden die zentralen Begriffe der Dezimalstelle und der Null eingeführt. Der Terminus für (Dezimal-)Stelle ist *differentia* („Unterschied“), der in N konsequent gebraucht wird; in C wird daneben (in den Kapiteln 4.1, 7.1, 8.1, 11.2) auch der Ausdruck *mansio* (Lager, Aufenthalt) verwendet. Es ist unklar, welchem arabischen Wort der lateinische Ausdruck *differentia* entspricht; in frühen arabischen Texten findet man entweder *martaba* (pl. *marātib*) oder *rutba*. Dagegen ist der Begriff *mansio* sicherlich eine Übersetzung des arabischen *manzila* (pl. *manāzil*). In den Schriften der Abazisten hatte *differentia* eine andere Bedeutung: dort bezeichnete es die Ergänzung einer Zahl bis zum nächsten vollen Zehner oder Hunderter. Ausgehend von unserem Text, wird das Wort *differentia* in der Folgezeit in den Algorismus-Texten zum Fachausdruck für „Stelle“. Der Begriff *mansio* hat sich dagegen nicht durchgesetzt.

Im Text wird recht ausführlich dargestellt, was Einer, Zehner, Hunderter, Tausender und Zehntausender sind. Das Stellenwertprinzip besteht darin, daß die Eins, wenn sie an die nächsthöhere Stelle gesetzt wird, 10 bedeutet und umgekehrt. Dieser Sachverhalt wird in N und C verschieden ausgedrückt: In N wird gesagt, daß die Eins an der „früheren“ (*priori*; = „ersten“) Stelle 1 und an der „späteren“ (*posteriori*; = „zweiten“) Stelle 10 bedeutet, während es in C heißt, daß die Eins, die an der „höheren“ (*superiori*) Stelle war, an der „niedrigeren, die vor ihr ist“ (*inferiori que est ante ipsam*) 10 bedeutet. An der Formulierung in N spiegelt sich die arabische Praxis, von rechts nach links zu schreiben, während in C an die lateinische Schreibrichtung von links nach rechts gedacht wird: bei der 10 steht die 1 *vor* der 0. Schließlich wird betont, daß der Anfang der Stellen rechts ist.

Wenn die Eins an der zweiten Stelle steht, also die Zehn bezeichnet²⁰, so benötigt man an der ersten Stelle (von rechts) ein Zeichen für die Null. Dieses Zeichen ist „ein kleiner Kreis, der dem Buchstaben *o* ähnelt“ und anzeigen soll, „daß die Stelle der Einer leer ist“ (*circulum parvum in similitudine o littere, ut per hoc scirent quod differentia unitatum esset vacua et nichil numeri esset in ea preter circulum parvum, de quo diximus*). Das Wort für „Kreis“ (*circulus*) kommt auch im Arabischen vor (*dāʿira*); der Zusatz *in similitudinem o littere* stammt dagegen vom lateinischen Übersetzer oder einem Bearbeiter. Die Null wird in der ganzen Schrift stets mit dem Wort *circulus* bezeichnet. Die Inder wählten dafür einen Kreis oder einen Punkt und nannten die Null *śūnya* (= das Leere). Die arabische Übersetzung davon war *aṣ-ṣifr*²¹; hieraus

²⁰In N heißt es recht genau: *Cum autem ponerentur X in loco unius et fierent in secunda differentia essetque figura eorum figura unius, necesse fuit eis figure decenorum aliquid preponere, ut per hoc scirent quid esset X*. Die Zahl 10 wird also durch das Zeichen der Eins (*figura unius*) an der zweiten Stelle dargestellt. Der Text in C ist etwas weniger deutlich; möglicherweise sind hinter *decenorum* die Worte *aliquid preponere* ausgefallen: *Cum autem ponerentur X in loco unius et fierent in secunda differentia, essetque figura eorum figura unius, necesse fuit eis figura decenorum eo quod similis esset figure unius, ut scirent per eam quod essent X*.

²¹Diese Ansicht wird allerdings von Saidan als unzutreffend abgelehnt [Saidan 1978, S.360].

entwickelte sich schon seit dem 12. Jahrhundert der lateinische Terminus *cifra*²². Dieser Ausdruck kann also nicht auf DA zurückgehen. Ob al-Ḥwārizmī Originaltext auch den Terminus *ṣifr* erwähnte, ist allein aus dem Lateinischen nicht zu entscheiden.

In den Schriften von al-Uqlīdisī, Kūšyār und al-Baġdādī wird der Ausdruck *ṣifr* benutzt. Al-Uqlīdisī sagt [Saidan 1973, S.53]: „... ein Kreis; ihn nennen die Leute dieses Faches *ṣifr* ...“ und etwas später: „Und folgendes ist die Form dessen, worin die Null (*aṣ-ṣifr*) vorkommt“. Kūšyār [Levey / Petruck 1965, S.46] nennt nicht das Wort „Kreis“, sondern nur *ṣifr*: „Vor denjenigen Stellen, an denen sich keine Zahl befindet, wird anstelle jener fehlenden Zahl *ṣifr* geschrieben; z.B. die Zehn, (in ihr) geht eine *ṣifr* anstelle der Einer voran“. Bei al-Baġdādī heißt es [Saidan 1985, S.35]: „An den Stellen, an denen keine Zahl steht, werden Kreise (*dawā'ir*, pl. von *dā'ira*) gesetzt, die 'Nullen' (*aṣfār*, pl. von *ṣifr*) heißen, das bedeutet: leere Stellen“.

Entsprechend werden die anderen Zehner geschrieben: an der ersten Stelle (von rechts) steht die Null, an der zweiten Stelle ein „Symbol“, das den jeweiligen Zehner angibt (*Erit scilicet circulus in prima differentia et caracter pertinens ad ipsum numerum in secunda differentia*).

Es folgt offenbar ein neuer Einschub, der mit den Worten *Hoc autem sciendum est* beginnt und mit *Nos autem redeamus ad librum* endet. Er wiederholt das Stellenwertprinzip, indem angegeben wird, daß ein Symbol (*caracter*²³), das an der ersten Stelle die Eins bezeichnet, an der zweiten 10, an der dritten 100 und an der vierten 1000 bedeutet; Ähnliches gilt für die Zwei und die übrigen Ziffern.

Abgesehen von den angegebenen Stellen, unterscheidet sich auch in diesem Teil der Text in N von C nur geringfügig.

Der Begriff der „Stelle“ (*differentia*) wird in LY nicht näher erklärt, sondern offenbar als bekannt vorausgesetzt (z.B. in S.25,9-13). Auch über die Null, die *cifra* heißt, wird nur gesagt, wie sie geschrieben wird (S.25,14-15). Dagegen wird in LA/LP ausführlich erklärt, wie die einzelnen Stellen heißen und welche Bedeutung die Ziffern im Stellenwertsystem haben (S.66,22-68,24; 69,11-71,7). Die Fachausdrücke für „Stelle“ bzw. „Null“ sind – wie in DA – *differentia* bzw. *circulus*.

(1.6) Es folgen ausführliche Angaben, wie man die Hunderter und Tausender schreibt. Dabei müssen zwei bzw. drei Nullen (von rechts gesehen) vor die Zahl gesetzt werden, falls es sich um „reine“ Hunderter bzw. Tausender handelt, damit man sieht, um welche Stelle es sich handelt. Andernfalls muß man die Ziffer, die unterhalb (*infra*) der betreffenden Stelle steht, an die ihr zukommende Stelle setzen (*debet poni in ea differentia, que sibi debetur*). Die Schreibweise wird anhand von zwei Beispielen (11 und 325) ausführlich erläutert. – Zwischen N und C gibt es keine bedeutenden Abweichungen.

Ähnlich ausführlich wie in DA wird die Schreibweise mehrstelliger Ziffern auch in LA/LP erklärt (S.71,8-74,21). Zur Veranschaulichung werden folgende Beispiele vorgeführt: 111, 222, 123 und 204.

²²Dieser Ausdruck begegnet in lateinischen Texten zuerst in Bearbeitungen der astronomischen Tafeln von al-Ḥwārizmī und in LY. Zur Verwendung des Worts *cifra* siehe [Burnett 1996, S.236-237].

²³Das Wort *caracter* ist griechischen Ursprungs, findet sich aber auch in den Abakusschriften des 11. und 12. Jahrhunderts und wird schon von Richer zur Bezeichnung der Steine auf dem Gerbertschen Abakus gebraucht.

(1.7) Dieser Abschnitt beschreibt, wie man vorzugehen hat, wenn sich an irgendeiner Stelle 10 oder mehr Einheiten „angesammelt haben“ (*collecti fuerint*): Man muß je 10 Einheiten einer Stelle in eine Einheit der nächsthöheren Stelle verwandeln (diese Stelle wird in N als *posterior differentia*, in C als *superior differentia* bezeichnet); wenn sich dort eine Ziffer befindet, soll diese um 1 erhöht werden²⁴. Falls an der höheren Stelle mindestens 10 Einheiten stehen, geht man eine Stelle weiter und verfährt ebenso. Es werden verschiedene Sonderfälle behandelt: daß sich an irgendeiner Stelle genau 10 ergeben, so daß die Ziffer an der betreffenden Stelle durch die Null (*circulus*) ersetzt werden muß; daß an bestimmten Stellen „große Zahlen“ (also die Ziffern 8 oder 9) stehen, so daß durch einen Übertrag sich auch ein Übertrag an der nächsthöheren Stelle ergeben kann. Schließlich wird explizit gesagt, daß die Zahl, die sich durch die Zusammenfassung ergibt, durch die entsprechenden Symbole (d.h. Zahlzeichen) an den passenden Stellen ausgedrückt werden muß.

Insgesamt ist die Darstellung recht langatmig; einige Aussagen zum Stellenwertprinzip wiederholen Dinge, die schon früher gesagt wurden. Der Inhalt dieses Abschnitts paßt auch deshalb nicht in den Zusammenhang, weil das „Ansammeln“ und eventuelle Überträge erst bei der Addition vorkommen, die in diesem Kapitel nicht behandelt wird. Vermutlich ist auch dieser Abschnitt zumindest teilweise von einem Bearbeiter hinzugefügt worden. Hierauf deuten die Formulierung: *Et ideo dicit: X vel plus* und die Bemerkung: *Sed redeamus ad librum* hin, die am Ende dieses Abschnitts steht (allerdings nur in N, nicht in C). In LY und LA/LP gibt es an dieser Stelle keine entsprechenden Bemerkungen. – Die Textfassungen von N und C unterscheiden sich nicht wesentlich, abgesehen davon, daß in N, offenbar durch das Versehen eines Abschreibers, zwei Zeilen fehlen.

(1.8) Der Abschnitt über die Zahlenschreibweise der Inder endet mit einer Belehrung darüber, wie große Zahlen zu schreiben (*ut scribas eum in libro*) und auszusprechen (*vel loquaris de eo*) sind. Es wird noch einmal das Stellenwertprinzip dargestellt und darauf hingewiesen, daß an jeder Stelle eine Zahl zwischen 1 und 9 oder der „Kreis“ stehen muß. Die einzelnen Stellen werden von rechts abgezählt. Der Autor benennt die Namen aller Stellen von der ersten bis zur dreizehnten, also von 10^0 bis 10^{12} . Da die Araber nur Zahlwörter bis 1000 haben, muß unsere „Billion“, also 10^{12} , mit „tausendmal tausend tausend tausend“ umschrieben werden und heißt so entweder *milies mille mille milium* (in N) oder *mille milia milia milium quatuor vicibus* (in C). Man benutzt also (von 10^9 an) Zahladverbia mit *milies* oder die Umschreibung *milia ... tribus vicibus* usw.

Am Beispiel 1.180.703.051.492.863 wird die Schreibweise großer Zahlen erklärt. Diese Zahl ist in N mit einigen Fehlern geschrieben; in C fehlt sie ganz. Für das Lesen wird sie folgendermaßen aufgelöst: $1 \cdot 10^{15}$, $100 \cdot 10^{12}$, $80 \cdot 10^{12}$, $700 \cdot 10^9$, $3 \cdot 10^9$, $51 \cdot 10^6$, $400 \cdot 10^3$, $92 \cdot 10^3$, 863, wobei die Dreiergruppen von Zehnerpotenzen immer durch „tausendmal tausend tausend“ usw. bezeichnet werden.

In diesem Kapitel wird mehr als einmal hervorgehoben, daß die Zahlen beim Schreiben gleichzeitig auch ausgesprochen werden. Dies wird auch in anderen arabischen Texten immer wieder erwähnt, ganz besonders bei al-Uqlīdisī; dort heißt es z.B. (Kapitel

²⁴ Im Text heißt es etwas ausführlicher: *addatur desuper et colligatur in simul*.

I.3, [Saidan 1973, S.61]): „Wir müssen alle Operationen, die wir vornehmen, aussprechen, denn dadurch verläuft die Operation gut.“

Ähnlich große Zahlen wie in DA findet man in LY und LA/LP nicht, wohl aber im „Salem-Algorithmus“, in dem eine 15stellige Zahl vorgestellt und empfohlen wird, durch Punkte die einzelnen Dreiergruppen abzuteilen [Cantor 1865, S.3], und in einem in London befindlichen Algorithmus aus dem 12. Jahrhundert²⁵. Vom 14. Jahrhundert an finden Bezeichnungen für Dezimalstellen von der Million an aufwärts allmählich Eingang in die Rechenbücher. Die Gewohnheit, große Zahlen durch Tausender auszudrücken, kann man aber noch bei den Rechenmeistern im 16. Jahrhundert feststellen.

* * *

Kapitel 2: Capitulum augmentationis et diminutionis (Addition und Subtraktion natürlicher Zahlen)

DA: N, f.18v-19r; C, f.106r-107r (Vogel 17,19-21,4; Allard 6,34-8,35)

(2) Das zweite Kapitel behandelt die Addition und Subtraktion von Zahlen, wobei unter *numerus* hier (und auch sonst stets) nur natürliche Zahlen verstanden werden. Der Fachausdruck für „Addition“ ist *augmentatio*, seltener: *collectio*; „addieren zu (einer Zahl)“ heißt *addere super (numerus)*, seltener: *augmentare* oder *colligere*. „Subtraktion“ heißt *diminutio*, seltener *dispersio*; „subtrahieren von (einer Zahl)“ heißt *minuere de (numero)*, seltener: *minuere ex (numero)*.

(2.1) Zunächst wird das allgemeine Verfahren der Addition beschrieben. Hierbei werden – wie auch bei der Subtraktion, Multiplikation und Division – nach Art der Inder die beiden Zahlen in zwei Zeilen (*ordines*) untereinander geschrieben, wobei oben der erste Summand (bzw. Minuend, Multiplikand²⁶, Dividend) steht. Derartige Fachausdrücke gibt es in dieser Schrift allerdings nicht; man redet nur von der „oberen“ bzw. „unteren Zahl“ oder von der „Zahl, die wir abziehen wollen“, u.ä. Der Ort, auf dem die Rechnungen ausgeführt wurden, wird nicht genauer bezeichnet; nur bei der Multiplikation wird beiläufig erwähnt, daß die Zahlen *in tabula vel in quo volueris* geschrieben werden (Kapitel 4.1). Man benutzte also ein Brett oder einen anderen Gegenstand. Er konnte mit Staub, Sand, Wachs oder mit weißem Pulver bedeckt sein. In den arabischen Texten wird für „Rechenbrett“ oder „Tafel“ das Wort *taht* benutzt, und es wird erwähnt, daß man bei den Rechenoperationen darauf Zahlen „auswischt“ oder „wegwischt“ (löscht; arab.: *maḥā*) und an ihrer Stelle andere einsetzt. Das Wort *taht* ist nicht arabisch, sondern kommt aus dem Persischen²⁷. Leonardo von Pisa empfahl zu Beginn des 13. Jahrhunderts in seinem „Liber abbaci“ ein weißes Brett, auf dem sich die Ziffern leicht wegwischen ließen²⁸.

Bei der Addition, Subtraktion und Multiplikation werden die Teilergebnisse in derselben Zeile geschrieben wie die obere Zahl, d.h., die bereits benutzten Ziffern dieser

²⁵Dort ist die Zahl 13stellig; siehe [Karpinski 1921, S.411].

²⁶Hier und im folgenden bezeichnet das Wort „Multiplikand“ den ersten Faktor und „Multiplikator“ den zweiten Faktor einer Multiplikationsaufgabe.

²⁷*tahta* = Brett, Tafel, aber auch Notizbuch, einzelnes Blatt Papier, usw. Siehe auch [Saidan 1978, S.351-352]. Saidan berücksichtigt aber nicht die Tatsache, daß schon vor der Kenntnis der arabischen Mathematik in Westeuropa auf dem Rechenbrett (*abacus*) gerechnet wurde.

²⁸*in tabula dealbata in qua littere leviter deleantur* [Boncompagni 1857a, S.7].

Zahl werden gelöscht und durch die entsprechenden Ziffern des Ergebnisses ersetzt, so daß schließlich oben das Endergebnis erscheint. Bei der Division wird der Quotient im allgemeinen über dem Dividenden geschrieben. Es gibt bei **DA** aber keine allgemeinen Regeln über die Verteilung der Ziffern auf die Stellen, sondern es werden für jede Rechenart Vorschriften über den Verlauf der Operation und das Notieren der einzelnen Zwischenergebnisse gegeben.

Die Addition wird ziemlich kurz erklärt: Man soll die Einer unter die Einer, die Zehner unter die Zehner schreiben usw. und die Ziffern an den gleichartigen Stellen addieren. Wenn sich an irgendeiner Stelle bei der Addition zehn oder mehr ergibt, so wird aus den 10 eine 1 gemacht und diese zur nächsthöheren Stelle addiert; der Rest bleibt „an derselben Stelle“. Wenn kein Rest bleibt, wird an dieser Stelle eine Null (*circulus*) gesetzt, damit man über den Wert der Zahl nicht getäuscht wird (*ne ... decipieris in numero tuo*).

Für die Addition wird kein Beispiel gebracht; es fehlt auch ein Hinweis, daß die Ergebnisse oben eingetragen und die ursprünglichen Ziffern nach und nach gelöscht werden. Ob es im arabischen Original ein Additionsbeispiel gab oder nicht, ist unbekannt. Vielleicht glaubte der Bearbeiter der lateinischen Fassung, auf nähere Ausführungen verzichten zu können, weil er sich schon im Kapitel 1.7 mit Problemen beschäftigt hatte, die bei der Addition von Zahlen auftreten können. An dieser Stelle erfahren wir auch nicht, ob man bei der Addition links oder rechts beginnt, d.h. mit der größten oder mit der kleinsten Stelle anfängt. Die Beschreibung des Ablaufs scheint darauf hinzudeuten, daß man mit den Einern beginnt; dagegen wird am Ende von Kapitel 2.2 gesagt, daß es bei der Addition und Subtraktion nützlicher und leichter sei, mit der höchsten Stelle zu beginnen²⁹.

Bei den Indern wurde die Addition teils von links nach rechts, teils von rechts nach links ausgeführt. In arabischen Schriften beginnt man im allgemeinen links, d.h. mit der höchsten Stelle; die Ziffern der oberen Zahl werden nach und nach durch die Summenziffern ersetzt. Dies lehren al-Uqlīdisī (Kapitel I.3, [Saidan 1978, S.46]), Kūšyār ibn Labbān [Levey / Petruck 1965, S.48] und al-Baġdādī [Saidan 1985, S.36-37].

In **LA/LP** wird das allgemeine Verfahren bei der Addition im Anschluß an die Zahlenschreibweise recht ausführlich dargestellt (S.74,22-77,22). Demnach beginnt man an der niedrigsten Stelle und arbeitet sich nach links vor. Es wird auch explizit gesagt, daß die Teilergebnisse in der oberen Zeile eingetragen werden und zuvor die dort stehende Ziffer zu löschen ist (*eum in loco superioris sed prius deleti numeri pones*). Anschließend (S.77,23-80,24) wird das Verfahren an mehreren Beispielen ($625 + 586$, $601 + 586$, $124 + 12$) genau erklärt, wobei auch die Möglichkeit erwähnt wird, mit der höchsten Stelle anzufangen. Ob die Addition korrekt war, kann mittels der Neunerprobe kontrolliert werden (S.81,1-12). – In **LY** wird die Addition erst nach der Multiplikation behandelt (S.32,19-33,3). Die Darstellung ist noch viel kürzer als in **DA**. Es gibt nur den Hinweis, daß gleichartige Ziffern untereinander geschrieben werden müssen, daß man beim Übertrag zur nächsten Stelle übergeht und, falls sich 10 ergibt, eine Null schreibt. Ein Zahlenbeispiel fehlt. – In den etwas späteren Algorismus-Texten wer-

²⁹ *Incipe ergo semper in augmentatione vel diminutione ab altiori differentia, postea ab ea que eam succedit, quia utilius ac levius erit opus, si deus voluerit.*

den folgende Beispiele behandelt: $666 + 144$ (Salem-Algorithmus, [Cantor 1865, S.3]); $432 + 321$ (Frankenthal-Algorithmus, [Allard 1978, S.129]).

⟨2.2⟩ Der Rest des Kapitels behandelt die Subtraktion. Der Minuend steht oben, der Subtrahend unten, wobei auch hier die gleichartigen Stellen untereinander geschrieben werden. Sehr ausführlich wird der Fall behandelt, daß an irgendeiner Stelle unten eine größere Zahl steht als oben (oder daß oben eine Null steht): dann muß von der nächsthöheren Stelle eine Eins „geborgt“ und in 10 Einheiten der betreffenden Stelle verwandelt werden (*accipies de secunda differentia, que est altior illa superiori, unum et facies de eo X*). Wenn von der nächsthöheren Stelle keine Eins geborgt werden kann, weil dort eine Null steht, muß man noch eine Stelle weitergehen. Man soll hier wie auch bei der Addition bei der höchsten Stelle beginnen.

Bei der Darstellung des Ausborgens von der 3. Stelle weichen die Texte in N und C stärker voneinander ab. N schildert den Vorgang etwas ausführlicher und genauer als C, erwähnt aber im Gegensatz zu C nicht, daß an der 2. Stelle die von der 3. Stelle geborgten 10 Einheiten auf 9 reduziert werden, wenn eine Einheit davon auf die 1. Stelle übertragen wird. Es ist kaum zu entscheiden, welche Fassung dem arabischen Original näher steht.

Das Subtraktionsverfahren wird in anderen arabischen Texten ähnlich wie in DA dargestellt, z.B. bei al-Uqlidīsī (Kapitel I.3, [Saidan 1978, S.46-47]) und Kūšyār ibn Labbān [Levey / Petruck 1965, S.50-53]. Al-Baġdādī geht beim Subtrahieren von rechts nach links vor (d.h. von den Einern aufwärts) [Saidan 1985, S.40].

In den beiden auf al-Ḥwārizmīs Übersetzung zurückgehenden lateinischen Schriften LY und LA/LP gibt es Unterschiede: In LY wird die Subtraktion recht kurz behandelt; Beispiele fehlen (S.33,4-11). Wir finden nur die Bemerkung, daß die Zahlen korrekt aufgeschrieben werden müssen (*unusquisque ponendus est in propria statione*) und man, falls die obere Ziffer kleiner als die untere oder Null ist, eine Eins ausborgen muß (*unitas auferenda erit de sequentibus*); ferner müsse man bei der Addition und Subtraktion „bei den ersten (Stellen)“ anfangen (*initium a primis debere sumi*). In LA/LP ist alles viel klarer (S.81,13-83,4): Zunächst werden die Begriffe „subtrahieren“ (*diminuere*), Minuend (*minuendus*) und Subtrahend (*minuens*) erklärt. Dann folgt eine Darstellung des Verfahrens, wobei auch hier der Fall, daß die untere Zahl größer als die obere ist, besonders ausführlich behandelt wird.

⟨2.3⟩ Zum leichteren Verständnis der allgemeinen Subtraktionsregel werden Beispiele angekündigt. C spricht von „drei Arten“ (*hoc dicamus tribus modis*), N von „zwei Arten“ (*hoc dicam tibi duobus modis*). Tatsächlich werden im folgenden in N und in C nur zwei Aufgaben ($6422 - 3211$ und 1144 [bzw. 1444] – 144) durchgerechnet, während es in LA/LP vier Beispiele gibt ($12025 - 3604$, $1444 - 144$, $10.000 - 15$, $200.000 - 2$). Juschkewitsch hat vermutet, daß das Fehlen des dritten Beispiels in C weder al-Ḥwārizmī noch dem lateinischen Übersetzer zugeschrieben werden kann, sondern einem Abschreiber angelastet werden muß [Juschkewitsch 1964, S.33]. Nachdem aber in N von „zwei Arten“, in C jedoch von „drei Arten“ geredet wird, ist die Situation etwas komplizierter: Entweder gab es drei Beispiele, und N oder seine Vorlage hat das *tribus* in *duobus* verändert, weil ihm nur zwei Aufgaben bekannt waren, oder das Wort *tribus* in C ist ein Versehen für *duobus*. Jedenfalls kann nicht ohne weiteres davon

ausgegangen werden, daß es drei Beispiele gab, weil in **LA/LP** sogar vier Aufgaben betrachtet werden.

Anschließend wird das erste Beispiel behandelt: $6422 - 3211$. Man schreibt die entsprechenden Stellen der beiden Zahlen untereinander und beginnt an der höchsten, also 4., Stelle mit der Subtraktion. Die Rechnung wird stellenweise von links nach rechts durchgeführt; immer wenn an einer Stelle die Subtraktion erfolgt ist, wird die betreffende Stelle des Minuenden durch den Rest ersetzt, und die Stelle des Subtrahenden wird fortgenommen. Die einzelnen Rechenschritte sehen also folgendermaßen aus:

6422 3211	3422 211	3222 11	3212 1	3211
--------------	-------------	------------	-----------	------

Die Zwischenschritte werden nur in Worten ausgedrückt. In der Handschrift **N** sind die Ausgangsstellung und das Endergebnis vorhanden; in **C** fehlen auch diese, jedoch ist Platz dafür freigebblieben.

Ein ähnlich einfaches Subtraktionsbeispiel wie in **DA**, bei dem alle Ziffern der unteren Zahl kleiner als die der oberen Zahl sind, so daß kein Übertrag von einer höheren Stelle erfolgen muß und auch keine Null vorkommt, ist in **LA/LP** nicht vorhanden. Dort wird stattdessen die kompliziertere Aufgabe $12025 - 3604$ behandelt, bei der zweimal ein Einer geborgt werden muß (S.83,5-84,19).

(2.4) Als zweites Beispiel wird eine Subtraktion gewählt, bei der „nichts“ (*nihil*, so **C**) oder „wenig“ (*parum*, so **N**) an ihren Stellen übrig bleibt. In **C** wird nur die Aufgabe formuliert: $1144 - 144$; das Subtraktionsschema und die weitere Rechnung fehlen. In **N** heißt die Aufgabe: $1444 - 144$. Abgesehen von einigen Schreibfehlern bei den römischen Zahlen, wird in **N** korrekt und sehr ausführlich angegeben, wie die Rechnung vor sich geht; auch das Ergebnis 1300 stimmt. Dies ist die erste Stelle in der Schrift, an der **N** und **C** wesentlich voneinander abweichen, wobei der vollständige Text von **N** gegenüber **C**, in dem nur die Aufgabe gestellt wird, vorzuziehen ist. Die unterschiedlichen Minuenden (1444 in **N**, 1144 in **C**) könnten durch einen Schreibfehler in einer Vorlage zu erklären sein, wobei 1444 als die *lectio difficilior* ursprünglicher sein dürfte. In diesem Fall wäre anzunehmen, daß der Schreiber von **C** (oder von einer früheren Handschrift) das Wort *parum* in *nihil* geändert hätte, um der Tatsache Rechnung zu tragen, daß sich bei der Subtraktion $1144 - 144$ drei Nullen ergeben, also (außer der ersten Eins) „nichts“ übrig bleibt, während bei der ursprünglichen Aufgabe $1444 - 144$ nur zwei Nullen entstehen, also „wenig“ übrig bleibt.

Es fällt auf, daß **N** in diesem Kapitel die Zahl 40 mehrfach nicht durch *XL* oder durch *XXXX* wiedergibt, sondern stattdessen unkorrekt *X* schreibt. Da sich dieser Fehler in **N** nicht nur hier, sondern auch an vielen anderen Stellen findet³⁰, kann es sich um keinen Zufall handeln, sondern es muß in einer Handschrift, von der **N** abhängt, ein besonderes Zeichen für 40 benutzt worden sein, das der Abschreiber nicht kannte, so daß er stattdessen *X* schrieb. Tatsächlich gab es in der westgotischen Schrift für die römische Zahl *XL* ein Sonderzeichen: ein *X* mit einem nach oben geöffneten Bogen oder Winkel am rechten oberen Ast. Dieses Zeichen konnte also leicht mit dem römischen Zahlzeichen für 10 verwechselt werden. Es geriet allmählich in Vergessenheit, als die indisch-arabischen Ziffernformen durch die Übersetzungen aus dem Arabischen

³⁰In den Kapiteln 7.1, 8.1, 8.2 und 9.

in Spanien bekannt wurden³¹. Dieser Fehler in N (nicht in C) zeigt also eindeutig, daß N auf eine spanische Vorlage zurückgeht, und liefert ein weiteres Indiz dafür, daß die lateinische Übersetzung der arithmetischen Schrift von al-Ḥwārizmī in Spanien entstand.

Insgesamt gesehen, kann nach Kenntnis der Handschrift N nicht mehr die Ansicht aufrecht erhalten werden, als sei die Technik der Subtraktion in der lateinischen Bearbeitung von al-Ḥwārizmīs „Arithmetik“ unzulänglich wiedergegeben³². Vielmehr wird das Verfahren recht klar dargestellt, auch wenn kein Beispiel explizit vorgeführt wird, bei dem Einheiten von höheren Stellen entlehnt werden müssen.

Auch in LA/LP wird die Aufgabe 1444 – 144 behandelt, um den Fall zu erläutern, daß „nichts an gewissen oberen Stellen übrig bleibt“ (*de quo nichil remaneat in quibusdam differentiarum superiorum*; S.84,20-85,9). Dort folgen noch weitere Beispiele, um zu zeigen, wie man vorgeht, wenn man sich von entfernteren Stellen eine Einheit ausborgen muß (S.85,10-87,14: 10.000 – 15 und 200.000 – 2). – Im Salem-Algorithmus gibt es zwei andere Subtraktionsbeispiele: 810 – 144 und 1000 – 1 [Cantor 1865, S.3-4].

* * *

Kapitel 3: Capitulum tercium, quomodo debeamus duplicare numerum vel mediare (Über Verdopplung und Halbierung)

DA: N, f.19r; C, f.107r (Vogel 21,5-17; Allard 9,1-17)

Nach der Subtraktion wird die Halbierung und die Verdopplung behandelt, und zwar zunächst die Halbierung. Der Fachausdruck dafür ist *mediatio*; „halbieren“ heißt *mediare* oder *medietatem accipere*. „Verdoppeln“ wird in N als *duplicare*, in C als *duplare* bezeichnet.

Bei der Halbierung beginnt man mit der ersten, also der niedrigsten, Stelle³³. Ist diese ungerade, so halbiert man die nächstkleinere gerade Zahl und schreibt 30 ($= \frac{30}{60}$) unter den ganzzahligen Einer. Das Halbe wird also nicht als gewöhnlicher Bruch, sondern als Sexagesimalbruch geschrieben. Man geht dann zur nächsten Stelle, usw. Jedesmal, wenn man eine gerade Ziffer findet, wird sie halbiert; ist sie ungerade, so schreibt man die Hälfte des geraden Anteils in die betreffende Spalte und anstelle der zu halbierenden Eins eine 5 an die nächstniedrigere, d.h. rechts davon befindliche, Stelle.

Die Verdopplung wird in einem Satz abgehandelt: Man fängt bei der höchsten Stelle an und geht dann weiter nach rechts. Falls irgendwo beim Verdoppeln mehr als 10 entstehen, so ersetzt man sie durch eine 1 und notiert sie an der nächsten (links gelegenen) Stelle. Für beide Rechenarten werden keine Beispiele gebracht.

Die Texte in N und C zeigen starke Unterschiede: N gebraucht den Ausdruck *medietatem accipere* oft, C aber nur einmal. Die Halbierung der Eins an der äußersten rechten Stelle wird in N relativ knapp abgehandelt, während in C gesagt wird, daß man die Eins in zwei Hälften spalten soll, von denen eine 30 Teile ausmacht, weil die Einheit aus 60 Teilen besteht. Insgesamt ist der Text in C etwas länger. Obwohl in

³¹Siehe [Lemay 1977, S.458-459]; [Lemay 1982, S.393].

³²So etwa [Juschkevitich 1964, S.33-34], der in diesem Zusammenhang auf fehlerhafte Ansichten anderer Mathematikhistoriker hinweist und diese berichtigt.

³³Der Zusatz *superiori* in N ist wohl eine Glosse, muß aber getilgt werden, da er eine darüber liegende oder die höchste Stelle bezeichnet und somit im Widerspruch zu *prima differentia* steht.

beiden Handschriften inhaltlich dasselbe steht, sind die formalen Gemeinsamkeiten so gering, daß der Eindruck entsteht, als handle es sich um verschiedene Übersetzungen desselben Textes.

In LY wird wie in DA zunächst die Halbierung und dann die Verdopplung behandelt (S.33,12-22). Auch hier ist die Darstellung sehr knapp und beschränkt sich auf die Angaben, wie man bei der Halbierung ungerader Zahlen mit der überschüssigen Eins verfahren soll und daß man beim Halbieren rechts, beim Verdoppeln aber links anfängt. Viel ausführlicher wird das Thema in LA/LP behandelt (S.88,11-94,14). Dort beginnt man mit der Verdopplung, erklärt das allgemeine Vorgehen und erläutert es am Beispiel 978·2. Ähnlich verfährt man bei der Halbierung, wobei natürlich das Halbieren der Eins eine besondere Rolle spielt. Es wird ausdrücklich vermerkt, daß die Inder die Eins in 60 Teile teilten, *sicut in sequentibus clarescet*. Das Verfahren wird am Beispiel 9783 : 2 erläutert. Am Ende wird gesagt, daß beide Rechenarten Sonderfälle der Multiplikation bzw. Division sind und eigentlich nach ihnen behandelt werden müßten; sie würden separat dargestellt, weil sie für das Wurzelziehen nötig seien³⁴.

Die Bedeutung von Verdopplung und Halbierung wird in LA/LP mit dem Wurzelziehen in Zusammenhang gebracht. Tatsächlich müssen dort die Zwischenergebnisse verdoppelt und das Ergebnis halbiert werden, wie in den letzten Kapiteln der Schrift ausführlich erläutert wird. Bei den Indern wurden diese Arten dagegen nicht besonders beachtet. Beide Operationen wurden im Osten häufig beim mündlichen Rechnen angewandt, vor allem beim Multiplizieren und Dividieren [Juschekewitsch 1964, S.34-35]. So ist es möglich, daß auch volkstümliche Traditionen für das Interesse der Gelehrten an der Verdopplung und Halbierung verantwortlich waren. Juschekewitsch hat betont, daß bei al-Ḥwārizmī die Halbierung auch bei der Lösung der vollständigen quadratischen Gleichung eine besondere Rolle spielt, da mit ihrer Hilfe die sechs Gleichungstypen in zwei Gruppen eingeteilt werden [Juschekewitsch 1964, S.36].

Auch von anderen arabischen Autoren werden Verdoppeln und Halbieren gesondert behandelt, aber in unterschiedlicher Weise: Bei al-Uqlīdisī kommt dieses Kapitel vor dem Kapitel, das der Addition und Subtraktion gewidmet ist, und ist – nach dem einleitenden Kapitel über die Ziffern – das erste Kapitel über Operationen überhaupt (Kapitel I.2, [Saidan 1978, S.44-45]). Bei al-Bağdādī bilden Verdoppeln und Halbieren zwei gesonderte Kapitel (I.4 bzw. 5) hinter den beiden (getrennten) Kapiteln Addition und Subtraktion. Bei Kūšyār wird die Verdoppelung (*taḍʿīf*) als Unterart mit zur Addition gezählt und die Halbierung (*tanṣīf*) als Unterart mit zur Subtraktion.

Im Gefolge der Übersetzungen aus dem Arabischen wurden diese Operationen vom 12. Jahrhundert an auch im Westen meist gleichberechtigt mit den uns bekannten vier Grundrechenarten gelehrt. Im Salem-Algorithmus wird ein Abschnitt über Verdoppeln und Halbieren angekündigt, jedoch wird nur das Verdoppeln ausführlich erklärt [Cantor 1865, S.4-5].

* * *

³⁴S.94,10-14: *Dimidiare etenim est species diuidendi et duplare species multiplicandi. Et tamen, quia necessaria sunt ad inueniendam radicem que duplando et mediando inuenitur, ideo hic per se ponuntur, cum tamen post tractatum multiplicandi et diuidendi deberent conuenientius poni.*

Kapitel 4: Capitulum in multiplicatione (Multiplikation von ganzen Zahlen)

DA: N, f.19r-v; C, f.107r-108r (Vogel 21,18-25,4; Allard 9,18-11,19)

Dieses Kapitel lehrt die Multiplikation ganzer Zahlen. Zunächst wird die Anfangsstellung angegeben (4.1) und dann das Verfahren allgemein erläutert (4.2). Schließlich wird näher ausgeführt, wie man verfährt, wenn eine Stelle des Multiplikanden Null ist, und wo man die Zwischenergebnisse und das Endergebnis einträgt (4.3). Die Begriffe für „Multiplikation“ bzw. „multiplizieren“ lauten: *multiplicatio* und *multiplicare*. Das Verb wird – analog zum arabischen *daraba fī* – fast immer mit *in* c. Abl. konstruiert, vereinzelt auch mit *in* c. acc. oder mit *per*. In einem späteren Kapitel (13.4) wird auch einmal der Begriff *ducere super* benutzt. Nur an einer Stelle (Kapitel 4.1) wird für „vervielfältigen“ das Wort *duplicare* verwendet. Es erinnert an das arabische *da‘afa / ad‘afa*, das sowohl „verdoppeln“ als auch „vervielfältigen“ heißt; hierzu siehe die Bemerkungen im folgenden Abschnitt. – Die Präposition *in* in der Überschrift („Capitulum in multiplicatione“) ist eine Übersetzung des arabischen *fī*, das bei Kapitelüberschriften, Buchtiteln oder ähnlichem „über“ bezeichnet und im Lateinischen besser mit *de* wiederzugeben wäre.

⟨4.1⟩ Zunächst gibt der Autor eine Art Definition des Begriffs „Multiplikation“: Wenn eine Zahl mit einer anderen multipliziert wird, so wird eine von ihnen gemäß der Anzahl der Einheiten der anderen „vervielfacht“ (*duplicetur unius eorum secundum numerum unitatum alterius*)³⁵. Diese Aussage stammt, wie der Autor sagt, aus einem anderen Buch von ihm (*patefeci in alio libro meo*; die Worte *alio* und *meo* fehlen in C). Es handelt sich, wie schon in Kapitel 1.3 und später in Kapitel 15, um ein Zitat aus seiner „Algebra“. Dort heißt es: *Scias itaque impossibile esse quin unus omnium duorum numerorum, quorum unus in alterum multiplicatur, duplicetur secundum quantitatem unitatum que est in altero*³⁶. Die Ähnlichkeit der Formulierungen in der „Algebra“ und in der „Arithmetik“ haben Juschkewitsch zu der Frage verleitet: „Könnte nicht doch die Urquelle der Cambridger Handschrift dem Kreis von Gherardo Cremonese entstammen?“ [Juschkewitsch 1964, S.36, Anm. 53]. – Eine Erklärung der Multiplikation, die nahezu wörtlich mit DA übereinstimmt, findet man auch bei an-Nasawī [Juschkewitsch 1964, S.36].

Für die Multiplikation mit Hilfe der indischen Symbole muß man das kleine Einmal-eins kennen (*scire multiplicationem numeri, qui est ab uno in novem, in invicem, sive concordaverit numerus sive diversus fuerit*) und auswendig wissen (*cordetenus omnino*

³⁵ Dies ist die Lesart von N. C hat stattdessen: *duplicetur unus ex eis secundum unitates alterius*. *duplicari* bedeutet hier nicht, wie sonst, „verdoppelt werden“, sondern „vervielfacht werden“. Dies ist eine Übersetzung von *du‘ifa*, das sowohl „verdoppelt werden“ als auch „vervielfacht werden“ bedeuten kann. Juschkewitschs Erklärung, es sei eine Übersetzung des arabischen *tadā‘afa* [Juschkewitsch 1964, S.36, Anm.52], ist nicht ganz korrekt: es handelt sich nicht um den VI., sondern um den II. Stamm (*du‘ifa*). Daneben wird auch der IV. Stamm benutzt.

³⁶ Dies ist die Formulierung in der Übersetzung von Gerhard von Cremona; siehe [Hughes 1986, S.241,5-7]. Bei Robert von Chester heißt es: *In primis ergo sciendum est quoniam numerus in numerum multiplicari non potest, nisi numerus multiplicandus tociens duplicetur quotiens in numero in quem ipse multiplicatur, unitas reperitur* [Hughes 1989, S.45,11-13]. Der arabische Text heißt [Rosen 1831, S.15,7-9]: „Wisse, daß es nötig ist für jede Zahl, die mit einer (anderen) Zahl multipliziert wird, daß die eine der beiden Zahlen vervielfacht wird mit/gemäß der Anzahl (*‘adad*) der Einer in der anderen.“ Es fällt auf, daß Gerhard in der „Algebra“ den arabischen Terminus *‘adad* als *quantitas* wiedergibt, während dasselbe arabische Wort in der „Arithmetik“ (N) in wörtlicher Übertragung als *numerus* erscheint.

retinere). Zu diesem Zweck gab es Einmaleins-Tabellen, z.B. bei al-Baġdādī [Saidan 1985, S.51] und auch in LA/LP (S.37,6-15) und LY (S.27,9-17). In DA ist allerdings keine derartige Tabelle vorhanden.

Es folgen allgemeine Angaben darüber, wie die zu multiplizierenden Zahlen angeordnet werden müssen: Man schreibt die beiden Faktoren in zwei Zeilen so, daß die niedrigste Stelle der zweiten Zahl unter der höchsten Stelle der ersten Zahl steht³⁷. Dies bedeutet, daß die höheren Stellen der unteren Zahl weiter links stehen. Hier brechen die allgemeinen Erörterungen vorerst ab.

(4.2) Zur Erläuterung der weiteren Schritte wird ein Multiplikationsbeispiel vorgestellt: $2326 \cdot 214$. In der Ausgangsstellung steht, wie zuvor gesagt, die niedrigste Stelle des Multiplikators³⁸, also die 4, unter der höchsten Stelle des Multiplikanden, also der 2. Diese Position ist in N dargestellt, in C fehlt sie. Danach wird die Ziffer, die an der höchsten Stelle des Multiplikanden steht, nach und nach mit den Ziffern an den einzelnen Stellen des Multiplikators multipliziert, wobei man mit dessen höchster Stelle beginnt; die Teilprodukte werden über der betreffenden Stelle des Multiplikators in der Zeile des Multiplikanden eingetragen. Nachdem die höchste Stelle des Multiplikanden „abgearbeitet“ ist, verschiebt man (*mutabis*) den Multiplikator um eine Stelle nach rechts und wiederholt das Verfahren mit der nächsten Stelle des Multiplikanden. Dies geschieht, bis man alle Stellen durchlaufen hat.

(4.3) Nachdem das allgemeine Verfahren dargestellt wurde, geht der Autor jetzt auf Einzelheiten ein: Falls man zu einer Stelle des Multiplikanden kommt, an der eine Null steht, so geht man zur nächsten Stelle rechts davon, weil das Ergebnis der Multiplikation Null wäre. Dieser Sachverhalt wird recht ausführlich beschrieben: *quia omnis circulus, qui multiplicatur in aliquo numero, nichil est et ipse nichil est. Similiter quicquid multiplicatur in circulo, nichil est*. Es wird also auf die multiplikativen Eigenschaften der Null hingewiesen: $0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$. Die Teilergebnisse der Multiplikation einer Stelle des Multiplikanden mit den Stellen des Multiplikators werden über der jeweiligen Stelle des Multiplikators eingetragen; bei zweistelligen Multiplikationsergebnissen werden 10 Einer zu einer Einheit der höheren Stelle zusammengefaßt und zu ihr addiert. Es wird auch ausdrücklich gesagt, daß dann, wenn man zur Multiplikation einer Stelle mit der ersten (d.h. niedrigsten) Stelle des Multiplikators kommt, die darüber befindliche Stelle des Multiplikanden getilgt werden muß (*delebimus, quicquid fuerit in superiori differentia, que est super eam*), damit das Teilergebnis an diesen Platz geschrieben werden kann. Am Ende ist der Multiplikand „ausgelöscht“, und an seiner Stelle steht das Endergebnis, während der Multiplikator in der zweiten Zeile stehenbleibt. In unserem Beispiel ergibt sich die Zahl 497764. Im Text heißt es, indem die Erklärung des Multiplizierens aus dem Anfang des Kapitels wiederaufgegriffen wird (allerdings jetzt mit *multiplicare* statt *duplicare*): *Et tunc sciemus nos iam multiplicasse unum ex eis secundum quantitatem unitatum alterius*.

N und C haben im ganzen Kapitel an vielen Stellen einen abweichenden Wortlaut, scheinen aber doch auf eine gemeinsame Quelle zurückzugehen. Auffällig sind allerdings

³⁷Hier und im folgenden steht in N für „Stelle“ der übliche Ausdruck *differentia*, in C jedoch *mansio*; siehe die Bemerkungen zu Kapitel 1.5.

³⁸Zu den Begriffen „Multiplikator“ und „Multiplikand“ siehe Anmerkung 26.

Varianten wie *constituisti* N / *posuisti* C (in 4.1) oder *desines* N / *cessabis* C (in 4.2): sie alle geben authentische arabische Formen wieder³⁹.

Das Verfahren wird in DA – bis auf die Anfangsstellung und das Endergebnis – nur mit Worten dargestellt. Es ist aber leicht möglich, daraus die einzelnen Rechenschritte abzuleiten:

Aufstellen	2 3 2 6 2 1 4		
Multiplizieren mit 2	↓ 4 2 3 2 6 2 1 4	↓ 4 2 2 3 2 6 2 1 4	↓ 4 2 8 3 2 6 2 1 4
Verschieben	4 2 8 3 2 6 2 1 4		
Multiplizieren mit 3	↓ 4 8 8 3 2 6 2 1 4	↓ 4 9 1 3 2 6 2 1 4	↓ 4 9 2 2 2 6 2 1 4
Verschieben	4 9 2 2 2 6 2 1 4		
Multiplizieren mit 2	↓ 4 9 6 2 2 6 2 1 4	↓ 4 9 6 4 2 6 2 1 4	↓ 4 9 6 4 8 6 2 1 4
Verschieben	4 9 6 4 8 6 2 1 4		
Multiplizieren mit 6	↓ 4 9 7 6 8 6 2 1 4	↓ 4 9 7 7 4 6 2 1 4	↓ 4 9 7 7 6 4 2 1 4

Ergebnis: 497764

fett:	Ziffern, mit denen operiert wird
↓	Stellen, an denen Rechnungen vorgenommen werden
<i>kursiv:</i>	Teilergebnisse bzw. Ergebnisse
<u>unterstrichen:</u>	Ziffern, die sich ändern

³⁹ *constituisti* scheint dem arab. *atbata* am nächsten zu kommen, während *posuisti* vom arab. *waḍa'a* kommt. Beide bedeuten: „eine Zahl (Ziffer) hinschreiben, niederschreiben“.

Die Multiplikationskapitel in **LY** und **LA/LP** enthalten natürlich dieselben Informationen wie der Text in **DA**, sind aber teilweise anders aufgebaut. Allgemeine Regeln, wie man bei der Multiplikation mehrziffriger Zahlen diese untereinander schreiben soll, findet man in ähnlicher Weise auch in **LY** (S.28,1-16). Dort werden derartige Multiplikationen als *multiplicatio secunde* bzw. *tertie speciei* bezeichnet, im Gegensatz zur *multiplicatio prime speciei* bei einziffrigen Zahlen. In **LA/LP** (S.95,1-98,27) wird zunächst erklärt, was man unter „Multiplikation einer Zahl“ versteht, nämlich: sie „gemäß den Einheiten von ihr selbst oder von einer anderen Zahl zu zählen“ (*ipsum secundum unitates sui ipsius uel alterius numerare*); wer darin Kenntnisse erwerben wolle, müsse sich im kleinen Einmaleins üben (*in multiplicatione digitorum omnium in se et ad inuicem se frequenter exerceat*), und das Ergebnis derartiger Multiplikationen zur Verfügung haben (*singulorum multiplicationis summam in promptu teneat*). Dann folgen allgemeine Angaben darüber, wie man die Faktoren untereinander zu schreiben hat und wie die einzelnen Teilmultiplikationen auszuführen sind. Es werden also hier neben der Anfangsstellung auch alle weiteren Schritte dargestellt, bevor im Anschluß daran Zahlenbeispiele gebracht werden.

Das Multiplikationsbeispiel aus **DA** findet sich in **LY** und **LA/LP** nicht. Stattdessen wird dort das Verfahren an anderen Beispielen erklärt, wobei auch die zu den einzelnen Schritten gehörigen Figuren vorhanden sind. In den verschiedenen Versionen von **LY** werden folgende Beispiele behandelt (S.28b,1-32,12): $12 \cdot 14$; $10 \cdot 10$; $300 \cdot 40$; $1024 \cdot 306$; $406 \cdot 204$. In **LA/LP** wird nur ein Beispiel vorgerechnet, dies jedoch recht ausführlich: $104 \cdot 206$ (S.98,28-102,13). – Im „Salem-Algorismus“ wird eine andere Multiplikationsaufgabe gebracht: $128 \cdot 19$ [Cantor 1865, S.6].

Ähnliche Vorschriften wie in **DA** für die Durchführung der Multiplikation stehen auch in anderen arabischen Texten. Kūšyār ibn Labbān erläutert das Verfahren am Beispiel $325 \cdot 243$ [Levey / Petruck 1965, S.52-56]. Bei al-Uqlīdisī werden mehrere Aufgaben vorgerechnet⁴⁰.

* * *

Kapitel 5: Capitulum in probatione duplicationis ac multiplicationis (Überprüfung der Multiplikation und Verdopplung mit Hilfe der Neunerprobe)

DA: N, f.19v; C, f.108r (Vogel 25,5-21; Allard 11,20-12,4)

In diesem Kapitel wird die Überprüfung der Verdopplung und der Multiplikation mit Hilfe der (Neuner-)Probe behandelt. Der Fachausdruck für die Neunerprobe ist *probatio*, das Verb heißt *probare*; der (Neuner-)Rest wird als *nota* bezeichnet. Für die „Probe“ kommen bei den Arabern die Ausdrücke *mīzān*, *imtiḥān* und *‘iyār* vor; *mīzān* wird ebenfalls gebraucht für „Quersumme“⁴¹. Daß es sich um die Neunerprobe handelt, wird in **DA** nicht gesagt. Die Bildung des Neunerrestes erfolgt nicht mit Hilfe der Quersumme, sondern durch Division, d.h. mehrfache Subtraktion von 9, bis ein Rest bleibt, der kleiner als 9 ist. Die lateinische Formulierung für: „teile die Zahl immerfort durch 9“ (*divide numerum per novem novem*) ist, mit der Wiederholung

⁴⁰Kapitel I.4, [Saidan 1978, S.49-54]. In späteren Kapiteln (II.9-10, [Saidan 1978, S.127-148]) werden andere Multiplikationsverfahren vorgestellt. Über die verschiedenen bei den Arabern benutzten Methoden siehe [Saidan 1978, S.386-404].

⁴¹Siehe [Saidan 1978, S.468].

des Zahlworts, genau dem Arabischen nachgebildet⁴². Während dies in N so stehen geblieben ist, finden wir in C die „latinisierte“ Schreibweise *divide numerum per IX et IX*.

Im Fall der Verdopplung einer Zahl n bildet man den Neunerrest $R(n)$ und verdoppelt ihn; falls das Doppelte größer als 9 ist, betrachtet man den Überschuß über 9 (*In quo si fuerint novem, proice eos et retine quod remanserit*). Anschließend bildet man den Neunerrest von $2n$. Falls $R(2n) = 2 \cdot R(n)$ ist, so war die Rechnung korrekt, andernfalls war sie es nicht. Dem Autor ist also nicht bewußt, daß die Neunerprobe zwar eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die Richtigkeit der Rechnung ist. Entsprechend verfährt man bei Multiplikationen, indem die Neunerreste der Faktoren und des Produkts gebildet werden und dann überprüft wird, ob das Produkt der Neunerreste der Faktoren gleich dem Neunerrest des Produkts ist. Beispiele für die Neunerprobe werden nicht gebracht. – Am Ende dieses Kapitels kommt zweimal der Ausdruck *intellige* vor. Er bedeutet: „das mußt du verstehen“ und ist die lateinische Übersetzung des arabischen *fa-‘lam*, das häufig am Ende der Darstellung einer Operation gebraucht wird.

N und C weichen in vielen Einzelheiten voneinander ab, ohne daß sie inhaltlich differieren. In C ist die Darstellung etwas ausführlicher. Dafür erwähnt N ein Zahlenbeispiel für die Multiplikation ($20 \cdot 60$), ohne die Neunerprobe an dieser Aufgabe explizit vorzuführen.

Es verwundert, daß die Neunerprobe als Überprüfung einer Rechenoperation in DA nur an dieser Stelle erwähnt wird und nicht auch bei anderen Rechenarten, etwa bei der Subtraktion oder Division. Für die Division wird in Kapitel 10.4 und 10.5 eine andere Art der Probe gelehrt, nämlich die inverse Operation, in diesem Fall also die Multiplikation.

Die Neunerprobe ist offenbar indischen Ursprungs, jedoch ist sie dort bisher erst bei Āryabhaṭa II (10. Jahrhundert) nachgewiesen⁴³. Somit ist die Stelle in DA der älteste bis jetzt bekannte Beleg. Die Formulierung in DA wirkt ziemlich roh und etwas ungeschickt: die entscheidende Vereinfachung durch Bildung der Quersumme ist noch nicht bekannt. Die Möglichkeit, mit Hilfe der Quersumme den Neunerrest zu bestimmen, findet man z.B. bei al-Uqlīdisi⁴⁴ und bei Kūšyār ibn Labbān [Levey / Petruck 1965, S.70].

In LY wird die Neunerprobe wie in DA nur zur Überprüfung der Multiplikation (S.32,13-18; noch einmal S.38,13-17) und der Verdopplung (S.34,1-4) benutzt; für die Probe der Division wird die Multiplikation des Quotienten mit dem Divisor empfohlen (S.36,18-21). In LA/LP (S.94,4-8) wird gesagt, daß man die Halbierung überprüfen kann, indem man entweder das Ergebnis verdoppelt oder nachsieht, ob die *nota* des Ergebnisses halb so groß ist wie die *nota* der Ausgangszahl; da *nota* vermutlich auch hier den Neunerrest bezeichnet, kann die Neunerprobe also auch für die Halbierung

⁴²Siehe z.B. al-Uqlīdisi II.13 [Saidan 1973, S.204-207]: *wa-nusqituhū 9 . . 9*, „wir lassen ihn immerfort in 9 (zer)fallen“; Kūšyār [Levey / Petruck 1965, S.70-71]: *wa-tulqā minhā tis’a tis’a*, „es werden davon immerfort neun abgezogen“.

⁴³Siehe [Tropfke 1980, S.166]. Über die Frage nach dem Ursprung der Neunerprobe siehe auch [Saidan 1978, S.471-472].

⁴⁴Für ganze Zahlen in den Kapiteln II.13 und III.7; siehe auch [Saidan 1978, S.153-155. 195-196]. Über die verschiedenen bei den Arabern gebrauchten Proben siehe [Saidan 1978, S.469-471].

benutzt werden. Die Überprüfung der Multiplikation mit Hilfe der Neunerprobe wird in LA/LP im Anschluß an die Multiplikation recht ausführlich beschrieben (auf S.102,13-103,21). Auch die Division kann mit Hilfe der Neunerprobe überprüft werden; man kann aber auch durch Multiplikation des Quotienten mit dem Divisor feststellen, ob die Rechnung korrekt war (S.122,9-123,11). Bei der Multiplikation und Division erhält man den Neunerrest durch fortwährendes Subtrahieren (nicht: Dividieren) der 9.

In LA/LP und in LY wird wie in DA gesagt, daß bei Gleichheit der Prüfwahlen das Rechenergebnis richtig, bei Ungleichheit falsch ist. Es trifft nicht zu, daß – modern gesprochen – dem Autor von LA/LP bekannt war, daß die Neunerprobe für die Richtigkeit der Rechnung zwar notwendig, aber nicht hinreichend ist, da eine Formulierung, die in diese Richtung zu weisen scheint, sich nur in einer Handschrift findet und daher sicher ein späterer Zusatz ist⁴⁵. Die korrekte Formulierung findet man in arabischen und lateinischen Texten des 15. Jahrhunderts [Juschkewitsch 1964, S.41].

* * *

Kapitel 6: Capitulum divisionis (Division ganzer Zahlen)

DA: N, f.19v-20r; C, f.108r-v (Vogel 25,22-27,25; Allard 12,5-13,16)

(6) Das Kapitel 6 behandelt das allgemeine Verfahren der Division ganzer Zahlen; Beispiele folgen in Kapitel 7. Die Fachausdrücke für die Division und das Dividieren sind: *divisio* (arab.: *qisma*) und *dividere* (arab.: *qasama*). Das Verb *dividere* wird meistens mit *super*, aber auch mit *per* verbunden, wobei *super* eine wörtliche Wiedergabe des arabischen *‘alā* ist. Für „Dividend“ und „Divisor“ gibt es keine besonderen Namen; sie werden meist als „Zahl, die du teilen willst“ (*numerus quem vis/volueris dividere*) bzw. „Zahl, durch die du teilst“ (*numerus per/super quem vis/volueris dividere*) bezeichnet. Die arabischen Ausdrücke für „Divisor“ bzw. „Dividend“ sind: *maqsūm ‘alaihi* bzw. *maqsūm*.

Die wesentlichen Schritte bei der Division werden wie folgt beschrieben: Die höchste Stelle des Divisors wird unter die höchste Stelle des Dividenden gesetzt, falls diese kleiner ist; sonst wird der Divisor um eine Stelle nach rechts verrückt. Der Quotient wird bestimmt. Dies wird in DA so umschrieben, daß man eine Zahl sucht, die, wenn sie mit der letzten Stelle der unteren Zahl multipliziert wird, der darüber stehenden Zahl gleich wird oder ihr nahe kommt. Die Ziffer des Quotienten wird direkt über dem Dividenden an der Stelle der Einer des Divisors eingetragen, könnte aber auch unter der Stelle des Divisors geschrieben werden (*in directo eius super altiore numerum, quem dividis, vel sub eo*). Dann wird der Quotient mit allen Stellen des Divisors (von links nach rechts) multipliziert, die Teilergebnisse werden von den entsprechenden Stellen des Dividenden subtrahiert, und die Reste davon ersetzen diese Stellen. Hier verweist der Autor auf die Darstellung der Subtraktion am Anfang der Schrift, d.h. in Kapitel 2 (*facies in diminutione, quemadmodum diximus in inicio libri*). Dann wird der unten stehende Divisor um eine Stelle nach rechts verschoben (*mutabis universas differentias inferioris numeri, super quem dividis, una differentia versus dexteram*), und

⁴⁵Im Codex Paris, BN lat. 7359 (bei Allard: N) steht nach S.102,20: *Hec autem regula ostendit quomodo multiplicatio sit falsa, sed non probat quando sit vera. Sed hec probat que sequuntur*. Siehe hierzu [Juschkewitsch 1964, S.41, Anm. 71].

die nächste Stelle des Quotienten wird ebenso wie zuvor gesucht. Wenn oben an irgendeiner Stelle des Dividenden eine Null (*circulus*) vorhanden ist, so darf man diese nicht, wie bei der Multiplikation, übergehen, sondern muß auch in diesem Fall nach der geschilderten Methode verfahren. Auf diese Weise ergeben sich allmählich über dem Dividenden alle Ziffern des Quotienten. Das Ergebnis der Division wird in DA als das bezeichnet, „was der Eins zukommt“ (*ipsum erit, quod debetur uni*)⁴⁶. Man denkt also offenbar in Proportionen: Die Division $\frac{a}{b} = q$ ist äquivalent zur Proportion $a : b = q : 1$. Falls ein Rest übrig bleibt, handelt es sich hierbei um Bruchteile, die sich auf den Dividenden beziehen (*erunt partes unius ex numero, quem dividis*). Der Rest muß kleiner als der Divisor sein (*minus numero, super quem dividis*); andernfalls hat man einen Fehler begangen.

Die Textfassungen von C und N weichen teilweise stark voneinander ab, sind aber inhaltlich gleich und lassen trotz ihrer Unterschiede den gemeinsamen Ursprung erkennen.

In LY wird die Darstellung des allgemeinen Verfahrens bei der Division in einigen Zeilen abgehandelt (S.34,5-19). Dort werden die uns bekannten Fachausdrücke *divisor* und *dividendus* benutzt. Die allgemeine Methode kann knapp behandelt werden, weil sie anschließend durch Zahlenbeispiele veranschaulicht wird. – In LA/LP wird den allgemeinen Erörterungen mehr Platz eingeräumt (S.103,22-109,22). Man beginnt mit der Definition der Division. Auch hier werden Fachtermini verwendet (*dividens, dividendus*). Die recht ausführliche und klare Darstellung ähnelt in Aufbau und Formulierung dem Text von DA sehr. Es wird auch auf den Fall eingegangen, daß eine Stelle des Dividenden Null ist. Das Ergebnis gibt an, wie oft der Divisor im Dividenden enthalten ist bzw. der wievielte Teil davon er ist (*clarum erit quociens dividendus contineatur in dividendo, et insuper quota pars eius sit*).

* * *

Kapitel 7: *Capitulum in opere divisionis* (Verfahren bei der Division ganzer Zahlen)

DA: N, f.20r-v; C, f.108v-109v (Vogel 27,26-31,32; Allard 13,17-16,14)

(7.1) Während in Kapitel 6 das allgemeine Divisionsverfahren dargestellt wurde, wird es in diesem Kapitel an zwei Beispielen erläutert. Das Kapitel beginnt mit dem Hinweis, daß die Division invers zur Multiplikation ist (*Et scito quod divisio sit similis multiplicationi, sed est versa*)⁴⁷. Es fällt auf, daß dieser Hinweis erst jetzt kommt und nicht schon zu Beginn des Abschnitts über das Dividieren, d.h. am Anfang von Kapitel 6. Diese Erklärung wurde offenbar von al-Ḥwārizmī's Nachfolgern übernommen. So schreibt Abū l-Wafā', seine Vorgänger hätten über die Division höchstens gesagt, daß sie zur Multiplikation invers sei; er selbst definierte sie dagegen als „Teilung einer von zwei Zahlen nach der Anzahl der Einheiten der anderen“⁴⁸. Dies entspricht der Erklärung der Division in LA/LP (S.103,24-104,2): *Numerum per numerum dividere est*

⁴⁶Bei al-Baġdādī II.9 [Saidan 1985, S.128ff.] heißt es: *wa-ḡālīka* (o.ä.) *naṣīb al-wāḥid*, „und das ist der Anteil (an) der Eins“.

⁴⁷So N; C hat stattdessen *sed hec fit e converso* und fügt noch eine Begründung hinzu: *quia in divisione minuius et ibi addimus, idest in multiplicatione*.

⁴⁸So [Juschkewitsch 1964, S.39]. Ähnlich bei al-Baġdādī, I.7,1 [Saidan 1985, S.62]: „Das bei der Division Gesuchte ist die Bestimmung des Anteils der Eins am Gesamten“; bei Teilung einer Zahl durch sich selbst: „Jeder Eins (Einheit) des Divisors entspricht eine Eins (Einheit) des Dividenden“.

maiores secundum quantitatem minoris partiri, uidelicet minorem de maiore totiens subtrahi quociens in eo poterit inueniri.

Zur Erläuterung des Divisionsverfahrens wird das Beispiel $46468 : 324 = 143\frac{136}{324}$ sehr ausführlich vorgerechnet. Im einzelnen werden folgende Rechenschritte vorgenommen:

Aufstellen	4 6 4 6 8 3 2 4
Division	1 4 6 4 6 8 3 2 4
Subtraktion	↓ 1 1 6 4 6 8 3 2 4
$\boxed{1} \cdot 3, \boxed{1} \cdot 2, \boxed{1} \cdot 4$	↓ 1 1 4 4 6 8 3 2 4
	↓ 1 1 4 0 6 8 3 2 4
Verschieben	1 1 4 0 6 8 3 2 4
Division	1 4 1 4 0 6 8 3 2 4
Subtraktion	↓ 1 4 2 0 6 8 3 2 4
$\boxed{4} \cdot 3, \boxed{4} \cdot 2, \boxed{4} \cdot 4$	↓ 1 4 1 2 6 8 3 2 4
	↓ 1 4 1 1 0 8 3 2 4
Verschieben	1 4 1 1 0 8 3 2 4
Division	1 4 3 1 1 0 8 3 2 4
$11 : 3 = 3$	

Das Ergebnis bei Teilung einer Zahl durch eine größere: „... das ist der Anteil (arab.: *naṣīb*) der Eins am Divisor“; bei Teilung einer Zahl durch eine kleinere (S.63): „... das ist der Anteil einer jeden Eins am Divisor“.

	↓	↓	↓
	1 4 3	1 4 3	1 4 3
Subtraktion	<u>2</u> 0 8	<u>1</u> 4 8	<u>1</u> 3 6
3 · 3, 3 · 2, 3 · 4	3 2 4	3 2 4	3 2 4

 Ergebnis: $143\frac{136}{324}$

fett:	Ziffern, mit denen operiert wird
↓	Stellen, an denen Rechnungen vorgenommen werden
<i>kursiv:</i>	Teilergebnisse bzw. Ergebnisse
<u>unterstrichen:</u>	Ziffern, die sich ändern

In dem Schema, das sich am Ende ergibt, steht also der Quotient oben und der Rest in der Mitte. Der Divisor ist unten stehen geblieben, während der Dividend verschwunden ist und durch den Rest ersetzt wurde. Die Figur entspricht dem indischen Brauch, eine gemischte Zahl wiederzugeben.

Die Darstellung ist im Prinzip klar, aber unübersichtlich, da jeder Einzelschritt zwar eingehend verbal erläutert wird, die dazugehörigen Figuren (bis auf die Ausgangs- und Endposition) aber fehlen.

Auch hier weichen die Texte in N und C an vielen Kleinigkeiten, aber nicht im Wesentlichen, voneinander ab. Die Anfangs- und Endstellungen sind in N vorhanden, in C fehlen sie.

(7.2) Die Division wird durch ein zweites Beispiel erläutert, in dem eine mehrstellige Zahl durch eine einstellige geteilt wird und der Dividend Nullen besitzt: $1800 : 9$. Auch hier werden die einzelnen Schritte beschrieben. Dafür, daß hier die höchste Stelle des Divisors nicht unter die höchste, sondern unter die zweithöchste Stelle des Dividenden gesetzt werden muß, wird nicht die korrekte Begründung gegeben, daß die höchste Divisorstelle (9) größer als die höchste Dividentenstelle (1) ist, sondern es wird unrichtig behauptet, dies geschehe, weil 9 größer als 8 sei. Nach der ersten Subtraktion ($18 - 2 \cdot 9$) bleiben oben nur zwei Nullen stehen. Die einzelnen Schritte, die im folgenden verbal beschrieben werden, sind⁴⁹:

1800 9	2 1800 9	2 00 9	2 00 9	20 00 9	20 00 9	200 00 9
-----------	----------------	--------------	--------------	---------------	---------------	----------------

Das Ergebnis der Division ist also 200, und es bleibt kein Rest. Es wird dann gesagt, daß man immer dann, wenn im Verlauf der Division nur noch Nullen stehenbleiben, diese Nullen an die Stellen des Quotienten (die oben eingetragen sind) anhängen könne; dies sei die „leichteste Form“⁵⁰, d.h. eine „Abkürzung“ (*abbreviatio*), der Division.

⁴⁹ Auch hier werden die *figure* der Zwischenergebnisse nicht angegeben, ebenso wenig wie die Ausgangsstellung.

⁵⁰ In N heißt es: *hec est proxima divisio*, in C: *hec est quedam abbreviatio propinqua* (Allard verändert dies ohne Grund in: *propitia*). Der Ausdruck *proximus* ist eine Übersetzung des arabischen *aqrab* (Grundbedeutung: „näher“) und bedeutet: „der leichteste, am einfachsten zu verstehende“; entsprechend *propinquus*.

Die Texte in N und in C weichen in vielen Kleinigkeiten voneinander ab. Auffällig sind eine größere Lücke in N, die zu Lasten eines Abschreibers geht, und weitere Fehler in N gegenüber C⁵¹. Es gibt in N und C offenbar verschiedene Vorstellungen darüber, ob bei Zahlen, die mit Nullen aufhören, die von Null verschiedenen Ziffern vor oder hinter den Nullen stehen. So heißt es in C: *eruntque ibidem duo circuli post quos erunt duo und circuli ante quos nullus sit numerus*, in N aber: *eruntque ibidem duo circuli, ante quos erunt duo und circuli, post quos nullus fuerit numerus*. Am Ende des Kapitels gebrauchen N und C allerdings beide das Wort *ante*⁵². – In N wird hier für „addieren“ auch der Ausdruck *augere super* gebraucht, während in C *addere super* steht.

In LY und LA/LP werden – bis auf eine Ausnahme – andere Divisionsbeispiele behandelt als in DA: In den verschiedenen Fassungen von LY stehen die Aufgaben 144 : 12 und 25920 : 24 (S.34,14-36,16). Das Hauptbeispiel in LA/LP ist: 228604 : 236 (S.109,23-119,23). Danach wird dasselbe Beispiel 1800 : 9 wie in DA behandelt (S.120,1-122,5), ebenfalls, um zu zeigen, wie man verfährt, wenn im Dividenden Nullen bleiben (*si ... remanserint circuli post quos nullus sit numerus*). Schließlich wird noch ein weiteres Beispiel angekündigt, das aber nicht ausgerechnet wird (200000 : 23; S.122,6-8). – Divisionsaufgaben in späteren lateinischen Texten sind: 2432 : 19 und 100 : 11 („Salem-Algorismus“, [Cantor 1865, S.6-7]); 452 : 23 („Frankenthal-Algorismus“, [Allard 1978, S.131]).

In anderen arabischen Texten wird die Division ganzer Zahlen ähnlich wie in DA dargestellt. Bei al-Uqlīdisī werden – ähnlich wie bei der Multiplikation – eine Reihe von Aufgaben vorgerechnet, wobei als Divisor zunächst eine einstellige Zahl und dann auch mehrstellige Zahlen gewählt werden⁵³. Kūšyār ibn Labbān gibt keine allgemeinen Regeln, sondern erläutert das Verfahren am Beispiel 5625 : 254 [Levey / Petruck 1965, S.58-60].

In DA wird am Ende des Kapitels abschließend vermerkt, daß für Divisionen und Multiplikationen mit ganzen Zahlen⁵⁴ keine weiteren Kenntnisse erforderlich seien und man sich jetzt der Multiplikation und Division von Brüchen sowie dem Wurzelziehen zuwenden könne. Tatsächlich werden in den restlichen Kapiteln diese Themen abgehandelt.

* * *

Kapitel 8: Capitulum in multiplicatione fractionum (Multiplikation von Brüchen)

DA: N, f.20v; C, f.109v-110v (Vogel 31,33-35,3; Allard 16,15-17,25)

{8} In den Kapiteln 8-12 wird das Rechnen mit Brüchen und gemischten Zahlen behandelt, und zwar zunächst die Multiplikation (Kapitel 8-9), dann die Division (Ka-

⁵¹Z.B. die Auslassung von *postea unum*.

⁵²Das Schwanken zwischen *post* und *ante* beruht auf der unterschiedlichen Schreibrichtung im Arabischen und Lateinischen. So steht bei der Zahl 100 die Eins im Arabischen „hinter“ (*post*), im Lateinischen „vor“ (*ante*) den Nullen. Wenn nun hier die ursprüngliche Übersetzung aus dem Arabischen „*post*“ hatte, so verwirrte dies die lateinischen Schreiber, für die dieselbe Stelle ja „*ante*“ war, und so änderten sie das Wort gelegentlich in ihrem Sinn ab, aber nicht durchgehend und konsequent.

⁵³In Kapitel I.5 [Saidan 1978, S.55-59]; weitere Beispiele in Kapitel II.12 [Saidan 1978, S.151-152].

⁵⁴In N gibt es hier den Zusatz: *et in ceteris, que secuntur*. Dies könnte eine Übersetzung des arabischen *wa-mā yatba'u dālika* sein (wörtlich: *et quod sequitur illud*).

pitel 10), dann erst die Schreibweise, Addition, Subtraktion, Halbieren und Verdoppeln (Kapitel 11), schließlich Multiplikation und Division von gewöhnlichen Brüchen (Kapitel 12). In DA wird nicht grundsätzlich zwischen dem Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen und mit Sexagesimalbrüchen unterschieden; vielmehr versucht man zu zeigen, daß das Rechnen mit allen Arten von Brüchen nach denselben Regeln erfolgt. Im allgemeinen behandelt man aber zunächst die Sexagesimalbrüche und geht erst dann auf die gewöhnlichen Brüche und auf die gemischten Zahlen ein. Der Fachausdruck für „Bruch“ (gleich, ob gewöhnlicher oder Sexagesimalbruch) ist *fractio* (= arab. *kasr*, plur. *kusūr*). Für „gemischte Zahlen“ gibt es keinen Spezialbegriff, sondern Umschreibungen wie *collectio integri numeri ac fractionis*.

(8.1) Es gibt unzählige Namen für die Brüche. Zunächst werden Namen von Stammbrüchen genannt („einhalb“, „ein Drittel“, ..., „ein Zehntel“, „ein Dreizehntel“, „ein Achtzehntel“). Hierbei werden die Stammbrüche von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{10}$ mit Hilfe der Zahlwörter für die Nenner gebildet, während Stammbrüche $\frac{1}{n}$ mit $n > 10$ als „ein Teil von n “ bezeichnet werden (*una pars ex tredecim* usw.). Dies entspricht der Gewohnheit der Araber, die die Stammbrüche bis 10 auf ihren „Ausgangspunkt, -wert“ (*maḥrağ*, lat.: *exitus*) bezogen⁵⁵, während es für Zahlen über 10 heißt: *ğuz' min 13* (lat.: *una pars ex tredecim*)⁵⁶.

Außer diesen gewöhnlichen Brüchen gibt es noch Sexagesimalbrüche, d.h. Brüche, die auf der 60 beruhen. Sie wurden nach Ansicht des Autors von DA von den Indern benutzt; im Text heißt es: *Sed Indi posuerunt exitum partium suarum de LX*. Die Eins wird also in 60 Teile geteilt, die „Minuten“ genannt werden, jede Minute ihrerseits in 60 „Sekunden“, jede Sekunde in 60 „Terzen“, diese wiederum in „Quarten“ usw. Auch bei dieser Einteilung spricht man von „Stellen“ (*differentie*): die Ganzen oder „Grade“ bilden die erste Stelle, die Minuten die zweite, usw. bis zur 9. und 10. Stelle.

Die einleitenden Sätze in DA über die Brüche zeigen, daß die gewöhnlichen Brüche, speziell die Stammbrüche, im täglichen Leben der Araber ebenso wie in allen anderen Kulturen bekannt waren, während die Sexagesimalbrüche einer anderen, der wissenschaftlichen, Welt angehörten. Der Autor von DA schreibt sie den Indern zu. Daß sie lange vor den klassischen Texten der Inder auch von den griechischen Astronomen benutzt wurden und daß sie letztlich auf das sexagesimale Stellenwertsystem der Babylonier zurückgehen, war ihm wohl nicht bekannt. – Andere arabische Autoren (z.B. al-Uqlīdisī und al-Bağdādī) behandeln die Sexagesimalbrüche, außerdem aber auch Brüche, die sich aus den Unterteilungen von Gewichten und Maßen ergeben, und andere Arten von Brüchen.

Ganz ähnlich wie in DA werden auch in LA/LP die Brüche eingeführt (S.124,14-126,7). Auch dort wird kurz vermerkt, daß man entsprechend der unendlichen Anzahl der Zahlen auch unendlich viele Brüche angeben kann, bevor der Autor ausführlich auf die Sexagesimaleinteilung der Brüche eingeht, die von den Indern stammen soll. Er benennt die einzelnen Stellen dieser Brüche und gibt an, wie viele Bruchteile eine Einheit ausmachen. In LY (S.38,18-39,16) wird zwischen Sexagesimal- und anderen Brüchen unterschieden. Der Text beginnt mit der Feststellung, daß ein Grad aus 60

⁵⁵Dies wird auch umschrieben mit Formulierungen wie: *min aina yahrūgu al-kusūr* („von wo die Brüche ausgehen“); siehe al-Uqlīdisī I.6 [Saidan 1973, S.84].

⁵⁶Siehe hierzu die Erläuterungen bei al-Uqlīdisī I.6 [Saidan 1978, S.60].

Minuten, 3600 Sekunden und 216000 Terzen besteht. Es folgen allgemeine Aussagen über die Eins, die *multitudo* und *magnitudo*. Der Begriff des „Teils“ führt dann auch auf die Proportionen und die Brüche. Dieser Abschnitt steht in der Tradition der Griechen, nicht der Araber.

Nach den allgemeinen Bemerkungen über die Brüche wird in DA erklärt, wie die Stellenzahl bestimmt werden kann, wenn zwei Sexagesimalbrüche miteinander multipliziert werden. Wenn eine ganze Zahl mit einem Bruch multipliziert wird, wird die Art (*genus*) des Bruchs nicht verändert. Z.B. gilt: $2^\circ \cdot 2' = 4'$; $3^\circ \cdot 6''' = 18'''$. Bei der Multiplikation von Brüchen werden die Stellen „zusammengefügt“ (*colligis utrasque differentias*), d.h. „addiert“, und die Summe bezeichnet die Stellenzahl des Ergebnisses. Wir erfahren, welche Bruchteile man erhält, wenn man Minuten mit Minuten, Sekunden mit Sekunden usw. multipliziert. Außerdem werden zwei Beispiele gebracht: $6' \cdot 7' = 42''$ und $7'' \cdot 9' = 63''' = 1'' 3'''$.

Der Text in N ist überall korrekt, während C Fehler aufweist⁵⁷. Die Textfassungen von N und C weichen in vielen Kleinigkeiten voneinander ab. U.a. erwähnt C, aber nicht N, daß das Produkt aus Brüchen ähnlich ist dem Produkt aus ganzen Zahlen.

Die Stellenregeln, die bei Multiplikationen von Graden und Sexagesimalbrüchen miteinander anzuwenden sind, werden bei al-Uqlīdisī recht klar angegeben (Kapitel I.18, [Saidan 1978, S.90]).

(8.2) Nachdem in Kapitel 8.1 einige Beispiele für Multiplikationen von Sexagesimalbrüchen durchgerechnet wurden, behandelt der Autor von DA jetzt eine Aufgabe, bei der gemischte Zahlen multipliziert werden, die gewöhnliche Brüche enthalten. Diese werden allerdings in Sexagesimalbrüche verwandelt, so daß die Rechnung nach dem schon bekannten Verfahren ausgeführt werden kann. Es geht um die Multiplikation $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2}$. Die einzelnen Rechenschritte sind: $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} = 90' \cdot 90' = 8100'' = 135' = 2^\circ 15' = 2\frac{1}{4}$. Die Bruchteile jedes Faktors werden also als Sexagesimalbrüche geschrieben. Dann werden die Faktoren in Einheiten dieses Sexagesimalbruchs verwandelt. Die sich daraus ergebenden Zahlen werden im Dezimalsystem multipliziert. Das Ergebnis ist ein Sexagesimalbruch, dessen Stelle nach Kapitel 8.1 bekannt ist. Danach wird das Ergebnis in größere Sexagesimalbrüche verwandelt, indem es sukzessive durch 60 dividiert wird. Zum Schluß wird der Bruchanteil noch durch einen gewöhnlichen Bruch ausgedrückt. Gewöhnliche Brüche werden hier also über den Umweg der Sexagesimalbrüche miteinander multipliziert. Dies unterstreicht den Vorrang der Sexagesimalbrüche gegenüber den gewöhnlichen Brüchen. Da jeder Faktor in Einheiten der niedrigsten in ihm enthaltenen Stelle ausgedrückt wird, ergeben sich ganze Zahlen, so daß für die Zwischenrechnung die Regeln der Multiplikation ganzer Zahlen angewandt werden können.

In LY und LA/LP stehen die Abschnitte über die Multiplikation von Brüchen, die dem Text von DA entsprechen, auf S.39,17-41,10 (LY) bzw. S.126,8-130,9 (LA/LP). In LY wird zunächst festgestellt, daß Brüche bei Multiplikation mit Brüchen kleiner werden; dies wird an den Beispielen $12' \cdot 24'$ und $14' \cdot 15''$ gezeigt. Um die Stellenregel bei der Multiplikation von Sexagesimalbrüchen zu erklären, werden in den verschiedenen Fassungen von LY mehrere Beispiele gebracht, darunter auch die beiden Multiplika-

⁵⁷Dort steht z.B.: Das Produkt von Sekunden mit Sekunden sind Terzen, von Terzen mit Terzen Quarten, von Quarten mit Quarten Quinten.

tionen $6' \cdot 7'$ und $9' \cdot 7''$, die auch in **DA** behandelt werden⁵⁸. Schließlich wird auch das Beispiel $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2}$ durchgerechnet, wobei wie in **DA** die Faktoren in Minuten verwandelt, diese miteinander multipliziert und dann durch Division durch 60 wieder in Grad und Minuten zurückverwandelt werden.

In **LA/LP** wird zunächst dargelegt, aus wie vielen Minuten, Sekunden und Terzen ein Grad besteht. Dann wird die allgemeine Stellenregel für die Multiplikation von Sexagesimalbrüchen formuliert⁵⁹ und anhand mehrerer Beispiele erläutert, die schon aus **DA** bekannt sind⁶⁰; dabei wird auf Parallelen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen hingewiesen. Bei der Multiplikation von Zahlen, die aus ganzen Zahlen und Brüchen zusammengesetzt sind (also von gemischten Zahlen), gelten besondere Regeln: Hier muß man jeden Faktor auf den kleinsten in ihm enthaltenen Bruch zurückführen (*unumquemque ad suas fractiones reducere debetis*) und dann diese Bruchzahlen multiplizieren. Zur Verdeutlichung wird in **LA/LP** dasselbe Beispiel wie in **DA**, $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2}$, auf dieselbe Weise wie dort durchgerechnet. Der Text von **LA/LP** erinnert im Aufbau und zum Teil auch in der Formulierung sehr stark an **DA**. Zweifellos geht er auf **DA** oder dessen Vorlage zurück, ist aber ausgereifter und leichter verständlich.

* * *

Kapitel 9: Capitulum in multiplicatione minutorum ac secundorum (Multiplikation von Brüchen, wenn diese aus Minuten und Sekunden zusammengesetzt sind)

DA: N, f.21r; C, f.110v (Vogel 35,4-27; Allard 17,26-18,24)

In diesem Kapitel wird an einem Beispiel erklärt, wie man kompliziertere (Sexagesimal-)Brüche multipliziert, die aus Minuten und Sekunden bestehen. Das Verfahren ist schon im vorhergehenden Kapitel beschrieben worden: Man verwandelt die Faktoren in ihre kleinsten Bruchteile, multipliziert diese und reduziert das Ergebnis, indem man es durch 60 dividiert, sooft es geht.

Das Beispiel ist: $2^{\circ} 45' \cdot 3^{\circ} 10' 30''$. Die einzelnen Zwischenschritte sind: $2^{\circ} 45' \cdot 3^{\circ} 10' 30'' = 165' \cdot 190' 30'' = 165' \cdot 11430'' = 1885950''' = 31432'' 30''' = 523' 52'' 30''' = 8^{\circ} 43' 52'' 30'''$. Dies ist die Art der Inder⁶¹.

Auch hier differieren die Texte in **N** und **C** an vielen Stellen, geben aber denselben Inhalt wieder.

Dieselbe Aufgabe $2^{\circ} 45' \cdot 3^{\circ} 10' 30''$ wird auch in **LY** (S.41,11-24) in derselben Weise wie in **DA** behandelt. Die Stellen des Ergebnisses werden in einem Schema so untereinander geschrieben, wie es in **DA** später (in Kapitel 11) gelehrt wird. In **LA/LP** finden wir nicht dieses Beispiel, sondern stattdessen die Aufgabe $2^{\circ} 10' \cdot 1^{\circ} 2' 30''$ (S.131,21-133,22). Das Verfahren bei der Multiplikation von Grad, Minuten, Sekunden mit Grad, Minuten, Sekunden und Terzen wurde in **LA/LP** zuvor dargestellt (S.130,10-131,20). Es entspricht natürlich der allgemeinen Methode, wie man sie auch in **DA**, Kapitel 8.1 und 8.2, findet.

⁵⁸In **LY I** werden erwähnt: $25^{\circ} \cdot 47'$, $4^{\circ} \cdot 6''$; in **LY III** stehen: $2^{\circ} \cdot 2'$, $3^{\circ} \cdot 6'''$, $72' \cdot 3''$, $6' \cdot 7'$, $9' \cdot 7''$.

⁵⁹*Et omnis fractio multiplicata in quamlibet fractionem decrescit in totam partem eius quota ipsa est integri.*

⁶⁰ $2^{\circ} \cdot 2'$, $3^{\circ} \cdot 6'''$, Minuten · Minuten, Minuten · Sekunden, ...

⁶¹In **C** heißt es: *hic ordo est quo usi sunt Indi super quem figurare numerum suum*, in **N**: *super hunc modum voluerunt Indi figurare numerum suum*, wobei der Kopist statt *figurare* das unverständliche *finare* geschrieben hat.

Dasselbe Verfahren zur Multiplikation von komplizierteren Sexagesimalbrüchen wie in DA wird auch in anderen arabischen Texten gelehrt. So schreibt al-Uqlīdisī, daß man beide Faktoren in die Ordnung ihrer letzten Stelle verwandeln soll⁶². Die sich ergebenden ganzen Zahlen werden multipliziert und die Stelle des Produkts bestimmt. Danach werden durch sukzessives Dividieren durch 60 und durch Notieren der Reste von unten nach oben die einzelnen Sexagesimalstellen des Produkts bestimmt⁶³.

In DA endet das Kapitel mit dem Hinweis, daß es auch eine kürzere Methode gebe⁶⁴. Hiermit ist wahrscheinlich die direkte Multiplikation von Sexagesimalbrüchen nach derselben Art gemeint, wie wir heute Dezimalbrüche multiplizieren. Da das „kleine Einmaleins“ auf der Basis 60 aber bis $59 \cdot 59$ reicht, wäre dafür eine sexagesimale Multiplikationstabelle unbedingt erforderlich. Ein einheitliches Sexagesimalsystem für ganze Zahlen und Brüche wird mit den zugehörigen Einmaleins-Tabellen z.B. bei Kušyār ibn Labbān gelehrt⁶⁵. In den Texten LY und LA/LP gibt es keinen Hinweis auf diesen *modus abbreviatus*.

* * *

Kapitel 10: Capitulum in divisione fractionum (Division von Brüchen)

DA: N, f.21r-v; C, f.110v-111r (Vogel 35,28-37,24; Allard 18,25-20,6)

Kapitel 10 behandelt die Division von Brüchen. Da nicht zwischen Sexagesimalbrüchen und gewöhnlichen Brüchen unterschieden wird, darf man wohl annehmen, daß die im folgenden gelehrtten Vorschriften für alle Brüche gelten. Tatsächlich werden zunächst Sexagesimalbrüche behandelt (siehe aber 10.2); die Division von gewöhnlichen Brüchen ist das Thema von Kapitel 12.

(10.1) Zunächst wird die allgemeine Regel für die Division von zwei Brüchen oder von gemischten Zahlen (die aus ganzen Zahlen und Brüchen zusammengesetzt sind) formuliert: Beide zu dividierenden Zahlen werden in Einheiten des kleinsten Teils (d.h. der niedrigsten in beiden enthaltenen Stelle) verwandelt; dann erfolgt die Division; das Ergebnis sind ganze Zahlen, weil die Zahlen, die dividiert wurden, von der gleichen Art (*unius generis*) waren.

Der Text in N und C weicht in vielen Kleinigkeiten voneinander ab. Eine „Zahl mit Bruch“ wird in N konsequent *numerus et fractio* genannt⁶⁶, in C *numerus cum fractione*. Für die Verwandlung eines Bruches in seine kleinsten Teile verwendet N

⁶²Kapitel I.18: „wir lösen jede von den beiden auf, bis sie beide von der Art der letzten Stelle der beiden werden.“

⁶³Kapitel I.18, [Saidan 1978, S.90-91]. Al-Uqlīdisī sagt, daß es auch ein anderes Verfahren gibt, indem man feststellt, aus wie vielen Einheiten der kleinsten Stelle ein Grad besteht, und dann das erhaltene Produkt durch diese Zahl dividiert; auf diese Weise kann man die einzelnen Sexagesimalstellen in absteigender Folge, also beginnend mit Graden, erhalten.

⁶⁴N hat: *Est quoque ei alius modus abbreviatus*; in C steht *brevior* statt *abbreviatus*. Möglicherweise entspricht *abbreviatus* dem arabischen *aqrab* = „leichter verständlich, einfacher“; vgl. dazu die Bemerkungen zu Kapitel 7.2.

⁶⁵Bei [Levey / Petruck 1965] wird die Tafel auf S.72-74 behandelt und das mit ihrer Hilfe mögliche Multiplizieren auf S.80-82. Die Tafel selbst fehlt in der einzigen erhaltenen Handschrift. Siehe S.98 und die Erläuterungen auf S.16-18.

⁶⁶Bei al-Uqlīdisī und al-Baḡdādī steht an den entsprechenden Stellen ebenfalls „und“.

die Phrase *confringes*⁶⁷ *unumquemque eorum, quousque reddas*⁶⁸ *eos ex uno genere*, während C weniger konkret *facies utrumque numerum unius generis* schreibt. C benutzt für die kleinste Stelle mehrfach den Ausdruck *inferior differentia*; dagegen tritt in N das Wort *differentia* nur einmal auf (*ultima differentia* als Synonym zu *ultima fractio, que fuerit in eis*).

Allgemeine Regeln über die Division von Brüchen findet man auch in LY (S.42,1-17) und in LA/LP (S.134,14-137,10). Sie stimmen inhaltlich mit DA überein, jedoch unterscheiden sie sich in der Formulierung. Während in LY die Bruchteile nicht namentlich genannt werden, ist in LA/LP von sexagesimalen Teilen die Rede (*minuta, secunda, tercia*), so daß man vermuten kann, daß die Regeln dort für Sexagesimalbrüche formuliert wurden.

Bei al-Uqlīdisī und bei Kūšyār ibn Labbān wird die Division von Brüchen an verschiedenen Stellen behandelt: al-Uqlīdisī verwandelt, falls es sich um gewöhnliche Brüche oder um gemischte Zahlen mit gewöhnlichen Brüchen handelt, diese in „gleichartige“ Brüche (d.h. er verwandelt den Dividenten und den Divisor in unechte Brüche) und multipliziert dann kreuzweise⁶⁹. Ein anderes Verfahren, bei dem gemischte Zahlen nicht in unechte Brüche verwandelt werden müssen, wird später vorgestellt⁷⁰. Kūšyār behandelt zunächst die Division ganzer Zahlen und sagt dann, daß man ganze Zahlen mit Brüchen (d.h. gemischte Zahlen) in ähnlicher Weise wie ganze Zahlen dividieren kann, indem man die Ganzen in Einheiten des kleinsten Bruches verwandelt [Levey / Petruck 1965, S.60]. Da er auf sein Multiplikationskapitel verweist, in dem auch das Multiplizieren von Sexagesimalbrüchen behandelt wird, bezieht sich seine Divisionsvorschrift offenbar auch auf Sechzigerbrüche. In einem späteren Kapitel lehrt Kūšyār das Dividieren mit Hilfe von sexagesimal aufgebauten Multiplikationstafeln⁷¹. Die Vermischung von Sexagesimal- und Dezimalrechnung, d.h. die Umwandlung sexagesimaler Größen in dezimale, das Rechnen mit diesen und das anschließende Rückverwandeln in das Sechzigersystem, war typisch für das arabische Vorgehen [Levey / Petruck 1965, S.18-19].

(10.2) Zur Erläuterung der Regel werden drei Beispiele gebracht. Beim ersten Beispiel ($15 \text{ tercie} : 6 \text{ tercie}$, also $\frac{15}{3} : \frac{6}{3}$) bemerkt der Autor, daß $15 \text{ tercie} = 5 \text{ Ganze}$ und $6 \text{ tercie} = 2 \text{ Ganze}$ sind. Das Ergebnis ist $2\frac{1}{2}$. Die Fachausdrücke, die in diesem Abschnitt in DA für die *genera* benutzt werden, deuten darauf hin, daß die Regel sowohl für Sexagesimalbrüche (z.B. *minuta, secunda, tercia*) als auch für gewöhnliche Brüche (z.B. *medietates, tercie, quarte*) gilt. Juschkewitsch nimmt jedoch an, daß die Divisionsregel in der arabischen Vorlage vermutlich nur für Sexagesimalbrüche gedacht war und der Kopist oder Bearbeiter die Aufgabe $15''' : 6'''$ mit der Aufgabe $\frac{15}{3} : \frac{6}{3}$ verwechselte⁷².

⁶⁷ Al-Uqlīdisī gebraucht *halla*, „auflösen“.

⁶⁸ Dem *reddere* entspricht bei al-Uqlīdisī *ǧa'ala*; man findet aber auch *ǧannasa*, „vom selben *genus* machen“ (abgeleitet von *ǧins*, „Art“).

⁶⁹ Kapitel I.14 und IV.14 [Saidan 1978, S.82-93. 282-284].

⁷⁰ In Kapitel II.14 [Saidan 1978, S.156-158].

⁷¹ [Levey / Petruck 1965, S.84-86]; Erklärungen dazu auf S.17-20.

⁷² [Juschkewitsch 1964, S.44, Anm.76]. Eine solche Verwechslung ist wegen der Ähnlichkeit von *tercia* und *tercie* naheliegend.

Dieselbe Aufgabe gibt es auch in **LY** (S.42,18-21). Es ist bemerkenswert, daß auch hier von Dritteln (*tercie*) und nicht von Terzen (*tercia*) geredet wird. In **LA/LP** wird ein anderes Beispiel behandelt ($1^\circ 30' : 2^\circ$; S.137,11-138,4).

Die Texte in **N** und **C** weichen in vielen Kleinigkeiten voneinander ab. Auffällig ist, daß in **C** das Dividieren immer durch *dividere per*, in **N** aber (mit einer Ausnahme) durch *dividere super* bezeichnet wird. **N** steht also dem Arabischen näher. Während **N** schreibt, daß sich das Ergebnis $2\frac{1}{2}$ *de genere divisionis* ergibt, heißt es bei **C**: *de equalitate divisionis*.

(10.3) Das zweite Beispiel $10'' : 5'$ behandelt den Fall, daß der Dividend kleiner als der Divisor ist. Gemäß der Divisionsregel müssen die $5'$ in Sekunden verwandelt werden. Dies führt zur Division $10 : 300$ und zur Erkenntnis, daß keine ganze Zahl herauskommt, sondern ein (echter) Bruch. Es ergeben sich also 0 Ganze. Die 10 Sekunden werden durch Multiplikation mit 60 in Einheiten der nächsten Sexagesimalstelle, also Terzen, verwandelt. Da $600''' : 300'' = 2'$ sind, ergibt sich als Lösung: $0^\circ 2'$. (Es wird also gerechnet: $10'' : 5' = 10'' : 300'' = 600''' : 300'' = 2'$.) Dann wird begründet, warum es sich bei dem Ergebnis um Minuten handelt. In **N** ist der Text korrekt, während **C** als Ergebnis fälschlicherweise $2''$ statt $2'$ schreibt (an den entscheidenden Stellen steht zweimal *secunda* statt *minuta*).

Dasselbe Beispiel findet man auch in **LY** (S.43,4-11) und in **LA/LP** (S.138,5-11). Dabei fällt auf, daß sowohl **LY** als auch **LA/LP** bei dieser Aufgabe ebenfalls zum falschen Ergebnis $2''$ kommen. Dies zeigt, daß **LY** und **LA/LP** nicht auf der korrekten Textfassung von **N**, sondern auf der fehlerhaften Version beruhen, der auch **C** angehört.

(10.4) Zur Überprüfung der Division kann die Probe durchgeführt werden, indem der Quotient mit dem Divisor multipliziert wird; dies ergibt den Dividenten. Das Verfahren wird an zwei Beispielen verdeutlicht: $50 : 10 = 5$ und $10'' : 5' = 2'$. Der Text in **N** ist korrekt, während in **C** im zweiten Beispiel – wie schon im vorhergehenden Abschnitt – von dem falschen Ergebnis $2''$ statt $2'$ ausgegangen wurde, so daß die Probe nicht stimmt.

(10.5) Als drittes Beispiel für die Division wird die Aufgabe $10' : 5'''$ gerechnet. Die Rechnung lautet: $10' : 5''' = 36000''' : 5''' = 7200^\circ$. Zur Überprüfung rechnet man $7200^\circ \cdot 5''' = 36000''' = 600'' = 10'$. Ausrechnung, Ergebnis und Probe sind in **DA** korrekt. Diese Aufgabe wird in **LY** und in **LA/LP** nicht behandelt.

* * *

Kapitel 11: Capitulum in collectione integri numeri ac fractionis, que est augmentatio numeri in invicem (Schreibweise von Sexagesimalbrüchen; Rechenoperationen mit ihnen: Addition, Subtraktion, Halbieren, Verdoppeln)

DA: **N**, f.21v; **C**, f.111r-v (Vogel 37,25-39,15; Allard 20,7-21,20)

Kapitel 11 geht auf die Schreibweise von (Sexagesimal-)Zahlen ein, die aus ganzen Zahlen und Bruchteilen zusammengesetzt sind, und behandelt einige Rechenoperationen mit ihnen (Addition, Subtraktion, Halbieren, Verdoppeln). Die Zusammenfügung solcher Zahlen wird in der Überschrift mit dem Begriff für „Addition“ (*collectio*, arab.: *ġamʿ*) bezeichnet. Die Erklärung, daß es sich um eine *augmentatio numeri in invicem* handelt, soll andeuten, daß die beiden betroffenen Zahlen sich bei jeder dieser Rechen-

operationen wechselseitig vergrößern. Eine ganz ähnliche Überschrift gibt es auch bei al-Bağdādī⁷³.

(11.1) Zunächst wird angegeben, wie derartige gemischte Zahlen geschrieben (*constituere*) werden: Die Ganzen und ihre Sexagesimalteile werden untereinander angeordnet. Falls eine Stelle nicht besetzt ist, werden zwei Nullen geschrieben. Als Beispiel für einen in den neuen Ziffern geschriebenen Sexagesimalbruch dient die Zahl $12^{\circ} 30' 45'' 0''' 50''''$ (in moderner Notation). Die Darstellung ist in DA recht klar. In C fehlt die Figur; in N ist sie vorhanden. Dasselbe Beispiel mit der allgemeinen Anweisung findet man auch in LY (S.44,1-12) und in LA/LP (S.138,12-139,22).

(11.2) In diesem Abschnitt wird offenbar die Addition von Sexagesimalbrüchen behandelt. Die Darstellung ist recht kurz und ziemlich unklar; insbesondere wird weder das Wort „Addition“ erwähnt noch angegeben, wie die Summanden anzuordnen sind. Es wird lediglich gesagt, daß, falls sich mehr als 60 ergibt, anstelle der betreffenden Zahl der Überschuß über 60 geschrieben und anstelle der 60 eine 1 an die nächsthöhere Stelle gesetzt wird.

In LY wird die Addition ähnlich kurz abgehandelt (S.44,13-21); allerdings wird dort explizit gesagt, daß es sich um eine Addition handelt. In LA/LP ist die Darstellung viel ausführlicher und recht klar (S.139,23-141,3). Daß die beiden Sexagesimalbrüche, die addiert werden sollen, nebeneinander geschrieben werden (d.h. Grade neben Grade, Minuten neben Minuten usw.), wird in keinem der Texte erwähnt.

Anders als in DA, LY und LA/LP, geben al-Uqlīdisī und Kūšyār ibn Labbān sehr klar an, daß bei der Addition von Sexagesimalbrüchen diese entsprechend ihren Stellen nebeneinander geschrieben und dann die einzelnen Stellen addiert werden⁷⁴.

(11.3) Wenn man Sexagesimalbrüche voneinander subtrahiert, beginnt man bei der höchsten Stelle und subtrahiert von jeder Stelle des Minuenden die entsprechende Stelle des Subtrahenden. Der Text in N (*ex illa, que est ei similis genere*) ist etwas klarer als der in C (*de ea que supra ipsam est*). Wie bei der Addition, wird auch hier nicht gesagt, daß die beiden Brüche nebeneinander stehen. Wenn an irgendeiner Stelle der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, so muß von der nächsthöheren Stelle eine Eins ausgeborgt und in 60 Einheiten der betreffenden Stelle verwandelt werden, so daß dann die Subtraktion ausgeführt werden kann. Falls sich an der nächsthöheren Stelle eine Null befindet, muß auf die über ihr stehende Stelle zurückgegriffen werden. Es handelt sich also um folgenden einfachen Sachverhalt (n, m : Sexagesimalstellen des Minuenden; x : die n entsprechende Stelle des Subtrahenden; $n < x$):

m		$m - 1$		$m - 1$	
n	x	$60 + n$	x	$(60 + n) - x$	
bzw.					
m		$m - 1$		$m - 1$	$m - 1$
0		60		59	59
n	x	n	x	$60 + n$	$(60 + n) - x$

⁷³[Saidan 1985, S.110]: *bāb [4] fī ḡam' al-kusūr wa-ziyādat ba'dihā 'alā ba'd* („Kap. [4] über die Addition der Brüche und die Hinzufügung der einen von ihnen zu den anderen“).

⁷⁴al-Uqlīdisī, Kapitel I.17 und II.20, [Saidan 1978, S.87-88. 168-170]; Kūšyār ibn Labbān, [Levey / Petruck 1965, S.76].

Aufgrund der verbalen Ausdrucksweise wirkt der Text in **DA** schwerfällig und ist nicht leicht verständlich. Der entsprechende Text in **LY** (S.45,1-5) ist recht kurz, während in **LA/LP** das Vorgehen ähnlich ausführlich, aber etwas klarer als in **DA** beschrieben wird (S.141,4-142,6).

Wie schon bei der Addition, wird auch die Subtraktion von Brüchen in den etwas späteren arabischen Texten sehr viel klarer als in **DA** und den darauf beruhenden lateinischen Schriften dargestellt. Insbesondere wird gesagt, daß die zu subtrahierenden Größen nebeneinander geschrieben werden⁷⁵.

(11.4) Der letzte Teil des Kapitels behandelt das Verdoppeln und Halbieren von Sexagesimalbrüchen. Es fällt auf, daß hier das Verdoppeln vor dem Halbieren behandelt wird; in Kapitel 3 war es umgekehrt. Beim Verdoppeln soll man bei der höchsten Stelle anfangen. Wenn sich an einer Stelle eine Zahl ergibt, die größer als 60 ist (*plus numero parcium eius*), so wird nur der Rest über 60 notiert und eine Eins an die nächsthöhere Stelle geschrieben. Beim Halbieren beginnt man mit der kleinsten Stelle. Für den Fall, daß eine ungerade Stelle halbiert werden muß, verweist der Autor auf den Anfang seines Buches, d.h. offenbar auf Kapitel 3, in dem das Verdoppeln und Halbieren von ganzen Zahlen behandelt wird. Für den Leser ist dies nicht unbedingt hilfreich, da bei einer Halbierung einer ungeraden Zahl in Kapitel 3 gelehrt wird, daß eine 5 an die nächstniedrigere Stelle geschrieben wird, während es bei Sexagesimalbrüchen eine 30 ist.

Die Darstellung in **LA/LP** (S.142,7-143,9) ist recht ausführlich und klar. Hier wird auch explizit angegeben, daß bei der Halbierung eines Sexagesimalbruchs bei ungeraden Stellen eine 30 an die nächstniedrigere Stelle kommt. In **LY** wird nur erwähnt, daß man bei der Verdopplung mit der höchsten, bei der Halbierung mit der niedrigsten Stelle beginnt (S.45,6-8).

Al-Uqlīdisī geht in Kapitel I.16 [Saidan 1978, S.85-86] auf das Halbieren und Verdoppeln von Sexagesimalzahlen ein, nachdem er im vorangehenden Kapitel das „Rechnen mit Graden und die damit zusammenhängenden Begriffe“ (d.h. die Einteilung der Grade in ihre Sexagesimalteile) behandelt hat. Bei Kūšyār ibn Labbān wird das Halbieren von Sexagesimalbrüchen als spezieller Fall der Subtraktion betrachtet. Er beginnt wie **DA** mit der kleinsten Stelle. Er verweist darauf, daß beim Halbieren von Einern die Hälften zu den Zehnern der nächstniedrigeren Stelle und beim Halbieren von Zehnern immer 5 zu den entsprechenden Einern addiert werden müssen [Levey / Petruck 1965, S.78-80].

* * *

Kapitel 12: Capitulum aliud in multiplicatione fractionum et divisione earum (Multiplikation und Division von gewöhnlichen Brüchen)

DA: N, f.21v-22r; C, f.111v (unvollständig) (Vogel 39,15-37; Allard 21,21-22,21)

Nachdem bisher die Rechenoperationen mit Sexagesimalbrüchen behandelt worden sind, wird in Kapitel 12 das Multiplizieren und Dividieren mit gewöhnlichen Brüchen erläutert.

⁷⁵al-Uqlīdisī, Kapitel I.17 und II.20, [Saidan 1978, S.88-89. 168-170]; Kūšyār ibn Labbān, [Levey / Petruck 1965, S.78].

(12.1) Allgemein gilt, daß man in diesem Fall ähnlich wie bei den Sexagesimalbrüchen vorgehen soll. Der Autor verweist hier auf seine Darstellung der Multiplikation von Brüchen, d.h. auf Kapitel 9: So wie man dort die Brüche in Einheiten der kleinsten Stelle verwandelt hat, soll man auch bei gewöhnlichen Brüchen verfahren, indem man sie in Brüche derselben Art verwandelt, dann die Multiplikation durchführt und anschließend durch Division ermittelt, wie viele Ganze im Ergebnis enthalten sind. – Der Text in C ist besser als der in N, der vermutlich durch eine Lücke entsteht ist.

In LY nehmen die allgemeinen Regeln für die Multiplikation noch weniger Platz als in DA ein (S.45,9-13), während in LA/LP die Schreibweise gewöhnlicher Brüche, ihre Multiplikation und Division in außerordentlicher Breite behandelt wird (S.143,16-175,4): Dort werden zunächst die Grundbegriffe des Bruchrechnens (Nenner, Zähler, Hauptnenner usw.) vorgestellt, bevor die Darstellung der Brüche und das Rechnen mit ihnen gelehrt wird. Für Operationen mit Brüchen und gemischten Zahlen, die auch aus Summen von Brüchen bestehen können, werden die beiden Zahlen in zwei parallele Spalten geschrieben, wobei die einzelnen Komponenten von oben nach unten eingetragen und durch waagerechte Striche abgetrennt werden. Für die Multiplikation $8\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{5} \cdot 3\frac{1}{3}\frac{1}{9}$ ergibt sich z.B. folgendes Schema (S.151,13-19):

8	3
1	1
2	3
1	1
4	9
1	
5	

Dies alles wird in DA nicht erwähnt, obwohl es für die folgenden Ausführungen sehr wichtig wäre.

(12.2) Zur Verdeutlichung der Multiplikation werden zwei Beispiele gebracht. Das erste lautet: $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9}$. In DA wird gesagt, daß man die Siebtel und Neuntel „als Minuten“ auffassen soll; ihr Produkt sind gleichsam „Sekunden“. Um festzustellen, ob und wie viele Ganze vorhanden sind, soll man das Ergebnis der Multiplikation durch das Produkt (in diesem Fall: Siebtel mal Neuntel) teilen. In dem vorgelegten Beispiel ergeben sich $\frac{12}{63}$, d.h. „12 Teile von 63 Teilen eines Ganzen“. Hiermit endet die Darstellung dieses Beispiels in C. In N folgt noch eine lange Erläuterung der einzelnen Schritte, die zur Lösung dieser Aufgabe $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9}$ erforderlich sind: Demnach werden 3 und 7 untereinandergeschrieben; daneben kommen die 4 und die 9. Dabei sind die 7 und die 9 als Minuten zu sehen. Jetzt folgen die Multiplikationen $3 \cdot 7 = 21$, $4 \cdot 9 = 36$ und $7 \cdot 9 = 63$. Die Ergebnisse 21 bzw. 36 gehören an die Stelle der 3 bzw. 4 (also in die Zeile der Zähler), während die 63 (als Produkt von „Minuten“) als „Sekunden“ zu deuten sind. Die ersten beiden Produkte werden ihrerseits multipliziert ($21 \cdot 36 = 756$), und das Ergebnis wird durch die 63 „Sekunden“ dividiert ($756 : 63 = 12$). Der Quotient gibt an, wie viele Teile der 63 Teile eines Ganzen vorhanden sind. Schreibt man die Aufgabe allgemein als $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$, so werden also zunächst die Produkte $a \cdot b$, $c \cdot d$ und $b \cdot d$ gebildet. Danach bestimmt man $(a \cdot b) \cdot (c \cdot d)$ und dividiert dies durch $(b \cdot d)$. Das Ergebnis ist natürlich $a \cdot c$ und gibt an, wie viele Einheiten des bd -ten Teiles eines Ganzen vorhanden

sind. – Aus moderner Sicht überrascht, daß man nicht einfach die Zähler miteinander multipliziert, sondern den Umweg über das Produkt von Zähler und Nenner wählt. Dies hängt sicherlich mit der Vorschrift zusammen, bei gewöhnlichen Brüchen ebenso zu verfahren wie bei Sexagesimalbrüchen, einer Vorschrift, die das Rechnen unnötig kompliziert. Der Text läßt die Schwierigkeit erkennen, die sich anfangs bei dieser Aufgabenstellung ergab. In späteren arabischen Texten⁷⁶ ist das Vorgehen viel klarer und sinnvoller.

Dieselbe Aufgabe $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9}$ findet man auch in **LY** (S.45,14-46,7) und in **LA/LP** (S.166,11-167,7). Beide Formulierungen sind relativ knapp und ähneln dem gemeinsamen Text in **DA**, wobei in **LA/LP** noch hinzugefügt wird, daß sich 12 : 63 verhält wie das Ergebnis der Multiplikation der beiden Brüche zur Einheit. Eine Parallele zum komplizierten Vorgehen von **N** findet sich weder in **LY** noch in **LA/LP**.

(12.3) Das zweite Beispiel für die Multiplikation lautet: $3\frac{1}{2} \cdot 8\frac{3}{11}$. Im Gegensatz zur vorhergehenden Aufgabe ist die Darstellung sehr klar. Man schreibt die beiden gemischten Zahlen nebeneinander, wobei die ganzzahligen Bestandteile nach oben und Zähler und Nenner der Brüche darunter kommen, also in folgender Weise (die Figur selbst fehlt in **DA**, findet sich aber in **LA/LY**, S.164,1-3):

3	8
1	3
2	11

An dieser Stelle bricht der Text in **C** ab; die folgenden Abschnitte bis zum Ende der Schrift werden nur in **N** überliefert⁷⁷. Man verwandelt jetzt die Ganzen und die Bruchteile in Einheiten des jeweiligen Nenners (in **N** heißt es: *reddas unumquemque ex eis de genere ultime differentie*), d.h., man rechnet: $3 \cdot 2 + 1 = 7$ und $8 \cdot 11 + 3 = 91$. Diese Zahlen setzt man an die Stelle der Ganzen und löscht auch die darunterstehenden Zahlen der Bruchteile. Es ergibt sich also folgendes Schema:

7	91
2	11

Jetzt multipliziert man die Zähler und die Nenner und dividiert die Ergebnisse. Man rechnet also:

$$7 \cdot 91 = 637; 2 \cdot 11 = 22 \implies 637 : 22 = 28\frac{21}{22}.$$

Da in **DA** die Begriffe „Zähler“ und „Nenner“ nicht vorkommen, muß der Sachverhalt anders dargestellt werden: Man multipliziert 7 und 91, die demselben *genus* angehören, und erhält als Ergebnis eine Zahl *ex genere secundorum*. Da sich auch bei der Multiplikation von 2 und 11 *secunda* ergeben, müssen bei der Division $637 : 22$ ganze Zahlen und ein Rest herauskommen, der die Anzahl der 22-tel angibt.

Dieselbe Aufgabe wird in derselben Weise wie in **DA** auch in **LA/LP** behandelt (S.163,14-166,10). An dieser Stelle beruft sich der Autor von **LA/LP** ausdrücklich auf

⁷⁶Z.B. bei al-Uqlīdisī, der die Multiplikation von Brüchen mit Brüchen bzw. gemischten Zahlen in den Kapiteln I.6 bis I.11 erklärt; siehe [Saidan 1978, S.60-75].

⁷⁷Dies bedeutet, daß im folgenden die Sigle **DA** den Text bezeichnet, der allein von **N** überliefert wird.

„Alchorismus“⁷⁸. Dies ist die einzige Stelle in **LA/LP** und in **LY**, an der die Schrift von al-Ḥwārizmī explizit zitiert wird. Etwas später wird in **LA/LP** das Beispiel noch einmal hervorgeholt, um den Begriff *genus fractionis* zu erläutern (S.167,8-21). Auch in **LY** wird dieselbe Aufgabe behandelt und auf dieselbe Weise gelöst (S.46,8-47,20). Allerdings sieht die dazugehörige Figur anders aus in **LA/LP**: In **LY** werden die beiden Brüche untereinander geschrieben, wobei die Ganzen und die Zähler im Innern der Figur stehen, die Nenner jedoch außen. Bezogen auf die Aufgabe $3\frac{1}{2} \cdot 8\frac{3}{11}$ heißt dies: innerhalb der Figur stehen die Zahlen 3, 1, 8, 3 untereinander; außerhalb der Figur steht über der ersten 3 der Nenner 2, unter der zweiten 3 der Nenner 11. Nach der Verwandlung der gemischten Zahl in unechte Brüche werden innerhalb der Figur die 3 und die 1 durch die 7, die 8 und die 3 durch die 91 ersetzt. Es hat den Anschein, als ob die geänderte Anordnung in **LY** eine didaktische Hilfe geben sollte, um den Rechenvorgang etwas übersichtlicher zu machen.

Die Multiplikationsregel für gewöhnliche Brüche (Multiplikation der Zähler, Multiplikation der Nenner, Division der erhaltenen Produkte) wird in anderen arabischen Texten ohne Probleme gehandhabt, z.B. bei al-Uqlīdisī (Kapitel I.7–I.9, [Saidan 1978, S.64–71]).

(12.4) Beim Dividieren von gewöhnlichen Brüchen lautet die Regel: Verwandlung in Brüche derselben Art (d.h. desselben Nenners); dann Division der Einheiten (d.h. der Zähler); das Ergebnis sind ganze Zahlen. Das Verfahren wird am Beispiel $20\frac{2}{13} : 3\frac{1}{3}$ erläutert. Man schreibt die beiden gemischten Zahlen nebeneinander:

3	20
1	2
3	13

Man bringt die Brüche auf den Hauptnenner (der Autor kennt weder den Begriff „Nenner“ noch „Hauptnenner“, sondern redet stattdessen vom *genus* und davon, daß die Zahlen multipliziert werden müssen, *donec sint unius generis*). Dieser ist gleich dem Produkt der Nenner: $3 \cdot 13 = 39$. Dann stellt man fest, wie viele Bruchteile des Hauptnenners im Dividenden und im Divisor enthalten sind, indem man beide Zahlen mit 39 multipliziert:

$$(20\frac{2}{13}) \cdot 39 = 20 \cdot 39 + \frac{2}{13} \cdot 39 = 780 + 6 = 786$$

$$(3\frac{1}{3}) \cdot 39 = 3 \cdot 39 + \frac{1}{3} \cdot 39 = 117 + 13 = 130.$$

Durch Division der erhaltenen Zahlen folgt als Ergebnis: $786 : 130 = 6\frac{6}{130}$. Schließlich wird – in der schwerfälligen Terminologie des Autors, der weder den Begriff des Zählers noch den des Nenners kennt – sinngemäß gesagt, daß es bei der Division von Brüchen mit gleichem Nenner genügt, die Zähler zu dividieren.

Dasselbe Beispiel wird auch in **LY** und in **LA/LP** behandelt. Der Text in **LY** (S.48,16-49,13) ähnelt dem in **DA** sehr, ist aber stilistisch viel glatter, auch deshalb, weil Fachtermini wie *denominatio* (Nenner) und *ducere per* (multiplizieren) benutzt werden. Dasselbe gilt für die Darstellung in **LA/LP** (S.169,12-172,19), die ebenfalls eine Weiterwicklung des Textes in **DA** ist; hier werden die Fachausdrücke *numerus*

⁷⁸S.163,15-19: *Hoc idem est illud etiam quod de multiplicatione et diuisione integrorum et fractionum Alchorismus dicere uidetur etsi* (Allard hat: *et si*) *aliter, cum 8 integros et tres undecimas in tres integros et unam medietatem multiplicanda proponit* ...

communis (Hauptnenner), *dividendus* (Dividend), *dividens* (Divisor) benutzt, und die Zwischenergebnisse werden in die Figur eingetragen, so daß das Verfahren übersichtlicher wird.

Zur Division von (gewöhnlichen) Brüchen bei den Arabern siehe die Bemerkungen in Kapitel 10.1.

* * *

Kapitel 13: Capitulum radicum extrahendarum (Allgemeine Sätze über Wurzeln)

DA: N, f.22r-23r; C: fehlt

Mit Kapitel 13 beginnt der letzte Teil der Schrift. Er beschäftigt sich ausschließlich mit dem Wurzelziehen. Kapitel 13 behandelt noch nicht die Technik des Wurzelziehens, sondern allgemeine Eigenschaften der (Quadrat-)Wurzel. Der Fachausdruck für „Wurzel“ ist stets *radix*, eine Übersetzung des arabischen *ǧidr*⁷⁹.

(13.1) Ohne daß der Autor zuvor erklärt hat, was eine Wurzel ist, stellt er fest, daß, wenn zwei Zahlen gleich sind, ihr Produkt „eine Wurzel hat“, d.h., eine Quadratzahl ist. Dieser einfache Sachverhalt wird damit begründet, daß in diesem Fall die Multiplikation der einen Zahl mit der anderen gleich der Multiplikation einer Zahl mit sich selbst ist. Dabei wird noch bemerkt, daß es gleichgültig ist, ob die Zahl eine ganze Zahl ist oder aus Brüchen besteht. Es folgt der Satz: Wenn a und b Quadratzahlen sind, so ist auch $a \cdot b$ eine Quadratzahl. Dieser Satz wird nicht durch Beispiele erläutert.

Hier und im folgenden wird in DA „Quadratzahl“ stets durch Ausdrücke wie: *numerus habens radicem* umschrieben. Dies erinnert stark an den Begriff *maǧdūr* („das, woraus eine Wurzel gezogen werden kann“) bei al-Baǧdādī [Saidan 1985, S.71]. Bei ihm findet man auch die Erklärung, daß jede Zahl, die mit sich selbst multipliziert wird, „Wurzel“ (*ǧidr*) des Produkts ihrer (d.h. der Zahl) Multiplikation mit sich selbst ist. Das Produkt wird außer *maǧdūr* auch bezeichnet als *māl* („Vermögen“) und *murabbaʿ* („Quadrat“). Das Wort *census*, die lateinische Entsprechung für *māl*, wird in westlichen algebraischen Texten zur Bezeichnung des Quadrats der Unbekannten x benutzt; in DA kommt dieser Begriff nicht vor.

Auch in LY werden allgemeine Eigenschaften der Quadratwurzel ähnlich wie in unserem Kapitel 13 in einem eigenen Kapitel behandelt (S.51,1-52,14), jedoch ist der Aufbau dieses Kapitels klarer. Zunächst wird erklärt, was eine Wurzel ist. Von den Sachverhalten, die in 13.1 ausführlich geschildert sind, wird nur einer ganz beiläufig erwähnt⁸⁰. In LA/LP liefert das Eingangskapitel über Quadratwurzeln (S.175,5-181,29) sehr klare und ausführliche Informationen über die wichtigsten Eigenschaften der Quadratwurzel. Hier finden wir auch die beiden Sätze aus DA wieder, daß jede Zahl, mit sich selbst multipliziert, eine Quadratzahl erzeugt⁸¹ und daß das Produkt von zwei Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ist (S.176,14-24, erläutert am Beispiel $4 \cdot 9$).

(13.2) Es folgt der Satz: Wenn der Quotient $a : b$ aus beliebigen Zahlen a und b eine Quadratzahl ist, so ist auch das Produkt $a \cdot b$ eine Quadratzahl. Als Beispiel wird $a = 18$ und $b = 8$ gewählt. Der Quotient ist eine Quadratzahl: $18 : 8 = 2\frac{1}{4} = (1\frac{1}{2})^2$.

⁷⁹Zur arabischen Terminologie siehe [Saidan 1978, S.437].

⁸⁰S.51,11-14: *In duorum inter se radicem habentium summa radix inuenitur, ut in 4 et 9, 6 est radix.*

⁸¹S.176,8-14: *Omnis igitur numerus multiplicatus in se generat numerum habentem radicem, et omnis talis quadratus est, ut bis bini, uel quinquies quinque, et sic de omnibus.*

Dann wird gezeigt, daß auch das Produkt eine Quadratzahl ist: $18 \cdot 8 = 144 = 12^2$. (Weiter wird erwähnt, daß auch $b : a$ eine Quadratzahl ist: $8 : 18 = \frac{4}{9} = (\frac{2}{3})^2$.) Ein weiteres Beispiel ($a = 8$, $b = 2$) wird nur angedeutet.

Denselben Satz mit demselben Beispiel ($a = 18$, $b = 8$) findet man auch in LY (S.51,14-25) und – mit ganz ähnlichen Formulierungen – in LA/LP (S.176,24-177,15).

(13.3) Im folgenden behandelt der Autor eine Frage, die für die Technik des Wurzelziehens wichtig ist: aus welchen Stellen im Dezimalsystem Wurzeln gezogen werden können. Modern gesprochen, geht es also um den Sachverhalt, daß eine Zehnerpotenz 10^n genau dann eine aufgehende Quadratwurzel besitzt, wenn n gerade ist. Im Text wird zunächst auf die Zahlenschreibweise der Inder hingewiesen, und es werden Aussagen über den Wert der Ziffern in den einzelnen Dezimalstellen wiederholt, die man im Anfangskapitel der Schrift findet. Dann wird für jede „Stelle“ (= Zehnerpotenz) im Stellenwertsystem untersucht, ob sie eine Quadratwurzel hat oder nicht. Als Begründung dafür, daß etwa 1000 keine Wurzel hat, wird gesagt, daß 1000 das Produkt einer „Quadratzahl“ (100) mit einer „Nichtquadratzahl“ (10) ist. Schließlich wird (sinngemäß) der Satz formuliert: In der Folge 1, 10, 100, 1000, ... haben die an ungerader Stelle stehenden Zahlen Quadratwurzeln, die anderen nicht.

In LY reduziert sich der Inhalt des Abschnitts 13.3 auf die Aussage: *Prima itaque differentia et tertia et ita omnes impares radicem possident, secunda uero et quarta omnesque pares nequaquam* (S.51,26-52,2). In LA/LP wird der Sachverhalt ähnlich ausführlich wie in DA dargestellt, aber etwas systematischer und klarer (S.177,16-179,10). Auch hier wird zunächst bei jeder Stelle des Dezimalsystems geklärt, ob sie eine Wurzel hat, und dann der allgemeine Satz formuliert.

(13.4) Nachdem die Frage behandelt wurde, aus welchen ganzen Zahlen Wurzeln gezogen werden können, stellt sich jetzt dasselbe Problem für die Brüche. Der Autor schreibt, daß es sich bei Brüchen ähnlich verhält wie bei ganzen Zahlen. Dabei nennt er sowohl bestimmte Sexagesimalbrüche (erwähnt werden die Minuten, Sekunden, Terzen, Quarten und Quinten) als auch gewöhnliche Brüche (hier werden nur die *quinte quintarum*, also Fünfundzwanzigstel, und die *septime septimarum*, also Neunundvierzigstel, genannt). Im folgenden wird zunächst empirisch gezeigt, daß für Sexagesimalbrüche der Satz gilt: Die Brüche an ungerader Stelle (d.h. die Minuten, Terzen, Quinten, ...) haben keine Quadratwurzel, wohl aber die an gerader Stelle (d.h. Sekunden, Quarten, Sexten, ...). Für die Argumentation werden einerseits die Umrechnungsfaktoren zwischen den einzelnen Brüchen und der Eins herangezogen (die Eins besteht aus 60 Minuten und 216000 Terzen; da 60 und 216000 keine Wurzel haben, gilt dies auch für Minuten und Terzen allgemein), andererseits die Tatsache, daß sich Sekunden als Produkt von Minuten mit Minuten, Quarten als Produkt von Sekunden mit Sekunden (oder Minuten viermal mit sich selbst) darstellen lassen, während dies für Minuten, Terzen usw. nicht möglich ist.

Der zweite Teil dieses Abschnitts, der sich mit der Möglichkeit beschäftigt, Wurzeln aus gewöhnlichen Brüchen zu ziehen, wird erst dann in allen Einzelheiten verständlich, wenn man die parallele Darstellung in LA/LP (siehe unten) mit heranzieht. Die Situation bei den gewöhnlichen Brüchen ist nur dann mit der bei Sexagesimalbrüchen vergleichbar, wenn man unter „ersten Brüchen“ (*prime fractiones*; auch: Brüchen der „ersten Stelle“) solche Brüche versteht, deren Nenner keine Quadratzahlen sind; aus

diesen Brüchen „können keine Wurzeln gezogen werden“. Daß dies gemeint ist, wird auch durch den Text von LA/LP bestätigt. Dies bedeutet allerdings, daß in N die Worte *ac nonis* und *XVI* zu tilgen sind, da Neuntel und Sechzehntel nicht zu den „ersten Brüchen“ gehören. Ob dieser Fehler schon in der ursprünglichen Übersetzung vorhanden war oder dem Schreiber von N anzulasten ist, läßt sich nicht entscheiden. Die Brüche der „zweiten Stelle“ (dieser Begriff wird in DA nicht verwendet) entstehen durch Multiplikation eines „ersten Bruchs“ mit sich selbst und haben daher eine Wurzel, wie an mehreren Beispielen gezeigt wird. Entsprechend haben Brüche der „dritten Stelle“ (*tercia differentia*), die durch dreifache Multiplikation eines „ersten Bruchs“ mit sich selbst entstehen, wie Brüche aus Terzen keine Wurzel. Dagegen läßt sich bei Brüchen der „vierten Stelle“ (*quarta differentia*), wie auch bei Brüchen aus Quarten, eine Wurzel finden.

Anders als in DA, ist die Darstellung in LA/LP (S.179,10-181,29) sehr klar und ausgereift: Zunächst wird festgestellt, daß bei (Sexagesimal-)Brüchen der Sachverhalt genau umgekehrt ist wie bei ganzen Zahlen, weil bei den Brüchen die an ungerader Stelle stehenden keine Wurzel besitzen. Dies wird damit begründet, daß Sekunden sich als Produkt von Minuten mit Minuten, Quarten als Produkt von Sekunden mit Sekunden darstellen lassen, usw., während die an ungerader Stelle stehenden Brüche *a nullis in se ductis descendunt* (179,25-26). Die gewöhnlichen Brüche werden in verschiedene Klassen eingeteilt: Die Brüche der ersten Klasse (*prime fractiones* oder *fractiones prime differentie*) sind solche, die keine Wurzel haben. Wenn man derartige Brüche miteinander multipliziert, entstehen Brüche der zweiten Klasse (*secunde fractiones*, *fractiones secunde differentie*), die – gemäß ihrer Erzeugung – Wurzeln haben; dies kommt auch dadurch zum Ausdruck, daß man die Viertel (*quarte*) auch *medietates medietatum* nennen kann, die Neuntel (*none*) *tercie terciarum* usw. Wenn man Brüche der ersten Klasse zweimal mit sich malnimmt (also $(\frac{1}{n})^3$), so entstehen Brüche der 3. Klasse (*fractiones tercie differentie*), die wiederum keine Wurzel haben. Im Sinne dieser Klasseneinteilung entsprechen die gewöhnlichen Brüche bezüglich des Radizierens den Sexagesimalbrüchen, so daß für das Quadratwurzelziehen für alle Brüche dieselbe Regel gilt.

Auch in LY wird die Frage, aus welchen Brüchen Wurzeln gezogen werden können, behandelt (S.52,2-14). Dort wird allerdings behauptet, daß die Situation bei (Sexagesimal-)Brüchen genauso sei wie bei ganzen Zahlen: die ungeraden Stellen, d.h. Minuten, Terzen, Quinten ..., hätten keine Wurzeln, während die geraden Stellen, d.h. Sekunden, Quarten, ..., Wurzeln besäßen. Das zuletzt Gesagte stimmt zwar, aber offenbar hat der Autor nicht bemerkt, daß bei Sexagesimalbrüchen die geraden Stellen Wurzeln besitzen und die ungeraden nicht, während es bei ganzen Zahlen umgekehrt ist. Über gewöhnliche Brüche gibt es nur die Bemerkung: *Similiter in partibus minutarum ut medietatibus*.

Über die Möglichkeit, aus Sexagesimalbrüchen Wurzeln zu ziehen, äußert sich auch al-Uqlīdisī. Ähnlich wie DA, stellt er fest, daß Brüche, die Wurzeln haben, an geraden Stellen stehen, während man aus Brüchen an ungeraden Stellen, d.h. aus Minuten,

Terzen usw., keine Wurzeln ziehen kann⁸². Im übrigen werden nach al-Uqlidisī aus Brüchen die Wurzeln in derselben Weise gezogen wie aus ganzen Zahlen.

* * *

Kapitel 14: Capitulum extractionis radicum (Verfahren der Ziehung der Quadratwurzeln)

DA: N, f.23r; C: fehlt

Das Kapitel 14 schildert das allgemeine Verfahren, die Quadratwurzel aus einer beliebigen (natürlichen) Zahl zu bestimmen; ein Zahlenbeispiel zur Veranschaulichung folgt erst in Kapitel 16. Zunächst wird noch einmal – unter Hinweis auf den Anfang der Schrift, d.h. Kapitel 1 – auf die Bedeutung der Stellen hingewiesen; ferner wird die Feststellung aus dem vorangehenden Kapitel wiederholt, daß die ungeraden Stellen Wurzeln haben, die geraden aber nicht. Dies ist offenbar als Begründung dafür gedacht, daß man, ausgehend von den Einern, die Stellen abzählt, bis man zur letzten kommt. Ist diese eine ungerade Stelle, so kann man „an ihr arbeiten“, d.h., dort mit der Ausziehung der Wurzel beginnen; andernfalls gehe man eine Stelle (nach rechts) zurück, so daß man zur nächsten ungeraden Stelle kommt. Dies bedeutet natürlich nichts anderes, als daß man die Stellen von rechts nach links abzählt und Zweiergruppen abteilt; in der am weitesten links liegenden Zweiergruppe beginnt man mit der Rechnung.

Man sucht jetzt die größte Quadratzahl p^2 , die in dieser Zweiergruppe vorhanden ist. Die gefundene Zahl p (d.h. die erste Ziffer der Wurzel) wird unter die Zweiergruppe geschrieben und ihr Quadrat, p^2 , davon abgezogen. Dann wird das Doppelte von p gebildet und das Ergebnis $2p$ unten um eine Stelle nach rechts verschoben. Man sucht jetzt eine Zahl q , die an $2p$ angehängt (d.h. rechts davon geschrieben) werden soll und die Eigenschaft hat, daß $q \cdot (q + 20p) = q^2 + q \cdot 2p \cdot 10$ den darüber stehenden Zahlen möglichst nahekommt; in DA heißt es: *numerum quem, cum multiplicaveris in eo quem duplicasti et in semet ipso, consumat superiorem numerum vel proximum minorem eo*. Daß q die zweite Stelle der Wurzel ist, wird nicht gesagt. Nachdem man den gefundenen Ausdruck von den darüber stehenden Ziffern subtrahiert hat, geht man analog vor, um die dritte Stelle r zu finden: man verdoppelt auch q , verschiebt den neuen Ausdruck $2q + 20p$ um eine Stelle nach rechts und sucht eine neue Ziffer r , die unten angehängt wird, so daß $r \cdot (r + 20q + 200p)$ den darüber stehenden Zahlen möglichst nahekommt.

Das Verfahren kommt dann zum Ende, wenn entweder oben nichts stehen bleibt oder ein Rest übrig bleibt, der kleiner ist als die Zahl, die unten verdoppelt wurde. Die Wurzel ist dann die Hälfte der unten stehenden Zahl. Wenn kein Rest bleibt, so war die zu radizierende Zahl ein Quadrat, und die Wurzel daraus ist eine *integra radix vera*. Wenn ein Rest r bleibt, so soll man diesen durch die verdoppelte Wurzel dividierten Rest dem ganzzahligen Teil hinzufügen. Wenn a^2 die größte in N enthaltene ganzzahlige Quadratzahl ist, wird also die bekannte Näherungsformel angewandt:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}.$$

⁸²Kapitel I.20, [Saidan 1978, S.96]: *It is thus clear that the first place, the place of minutes has no root, because it is first and considered odd. The second place, the place of seconds, has a root because it is even. Thirds have no root, fourths have, and so on: one place has no root and one has.*

Weil a^2 und nicht $(a+1)^2$ die größte in N enthaltene Quadratzahl ist, muß $a^2 + r < (a+1)^2$ sein, d.h. $r < 2a+1$. r kann also höchstens den Wert $2a$, also die verdoppelte Wurzel, annehmen.

Die Methode, die in **DA** geschildert wird, ist korrekt und entspricht dem allgemein üblichen Verfahren. Auffällig ist höchstens, daß die einzelnen Stellen der Wurzel nicht direkt aufgeschrieben werden, sondern daß man das Ergebnis durch Halbieren der Zahl erhält, die man unten notiert hat und die durch Verdoppeln gewonnen wurde. Die Darstellung ist allerdings recht abstrakt; erst wenn man die Methode an einem Beispiel durchführt, wie es in Kapitel 16 geschieht, wird das Verfahren klar.

Sinngemäß dieselbe Methode findet man, kürzer und klarer dargestellt, auch in **LY** (S.52,15-53,1) und in **LA/LP** (S.182,1-184,25).

* * *

Kapitel 15: Aliud capitulum de eodem (Über Quadratwurzeln)

DA: N, f.23r; **C:** fehlt

Der nächste Abschnitt, der in **DA** eine besondere Überschrift trägt, behandelt ebenfalls theoretische Fragen des Wurzelziehens und ergänzt das vorhergehende Kapitel. Der Zweck besteht offenbar darin, eine Begründung zu geben, warum beim Wurzelziehen die bereits gefundenen Teile verdoppelt werden müssen. Zunächst verweist der Autor auf ein anderes Buch von ihm (*in alio libro meo*), in dem er gezeigt habe, daß bei der Multiplikation von Zahlen, die aus *nodi* und *unitates* bestehen, viermal multipliziert werden muß. Diese Aussage findet man in al-Ḥwārizmī's „Algebra“, wo sie für zweigliedrige Ausdrücke benutzt wird, die miteinander multipliziert werden⁸³. In **DA** sind mit *unitates* die Einer gemeint, mit *nodi* die Zehner⁸⁴. Der Ausdruck *multiplicetur quater* bedeutet, daß beim Multiplizieren von zwei zweistelligen Zahlen vier Multiplikationen erforderlich sind: $(10a+b) \cdot (10c+d) = 10a \cdot 10c + 10bc + 10ad + bd$. Analog gilt beim Quadrieren: $(10a+b)^2 = (10a)^2 + b^2 + (10a)b + b(10a) = (10a)^2 + b^2 + 2 \cdot (10a)b$. Die Multiplikation des Einers mit dem Zehner erfolgt also zweimal. Dies ist die (korrekte) Begründung dafür, daß beim Wurzelziehen die Zehnerstelle (bzw. die Hunderter- und Zehnerstelle usw.) verdoppelt werden muß, während die Einerstelle nur „einmal“ multipliziert wird: Nachdem die Zehnerstelle a gefunden und ihr Quadrat von den darüberstehenden Ziffern des Radikanden subtrahiert wurde, sucht man die Einerstelle b so, daß $b \cdot [b + 2 \cdot (10a)]$ den darüberstehenden restlichen Ziffern möglichst nahe kommt. Dies geschieht analog, wenn die dritte Stelle gesucht wird, die die Funktion der

⁸³Der arabische Text steht bei [Rosen 1831, S.15,9-11]. In der Übersetzung von Robert von Chester heißt es [Hughes 1989, S.45,13-17]: *Cum ergo nodi numerorum, et cum illis aliquot unitates propositae fuerint, aut si unitates ab illis subtractae fuerint, tunc multiplicatio quater repetenda erit: id est, nodos in nodis multiplica, et unitates in nodis, et iterum unitates in nodis et unitates in unitatibus*. Die Formulierung in der Übersetzung von Gerhard von Cremona lautet [Hughes 1986, S.241,7-11]: *Si ergo fuerit articulus et cum eo fuerint unitates aut fuerint unitates excepte ex eo, impossibile erit quin eius multiplicatio quater fiat; videlicet, articuli in articulum et unitatum in unitates, et unitatum in articulum et articuli in unitates*. Gerhard benutzt also nicht den Ausdruck *nodus*, sondern *articulus*. Der hierfür im arabischen Text gebrauchte Terminus ist *‘aqd* (plur. *‘uqūd*).

⁸⁴Das arabische Äquivalent für *nodus*, *‘aqd* (plur.: *‘uqūd*), „Zehner“, hat dieselbe Wurzel *‘-q-d* wie *‘uqda* (plur.: *‘uqad*), „Glieder (oder Gelenke) eines Fingers“. In westlichen Texten findet man für „Zehner“ üblicherweise nicht den Terminus *nodus*, sondern *articulus*.

Einer übernimmt, während die bisherigen Einer und Zehner zusammengefaßt werden. Das Verfahren wird fortgesetzt, bis man an der an der letzten, d.h. der am weitesten rechts stehenden, Zweiergruppe angekommen ist. Als Wurzel ergibt sich dann, wie schon im vorhergehenden Kapitel gesagt wurde, die Hälfte der untenstehenden verdoppelten Zahl.

Der Text in DA ist nicht in allen Teilen klar verständlich und möglicherweise auch durch den Abschreiber oder dessen Vorlage an einigen Stellen verdorben. Über den Sinn dieses Abschnitts gibt es aber keinen Zweifel. Inhaltlich ähnelt der Text einer Passage aus al-Uqlidisīs „Arithmetik“ (Kapitel III.6, [Saidan 1978, S.193]). In LY gibt es keine Entsprechung, wohl aber in LA/LP, wo der Sachverhalt viel klarer als in DA dargestellt ist (S.184,26-185,24). Es fällt auf, daß dort anstelle der Ausdrücke *unitas* und *nodus* die Begriffe *digitus* und *articulus* benutzt werden, die schon aus der Fingerrechnung bekannt waren und die auch in den Texten über das Rechnen auf dem Gerbertschen Rechenbrett oft vorkommen.

* * *

Kapitel 16: Capitulum in exemplari extractionis radices (Beispiel über die Ausziehung der Quadratwurzel)

DA: N, f.23v; C: fehlt

Im Kapitel 16 werden Beispiele für das Ziehen der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen vorgerechnet. Das Vorgehen beruht auf dem Verfahren, das in Kapitel 14 dargestellt wurde.

⟨16.1⟩ 1. Beispiel: $\sqrt{5625}$. Die Zahl wird auf die übliche Weise hingeschrieben, und die Stellen werden von rechts nach links abgezählt. Da es sich um 4 Stellen, also um eine gerade Zahl, handelt, muß man – entsprechend der allgemeinen Regel – an der 3. Stelle mit der Rechnung beginnen. Die größte in 56 enthaltene Quadratzahl ist $7^2 = 49$; die 7 wird unter die 3. Stelle geschrieben und das Quadrat von den darüber stehenden 56 subtrahiert. Dies führt zu folgenden „Figuren“:

5625
7

725
7

Dann wird die unten stehende 7 verdoppelt und das Ergebnis 14 um eine Stelle nach rechts verschoben:

725
14

Gemäß der allgemeinen Regel muß jetzt eine Zahl gefunden werden, die unten neben die 14, also unter die 5, geschrieben wird und die Eigenschaft hat, daß sie, wenn sie mit sich selbst und mit der verdoppelten Zahl (also: 14) multipliziert wird, die darüberstehende Zahl oder eine ihr möglichst nahekommende kleinere liefert. Dies ist die 5. Man subtrahiert nun $5 \cdot 1 = 5$ von der darüberstehenden 7, so daß aus der 7 die 2 wird, und $5 \cdot 4 = 20$ von den darüberstehenden 22, so daß aus der 22 die 2 wird, und schließlich $5^2 = 25$ von den darüberstehenden 25. Man erhält also nacheinander folgende Figuren:

725	225	25	
145	145	145	145

Am Ende bleibt also oben nichts übrig, d.h. die Wurzel geht auf. Das Ergebnis ist die Hälfte der untenstehenden verdoppelten Zahl 14(0) und die 5, also 75. – Falls etwas übrig geblieben wäre, hätte man den Rest als Teil der verdoppelten Wurzel zum ganzzahligen Wert hinzugefügt. Ein Beispiel für diesen Fall wird nicht gegeben. Zum Verfahren siehe die Bemerkungen zu Kapitel 14.

Das Beispiel $\sqrt{5625}$ wird auch in **LY** und in **LA/LP** behandelt. Wie schon in früheren Fällen, ist die Darstellung in **LY** recht kurz (S.53,2-18), in **LA/LP** viel länger (S.185,25-188,16). Viele Formulierungen in **LA/LP** sind dem Text in **DA** ähnlich. **LA/LP** geht auch ausführlich auf den Fall ein, daß ein Rest bleibt, und erläutert die allgemeine Regel (S.188,17-25) durch zwei Beispiele ($\sqrt{40}$: S.188,26-189,17; $\sqrt{91345}$: S.189,18-191,5).

Das Verfahren, das in **DA** beschrieben wird, entspricht fast völlig der indischen Methode. Es gibt nur den kleinen Unterschied, daß die zweite Stelle der Wurzel bei den Indern durch die Division $72 : 14$ ermittelt und in der Zeile der Wurzel die 72 durch den Divisionsrest, also durch 2, ersetzt worden wäre [Juschkewitsch 1964a, S.115]. Al-Uqlīdisī verfährt wie **DA** (Kapitel I.12, [Saidan 1978, S.76-79]). Kūšyār ibn Labbān geht ebenfalls in dieser Weise vor, jedoch werden die einzelnen Ziffern des Ergebnisses über dem Radikanden und das Doppelte davon unter dem Radikanden eingetragen⁸⁵.

⟨16.2⟩ Im nächsten Abschnitt wird der Sonderfall behandelt, daß sich am Anfang oder im Verlauf der Rechnung Zweiergruppen ergeben, die aus Nullen bestehen. (Im Text heißt es: „Kreise, vor denen eine Zahl ist und nach denen keine ist.“) Man verschiebt gemäß der Regel das untenstehende Teilergebnis um eine Stelle nach rechts, so daß es unter die erste Null zu stehen kommt. Die anzuhängende neue Stelle ist eine Null, weil Null, mit jeder Zahl multipliziert, wieder Null ergibt. Anschließend geht man weiter nach der Regel vor.

Es ist verständlich, daß wegen der besonderen Bedeutung der Null dieser Fall extra behandelt wird. Ein ähnlicher Abschnitt ist auch in **LA/LP** vorhanden (S.191,6-25).

⟨16.3⟩ Es gibt noch eine andere, verkürzte Möglichkeit (*abbreviatio*), Wurzeln aus Zahlen zu bestimmen, die am Ende eine Reihe von Nullen haben: Man hänge die Hälfte der Nullen, die sich am Ende des Radikanden befinden, hinten an die Wurzel an. Auf diese Weise erspart man sich das Verdoppeln. Das Verfahren wird am Beispiel: $\sqrt{10000}$ verdeutlicht; es ergibt sich ohne viel Rechnung die Zahl 100.

Die verkürzte Regel, im vorgegebenen Fall durch Halbieren der Nullen zum Ziel zu kommen, wird auch in **LY** (S.53,18-54,3) und in **LA/LP** (S.191,25-192,3) vorgestellt und anschließend an demselben Beispiel $\sqrt{10000}$ erläutert (**LY III**, S.54,3-27; **LA/LP**, S.192,4-193,13). Dabei wird in **LA/LP** sowohl das „normale“ als auch das „verkürzte“ Verfahren geschildert.

* * *

⁸⁵Siehe [Levey / Petruck 1965, S.64-68], und die Erläuterungen dazu auf S.20-21.

Kapitel 17: Item in radice fractionum capitulum (Bestimmung der Wurzel aus Brüchen)

DA: N, f.23v-24r; C: fehlt

⟨17.1⟩ Wenn man die Wurzel aus einem Bruch oder aus einer gemischten Zahl ziehen will, so soll man diese in Einheiten der niedrigsten Stelle des Bruches ausdrücken. Wenn es sich um eine Stelle handelt, die „eine Wurzel hat“ (d.h. bei Sexagesimalbrüchen: Sekunden, Quarten, ...), soll man die Wurzel nach dem vorher (d.h. in Kapitel 16) gelehrt Verfahren ziehen, wobei man beachten soll, um welche Stelle es sich handelt; anschließend soll das Ergebnis auf größere Einheiten gebracht werden (*sublevare*). Wenn die niedrigste Stelle „keine Wurzel hat“ (d.h. bei Sexagesimalbrüchen: wenn es sich um Minuten, Terzen, ... handelt), so soll man sie auf Einheiten einer kleineren Stelle bringen, die eine Wurzel hat, und die Wurzel zum Schluß in größere Einheiten verwandeln. Dabei wird betont, daß das Ergebnis umso genauer wird (*tanto magis ... propius veritati*), je stärker man die Zahl verringert, d.h., je größer die Zahl ist, mit der man den Bruch erweitert.

Dasselbe allgemeine Verfahren wird auch in LY (S.55,12-18) und in LA/LP (S.195,13-199,6) dargestellt, wobei in beiden Fällen wie in DA gesagt wird, daß das Ergebnis besser wird, wenn der Radikand auf kleinere Brüche gebracht wird. Aus der ausführlichen Erläuterung in LA/LP wird auch klar, daß das Verfahren nicht nur für Sexagesimal-, sondern auch für gewöhnliche Brüche gilt, sofern man nur unter „Stellen, die eine Wurzel haben“ dasselbe versteht wie das, was in Kapitel 13.4 dargestellt wurde.

Auch al-Uqlīdisī lehrt dieses Vorgehen für (gewöhnliche) Brüche oder gemischte Zahlen: Man „löst sie auf“ (arab.: *ḥalla*) in Einheiten des kleinsten Bruchs und zieht die Wurzel daraus, sofern die Zahl, die den kleinsten Bruch bildet (d.h. dessen Nenner), „eine Wurzel hat“ (Kapitel I.13, [Saidan 1978, S.80-81]).

⟨17.2⟩ Zur Verdeutlichung werden zwei Beispiele durchgerechnet. Das erste ist: $\sqrt{2}$. Man verwandelt 2 in Sekunden; würde man 2 in Quarten oder Sexten verwandeln, so wäre das Ergebnis noch genauer. (Ein besserer Näherungswert für $\sqrt{2}$ wird in Kapitel 19.2 gewonnen.) Man erhält: $\sqrt{2} = \sqrt{7200}' = 84' + \text{Rest} = 1 \text{ Ganzes } 24' + \text{Rest}$.

Dasselbe Beispiel wird auch in LY gebracht, allerdings nicht formuliert als Wurzel aus 2 (Ganzen), sondern aus 120 Minuten (S.55,19-24), und ebenfalls in LA/LP (S.199,7-20).

Die Möglichkeit, bei nicht aufgehenden Wurzeln durch Erweitern mit einer geraden Potenz von 60 zu einem genaueren Ergebnis zu kommen, wird auch von anderen arabischen Autoren angegeben, z.B. von al-Uqlīdisī⁸⁶. Hier wird natürlich die Regel $\sqrt{N} = \sqrt{Nk^2}/k = \sqrt{Nk^{2n}}/k^n$ für $k = 60$ angewandt. Al-Uqlīdisī erwähnt, daß man durch Anhängen einer geradzahlgigen Anzahl von Nullen (d.h. für den Fall $k = 10$) dasselbe erreichen kann. Dieses Verfahren, das letztlich zu den Dezimalbrüchen führt, wird in DA im folgenden Kapitel 18 vorgestellt und in Kapitel 19 an einem Beispiel durchgerechnet.

⁸⁶Kapitel II.18, [Saidan 1978, S.164-165]. Die Methoden anderer Autoren, nicht aufgehende Quadratwurzeln zu bestimmen, sind bei Saidan auf S.441-452 angegeben.

⟨17.3⟩ Beim zweiten Beispiel handelt es sich um die Wurzel aus einer gemischten Zahl, die aus gewöhnlichen Brüchen besteht: $\sqrt{2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{13}}$. Hier muß die gemischte Zahl zunächst „auf eine Art“ gebracht werden; wir würden sagen: auf den Hauptnenner. Die Terminologie der *differentie* und der *genera* ist dieselbe wie in Kapitel 13. Um die Wurzel ziehen zu können, wird der Bruch so erweitert, daß der Nenner eine Quadratzahl wird. In DA heißt es, daß die *prima differentia fractionum*, d.h. der Zähler 94 des unechten Bruchs, von der Art der Minuten ist (*est ex genere minutorum*). Aus ihnen kann, wie in Kapitel 13.4 gezeigt wurde, keine Wurzel gezogen werden. Daher werden die *minuta* in *secunda* verwandelt, indem man mit 39 (= dem Nenner) multipliziert. Man benutzt also implizit die Formel: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$. Im einzelnen werden folgende Rechenschritte vorgenommen:

$$\begin{aligned}\sqrt{2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{13}} &= \sqrt{\frac{78 + 13 + 3}{39}} = \sqrt{\frac{94}{39}} = \sqrt{\frac{94 \cdot 39}{39^2}} = \frac{\sqrt{3666}}{39} \\ &= \frac{60}{39} + \text{Rest} = 1 \frac{21}{39} + \text{Rest}.\end{aligned}$$

Wenn man ein noch genaueres Ergebnis bekommen wollte (*esset, quod exiret de radice, subtilius et propius veritati*), müßte man den Bruch in Quarten verwandeln, d.h., noch zweimal mit (dem Nenner) 39 multiplizieren. Dann würde man erhalten:

$$\frac{\sqrt{3666}}{39} = \frac{\sqrt{3666 \cdot 39^2}}{39^2} = \frac{\sqrt{5575986}}{39^2} = \frac{2361 + \text{Rest}}{39^2}.$$

In N wird das Zwischenergebnis 5575986 nicht genannt, und statt 2361 erscheint die Zahl 1521. Ob dieser Fehler schon in der ursprünglichen Übersetzung vorlag oder erst durch einen späteren Abschreiber entstand, ist nicht zu klären. – Schließlich wird noch gesagt, daß man bei höheren Bruchstellen, etwa Quinten und Septimen, ähnlich verfahren soll und nur darauf achten muß, an welcher Stelle man sich befindet.

Dieselbe Aufgabe $\sqrt{2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{13}}$ wird auch in LY (S.56,1-57,27) und in LA/LP (S.199,21-204,22) behandelt. In LY wird zusätzlich vermerkt, daß beim Wurzelziehen aus 3666 ein Rest von 66 Sekunden bleibt. Die genauere Bestimmung der Wurzel mittels Quarten wird nur in der Fassung LY III überliefert; auch dort wird das Zwischenergebnis 5575986 nicht genannt, und das Endergebnis ist falsch (LY III hat: 3523 statt 2361). Die Darstellung in LA/LP ist recht ausführlich und klar. Dort wird, wie in DA, zunächst das Bestimmen der Wurzel „in Sekunden“, d.h. mit dem Nenner 39, behandelt und dann die Erweiterung *ad quartam differentiam fractionum*. Bei der genaueren Berechnung der Wurzel werden zumindest in einigen Handschriften die beiden Zwischenergebnisse $3666 \cdot 39 = 142974$ und $142974 \cdot 39 = 5575986$ sowie die Wurzel daraus ($\sqrt{5575986} = 2361 + \text{Rest}$) korrekt angegeben. Es folgen auf S.204,23-206,19 noch einige allgemeine Aussagen über die Wurzel aus Brüchen.

* * *

Kapitel 18: Aliud capitulum adabbreviatum de radice, quod non est ex opere Indorum, sed ego extraxi illud secundum quod constituerunt Indi. Est autem levius opere Indorum atque subtilius (Über die Ausziehung der Quadratwurzel in Anlehnung an das, was die Inder geschrieben haben [mit Hilfe von angehängten Nullen])

DA: N, f.24r; C: fehlt

Es folgt ein Kapitel, das gemäß der Überschrift nicht unmittelbar zu dem Verfahren der Inder gehört, sondern das sich daran anlehnt und leichter und genauer ist als das, was sie lehren. Die Formulierung *sed ego extraxi illud secundum quod constituerunt Indi* zeigt eindeutig, daß dieser Abschnitt vom Autor, also von al-Ḥwārizmī selbst, stammt; allerdings beruht der Inhalt auf dem Verfahren der Inder.

Es geht darum, die Genauigkeit des Wurzelziehens zu erhöhen, indem an die zu radizierende Zahl eine gerade Anzahl von Nullen angehängt wird. Nach dem Radizieren wird die gezogene Wurzel in geeigneter Weise vermindert. Man benutzt also die Beziehung:

$$\sqrt{N} = \frac{1}{10^k} \sqrt{N \cdot 10^{2k}}.$$

Der gebrochene Anteil des Ergebnisses wird allerdings nicht in Dezimalbrüchen ausgedrückt, sondern in Sexagesimalbrüche überführt. Das Ergebnis wird umso genauer, je mehr Nullen angehängt werden.

Die Darstellung in DA ist auch hier im Prinzip verständlich, aber recht schwerfällig. Der Autor betont, daß nur eine gerade Anzahl von Nullen angehängt werden darf; wenn man von dieser Einschränkung absieht, kann man deren Zahl aber beliebig (*secundum quod volueris*) wählen. Wenn man die Wurzel aus dieser durch Nullen vergrößerten Zahl zieht, kann das Ergebnis aufgehen oder nicht. Wenn die Wurzel aufgeht, handelt es sich um eine *radix certissima*⁸⁷. Für nicht aufgehende Wurzeln wird der Begriff *surdus* (= taub) benutzt, der nur an dieser Stelle in der Schrift vorkommt.

Die Formulierung in DA erinnert an al-Bağdādī. Dieser gibt folgende Definition [Saidan 1985, S.71]: „Es gibt zwei Arten von Zahlen: eine Art, die eine richtige Wurzel (*ḡidr ṣaḥīḥ*)⁸⁸ hat, die man aussprechen kann, z.B. 4, 9, 100, 400, 900 etc., denn man kann sagen: ‘die Wurzel von vier ist zwei’ ... Die zweite Art von Zahlen ist die ‘stumme Zahl’ (*adad aṣamm*), für die man keine ‘richtige’ Wurzel aussprechen kann, vielmehr läßt sich ihre Wurzel nur annäherungsweise (*bi-t-taqrīb*) ziehen, z.B. 10 ...“. – Das Wort *surdus* wurde – ebenso wie das arabische *aṣamm* – auch in den Übersetzungen von Euklids „Elementen“ zur Bezeichnung irrationaler Größen verwendet⁸⁹.

Wenn die Wurzel nicht aufgeht, soll man den Rest vernachlässigen (*proice illud et non cures de eo*). Danach zählt man von rechts so viele Stellen *k* ab, wie man Paare von Nullen angehängt hatte. Die aus *k* Ziffern bestehende Zahl, die an diesen Stellen steht und die den gebrochenen Anteil des Ergebnisses bezeichnet, wird in Sexagesimalteile verwandelt (was nicht gesagt wird), indem sie mit 60 multipliziert wird. Vom Produkt streicht man *k* Stellen ab. Die davor stehenden Stellen sind die Minuten. Der Rest wird wieder mit 60 multipliziert und ergibt (nach Abstreichen von *k* Stellen) die Sekunden,

⁸⁷In Kapitel 14 wurde eine aufgehende Wurzel als *radix integra* bezeichnet.

⁸⁸Dasselbe Wort *ṣaḥīḥ*, plur. *ṣiḥāḥ* (hier als Substantiv), bezeichnet die „ganzen Zahlen“, also in diesem Sinn wohl auch „ganze“ Wurzel (im Gegensatz zu solchen, die nicht aufgehen).

⁸⁹Zur Bedeutung von *aṣamm* siehe auch [Saidan 1978, S.352-353. 437].

usw. Die verschiedenen Sexagesimalteile der Wurzel werden untereinander geschrieben. – Ein Beispiel für das Verfahren wird hier nicht gegeben; es folgt aber im nächsten Kapitel.

Das Verfahren, bei Wurzeln aus ganzen Zahlen durch Anhängen von Nullen die Genauigkeit zu vergrößern, wird auch in LY (S.58,1-59,15) und in LA/LP (S.206,20-210,31) gelehrt. Beide Schriften erwähnen nicht, daß es sich um eine indische Methode handelt, sondern bezeichnen sie nur als *alia regula* (S.58,1) bzw. *alio modo per circulos* (S.206,22). In LY wird das Vorgehen am Beispiel $\sqrt{26}$ erläutert (die Aufgabe wird allerdings nicht explizit formuliert, sondern muß aus der dazugehörigen Figur erschlossen werden). In LA/LP wird das allgemeine Verfahren recht ausführlich und klar dargestellt. In beiden Texten wird eine Wurzel, die aufgeht, nicht, wie in DA, mit *radix certissima*, sondern mit *radix vera* bezeichnet; der Begriff *surdus* für eine nicht aufgehende Wurzel wird nicht benutzt. – Zum Vorkommen dieses Verfahrens bei al-Uqlīdisī siehe die Bemerkungen zu Kapitel 17.2.

* * *

Kapitel 19: Capitulum extractionis radicum integri numeri ac fractionum (Ausziehen von Wurzeln aus ganzen Zahlen oder aus Brüchen)

DA: N, f.24r-v; C: fehlt

In diesem Kapitel wird wiederum die Aufgabe behandelt, Wurzeln aus ganzen oder aus gemischten Zahlen (bei denen die Bruchteile gewöhnliche oder Sexagesimalbrüche sein können) zu bestimmen. Es überrascht, daß dieses Thema noch einmal aufgegriffen wird, nachdem bereits in den Kapiteln 14-16 das Wurzelziehen für ganze Zahlen und in Kapitel 17 für Brüche behandelt wurde. Tatsächlich wird hier kein neues Verfahren gelehrt, sondern nur die in Kapitel 18 angesprochene Möglichkeit, bei nicht aufgehenden Wurzeln die Genauigkeit durch Anhängen von Nullen zu vergrößern, noch einmal wiederholt (19.1) und dann an einem Beispiel durchgerechnet (19.2).

(19.1) Zunächst wird noch einmal das allgemeine Verfahren geschildert: Man führt die einzelnen Bestandteile der gemischten Zahl auf das niedrigste *genus* zurück, das in ihnen vorhanden ist; falls dieses keine Wurzel hat, muß man es um eine Stelle verringern, um sicherzugehen, daß man die Wurzel ziehen kann (siehe Kapitel 13). Der Autor verweist hier und im folgenden mehrfach auf seine früheren Ausführungen über die Wurzeln (*secundum quod diximus de opere radicum; secundum quod diximus in precedentibus; sicut diximus*). Man kann jetzt eine beliebige gerade Anzahl von Nullen anhängen (siehe Kapitel 18). Wenn man die Wurzel gezogen hat, so verwandelt man den Rest, der am Schluß übrig bleibt, durch mehrfache Multiplikation mit 60 in Sexagesimalbrüche, wobei nach dem im vorhergehenden Kapitel angegebenen Verfahren bei jedem Teilergebnis halb so viele Stellen abgestrichen werden müssen, wie Nullen angehängt wurden. Am Ende werden der ganzzahlige Bestandteil der Wurzel und die Sexagesimalbrüche untereinander geschrieben. Der Autor betont wie schon im vorhergehenden Kapitel, daß dieses Verfahren genauer und leichter (*subtilius et levius*) ist. – Nachdem das Verfahren mit dem Anhängen von Nullen schon in Kapitel 18 ausführlich beschrieben wurde, hätte man diesen Abschnitt stark verkürzen oder sich auf das Beispiel beschränken können, das in Kapitel 19.2 folgt.

Einen Abschnitt, der dem Kapitel 19.1 entspricht, findet man auch in **LY** (S.59,16-60,31) und in **LA/LP** (S.218,1-219,15). Dabei fällt auf, daß der Text in **LY III** sich zum Teil mit **DA** deckt.

(19.2) Das geschilderte Verfahren wird am Beispiel: $\sqrt{2}$ illustriert. Zunächst wird noch einmal gesagt, daß man eine beliebige gerade Anzahl von Nullen „vor“ die 2 (d.h. im Sinne der Schreibrichtung der Araber: rechts von der 2) schreiben kann. Der Autor entscheidet sich für 6 Nullen, so daß im Verlauf der Rechnung immer wieder 3 Stellen abgestrichen werden müssen. Die einzelnen Rechenschritte sind: Die Wurzel aus 2.000.000 wird gezogen; dies ergibt 1414 und einen Rest. Der Rest wird vernachlässigt. Durch Abstreichen der 3 Stellen erhält man 1 Ganzes und 414 Teile. Diese Bruchteile werden nach dem Verfahren in Kapitel 19.1 sukzessive in Sexagesimalteile verwandelt: $414 \cdot 60 = 24840$ liefert 24 Minuten; $840 \cdot 60 = 50400$ liefert 50 Sekunden; $400 \cdot 60 = 24000$ liefert genau 24 Terzen. In moderner Schreibweise:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= \sqrt{\frac{2.000.000}{10^6}} = \frac{1}{1000} \cdot \sqrt{2.000.000} = \frac{1}{1000} \cdot [1414 + \text{Rest}] \\ &\approx \frac{1}{1000} \cdot 1414 = 1 \text{ (Ganzes)} + \frac{414}{1000} = 1 + \left(\frac{414 \cdot 60}{1000}\right)' = 1 + \frac{24840}{1000} \\ &= 1 + 24' + \left(\frac{840 \cdot 60}{1000}\right)'' = 1 + 24' + \left(\frac{50400}{1000}\right)'' \\ &= 1 + 24' + 50'' + \left(\frac{400 \cdot 60}{1000}\right)''' = 1 + 24' + 50'' + 24''' .\end{aligned}$$

Die Ganzen und Bruchteile werden untereinandergeschrieben, so daß sich am Ende folgende Figur ergibt (sie ist in **N** nicht vorhanden, wird aber durch Ausdrücke wie *que posuimus sub minutis* angedeutet):

1
24
50
24

Man erhält durch die Verwendung der Nullen also ein genaueres Ergebnis für $\sqrt{2}$ als in Kapitel 17.2; dort bricht man bei den Minuten ab.

Dasselbe Beispiel $\sqrt{2}$ wird auf dieselbe Weise auch in **LY** (S.60,32-61,38) und in **LA/LP** (S.211,1-217,7) behandelt, in **LY** allerdings nur in der Version **LY III**. Der Text in **LA** ist dadurch recht lang, weil jeder Schritt des Wurzelziehens aus 2.000.000 genau geschildert wird, während sich **LP** darauf beschränkt, wie das Ergebnis 1414 in Sexagesimalbrüche verwandelt werden kann.

* * *

Mit diesem Beispiel endet der Text. Es folgt nur noch die subscriptio mit dem Lob Gottes und dem Dank an ihn. Man könnte die gesamte Schlußformel wörtlich aus dem Arabischen verstehen: „Zu Ende ist (*tamma*, *Finit*) das Buch (*al-kitāb*, *liber*) mit der Hilfe Gottes (*bi-ʿaun Allāh*, *cum dei adiutorio*) und seinem Lob (*wa-ḥamdihī*, *et eius laude*)“.

KAPITEL 7

ZUSAMMENFASSUNG

Die Bedeutung der arithmetischen Abhandlung al-Ḥwārizmī liegt darin, daß sie das älteste erhaltene arabische Werk ist, in dem das „indische Rechnen“ behandelt wird. Sicherlich hat es schon vor seiner Zeit Rechenkenntnisse gegeben, und es könnte sein, daß vor ihm andere derartige Schriften existierten, aber darüber ist nichts Verbürgtes bekannt. Al-Ḥwārizmī's „Arithmetik“ ist keine Übersetzung indischer Texte, sondern eine Zusammenstellung, die auf – heute unbekannte – indische Materialien zurückgeht. Behandelt werden: die Zahlendarstellung im dezimalen Stellenwertsystem; die sechs Grundrechenarten (einschließlich Verdoppeln und Halbieren); die Bruchrechnung (auch Sexagesimalbrüche); ferner das Ausziehen der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen und Brüchen. Die Schrift ist um 825 entstanden, also etwa 130 Jahre vor dem ältesten in arabischer Sprache erhaltenen arithmetischen Traktat von al-Uqlīdisī. Sie wurde im 12. Jahrhundert aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzt. Da bisher noch keine Handschrift mit dem arabischen Text von al-Ḥwārizmī gefunden wurde, ist man gezwungen, aufgrund lateinischer Bearbeitungen Rückschlüsse auf den Inhalt der ursprünglichen Schrift zu ziehen. Die bisherigen Rekonstruktionen gingen ausnahmslos von einer einzigen Handschrift aus (C = Cambridge, University Library, Ii. 6.5), die allerdings einen unvollständigen Text überliefert.

Das Auffinden der bislang unbekannten Handschrift N (New York, Hispanic Society of America, HC 397/726) eröffnet jetzt neue Möglichkeiten, Umfang und Inhalt der arabischen Schrift von al-Ḥwārizmī zu erschließen. Dazu stellt sich zunächst die Frage, welche Überlieferungsstufe beide Codices repräsentieren und in welchem Verhältnis sie zueinander stehen. In dem Teil des Textes, der beiden Handschriften gemeinsam ist, unterscheidet sich der Wortlaut an manchen Stellen. Am Anfang sind die Abweichungen noch gering, sie werden jedoch später größer. Bedeutende Unterschiede findet man etwa in den Kapiteln 3 und 10.1; hier könnte man auf den Gedanken kommen, daß beide Handschriften verschiedene Übersetzungen repräsentieren. Im allgemeinen sind die Differenzen aber stilistischer und nicht inhaltlicher Art. In den meisten Fällen ist der Text in N dem in C vorzuziehen; er ist ausführlicher und korrekter. N weist eine Reihe von Fehlern nicht auf, die man in C findet. Hierzu gehören etwa die Versehen in C bei der Stellenregel für die Multiplikation von Sexagesimalbrüchen (Kapitel 8.1) und die Verwechslungen *minuta* – *secunda* (Kapitel 10.3 und 10.4). N enthält auch Kapitelüberschriften und Figuren mit den Zahlenbeispielen, die in C fehlen. Dies ändert aber nichts daran, daß auch N nicht den ursprünglichen Wortlaut der Übersetzung bietet. Vielmehr stellen N und C verschiedene Stufen einer Bearbeitung der Übersetzung aus dem Arabischen ins Lateinische dar. Dabei dürfte der Text in N dem lateinischen Original näher stehen als der in C. Hierzu paßt gut die Beobachtung, daß die Hand-

schrift N wahrscheinlich in Spanien entstand, während C in England geschrieben sein dürfte.

Trotz der Unterschiede zwischen N und C ist es also wahrscheinlich, daß beide Fassungen auf eine gemeinsame Vorlage (DA) zurückgehen. Wegen der zahlreichen Abweichungen zwischen N und C ist es allerdings im allgemeinen nicht möglich, den Text von DA aus diesen beiden Handschriften zu rekonstruieren. Da N und C vermutlich im 13. Jahrhundert geschrieben wurden und auf der Übersetzung von al-Ḥwārizmī basieren, die sicher im 12. Jahrhundert angefertigt wurde, muß DA im 12. oder 13. Jahrhundert entstanden sein, eher wohl im 12. Jahrhundert, da beide Textfassungen sich teilweise schon weit von der gemeinsamen Vorlage entfernt haben.

Es stellt sich natürlich die Frage, in welcher Beziehung DA zur ursprünglichen Übersetzung von al-Ḥwārizmī's arithmetischer Schrift ins Lateinische (und damit zum arabischen Original) stand. Zur Beantwortung dieser Frage stehen uns nur die Texte von N und C sowie die Schriften LY und LA/LP zur Verfügung, die sicherlich im 12. Jahrhundert entstanden und letztlich auf der Übersetzung der „Arithmetik“ von al-Ḥwārizmī beruhen.

In dem gemeinsamen Text der Handschriften N und C gibt es eine Reihe von Abschnitten, die westliches Gedankengut enthalten und keine Arabismen aufweisen, z.B. die Erörterungen über die Eins (Kapitel 1.3). Sie sind sicherlich einem späteren Bearbeiter zuzuschreiben. Auch sonst ist der Text an vielen Stellen „latinisiert“ worden. Andererseits gehen viele dem Arabischen entlehnte Konstruktionen und Fachausdrücke (siehe dazu den Anhang 3) unzweifelhaft auf die Übersetzung aus dem Arabischen und somit auf die Originalschrift von al-Ḥwārizmī zurück. Vergleicht man den vollständigen Text von DA, der in der Handschrift N vorliegt, mit dem Inhalt der Bearbeitungen LA/LP und LY, so stellt man fest, daß sie dieselben Themen behandeln. Da weder LA/LP noch LY direkt auf DA zurückgehen, sondern auf verschiedenen Wegen von der Übersetzung von al-Ḥwārizmī's Schrift aus dem Arabischen abhängen, stützt dies die Annahme, daß der von N überlieferte Text – trotz der Überarbeitung und der Zusätze – die lateinische Übersetzung der „Arithmetik“ von al-Ḥwārizmī in ihren wesentlichen Teilen wiedergibt.

Mit Hilfe der Handschrift N ist es also jetzt möglich, den ursprünglichen Umfang und – mit den genannten Einschränkungen – auch den Text von al-Ḥwārizmī's „Arithmetik“ zu rekonstruieren. Man sieht, wie die Abschnitte über die Division und das Wurzelziehen in al-Ḥwārizmī's „Arithmetik“ ausgesehen haben, und erkennt, daß die späteren Bearbeitungen keine zuverlässigen Informationen liefern, da dort diese Abschnitte stark überarbeitet und Erweiterungen und Umstellungen vorgenommen wurden.

Es stellt sich die Frage, wer die Schrift aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzt hat. In der bisherigen Literatur werden hier verschiedene Namen genannt, ohne daß Gründe für die Zuweisung angegeben werden; man findet die bekanntesten Übersetzer: Adelard von Bath, Hermann von Kärnten und Gerhard von Cremona. Aufgrund der in N und C vorliegenden Überarbeitungen ist es nicht möglich, zu sicheren Aussagen zu kommen. Am wenigsten wahrscheinlich ist Hermann von Kärnten, der seine arabischen Vorlagen äußerst frei wiedergegeben hat. In N und C gibt es jedoch viele Phrasen und Formulierungen, die noch dem Arabischen nachempfunden sind. Akzeptiert man die

Ansicht, daß **LY** schon um 1143 entstanden ist¹, scheidet auch Gerhard von Cremona aus, da er erst in der zweiten Hälfte des 12. Jahrhunderts wirkte. Andererseits könnte eine Formulierung in einem Zitat aus al-Ḥwārizmī's „Algebra“, die der Übersetzung dieser Schrift durch Gerhard von Cremona ähnelt (Kapitel 4.1), darauf hinweisen, daß Gerhard auch dessen „Arithmetik“ aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzte. Wenn man von Gerhard absieht, blieben dann von den bekannten Übersetzern hauptsächlich Adelard von Bath und Robert von Chester zu erwägen. Die fehlerhafte Schreibung der Zahl XL, die man in der Handschrift N findet und die auf die westgotische Form dieser Zahl zurückzuführen ist, deutet darauf hin, daß die Übersetzung in Spanien entstanden oder wenigstens verbreitet war, ebenso wohl auch die in N gebrauchten Ziffernformen, die den alten westlichen in den Codices Vigilanus und Emilianus noch sehr ähneln. Dies läßt aber natürlich keine näheren Rückschlüsse auf den Übersetzer zu.

Wesentliche Eigenschaften der Schrift **DA**, wie sie uns in den Handschriften N und C vorliegt, sind:

– *Sehr ausführliche, manchmal langatmige Darstellung*

Dies betrifft z.B. die Erörterungen in Kapitel 1 über das Dezimalsystem, die Schreibweise der Zahlen, den Begriff der Stelle (*differentia*) und die Verwendung der Nullen bei der Schreibweise der Vielfachen der Zehnerpotenzen. Dinge, die in diesem Kapitel schon genannt wurden, werden im einleitenden Kapitel über die Brüche (13.3) wiederholt. – Die Null wird nicht nur im Anfangskapitel besonders behandelt, sondern auch beim Wurzelziehen (Kapitel 16.2). – Das Verfahren, Wurzeln durch Anhängen von Nullen genauer zu berechnen, wird zweimal dargestellt (Kapitel 18 und 19.1). Daß man besonders ausführlich auf die Null eingeht, verwundert nicht, da es Schwierigkeiten bereitet haben dürfte, ihr Wesen zu begreifen – schließlich bedeutet sie einerseits „nichts“, erhöht aber andererseits den Wert der vor ihr stehenden Ziffer auf das Zehnfache.

– *Fehlende Fachausdrücke*

Für wesentliche arithmetische Begriffe gibt es in **DA** noch keine Fachausdrücke; vielmehr werden sie umschrieben. Hierzu zählen etwa die Termini: Minuend, Subtrahend, Multiplikand, Multiplikator, Dividend, Divisor, Zähler, Nenner, Quadratzahl. Auch für die Null wird noch kein spezieller Ausdruck (etwa: *ciffrā*) verwendet, sondern das beschreibende Wort *circulus*. Durch die fehlenden Begriffe wird die Darstellung von Rechenoperationen (etwa die Multiplikation und Division von Brüchen in Kapitel 12) kompliziert.

– *Unpassende Reihenfolge*

In Kapitel 1.7 werden Sachverhalte, die mit der Addition zusammenhängen, geschildert, obwohl die Addition erst später dargestellt wird. – Das Verdoppeln wird an einer Stelle (Kapitel 3) nach dem Halbieren, an einer anderen (Kapitel 11.4) vor dem Halbieren behandelt. – Auf die Schreibweise der Brüche wird erst in Kapitel 11 eingegangen, obwohl schon zuvor das Multiplizieren und Dividieren von Brüchen gelehrt wurde (in Kapitel 8-10).

¹Über die Problematik dieser Ansetzung siehe die Bemerkungen in Kapitel 2, Anm. 10.

– *Unklare bzw. ungeschickte Darstellung*

Die Rechenschritte bei der Multiplikation (Kapitel 4) und bei der Division (Kapitel 7.1) werden nur verbal beschrieben; hätte man nicht nur die Ausgangs- und Endposition, sondern auch die Zwischenschritte beim Rechnen tabellenmäßig dargestellt, so wäre viel deutlicher geworden, wie man vorzugehen hat. – Es gibt keine klare Unterscheidung zwischen dem Rechnen mit gewöhnlichen und sexagesimalen Brüchen; offenbar war der Autor oder Bearbeiter der Meinung, daß für beide dieselben Regeln gelten, und er versucht dies auch zu beweisen (Kapitel 8). – Ein Divisionsbeispiel wird für Drittel (*tercie*) statt für Terzen (*tercia*) durchgerechnet (Kapitel 10.2). – Die Darstellung der Addition von Sexagesimalbrüchen ist recht unklar; es wird nicht einmal gesagt, daß es sich um eine Addition handelt (Kapitel 11.2). – Für die Multiplikation von gewöhnlichen Brüchen wird nicht das Figureschema gelehrt (Kapitel 12.1). – Die Abtrennung der Zweiergruppen beim Wurzelziehen wird nicht klar dargestellt (Kapitel 14). – Schwer verständlich ist auch die Begründung für die Notwendigkeit, beim Wurzelziehen die Teilergebnisse zu verdoppeln (Kapitel 15). – Das Beispiel $\sqrt{2}$ wird zweimal berechnet (Kapitel 17.2 und 19.2).

– *Verständnisschwierigkeiten*

An einigen Stellen hatte der Autor bzw. Bearbeiter offenbar Schwierigkeiten, den Inhalt des Textes zu verstehen. So fehlt eine Begründung, warum beim Halbieren manchmal 30 und manchmal 5 geschrieben werden muß (Kapitel 3). Ferner bemüht er sich – natürlich ohne Erfolg –, den Nachweis zu führen, daß für die Quadratwurzeln aus Sexagesimalbrüchen und gewöhnlichen Brüchen dieselben Regeln gelten (Kapitel 13.4). Es bleibt unklar, was die Begriffe *prime fractiones* usw. bedeuten (Kapitel 13.4).

– *Altertümliche Darstellung*

Einige dargestellte Verfahren deuten darauf hin, daß die Schrift in einer Zeit abgefaßt wurde, in der die hier behandelte Arithmetik noch neu war; später wurde das Vorgehen erleichtert: Bei der Neunerprobe wird nicht die Quersumme genommen, sondern die Neun wird fortwährend subtrahiert (Kapitel 5). Diese Probe wird nur beim Verdoppeln und Multiplizieren angewandt; beim Dividieren wird stattdessen die Probe durch Multiplizieren des Ergebnisses vorgeschlagen (Kapitel 10.4). – Die Multiplikation von gewöhnlichen Brüchen wird dadurch unnötig kompliziert, daß der Zähler mit dem Nenner multipliziert wird (Kapitel 12.2, nur in der Handschrift N).

Auch wenn nicht sicher ist, ob alle diese Eigenarten schon in der Übersetzung aus dem Arabischen vorhanden waren oder einige erst einem späteren Bearbeiter zuzuschreiben sind, deuten sie doch in dieselbe Richtung: Sie zeigen, daß der Text von DA eine relativ frühe Stufe des Wissens um das neue indische Rechnen repräsentiert. Man hatte noch Schwierigkeiten, den Inhalt voll zu verstehen. Es fehlten technische Ausdrücke, um den Sachverhalt an allen Stellen klar zu formulieren. Die Darstellung ist nicht glatt, sondern stellenweise unbeholfen: manchmal übermäßig breit, dann wieder so knapp, daß sich der Inhalt nicht leicht erschließt. Dies alles paßt gut zu der Tatsache, daß al-Ḥwārizmī Schrift in einer Zeit verfaßt wurde, in der das neue Rechnen gerade erst Eingang in die arabisch sprechende Welt fand. Recht unwahrscheinlich ist die umgekehrte Annahme, daß al-Ḥwārizmī sich in seiner arithmetischen Abhandlung schon relativ klar ausgedrückt habe und alle Ungereimtheiten der Fassung DA einem

westlichen Bearbeiter zuzuschreiben seien, der im 12. oder 13. Jahrhundert den Text durch Umstellungen und Änderungen verschlechtert habe².

Die uns bekannten Texte über das indische Rechnen, die nach al-Ḥwārizmī verfaßt wurden, stellen den Inhalt der Arithmetik klarer dar. Dies gilt für den arabischen und den westlichen Bereich. Die Schriften von al-Uqlīdisī, Kūšyār ibn Labbān und al-Baġdādī, die ausnahmslos mehr als 100 Jahre nach al-Ḥwārizmī entstanden, zeigen, daß man das von den Indern übernommene Wissen nicht nur verstanden, sondern auch weiterentwickelt hat. Es sind Fachausdrücke und Verfahren vorhanden, die dazu beitragen, daß das Rechnen erleichtert und die Vorschriften besser dargestellt werden können. Auch im Westen entstehen schon bald nach der Übersetzung der arithmetischen Schrift von al-Ḥwārizmī aus dem Arabischen ins Lateinische Bearbeitungen, die erkennen lassen, daß man die Verständnisschwierigkeiten, die man in **DA** antrifft, gelöst hat: Die verschiedenen Versionen der Traktate **LA/LP** und **LY** – von denen sich **LA/LP** an einer Stelle (Kapitel 12.3) explizit auf „Alchorismus“ beruft, d.h. auf den Text, der auch in **DA** überliefert wird – zeigen zwar noch die Struktur des ursprünglichen Werkes, benutzen aber zahlreiche Fachtermini, die in **DA** noch fehlen, und lehren das neue Rechnen in einer klareren Form, unabhängig davon, ob sie den Sachverhalt kurz darstellen (wie es meistens in **LY** der Fall ist) oder recht ausführlich (wie in **LA/LP**). Dies zeigt, daß man auch im Westen schon im 12. Jahrhundert den wesentlichen Inhalt der indisch-arabischen Zahlenschreibweise und des Rechnens mit den neuen Ziffern begriff. Unter diesen Umständen ist es verständlich, daß Bearbeitungen wie **LA/LP** und **LY** oder die etwas späteren und relativ anspruchslosen Abhandlungen von Johannes de Sacrobosco oder Alexander de Villa Dei große Verbreitung erlangten, während eine Schrift wie **DA**, die eine ältere Fassung repräsentiert und teilweise schwerer verständlich ist, in der Folgezeit weniger beachtet wurde und heute nur noch in zwei Handschriften vorliegt.

²Dies ist etwa die Ansicht von Juschkewitsch, der schreibt [Juschkewitsch 1964, S.52]: „Ein aufmerksames Studium des lateinischen Textes läßt uns aber die Überzeugung gewinnen, daß die Abhandlung al-Ḥwārizmīs wesentlich vollständiger und vollkommener war als die Handschrift, nach der wir sein Werk kennengelernt haben. Die Einfügungen haben dabei dem Original weniger Schaden zugefügt als viele sehr ernsthafte Unterschlagungen, Schreibfehler, Entstellungen und dergleichen. Berücksichtigt man ferner, daß die Handschrift aus dem 13. Jahrhundert stammt, so muß man unweigerlich zu dem Schluß kommen, daß dies nicht die echte Übersetzung des arabischen Originaltextes, sondern ein unvollendetes und unkorrigiertes Konzept aus der Feder eines auf dem betreffenden Gebiet wenig bewanderten Kopisten ist.“ Über das arabische Original al-Ḥwārizmīs schreibt er (S.53): „Es zeichnete sich durch Kürze der Darstellung und klare und vollständige Beschreibung sowohl der Prinzipien des Stellenwertsystems als auch der Methoden zur Ausführung der Rechenoperationen unter Einbeziehung der geringsten Einzelheiten aus. Es braucht wohl nicht besonders betont zu werden, daß der Text al-Ḥwārizmīs unvergleichlich klarer und verständlicher war als der der ersten europäischen algorithmischen Handschriften, die noch keinerlei zusätzliche Erläuterungen enthielten.“ Woher Juschkewitsch diese Sicherheit bezieht, bleibt unklar. Spätestens nachdem die Handschrift **N** gefunden ist, läßt sich diese Position nicht mehr aufrecht erhalten.

SUMMARY

1. Introduction: Indian, Arabic and Western arithmetic

The decimal system, with nine digits and the zero, comes from India. At first there were individual symbols for the units and the tens, so that the system differed little from the alphabetical systems used by many peoples, e.g. the Greeks. The decisive step came when somebody used the same digits for the tens, hundreds, etc. as for the units. So began the "place-value" system for base 10. The oldest example of numbers so written are those of the Gurjara Inscription (595 A.D.), but it is generally assumed that the system goes back to the first centuries A.D. From the 8th century inscriptions and manuscripts with these numbers become relatively numerous. The oldest known occurrence of the zero in India is in 870, in the Gwalior inscriptions, and was in circular form. It was called *sūnya* ("empty"). In other documents the zero is written as a dot. There are examples of the "Indian" decimal place-value system from 7th-century Cambodia, Sumatra and Java.

The decimal place-value system was also known to mathematicians outside India at least as early as the 7th century: the Syrian scholar Severus Sebokht mentioned the Indian numerals about 662, saying that their way of writing numbers with 9 digits is beyond all praise. This shows that the new numbers were known in the Near East before the translations into Arabic.

Originally the Indian numbers were used in written documents simply to record numbers; arithmetic operations were made on a calculation board. It appears that at first numbers in each denomination were represented by cowrie shells (or, presumably, by other counters), but numerals were later written with a sharpened stick on dust spread on the board, intermediate results being rubbed out.

In Indian mathematical writings arithmetic was presented in a series of rules. Fractions, particularly unit fractions, were treated in great detail. In contrast to Greek writers, the Indians used the sexagesimal system very little. Procedures to find square and cube roots, either exactly or approximately, were known, and it was recognized that the procedures could be made more exact by multiplying the number whose root was required by a power of ten. There were procedures to check arithmetic operations, for instance by the casting out of nines.

In their numerous conquests beginning in the 7th century the Arabs took over the forms of the numbers found in the conquered territories – in the Eastern Mediterranean, the Greek alphabetic system. Indian numerals, with the zero, were known to educated Muslims at least by 760 A.D. The oldest known Arabic example is "260" at the end of a papyrus document and may be the Hijra date, i.e. 873-74 A.D. Here the zero is represented by a dot. In the following centuries the Indian numerals became known in the whole Arabian empire from the eastern provinces to Spain. In the *Fihrist* (ca. 987) there is a section devoted to the writing of Indian numerals: the nine numerals

are mentioned, with an example of each; the tens, hundreds and thousands being distinguished by one, two and three dots placed beneath the digits. The form of the numerals was not uniform; in particular, two conventions were developed, one in the East (including Egypt) and the other in North Africa and Spain. They differ in the way some of the numerals were written. The oldest known eastern example of all nine digits and the zero is a manuscript written in Iran about 970, and there are many other examples from later times. In contrast, the western Arabic numerals are known only from late specimens.

In the year 773 an embassy from India went to the court of Caliph al-Manṣūr in Baghdad. Among the officials was a scholar with astronomical and mathematical expertise. He introduced Indian astronomy to the caliph's court, where an Indian astronomical treatise was translated into Arabic. Under Caliph al-Ma'mūn (reigned 813-833) the translation activity reached its climax; many mathematical and astronomical works were translated from Greek. Subsequently the foreign sciences were assimilated into Arabic-Islamic culture.

Among the first who wrote mathematical works in Arabic was Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (ca. 780 – ca. 850; fl. 830). He worked in the very centre of a group of mathematicians and astronomers (and others) who were active in the "House of Wisdom" (*Bayt al-Ḥikma*) in the time of Caliph al-Ma'mūn. He wrote on arithmetic, algebra, astronomy, geography and the calendar. His treatises on arithmetic and algebra marked the beginning of the Arabic writings on these subjects.

Al-Khwārizmī's work on algebra must have been written before his "Arithmetic", in which it is cited. It is still not known which sources he used for the "Algebra": we may assume that the questions and results of the Babylonians and Indians were available to him, but we do not know in what form. There are indications that there was also an oral tradition, and it may well be that he drew upon this as well as upon written works. He provided geometrical proofs for algebraic rules for solving quadratic equations, but these proofs were not taken over from Greek writings, e.g. Euclid's *Elements* and *Data*.

Al-Khwārizmī's "Algebra" is divided into three parts:

- An algebraic section, followed by a short chapter on mercantile calculations illustrating the rule of three after the Indian fashion.
- A relatively short chapter on mensuration by using algebra.
- A section on inheritance problems according to Islamic law. It comprises more than half the book.

There are several Arabic manuscripts of the "Algebra". The first section was translated twice into Latin in the twelfth century, once by Robert of Chester (Segovia, 1145) and again by Gerard of Cremona (Toledo, second half of the twelfth century).

The arithmetical treatise of al-Khwārizmī is the oldest known Arabic work in which the Indian decimal place-value system and operations with it are described. Unfortunately, there is no known Arabic manuscript. All that we have are Latin texts based upon a lost translation. Details will be given in part 2 of this summary.

The oldest extant Arabic texts on Indian arithmetic are from the middle of the tenth century or later, and so more than a hundred years later than al-Khwārizmī himself. There are modern editions of the following works:

- Abu 'l-Ḥasan Aḥmad ibn Ibrāhīm al-Uqlīdisī's *al-Fuṣūl fi 'l-ḥisāb al-hindī* ("Chapters on Indian calculation"). The treatise was written in Damascus in 952/953 and is the oldest extant work in Arabic on the subject.
- Abu 'l-Ḥasan Kūshyār ibn Labbān's *Fī uṣūl ḥisāb al-hind* ("On the elements of calculation of the Indians") from the second half of the tenth century.
- Abū Maṣṣūr 'Abd al-Qāhir ibn Ṭāhir al-Baghdādī's *Kitāb al-takmila fi 'l-ḥisāb* ("Book on the completion of calculation"). Al-Baghdādī died in Isfarāyīn in 1037.

Besides these, there are numerous Arabic texts on calculation. In 1978 A. S. Saidan compared al-Uqlīdisī's text with all Arabic arithmetic texts of which details were known at the time and also with Indian treatises available to him. Since the later Arabic texts give no new information on al-Khwārizmī's procedures, they have been ignored in this study. But the three above-mentioned texts have proved useful in interpreting the text edited here, and the Arabic terms which are given in the commentary and in the glossary come from these three texts.

The Indian numerals were known in the West before the translation of Arabic works into Latin. The oldest known examples are in two Latin manuscripts which were written in Spain towards the end of the tenth century: the "Codex Vigilanus" (976) and the "Codex Emilianus" (992), neither of them a mathematical text. The numerals from 1 to 9 appear here in the western Arabic form.

This form of the numerals became well-known in monastic schools, because they were used on the calculation board (Latin: *abacus*). From the end of the tenth to the twelfth centuries there are numerous descriptions of calculating with the *abacus*, the oldest by Gerbert (ca. 940 – 1003). He probably became acquainted with these numerals during his visit to the Spanish Marches shortly before 970. Gerbert used the numerals, however, not for written calculations, but to mark counters for use on the *abacus*. From the eleventh century there were special names for the numerals so used; some of these were latinized Arabic words. With the disappearance of Gerbert's *abacus* in the twelfth century, these names disappeared, too.

The west-Arabic forms of the numerals 1 to 9 are also known by the term "ghubar" numerals (*ghubār* = dust). These forms appeared in the West in treatises on the *abacus* as well as, somewhat later, in accounts of the new method of written calculation (see below). There are considerable differences in the manuscripts in the forms of some of the numerals. These may be explained from their being drawn on the top of counters, which can be rotated.

A new phase begins with the translations from Arabic into Latin in the twelfth century. Among the numerous works translated was al-Khwārizmī's "Arithmetic". Unfortunately, no manuscript of the original Latin text is known. All that we have is a reworking, which begins with *Dixit Algorizmi* and is here referred to as DA (for details see below). The content of DA to a large extent prescribed the content of subsequent treatises on arithmetic in the West: the forms of the numerals and the principles of the place-value system; operations with integers (addition, subtraction, halving, doubling, multiplication, division); operations with fractions (multiplication, division, notation, addition, subtraction, doubling, halving); extracting square roots of integers and fractions. Not treated in DA are: arithmetic and geometric progressions, extraction of cube roots.

Of greater influence than DA were three redactions, all made in the twelfth century: the *Liber Ysagogarum Alchorismi* (LY), the *Liber Alchorismi* (LA) and the *Liber pulveris* (LP).

The LY is a work apparently intended to cover the whole quadrivium. Of the five books, the first three are on arithmetic, the fourth on geometry and the fifth on astronomy. In the title of book 4, music is mentioned as well as geometry. The manuscripts of this text differ markedly. Three versions may be distinguished: LY I, II and III. LY I is usually assumed to be written before 1143, but this is by no means certain. LY II is an expanded version of LY I. In one of its manuscripts a scribe has written *a Magistro A compositus*. It has been supposed that *Magister A* is Adelard of Bath. LY III, written in France, is another redaction of the original *Liber Ysagogarum*.

LA, the second of the texts derived from al-Khwārizmī, shows Spanish influence. The author is named as *magister Iohannes*. It is not clear whether this "Iohannes" was John of Seville (*Johannes Hispalensis*), who translated several astronomical and astrological texts from Arabic between 1133 and 1142.

LP is partly identical to LA, but also contains original parts. Apparently it is older than LA. We refer here to the common parts as LA/LP.

The three redactions – LY, LA, LP – treat by and large the same material in the same order as in DA, but the presentation is often clearer and more detailed – especially in LA/LP. The authors' efforts to present the material systematically and completely is easily recognizable.

Another treatise on Indian arithmetic was written in the twelfth century, though it was not widely known. One of the two manuscripts gives the author as "H. Ocreatus" and the title as *Helceph Saracenicum*. The word "Helceph" comes from the Arabic *al-ḥisāb*, "calculation". The author was acquainted with the new methods, but used Roman and not Arabic numerals and also terms from the old Western tradition – e.g. from Boethius and the *abacus* treatises in the Gerbert tradition.

On the translation of al-Khwārizmī's "Arithmetic" and the three redactions (and not on the "Ocreatus" text) depend a series of texts on calculating with Hindu-Arabic numerals. They were called *algorismus* treatises, a name that goes back to "al-Khwārizmī", though the historical connection was not understood, and the name was applied to any work of this kind. They were at first written in Latin and described the representation of numbers by Hindu-Arabic numerals and calculation with them (including sexagesimal and common fractions). Between the twelfth and fifteenth centuries a large number of such texts were written. In contrast to the earlier texts they generally treated either integers (*Algorismus de integris*) or fractions (*Algorismus de minuciis*). Among the writings on integers there are at least four texts that may with great probability be ascribed to the twelfth century: two *algorismi* in manuscripts now in London; the "Salem algorismus" and a text from Frankenthal. Though they differ in length, the content of these four treatises is essentially the same.

In the first half of the thirteenth century two well-known authors wrote *algorismus* treatises which were of great influence in the following centuries: Alexander de Villa Dei (d. ca. 1240), *Carmen de algorismo*, and Johannes de Sacrobosco (d. 1236 ?), *Algorismus vulgaris*. Alexander de Villa Dei's work, written in hexameters, is somewhat earlier than Sacrobosco's. Both treatises are limited to calculations with integers. The

success of these textbooks undoubtedly lies in the short and easy expression of each step of the various calculations and the lack of examples. These texts treat the subjects usually occurring in this kind of literature.

There appeared in the thirteenth century a number of treatises of a different character. They seem to have been written partly by Jordanus de Nemore, partly by members of his circle. Besides the usual arithmetical operations, they also treat more general mathematical and philosophical questions.

The best-known textbook on fractions, the *Algorismus de minutiis*, was written by Johannes de Lineriis about 1320. It shows little originality and is characterized by having no proofs, only rules and examples. In general style it is similar to the *Algorismus vulgaris* of Johannes de Sacrobosco and was a text that could easily be studied.

The arithmetical works of Johannes de Sacrobosco, Alexander de Villa Dei and Johannes de Lineriis were soon adopted by universities and became standard textbooks in the faculty of the *artes liberales*. With the help of these books arithmetic with Hindu-Arabic numerals was taught both in universities and grammar-schools. The “maestri d’abbaco” in Italy, the “Rechenmeister” in Germany and similar teachers in other countries, who taught in the vernacular, were ultimately dependant upon these standard Latin textbooks.

2. *Al-Khwārizmī's treatise on arithmetic*

Al-Khwārizmī's arithmetical work is the oldest Arabic work on Indian arithmetic of which we have detailed knowledge. Knowledge of arithmetic procedures undoubtedly existed among the Arabic-speaking peoples before his time; and it is besides possible that written texts on the subject earlier than his were available. But unfortunately we have no certain knowledge of either the procedures or the texts. The treatise, which was written ca. 825 A.D., is about 130 years earlier than al-Uqlīdisī's *Fuṣūl*, the oldest extant work in Arabic on the subject.

Since no Arabic manuscript of al-Khwārizmī's work is known, the text must be studied in the Latin texts which were based on the translation, now lost, which was made in the twelfth century. As mentioned above, there was an early reworking of the translation which is referred to here as DA. Of this text there are two manuscripts. One of them, Cambridge, University Library, Ii. 6.5, (here called C), has been known for some time. It has been edited three times (1857, 1963, 1992), published in facsimile three times (1963, 1964, 1983) and translated into Russian (1983), English (1990) and French (1992). Manuscript C is apparently of the thirteenth century and was at one time in the monastery of Bury St. Edmunds. It contains on ff. 104r-111v the text of DA, but only a little more than half of the text is present, because the last folios have been lost.

Until now the existence of a second manuscript has remained unnoticed. In fact, there is a copy of DA in New York, Hispanic Society of America, HC 397/726, ff. 17r-24v (here called N). It was written in Spain, probably in the thirteenth century. Up to the second half of the eighteenth century it belonged to the library of the Universidad

Complutense at Alcalá de Henares. Unlike the copy in **C**, the manuscript is complete. In chapter 5 of this book the text of manuscript **N** is edited for the first time, with parallel German translation. In order to allow a comparison between **N** and **C**, the text of **C** is also edited parallel to **N**; here a few mistakes in the earlier editions have been corrected. Manuscript **N** is reproduced in facsimile at the end of this book.

With the discovery of manuscript **N** a more exact study of al-Khwārizmī's work has become possible. Formerly only guesses could be made about a large part of the text on the basis of the redactions **LY**, **LA** and **LP**. Before discussing this further, we should consider how MSS **N** and **C** are related to each other.

In the part of the text common to the two manuscripts the wording is sometimes different. In the first chapters the differences are small, but they become greater later on. There are striking differences in chapters 3 and 10.1; it is almost as if the two manuscripts followed two different translations in some passages. But on the whole the differences lie in small points of style and do not affect the content. In most cases the wording in **N** is preferable to that in **C**: it is more detailed and more correct. **C** contains several mistakes not present in **N**; some of the superior **N** readings could not reasonably be supposed to be the result of scribal correction. Examples of such mistakes are the error in **C** in the rule for the resultant place in the multiplication of sexagesimal fractions (chapter 8.1) and the confusion of the terms *minuta* and *secunda* (chapters 10.3 and 10.4). In **N** there are chapter headings and diagrams with numerical examples, none of which appear in **C**. But this does not mean that **N** has the original wording of the translation. In fact, both **N** and **C** appear to represent different stages in the reworking of the Latin translation. None the less, **N** seems to be nearer the original translation than **C**. This fits well with the observation that **N** was written in Spain, whereas **C** was written in England.

Despite all differences, therefore, it seems likely that **N** and **C** both represent a common source (**DA**). Sometimes this common source can be reconstructed, though the differences between the two manuscripts prevent this in many places. The date of **DA** can be estimated from the dates of the two manuscripts (13th c.) and of the translation from the Arabic (12th c.; see below).

A natural question is: what relation has **DA** to the original translation? Any answer must be based on the readings of **N** and **C** and on equivalent passages in the twelfth-century derivative texts **LY** and **LA/LP**.

In the parts common to **N** and **C** there are sections in which essentially western ideas are present and in which there are no Arabisms. For example, the discussions of unity (chapter 1.3) is probably to be ascribed to a later redactor. In some passages the text has clearly been "latinized". On the other hand there are many constructions and technical terms (see Appendix 3) which unambiguously show their Arabic origin, no doubt al-Khwārizmī's text. If we compare the complete text **DA** – as given in **N** – with the derivative texts **LA/LP** and **LY**, we find that the content is essentially the same. It is almost certain that this was the material of the translation. Style and terminology indicate that **N** – despite some reworking and additions – to a large extent reflects the wording of the Latin translation.

With the help of **N** we are for the first time in a position to reconstruct the part lost in **C** – the part dealing with division and root extraction – and thus to establish

the whole of al-Khwārizmī's original text. In the part missing in **C** the derivative texts in **LY** and **LA/LP** are unreliable, being greatly expanded and otherwise reworked.

As for the identity of the translator, there are only the slightest indications. None the less, several translators have been suggested by historians of mathematics, always without reason: Adelard of Bath, Hermann of Carinthia and Gerard of Cremona. No names are mentioned in MSS **N** and **C**, and any suggestion must be the result of deduction or speculation. Hermann of Carinthia is certainly very unlikely: whereas the al-Khwārizmī text, in the parts that we may be fairly sure represent the words of the author, indicates a fairly literal rendering from the Arabic – with Arabisms and generally stiff Latinity –, Hermann's translating style is notoriously free. The case for Gerard is distinctly better, but by no means free of objection. For the derivative text **LY** has been dated to before 1143, and this has generally been considered as too early for Gerard, whose activity as translator in Toledo falls rather into the second half of the twelfth century. But the date 1143 is by no means certain. Further, the wording of al-Khwārizmī's quotation of his own "Algebra" in the text of **DA** (chapter 4.1) is remarkably similar to Gerard's wording in his translation of the "Algebra". If Gerard was not the translator, then the names of Adelard of Bath and Robert of Chester come to mind. It certainly appears that the translation was made in Spain. For the scribe of MS **N** (or of an "ancestor" of **N**) on numerous occasions mistook the Roman numeral *XL* for *X* – a strong indication that its exemplar was written in Visigothic script. Furthermore, the forms of the Hindu-Arabic numerals in **N** are similar to those in the "Codex Vigilanus" and "Codex Emilianus". But this does not bring us to any conclusions as to the translator.

The contents of al-Khwārizmī's "Arithmetic" may be reconstructed from MSS **N** and **C**. It is clear that this work was not a translation of some Indian text, but a compilation of material of Indian origin. The main topics are: form of the numerals and how numbers were written in the decimal place-value system (chapter 1); the six fundamental operations with integers (addition, subtraction, halving, doubling, multiplying, dividing; chapters 2-7); operations with fractions (multiplication, division, notation, addition, subtraction, doubling, halving; chapters 8-12); extraction of square roots of integers and of fractions (chapters 13-19).

The title of the Arabic original cannot be deduced from the Latin reworkings. In MS **N** the heading runs: *Incipit arismethica Alchoarismi*; in **C** there is no heading. From Arabic commentaries of al-Khwārizmī's "Arithmetic" mentioned in the *Fihrist* it seems that the title was: *Kitāb fi 'l-jam' wa-l-tafrīq* ("Book on gathering [*collectio*, = addition] and separation [*dispersio*, = subtraction]").

* * *

Contents of **DA**:

Chapter 1: How numbers are written in the decimal place-value system

(1.1) Praise to God. The treatise intends to explain the Indian method of calculation (*numerus*, Arabic *ḥisāb*) with nine digits (*littere*) with which any number can be easily represented. With these digits arithmetic, i.e. multiplication, division, addition and subtraction, may be simplified. – The praise to God and the introductory passages are typically Arabic.

⟨1.2⟩ The Indian procedure with numerals is to be demonstrated, so that the writing of numbers and operations with them become easier.

⟨1.3⟩ How the forms of the 9 digits are to be described. – Here and in the following text in C only the digits 1, 2, 3, 5 and 0 appear, but in N all nine and the zero are present. They are clearly in the West-Arabic tradition. The forms of 1, 2 and 3 in N are very similar to those in the Codex Vigilanus; digits 4 to 9 are reminiscent of the form on the *abacus* in the Gerbert tradition. A somewhat changed form of the 4 is found in the 16-place number in section 1.8. The zero is a circle, a little smaller than the other numerals.

There are differences in the forms of the fifth, sixth, seventh and eighth symbols. – If this passage was in al-Khwārizmī's Arabic text, it referred to differences in form within the East-Arabic tradition, to which al-Baghdādī also refers in the case of 2, 3 and 8. It is also possible that the "fifth" to the "eighth" symbols mean the numerals 5, 4, 3 and 2, since in the Latin text the nine numerals are written in order from right to left (copying the Arabic). It all depends on what the translator understood and in which direction he counted.

There follows a section on the nature of "one". At the beginning of his extended discussion the author says that he has shown in his own "Algebra" (*liber algebræ et almucabalah*) that any number is composed of "ones". This and two later citations (in chapters 4.1 and 15), which indeed find confirmation in the transmitted text, show that the "Algebra" was written before the "Arithmetic". This discussion of "one" corresponds to the Greek concept of number, according to which "one" is not a number, but the origin of numbers. The remainder of this chapter has the appearance of an addition by some Latin redactor: "another work on arithmetic" (which might be Boethius' "Arithmetic") is mentioned, and chapter 1.3 ends with the words: *Redeamus ad librum*.

⟨1.4⟩ The decimal structure of the integers: by the doubling, tripling, ..., multiplying by 9, of "one" the units are obtained; by the doubling etc. of "ten" the tens are obtained; and so on *ad infinitum*. All numbers which may be expressed in words can be expressed by means of the nine digits. – The "zero" is not mentioned here. We note that the author mentions units, tens, hundreds and thousands and that in Arabic there are words for these, and not for higher, categories; to express other – composed or larger – numbers, these words must be used in combination or derivation.

⟨1.5⟩ After these preparatory remarks the author explains the place-value principle which the Indians had worked out (*operati sunt*). First the central ideas of decimal place and of the zero are introduced. The term for (decimal) place is *differentia*, which is consistently used in N; in C both *differentia* and *mansio* (remaining, stay, dwelling) are used. It is not clear of which Arabic word *differentia* is a translation; in early Arabic texts either *mārtaba* (pl. *marātib*) or *rutba* is found. On the other hand, *mansio* is certainly a translation of the Arabic *manzila* (pl. *manāzil*).

It is shown in detail what units, tens, hundreds, thousands and ten-thousands are. According to the place-value system, "one", when put in the next higher place, has the value "ten"; a digit meaning "ten" in the tens means "one" in the units; and so on. This principle is differently expressed in N and C, Arabic practice of writing from

right to left being mirrored in N and Latin direction of writing being accommodated in C. The counting of the places begins on the right.

When a “one” is in the second place, i.e. means “ten”, a sign in the first place (from the right) is needed to show that it means ten: a sign is put in the first place to show that it is empty. It is in the form of a small *o*. – In the entire text the zero is represented by the word *circulus* (Arabic: *dā'ira*). The Indians called the zero *śūnya* (i.e. “empty”); the Arabic translation of this word is *aṣ-ṣifr*, from which the Latins had the term *cifra* from the twelfth century on. The word *cifra* is also found in a reworking of a translation of al-Khwārizmī's astronomical tables. Whether al-Khwārizmī used the term *aṣ-ṣifr* in either the “Arithmetic” or in his tables, we cannot tell from the Latin texts available to us.

(1.6) There follows a detailed description of how hundreds and thousands are written: two or three (resp.) zeros must be written before (i.e. on the right of) the digits, if these places are not occupied by digits (i.e. 1 to 9). In other cases the appropriate digit must be put in its appropriate place (*in ea differentia que sibi debetur*). The examples 11 and 325 are described in detail.

(1.7) In this section the carrying procedure is described in detail: what is done when in any place ten or more units are assembled (*collecti fuerint*). Various special cases are treated: when just 10 are assembled, the digit in that place must be substituted by a zero; when a “large” number (typically 9) is in some place and 1 is carried from the previous, then two carrying procedures must be done. The description is, by modern standards, lengthy and repetitive.

(1.8) The chapter on how numbers are written ends with a section on writing large numbers and pronouncing them in words. The author gives the names for the places from the first to the thirteenth (i.e. 10^0 to 10^{12}). Since the Arabs have words for numbers only up to a thousand, the higher numbers must be expressed in terms of these; e.g. 10^{12} is expressed as “a thousandfold thousand thousand thousand”. From a thousand million on adverbs such as *milies* or phrases such as *milie ... tribus vicibus* are used.

1,180,703,051,492,863 is the example used for writing large numbers. This number is written incorrectly in N and does not appear in C at all. To facilitate reading, the number is divided into groups of three digits. It is stated that numbers are to be pronounced while being written. This practice is mentioned in numerous texts extant in Arabic.

* * *

Chapter 2: Addition and subtraction of integers

(2.1) The general procedure of addition is described. On what object calculations are performed is not stated. But we know from an aside in the chapter on multiplication – and from extant Arabic texts – that a board (*tabula*, *takht*) was normally used. It was covered with dust, sand, wax or white powder. On this the numbers were written and in the process of calculation digits were replaced by others or totally erased (Ar.: *maḥā*). In addition, subtraction and multiplication one of the numbers in the calculation was written above the other and its digits were successively replaced by those of the resultant number: at the end of the operation the number written at the top

of the calculation was completely replaced by the result. In the addition of two numbers one was placed above the other so that the various decimal places corresponded. The digits in the individual places are to be added and carrying is performed, if necessary. The description is short, and no example is given. In this chapter it is not explicitly stated if one begins at the right or the left side.

⟨2.2⟩ In subtraction the minuend is written above the subtrahend so that the various places match. In each place the lower number is taken from the upper. The case in which the upper digit is smaller than the lower and the case in which the upper digit is zero are treated in great detail: in such cases a unit must be taken from the next higher place in the upper number and changed into ten units of the current place. The operation begins with the highest place.

⟨2.3⟩ To explain the general rules of subtraction, N announces two examples and C three. The first example is: $6422 - 3211 = 3211$. The individual steps of the calculation are expressed only in words.

⟨2.4⟩ The second example of subtraction is given to illustrate what happens when “nothing” (*nichil*, C) or “little” (*parum*, N) is left in the (minuend’s) places. In C in the example $1144 - 144$ only the problem is given, expressed in words. No scheme (i.e. a direct representation of the numbers as they are to be written) is given, the subtraction is not described, and the result is not given. In N there is a slightly different example, $1444 - 144$. The scheme is given, the individual steps are described in great detail, and the result is correct. Here and often elsewhere in N the number 40 is incorrectly given as “ten” (*X*). This is a strong indication that in a chain of copies of which N was the end-product there was a manuscript written in Visigothic script: only in this script can the number *XL* be mistaken for the number *X* (*X* with a hook on the top right corner was introduced as a ligature for *XL*).

* * *

Chapter 3: Doubling and halving

Halving is treated before doubling. One begins with the lowest decimal place. If it is odd, one halves the even number (i.e. the greatest even number less than the odd number in question) and the half of the remaining 1 is written as 30 (i.e. $\frac{30}{60}$, which is a half in sexagesimal notation) underneath the half of the even number. In all other places an even digit is likewise halved, but in the case of an odd digit the odd 1 is taken to the next lower place as a 5. – Doubling is described in only one sentence: one starts with the highest place. If more than 10 result in any one place, ten is carried as a 1 to the next higher place. – Examples are given for neither operation.

* * *

Chapter 4: Multiplication of integers

⟨4.1⟩ The author starts with a self-quotation from the “Algebra” for a general meaning of multiplication: when a number is multiplied by another, one of them is “repeated” (*duplicari*) according to the number of units in the other. To multiply with Indian numerals the calculator must know the multiplication table (1×1 till 9×9) by heart. In some Arabic and Latin texts a multiplication table is given, but there is none in DA.

Rules follow for writing down the numbers to be multiplied: they are written in two lines, the highest place of the upper (which is the multiplier) being placed above the lowest place of the lower (the multiplicand).

⟨4.2⟩ To explain the individual steps of multiplication, the example 2326×214 is presented. The 4 of the multiplicand 214 is written under the first 2 of the multiplier 2326. The digit which is in the highest place of the multiplier multiplies successively the individual digits of the multiplicand, beginning with its highest place, the result being put directly above the multiplicand (the first digit of the multiplier is replaced in this process by the last digit of the partial result). After the highest place of the multiplier has been dealt with, the multiplicand is shifted one place to the right, and the procedure is repeated with the next digit of the multiplier (3), the partial results being added. Then the multiplicand is shifted again and the process repeated, and so on, until the digits of the multiplier are exhausted.

⟨4.3⟩ In this section special cases are treated, in particular cases in multiplication by zero. In the text there is the equivalent of $0 \times n = n \times 0 = 0$. Then the remainder of the above example is given. At the end the result is 497764.

* * *

Chapter 5: Checking multiplication and doubling by casting out nines

The casting out of nines is a check whether the multiplication or doubling has been correctly carried out. It is applied in DA, but is not given a special name (only *probatio*). The excess of nines is not found by adding the digits, but by finding the remainder on division by 9. The Latin expression *divide numerum per novem novem* is evidently taken from the Arabic. In the case of multiplication the procedure is applied to the multiplier and multiplicand; the two excesses are multiplied; if the result is the same as the excess of nines of the product, the product is considered correct. The author did not know that the test is a necessary, but not sufficient condition.

It is noteworthy that in DA the casting out of nines is mentioned only in this place. For division in chapters 10.4 and 10.5 another kind of test is given: the dividend is compared with the product of divisor and result. For the other operations no test is given.

* * *

Chapter 6: Division of integers. General remarks

⟨6⟩ Chapter 6 treats the general procedures of division of integers; examples follow in chapter 7. The highest place of the divisor is placed under the highest place of the dividend if the digit of the divisor is smaller; if not, the divisor is shifted one place to the right. The two digits are divided, the result (without fractions) being placed over the dividend, vertically aligned with the last place of the divisor. By this result the successive digits of the divisor are multiplied (starting from the left), the partial products being subtracted from the corresponding digits of the dividend. The dividend has now been changed in some of its digits, and the new number takes the part of the dividend in the next part of the process. This begins by shifting the divisor one place to the right, and so on. In this way the digits of the quotient gradually appear over the (altered) dividend. The result of the division is described in DA what “will be that

which corresponds to one" (*ipsum erit, quod debetur uni*). The idea evidently comes from proportions: the division $a \div b = q$ is equivalent to the proportion $a : b = q : 1$. If there is a remainder, it is a part which comes from the dividend (*erunt partes unius ex numero quem dividis*). It must be less than the divisor, for otherwise a mistake has been made.

* * *

Chapter 7: Division of integers. Examples

⟨7.1⟩ After saying that division is the inverse of multiplication the author gives an example which is described in great detail: $46468 \div 324 = 143\frac{136}{324}$. Only the first and last configurations are illustrated by schemes, but all steps are given in words. This procedure can be followed, but with some difficulty.

⟨7.2⟩ In a second example a number with several places, some of them zeros, is divided by a single-digit number: $1800 \div 9$. The author says that the work of division is shortened when there are zeros in the dividend or produced by the division procedure.

* * *

Chapter 8: Multiplication of fractions

⟨8.1⟩ In chapters 8-12 calculation with fractions and mixed numbers (integers mixed with fractions) is treated: first multiplication (chapters 8-9), then division (chapter 10), only then notation, addition, subtraction, halving and doubling (chapter 11), and finally multiplication and division of common fractions (chapter 12). In DA calculation with common fractions and with sexagesimal fractions are not properly distinguished, but the attempt is made to show that calculation with all kinds of fractions follows the same rules.

There are innumerable names for the fractions, e.g. "half", "third". Some unit fractions and sexagesimal fractions are mentioned, but the author does not know a general word for unit fraction or for sexagesimal fraction. Sexagesimal fractions were used by the Indians. In sexagesimal subdivision there are "places" (*differentie*) as in the decimal representation of integers: integers or "degrees" are in the first place, "minutes" in the second, "seconds" in the third, etc. until the ninth and tenth places. The introductory sentences in DA on fractions make clear that common fractions, particularly unit fractions, were known in the daily life of the Arabs as in other cultures, whereas sexagesimal fractions belonged to another, "scientific", world.

After the general remarks about fractions it is explained how the place of the result of a multiplication of two sexagesimal fractions can be determined. When an integer and a fraction is multiplied, then the kind (*genus*) of fraction is not changed. For instance: $2^\circ \times 2' = 4'$; $3^\circ \times 6''' = 18'''$. When fractions are multiplied, their places are "collected" (*colligis utrasque differentias*), i.e. "added", and the sum is the place of the product. The author applies this principle to multiplying minutes by minutes, seconds by seconds, etc. Two examples are given: $6' \times 7' = 42''$ and $7'' \times 9' = 63''' = 1'' 3'''$.

⟨8.2⟩ This section gives an example of multiplying mixed numbers (integers mixed with common fractions). The common fractions are converted into sexagesimal fractions, and the calculation is given as above. The example is: $1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2}$. The individual steps are: $1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2} = 90' \times 90' = 8100'' = 135' = 2^\circ 15' = 2\frac{1}{4}$. – The fractions in

each number are written as sexagesimal fractions; then the integral part is expressed in the same unit and added to the fractional part; then they are multiplied decimally. The result is a sexagesimal fraction whose place is determined by the rules of chapter 8.1. It is successively divided by 60 each time reducing the rank of the sexagesimal fraction. Finally the sexagesimal fraction is reconverted to a common fraction. Thus common fractions are here multiplied only after conversion to sexagesimal fractions. This demonstrates the dominating position of sexagesimal fractions over common fractions. Since every factor is expressed in terms of the lowest denomination present in the number after conversion into sexagesimals, only integers must be multiplied – and for this the rules have already been given.

* * *

Chapter 9: Multiplication of fractions when they comprise minutes and seconds

In this chapter an example is given to explain how relatively complicated (sexagesimal) fractions, comprising minutes and seconds, are multiplied. The procedure has already been explained in the previous chapter: one converts each of the two numbers to be multiplied into units of the lowest denomination that it contains, the two resulting integers are multiplied, and the product is reconverted to sexagesimal-fraction form by successive divisions by 60. The example is: $2^{\circ} 45' \times 3^{\circ} 10' 30'' = 8^{\circ} 43' 52'' 30'''$.

At the end there is a remark that there is a shorter method. Presumably the direct multiplication of the constituent sexagesimal places, the application of the rule determining the place of the result and the addition of the partial results is meant. This procedure would require a multiplication table of 1×1 up to 59×59 . Such tables exist in extant Arabic texts, but not in DA.

* * *

Chapter 10: Division of fractions of any kind: general remarks; examples of division of sexagesimal fractions; check

(10.1) Chapter 10 treats the division of fractions. Since no distinction is made between sexagesimal fractions and common fractions, it could be assumed that the following procedures are valid for all fractions. What actually follows, is rules for division of sexagesimal fractions (but see chapter 10.2); the division of common fractions is left until chapter 12.

First the general rule is given for dividing fractions or mixed numbers (i.e. numbers mixed of integers and fractions): each of the numbers is reduced to units of the lowest denomination present in either number; the division between the resulting integers is made; the result is in *gradus*, i.e. whole numbers, because the numbers that were divided are of the same rank (*unius generis*).

(10.2) To explain the rule, three examples are given. The first is: $\frac{15}{3} \div \frac{6}{3} = 2\frac{1}{2}$. It has been supposed that the original text ran 15 thirds divided by 6 thirds. This would maintain a sexagesimal treatment in this part of the text.

(10.3) The second example illustrates the case in which the dividend is smaller than the divisor: $10'' \div 5' = 10'' \div 300'' = 600''' \div 300'' = 2'$.

(10.4) To verify the division, a check can be performed: the quotient is multiplied by the divisor, and the result should be the dividend. Two examples of this are given: for the divisions $50 \div 10 = 5$ and $10'' \div 5' = 2'$.

(10.5) The third example is: $10' \div 5'''$. The procedure is: $10' \div 5''' = 36000''' \div 5''' = 7200^\circ$. The check is $7200^\circ \times 5''' = 36000''' = 600'' = 10'$.

* * *

Chapter 11: How numbers made up of integers and sexagesimal fractions are written; arithmetical operations with them: addition, subtraction, halving and doubling

(11.1) The chapter begins with the way of writing (*constituere*) mixed numbers: the integers and their sexagesimal parts are written one under the other. If there is no entry in a sexagesimal place, two zeros are written. An example (in modern notation) is: $12^\circ 30' 45'' 0''' 50''''$.

(11.2) In this section addition is treated, but the text is short and unclear. It is not stated how the two numbers are to be placed on the board, and a word for “addition” is not explicitly mentioned. It is mentioned, however, that when more than 60 units are accumulated in one place, 60 of them are carried as 1 to the next place.

(11.3) When one sexagesimal fraction is subtracted from another, the procedure begins with the highest place. From each place of the minuend the corresponding place of the subtrahend is subtracted. When some place of the minuend is less than the corresponding place of the subtrahend, 1 is borrowed from the next-highest place and becomes 60 in the place of the subtrahend, so that the subtraction can be performed. No example is given; and because of the clumsy verbal expression, the text is hard to understand.

(11.4) In doubling sexagesimals the rule is to begin with the highest place. When more than 60 is thereby accumulated in any place, the excess over 60 is written down, and 1 is added to the next-highest place. Halving sexagesimals, by contrast, begins with the lowest place. There are no examples. – We notice that doubling is here treated before halving, though in chapter 3 it was the other way round.

* * *

Chapter 12: Multiplication and division of common fractions

(12.1) Until now the only fractions with which calculations were made were sexagesimal fractions. Now multiplication and division with common fractions are explained. The procedure is analogous to the multiplication with sexagesimal fractions: the fractions are reduced to units of the “lowest denomination” (*ex genere inferioris differentie*). Then these units are multiplied. Finally the result is divided out to obtain integers.

(12.2) To explain the procedure, two examples are given. The first is: $\frac{3}{7} \times \frac{4}{9}$. According to DA, the seventh and the ninth should be considered “as minutes” and their product “as seconds”. To find out whether there are integers and, if so, how many, the result of the multiplication must be divided by the product (in this case: seventh times ninths). The author gives the result of this example as $\frac{12}{63}$, i.e. “12 parts of 63 parts of one”. In N, but not in C, there is a long explanation of the individual steps in the example. The procedure involves several unnecessary operations.

(12.3) The second example is $3\frac{1}{2} \times 8\frac{3}{11}$. In contrast to the previous problem, the presentation is clear. The two mixed numbers are written vertically one beside the other, so that the integers are written at the top, then the numerators and then the denominators. The integers and the fractions are converted into units of the corresponding denominator. Now the numerators are multiplied together, the denominators are multiplied together, and one product is divided by the other. Thus:

$$7 \times 91 = 637; 2 \times 11 = 22 \implies 637 \div 22 = 28\frac{21}{22}.$$

In the middle of the calculation the text in C breaks off, so that the subsequent text until the end of the whole work is transmitted only in N.

(12.4) To divide common fractions the rule is: convert both fractions to fractions of the same sort (i.e. with the same denominator) and divide "one by the other" (i.e. the new numerators). The result is an integer. The procedure is explained by the example $20\frac{2}{13} \div 3\frac{1}{3}$. Since neither of the terms "numerator" and "denominator" are mentioned, the presentation is not easy.

* * *

Chapter 13: General statements about roots

(13.1) With chapter 13 the last part of the book begins. It deals exclusively with the extraction of roots. Chapter 13 treats the general properties of (square) roots (*radix*; arab. *jidhr*).

Without defining the term "root", the author states that, when two numbers – be they integers or fractions – are equal, their product "has a root", i.e. is a square number. This simple result is justified by observing that in this case the multiplication of one number by another is equal to the multiplication of a number by itself. Then comes the theorem: if a and b are square numbers, then so is $a \times b$. There are no examples in this section.

(13.2) The next theorem runs: for any numbers a and b , when $a \div b$ is a square number, then $a \times b$ is also a square number. The example with $a = 18$ and $b = 8$ is given. Then $18 \div 8 = 2\frac{1}{4} = (1\frac{1}{2})^2$, a square, and $18 \times 8 = 144 = 12^2$, also a square. It is stated further that $b \div a$ is also a square number, for $8 \div 18 = \frac{4}{9} = (\frac{2}{3})^2$. Another example, with $a = 8$ and $b = 2$, is mentioned, but not given in detail.

(13.3) In this section the author treats a question of some importance for the extraction of roots: from which decimal places can roots be extracted? Expressed in modern terms, he reaches the result that 10^n has a square root if, and only if, n is even. The principles of the Indian decimal place system are first repeated (cf. chapter 1). Then it is asked whether the units, tens, hundreds and thousands have roots or not: one has a root, i.e. 1; 10 has no root; 100 has a root, i.e. 10; 1000 has no root, because it is equal to 100×10 , i.e. a square multiplied by a non-square. Finally the author states that 1, 10, 100, ... are alternately squares and non-squares, i.e., the places with odd rank have square roots – and those with even rank have not.

(13.4) Next comes the question: from which fractions can roots be extracted? It is shown that sexagesimal fractions of odd rank (i.e. minutes, thirds, fifths, ...) have no square roots, but those of even rank (i.e. seconds, fourths, sixths, ...) do have. The author treats common fractions analogously: he considers a class of "first fractions" (*prime fractiones*) which have no root (i.e. fractions whose denominators have no root);

“second fractions” (*secunde fractiones*, i.e. first fractions multiplied by themselves) do have roots; “third fractions” (fractions of the *tertia differentia*, i.e. first fractions multiplied by themselves twice) have no roots, etc. – We should note here that the author tries again to force common fractions into the rules valid for sexagesimal fractions.

* * *

Chapter 14: General procedure for extracting square roots

This chapter gives in detail the procedure for finding the square root of any integer; an example is not given here, but only in chapter 16. First the decimal place-value system is yet again described, this time with a reference to the beginning of the work. Then comes a repetition of the statement of the previous chapter, that the decimal places of odd rank have roots and those of even rank have none. The procedure begins by counting the decimal places in the number whose root is required: if the highest place is of odd rank, then you “work in it” (*operaberis in ea*); if it is of even rank, then you “do not work in it”, but go to the next place (to the right). This means, of course, that the places are counted from right to left and marked in pairs, as is done today. The greatest square number less than or equal to the number (or pair of numbers) in the left-most group must now be found and subtracted from it; the difference is written in the place of the group being operated on. The root of the square number is the highest place of the square root sought. Then this partial result is doubled and written one place to the right. The greatest single digit, the next place of the result, is now sought such that when it is written alongside the doubled partial result to form one number, and when this number is multiplied by the digit, the product is less than the number formed by the first two groups on the left side. This procedure is continued, until there is no remainder or the remainder is less than the double of the result so far calculated. If there is no remainder, the result is the exact square root (*radix integra*). If there is a remainder, an approximate root is obtained by adding to the partial result a fraction comprising the remainder divided by twice the partial result. This corresponds to the modern formula $\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$. – The very abstract presentation is made easier by the example in chapter 16.

* * *

Chapter 15: Theoretical questions about the extraction of square roots; the reason why the partial results need to be doubled

This chapter complements the previous chapter and is apparently intended to justify the doubling of the partial results in the procedure for extracting roots. The author refers to “another book by himself” (*patefeci in alio libro meo*: evidently his “Algebra”) for the general rule that when two numbers both with *nodi* and *unitates* (i.e. numbers with two decimal places) are to be multiplied, four separate multiplications must be made. In modern notation: $(10a + b) \times (10c + d) = 10a \times 10c + 10bc + 10ad + bd$. A similar rule for squaring is evidently implied, so that the reason for doubling of the partial result becomes clear. – The text in DA is sometimes not very clear and perhaps has suffered at the hands of copyists.

* * *

Chapter 16: Examples of extracting the square root of integers

(16.1) According to the procedure abstractly described in chapter 14, $\sqrt{5625} = 75$ is now calculated in detail.

(16.2) This section treats the special case in which a pair of places are both zero. No example is given.

(16.3) Another, "shortened", procedure (*abbreviatio*) is explained for finding the roots of numbers ending in a series of zeros: half the number of zeros is put at the end of the root of the number shorn of its zeros. In this case one does not need to go through the procedure of doubling etc. as in the general case. The example of $\sqrt{10000}$ is given, the result being 100.

* * *

Chapter 17: Calculation of the roots of fractions

(17.1) To find the root of a fraction or of a mixed number, the first step is to reduce the number to the lowest place of the fractional part. When this place is such that "a root exists" (i.e. in the case of sexagesimal fractions: seconds, fourths, ...), then the procedure of chapter 16 is applied, and the result is reconverted to larger units. When the lowest place "has no root" (i.e. in the case of sexagesimal fractions: minutes, thirds, fifths, ...), the number must be reduced to units of a place which has a root; and again the root is found and then reconverted to larger units. The procedure is made the more exact (*propius veritati*) the lower the place ("having a root") to which it is reduced.

(17.2) To explain this procedure, two examples are given. The first is: $\sqrt{2}$. The 2 is converted into seconds; if the 2 were converted into fourths or sixths, the result would be still more exact. Thus $\sqrt{2}$ is found as $\sqrt{7200}' = 84' + \text{remainder} = 1 \text{ integer } 24' + \text{remainder}$. (A better approximation for $\sqrt{2}$ is found in chapter 19.2.)

(17.3) The second example is of a root of a mixed number comprising integers and common fractions: $\sqrt{2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{13}}$. The number must be reduced to units "of one species" (*ex uno genere*); in modern terms, on the product of the denominators as denominator. Then numerator and denominator of the fraction must be multiplied by a number to make the denominator a square. Implicit here is the formula $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$. The individual steps are:

$$\begin{aligned} \sqrt{2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{13}} &= \sqrt{\frac{78 + 13 + 3}{39}} = \sqrt{\frac{94}{39}} = \sqrt{\frac{94 \cdot 39}{39^2}} = \frac{\sqrt{3666}}{39} \\ &= \frac{60}{39} + \text{remainder} = 1 \frac{21}{39} + \text{remainder} . \end{aligned}$$

To obtain a still more exact result, the fraction would have to be converted to "fourths", i.e. its numerator and denominator would be multiplied twice more by 39 (the denominator). Then the steps would be (in N there are some incorrect numbers):

$$\frac{\sqrt{3666}}{39} = \frac{\sqrt{3666 \cdot 39^2}}{39^2} = \frac{\sqrt{5575986}}{39^2} = \frac{2361 + \text{remainder}}{39^2} .$$

* * *

Chapter 18: On extracting square roots depending on what the Indians have established

There follows a chapter which, according to its title, did not belong directly to the Indian procedure (*opus*), but was somehow dependent on it; it is supposed to be easier and more exact (*levius opere Indorum atque subtilius*). The words *sed ego extraxi illud secundum quod constituerunt Indi* show unambiguously that this section is due to the author, al-Khwārizmī, himself, but depends on Indian procedures.

Al-Khwārizmī here demonstrates a method of improving the accuracy of root extraction: he adds an even number of zeros to the number whose root is to be extracted. After extraction the root is reduced in the rank of its decimal places by the appropriate number – half the number of zeros which were added to the original number. The following relation is implicit:

$$\sqrt{N} = \frac{1}{10^k} \sqrt{N \cdot 10^{2k}}.$$

The fractional part is re-expressed in sexagesimal fractions. The result is more exact the more zeros are added. – The presentation is understandable, but clumsy.

* * *

Chapter 19: Extraction of roots of integers or of mixed numbers (by adding zeros)

(19.1) In this chapter the extraction of the roots of integers or mixed numbers (the fractional part being either a vulgar or sexagesimal fraction) is again treated. It is surprising that this topic comes up yet again, since it is amply treated in chapters 14-16 for integers and in chapter 17 for fractions. Indeed, nothing is essentially new in this chapter: in 19.1 the procedure of the previous chapter is repeated, and in 19.2 an example of it is presented.

The general procedure is first indicated: the elements of the mixed number are reduced to units of its lowest place; if this place is not one that “has a root”, the number must be further reduced to the next-lower place. Now an even number of zeros can be placed at the end of the number (cf. chapter 18). After extracting the root the remainder is converted to sexagesimal fractions by repeated multiplication by 60. – The whole section could be greatly shortened or omitted entirely, since the general procedure has already been described in chapter 18.

(19.2) The procedure is demonstrated by the example $\sqrt{2}$. In this case, 6 zeros are added. The steps are:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \sqrt{\frac{2.000.000}{10^6}} = \frac{1}{1000} \times \sqrt{2.000.000} = \frac{1}{1000} \times [1414 + \text{remainder}] \\ &\approx \frac{1}{1000} \times 1414 = 1 (\text{unit}) + \frac{414}{1000} = 1 + \left(\frac{414 \times 60}{1000} \right)' = 1 + \frac{24840}{1000} \\ &= 1 + 24' + \left(\frac{840 \times 60}{1000} \right)'' = 1 + 24' + \left(\frac{50400}{1000} \right)'' \\ &= 1 + 24' + 50'' + \left(\frac{400 \times 60}{1000} \right)''' = 1 + 24' + 50'' + 24''' . \end{aligned}$$

Thus by the use of the extra zeros a more exact result has been obtained for the same example than with the simpler procedure of chapter 17.2, which only produced minutes.

* * *

With this example the text ends. There follows only the *explicit* with praise and thanks to God. Of this whole formula the original Arabic is easily understood: "It is finished (*tamma*, *Finit*) the book (*al-kitāb*, *liber*) with the help of God (*bi-'aun Allāh*, *cum dei adiutorio*) and praise to Him (*wa-ḥamdihi*, *et eius laude*)".

* * *

If DA – as it may be deduced from manuscripts N and C – is compared with later Arabic texts on arithmetic, the following remarks may be made:

– *Very detailed, sometimes long-winded presentation*

This applies, for instance, to the statements in chapter 1 on the decimal system, the representation of numbers, the idea of place (*differentia*) and the use of zeros in writing multiples of the powers of 10. Many things mentioned in this chapter are repeated in the chapter introducing fractions (13.3). – The zero receives special treatment not only in the first chapter, but also in one of the sections on extraction of roots (16.2). – The method of increasing the accuracy of root extraction by adding zeros to the number comes in chapter 18 and again immediately afterwards in chapter 19.1. – It is perhaps understandable that the properties of the zero should be described in more detail and perhaps more often than properties of the "common" digits, since the zero has the strange property of being at once "nothing" and at the same time having the power of increasing the value of a digit ten times.

– *Missing technical terms*

For several important terms in arithmetic there are no technical terms in DA; e.g., there are no proper terms for "minuend", "subtrahend", "multiplier", "multiplier", "divisor", "dividend", "numerator", "denominator", "square number". Even for the zero there is no special expression (such as: *ciffrā* found in other texts), only the description *circulus*. Because of the lack of technical terms the presentation of arithmetic operations becomes hard to understand – a good example is the multiplication and division of fractions in chapter 12.

– *Inappropriate order of the material*

In chapter 1.7 things connected with addition are described, although addition is formally only described later. – In one place (chapter 3) doubling is treated after halving and in another (chapter 11.4) before halving. – Multiplication and division of fractions are treated in chapters 8-10, i.e. before the notation of fractions (chapter 11).

– *Unclear or awkward presentation*

Often in the text there is a verbal description of a complex process without the "schemes" that would clarify the steps of the operation. Examples are: multiplication (chapter 4), division (chapter 7.1), multiplication of common fractions (chapter 12.1). – The discussion of fractions is often obscured by the forced analogy of common fractions and sexagesimal fractions: clearly the author had the idea that the rules for these two classes of fractions were the same; in chapter 8 he even tries to prove

this. – An example of division of fractions (chapter 10.2) appears to be spoiled by the confusion of the common fraction “thirds” (*tercie*) with the sexagesimal “thirds” (*tercia*). – The description of the addition of sexagesimal fractions is very unclear; it is even not stated in the text that addition is being treated (chapter 11.2). – The pairing off of the digits in the initial stages of root extraction (chapter 14) is not clearly described. – Also obscure is the explanation of why doubling is necessary in the procedure for extraction of roots (chapter 15). – The example of $\sqrt{2}$ is given a second time (chapter 19.2; cf. chapter 17.2) without reference to the former, less accurate, calculation.

– *Unclear understanding by the author or redactor*

Some passages may be unclear because the author or redactor did not understand the matter. An example is the lack of justification of the different treatment of the odd 1 in the operation of halving (chapter 3) – sometimes 30 is added to the next-lower place and sometimes 5. – Further he tries, without success, to show that common fractions and sexagesimal fractions follow the same rules in extraction of square roots (chapter 13.4). – The notion of *prime fractionones* etc. remains unclear (chapter 13.4).

– *Old-fashioned presentation*

Some of the descriptions of arithmetic processes give the impression of having been written when these processes were new. An example is the presentation of the casting out of nines (chapter 5): the excess of nines is not found by adding the digits but by finding the remainder of the original number on division by 9. (The passage is obscured by the apparently mixed term of *divide per novem novem*.) This check is applied to doubling and multiplication, but not to division – for which the lengthy check by multiplication is suggested (chapter 10.4). – The multiplication of common fractions is made unnecessarily complicated by the multiplication of the numerators with the corresponding denominators (chapter 12.2; only in manuscript N).

Even if it is not certain whether all of these curiosities were in the translation from the Arabic or whether they crept in at a later stage, they all point in the same direction: that the text of **DA** represents a relatively early stage of the knowledge of Indian arithmetic. At such a time it was difficult to understand the content in detail, and many technical terms had not been coined. The presentation of the material in **DA** is not uniform: sometimes it is long-winded and sometimes so short as to be scarcely comprehensible. All this accords well with the fact that al-Khwārizmī wrote the text in a time in which the “new arithmetic” was first introduced into the Arabic-speaking world. The suggestion of A. P. Youshkevitch, that al-Khwārizmī expressed himself clearly and that the oddities and inconsistencies of the Latin text were entirely due to a Latin redactor of the 12th or 13th centuries, appears quite unjustified.

Not surprisingly, the texts on Indian arithmetic written after al-Khwārizmī’s time present the material more clearly. This is true for both Arabic and Western authors. The writings of al-Uqlīdisī, Kūshyār ibn Labbān und al-Baghdādī – all of them more than 100 years later than al-Khwārizmī – show that the knowledge taken over from the Indians was not only understood, but also developed. *Inter alia*, technical terms were introduced, procedures were found which simplified the calculations and the methods were more clearly explained. In the West, also, there were reworkings which show that

the problems of understanding the material, found in **DA**, had been solved as early as the twelfth century: the derivative texts of **LA/LP** (which in one place explicitly cites *Alchorismus*, i.e. the text of the translation effectively present in **DA**) and **LY** have the same structure as **DA**, but have a developed terminology and present the new arithmetic in a clearer form – whether or not this is done in extended form (as in **LA/LP**) or in a short presentation (as in **LY**). It is easy to understand that these later texts or other simple compilations such as those of Johannes de Sacrobosco or Alexander de Villa Dei were much more popular than **DA**, which was closer to the original translation, but not so easy to understand. An indication of this is the existence of only two manuscripts of **DA**.

ANHANG 1

KURZVERZEICHNIS DES INHALTS

Gliederung:

Schreibweise der Zahlen (Kapitel 1)

Operationen mit ganzen Zahlen: Addieren, Subtrahieren, Halbieren, Verdoppeln, Multiplizieren, Dividieren (Kapitel 2–7)

Operationen mit Brüchen: Multiplizieren, Dividieren, Schreibweise, Addieren, Subtrahieren, Verdoppeln, Halbieren (Kapitel 8–12)

Ausziehen der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen und Brüchen (Kapitel 13–19)

* * *

Kapitel 1: Schreibweise der Zahlen

⟨1.1⟩ Lobpreis Gottes. Die Schrift beabsichtigt, die Rechenweise der Inder mit Hilfe der 9 Zeichen zu erklären, mit denen sich jede Zahl leicht darstellen läßt. Damit läßt sich die Arithmetik, d.h. die Multiplikation, Division, Addition und Subtraktion, erleichtern.

⟨1.2⟩ Das Verfahren der Inder mit Hilfe der Ziffern soll dargestellt werden, um das Schreiben der Zahlen und das Operieren mit ihnen leichter zu machen.

⟨1.3⟩ Darstellung der Formen der 9 Ziffern. Es gibt Unterschiede in der Schreibweise der 5., 6., 7., 8. Ziffer. – Über das Wesen der Eins; Hinweis auf des Verfassers „Algebra“ (*liber algebr et almucabalah*). Jede Zahl ist aus Einheiten zusammengesetzt. Erzeugung der Zahlen aus der Eins.

⟨1.4⟩ Hinweis auf dekadische Struktur der Zahlreihe: Durch Verdoppeln, ..., Verneunfachen der Eins entstehen alle Einer, durch entsprechendes Vervielfachen der 10 die Zehner usw. bis ins Unendliche.

⟨1.5⟩ Einführung des Begriffs der Dezimalstelle (*differentia, mansio*) und des Stellenwertprinzips. Einführung des Zeichens für die Null; Gebrauch der Null. Schreibweise der Zehner.

⟨1.6⟩ Angaben, wie man die Hunderter und Tausender schreibt. Erläuterung der Schreibweise anhand der Beispiele 11 und 325.

⟨1.7⟩ Ausführliche Darstellung, wie man vorzugehen hat, wenn sich an irgendeiner Stelle 10 oder mehr Einheiten ergeben; Behandlung des Falls eines mehrfachen Übertrags.

⟨1.8⟩ Belehrung, wie große Zahlen zu schreiben und auszusprechen sind. Große Zahlen werden mit Hilfe des Wortes „tausend“ ausgedrückt (z.B. „100 tausend tausend tausend dreimal“). Erklärung am Beispiel 1.180.703.051.492.863.

* * *

Kapitel 2: Addition und Subtraktion natürlicher Zahlen

⟨2.1⟩ Addition: allgemeines Verfahren. Die Zahlen werden stellenweise untereinander geschrieben. Man addiert die Ziffern an den einzelnen Stellen und bringt einen eventuellen Übertrag an die nächsthöhere Stelle. Kurze Darstellung; kein Beispiel.

⟨2.2.⟩ Subtraktion: allgemeines Verfahren. Die Zahlen werden stellenweise untereinander geschrieben. Man subtrahiert die Ziffern an den einzelnen Stellen. Ausführliche Behandlung des Falls, daß an einer Stelle oben eine kleinere Zahl steht als unten. Man soll an der höchsten Stelle anfangen.

⟨2.3⟩ Ankündigung von 2 bzw. 3 Beispielen. Beispiel 1: $6422 - 3211 = 3211$.

⟨2.4⟩ Beispiel 2: $1444 - 144 = 1300$ (in N); $1144 - 144$ (in C). Die Rechnung wird nur in N ausgeführt.

* * *

Kapitel 3: Verdopplung und Halbierung

Bei der Halbierung beginnt man mit der niedrigsten Stelle. Vorschrift, wie man vorgehen soll, wenn an einer Stelle ungerade Ziffern auftauchen. Bei der Verdopplung beginnt man mit der höchsten Stelle. Kurze Darstellung; keine Beispiele.

* * *

Kapitel 4: Multiplikation von ganzen Zahlen

⟨4.1⟩ Erklärung der Multiplikation mit Hinweis auf des Verfassers „Algebra“. Für die Multiplikation muß man das kleine Einmaleins kennen. Angaben darüber, wie die zu multiplizierenden Zahlen angeordnet werden müssen.

⟨4.2⟩ Erwähnung des Beispiels $2326 \cdot 214$. Erklärung der einzelnen Schritte beim Multiplizieren.

⟨4.3⟩ Einzelheiten: Vorgehen, falls mit Null multipliziert werden muß (Hinweis auf multiplikative Eigenschaften der Null: $0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$). Eintragen der Zwischenergebnisse und Bereinigung der Überträge. Gestalt des Endergebnisses.

* * *

Kapitel 5: Überprüfung der Multiplikation und Verdopplung mit Hilfe der Neunerprobe

Zur Überprüfung, ob die Verdopplung einer Zahl oder die Multiplikation zweier Zahlen korrekt vorgenommen wurden, dient die „Neunerprobe“. Man findet die Reste durch Division durch 9. Falls die Neunerprobe gleiche Zahlen liefert, war die Rechnung korrekt; andernfalls war sie falsch.

* * *

Kapitel 6: Division ganzer Zahlen, Allgemeines

⟨6⟩ Darstellung des allgemeinen Verfahrens: Die höchste Stelle des Divisors wird unter die höchste Stelle des Dividenden gesetzt, falls diese kleiner ist; sonst Verrückung des Divisors um eine Stelle nach rechts. Der Quotient wird bestimmt; er wird über dem Dividenden in der Stelle der Einer des Divisors eingetragen. Multiplikation des Quotienten mit den Stellen des Divisors (von links nach rechts), Subtraktion vom

Dividenden und Ersetzen dieser Stellen durch die Differenzen. Dann Verschiebung des Divisors nach rechts, usw.

* * *

Kapitel 7: Division ganzer Zahlen, Beispiele

⟨7.1⟩ Hinweis, daß die Division invers zur Multiplikation ist. Durchrechnung des Beispiels 1: $46468 : 324 = 143\frac{136}{324}$.

⟨7.2⟩ Beispiel 2: $1800 : 9 = 200$. Verkürzte Form der Division, wenn sich während der Rechnung beim Dividenden Nullen ergeben.

* * *

Kapitel 8: Multiplikation von Brüchen

⟨8.1⟩ Es gibt unzählige Namen für die Brüche („einhalb“, „ein Drittel“ usw.). Die Inder benutzten die Sexagesimalbrüche; Angabe ihrer Namen. Bestimmung der Stellenzahl, wenn zwei Sexagesimalbrüche multipliziert werden. 2 Beispiele: $6' \cdot 7' = 42''$; $7'' \cdot 9' = 63''' = 1'' 3'''$.

⟨8.2⟩ Vorgehen bei der Multiplikation gemischter Zahlen: Zerlegung der Faktoren in Einheiten der niedrigsten in ihnen enthaltenen Stelle; Multiplikation im Dezimalsystem; Division durch 60. Beispiel: $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} = 90' \cdot 90' = 8100'' = 135' = 2^\circ 15' = 2\frac{1}{4}$.

* * *

Kapitel 9: Multiplikation von Brüchen, wenn diese aus Minuten und Sekunden zusammengesetzt sind

Beispiel: $2^\circ 45' \cdot 3^\circ 10' 30'' = 8^\circ 43' 52'' 30'''$. Hinweis, daß es auch eine kürzere Methode gibt.

* * *

Kapitel 10: Division von (beliebigen) Brüchen: Allgemeines; Beispiele für die Division von Sexagesimalbrüchen; Probe

⟨10.1⟩ Allgemeine Regel für die Division von zwei Brüchen oder von gemischten Zahlen: Beide zu dividierenden Zahlen werden in Einheiten des kleinsten Teils (d.h. der niedrigsten in beiden enthaltenen Stelle) verwandelt; dann erfolgt die Division; das Ergebnis sind ganze Zahlen.

⟨10.2⟩ Beispiel 1: $\frac{15}{3} : \frac{6}{3} = 2\frac{1}{2}$.

⟨10.3⟩ Beispiel 2: $10'' : 5' = 2'$.

⟨10.4⟩ Probe zur Überprüfung der Division: Der Quotient wird mit dem Divisor multipliziert; dies ergibt den Dividenden. Zwei Beispiele: $50 : 10 = 5$ und $10'' : 5' = 2'$.

⟨10.5⟩ Beispiel 3: $10' : 5''' = 36000''' : 5''' = 7200^\circ$. Probe: $7200^\circ \cdot 5''' = 36000''' = 600'' = 10'$.

* * *

Kapitel 11: Schreibweise von Sexagesimalzahlen, die aus ganzen Zahlen und Brüchen zusammengesetzt sind; Rechenoperationen mit ihnen: Addition, Subtraktion, Halbieren, Verdoppeln

⟨11.1⟩ Schreibweise von gemischten Zahlen; Beispiel: $12^\circ 30' 45'' 0''' 50'''$.

- (11.2) Addition von Sexagesimalbrüchen; kurze Darstellung. Kein Beispiel.
 (11.3) Subtraktion von Sexagesimalbrüchen. Kein Beispiel.
 (11.4) Verdoppeln und Halbieren von Sexagesimalbrüchen. Kein Beispiel.

* * *

Kapitel 12: Multiplikation und Division von gewöhnlichen Brüchen

(12.1) Allgemeines Verfahren für die Multiplikation: Verwandlung in Einheiten derselben Art; dann Multiplikation; anschließend durch Division Feststellung, wie viele Ganze im Ergebnis enthalten sind.

(12.2) Beispiel 1: $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9} = \frac{12}{63}$.

(12.3) Beispiel 2: $3\frac{1}{2} \cdot 8\frac{3}{11} = 28\frac{21}{22}$.

(12.4) Allgemeines Verfahren für die Division: Verwandlung in Brüche derselben Art (d.h. desselben Nenners); dann Division der Einheiten (d.h. der Zähler); das Ergebnis sind ganze Zahlen. Beispiel: $20\frac{2}{13} : 3\frac{1}{3} = 6\frac{6}{130}$.

* * *

Kapitel 13: Allgemeine Sätze über (Quadrat-)Wurzeln

(13.1) 2 Sätze: Das Produkt einer Zahl mit sich selbst ist eine Quadratzahl. Wenn a und b Quadratzahlen sind, so ist auch $a \cdot b$ eine Quadratzahl.

(13.2) Satz: Wenn $a : b$ eine Quadratzahl ist, so ist auch $a \cdot b$ eine Quadratzahl. Beispiel: $18 : 8 = 2\frac{1}{4} = (1\frac{1}{2})^2$ ist Quadratzahl; daraus folgt: $18 \cdot 8 = 144 = 12^2$ ist Quadratzahl; auch $8 : 18 = \frac{4}{9} = (\frac{2}{3})^2$ ist Quadratzahl. Andeutung eines weiteren Beispiels ($8 : 2$).

(13.3) Frage: Aus welchen Stellen im Dezimalsystem können Wurzeln gezogen werden? Wiederholung von Aussagen über den Wert der Ziffern in den einzelnen Dezimalstellen. Satz: Aus ungeraden Stellen können Wurzeln gezogen werden (d.h.: In der Folge 1, 10, 100, 1000, ... haben die an ungerader Stelle stehenden Zahlen Quadratwurzeln, die anderen nicht).

(13.4) Frage: Aus welchen Brüchen können Wurzeln gezogen werden? Satz: Sexagesimalbrüche, die an ungerader Stelle stehen (d.h. Minuten, Terzen, Quinten, ...), haben keine Quadratwurzeln, aber solche an gerader Stelle (d.h. Sekunden, Quartan, Sexten, ...) haben Quadratwurzeln. Bei den gewöhnlichen Brüchen haben „erste Brüche“ (d.h. solche, deren Nenner keine Quadratzahlen sind) keine Quadratwurzeln, aber „zweite Brüche“ (d.h. solche, die durch Multiplikation eines „ersten Bruchs“ mit sich selbst entstehen) haben Quadratwurzeln.

* * *

Kapitel 14: Allgemeines Verfahren des Ziehens einer Quadratwurzel

Bedeutung der Stellen im Dezimalsystem. Aus ungeraden Stellen kann man Wurzeln ziehen. Allgemeines Verfahren: Abzählen der Stellen von rechts nach links; Abstreichen von Zweiergruppen; bei der am weitesten links stehenden Zweiergruppe sucht man die größte Quadratzahl; diese wird abgezogen; Verdoppeln der ersten Stelle der Wurzel und Verschieben nach rechts; Bestimmung der zweiten Stelle usw., bis entweder kein Rest oder ein kleinerer Rest als die letzte Zahl, die verdoppelt wurde, übrig bleibt.

Wenn die Rechnung aufgeht, hat man die genaue Wurzel. Wenn sie nicht aufgeht, hat man den Näherungswert $\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$.

* * *

Kapitel 15: Theoretische Fragen des Quadratwurzelziehens; Erklärung, warum die bereits gefundenen Teile verdoppelt werden müssen

Hinweis, daß beim Multiplizieren von zwei zweistelligen Zahlen vier Multiplikationen erforderlich sind: $(10a + b) \cdot (10c + d) = 10a \cdot 10c + 10bc + 10ad + bd$. Dies gilt auch für das Quadrieren. Daher muß beim Radizieren die Zehnerstelle verdoppelt werden.

* * *

Kapitel 16: Beispiele für das Ziehen der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen

(16.1) Beispiel: $\sqrt{5625} = 75$.

(16.2) Sonderfall, wenn Zweiergruppen vorhanden sind, die aus Nullen bestehen. Kein Beispiel.

(16.3) Verkürzte Möglichkeit, Wurzeln aus Zahlen zu bestimmen, die am Ende Nullen haben: Man hänge die Hälfte der Nullen, die sich am Ende des Radikanden befinden, hinten an die Wurzel an; dies erspart das Verdoppeln. Beispiel: $\sqrt{10000} = 100$.

* * *

Kapitel 17: Bestimmung der Wurzel aus Brüchen

(17.1) Bei Brüchen oder gemischten Zahlen werden diese in Einheiten der niedrigsten Stelle des Bruches ausgedrückt, wenn diese gerade ist; andernfalls bringt man sie auf die nächstniedrigere Stelle. Hinweis, daß die Genauigkeit größer wird, wenn man den Bruch mit einer größeren Zahl erweitert.

(17.2) Beispiel 1: $\sqrt{2} = \sqrt{7200}' = 84' + \text{Rest} = 1 \text{ Ganzes } 24' + \text{Rest}$.

(17.3) Beispiel 2: $\sqrt{2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{13}} = \sqrt{\frac{78 + 13 + 3}{39}} = \sqrt{\frac{94}{39}} = \sqrt{\frac{94 \cdot 39}{39^2}} = \frac{\sqrt{3666}}{39} = \frac{60}{39} + \text{Rest} = 1\frac{21}{39} + \text{Rest}$. Durch erneutes Erweitern mit 39^2 würde das Ergebnis noch genauer: $\frac{\sqrt{3666}}{39} = \frac{\sqrt{3666 \cdot 39^2}}{39^2} = \frac{2361 + \text{Rest}}{39^2}$.

* * *

Kapitel 18: Über die Ausziehung der Quadratwurzel in Anlehnung an das, was die Inder geschrieben haben, mit Hilfe von angehängten Nullen

Die Genauigkeit des Wurzelziehens wird erhöht, indem an die zu radizierende Zahl eine gerade Anzahl von Nullen angehängt wird. Nach dem Radizieren wird die gezogene Wurzel in geeigneter Weise vermindert. (Man benutzt also die Beziehung: $\sqrt{N} = \frac{1}{10^k} \sqrt{N \cdot 10^{2k}}$.) Der gebrochene Anteil des Ergebnisses wird in Sexagesimalbrüche überführt. Das Ergebnis wird umso genauer, je mehr Nullen angehängt werden. Kein Beispiel.

* * *

Kapitel 19: Ausziehen von Wurzeln aus ganzen oder aus gemischten Zahlen mit Hilfe von angehängten Nullen

⟨19.1⟩ Allgemeines Verfahren: Man führt die einzelnen Bestandteile der gemischten Zahl auf die niedrigste Einheit zurück; falls man daraus keine Wurzel ziehen kann, nimmt man die nächstniedrigere Stelle. Anhängen einer geraden Anzahl von Nullen. Ziehen der Wurzel. Verwandlung des Restes in Sexagesimalbrüche.

$$\begin{aligned}
 \langle 19.2 \rangle \text{ Beispiel: } \sqrt{2} &= \sqrt{\frac{2.000.000}{10^6}} = \frac{1}{1000} \cdot \sqrt{2.000.000} = \frac{1}{1000} \cdot [1414 + \text{Rest}] \\
 &\approx \frac{1}{1000} \cdot 1414 = 1 \text{ (Ganzes)} + 414/1000 = 1 + [(414 \cdot 60)/1000]' = 1 + 24840/1000 \\
 &= 1 + 24' + [(840 \cdot 60)/1000]'' = 1 + 24' + (50400/1000)'' = 1 + 24' + 50'' + [(400 \cdot 60)/1000]''' \\
 &= 1 + 24' + 50'' + 24'''.
 \end{aligned}$$

ANHANG 2

VERZEICHNIS DER AUFGABEN

Schreibweise von 11 (1.6)

Schreibweise von 325 (1.6)

Schreibweise und Aussprache von 1.180.703.051.492.863 (1.8)

$$6422 - 3211 = 3211 \text{ (2.3)}$$

$$1444 - 144 = 1300 \text{ bzw. } 1144 - 144 = 1000 \text{ (2.4)}$$

$$2326 \cdot 214 = 497764 \text{ (4.2)}$$

$$46468 : 324 = 143 \frac{136}{324} \text{ (7.1)}$$

$$1800 : 9 = 200 \text{ (7.2)}$$

$$2^\circ \cdot 2' = 4' \text{ (8.1)}$$

$$3^\circ \cdot 6''' = 18''' \text{ (8.1)}$$

$$6' \cdot 7' = 42'' \text{ (8.1)}$$

$$7'' \cdot 9' = 63''' = 1'' 3''' \text{ (8.1)}$$

$$1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4} \text{ (8.2)}$$

$$2^\circ 45' \cdot 3^\circ 10' 30'' = 8^\circ 43' 52'' 30''' \text{ (9)}$$

$$\frac{15}{3} : \frac{6}{3} = 2\frac{1}{2} \text{ (10.2)}$$

$$10'' : 5' = 2' \text{ (10.3)}$$

$$50 : 10 = 5 \text{ (10.4)}$$

$$10'' : 5' = 2' \text{ (10.4)}$$

$$10' : 5''' = 7200^\circ. \text{ Probe: } 7200^\circ \cdot 5''' = 10' \text{ (10.5)}$$

Schreibweise von $12^\circ 30' 45'' 0''' 50''''$ (11.1)

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9} = \frac{12}{63} \text{ (12.2)}$$

$$3\frac{1}{2} \cdot 8\frac{3}{11} = 28\frac{21}{22} \text{ (12.3)}$$

$$20\frac{2}{13} : 3\frac{1}{3} = 6\frac{6}{130} \text{ (12.4)}$$

$$18 : 8 = 2\frac{1}{4} = (1\frac{1}{2})^2 \text{ ist Quadratzahl; daraus folgt: } 18 \cdot 8 = 144 = 12^2 \text{ und}$$

$$8 : 18 = \frac{4}{9} = (\frac{2}{3})^2 \text{ sind Quadratzahlen (13.2)}$$

$$8 : 2 \text{ ist Quadratzahl; daraus folgt: } 8 \cdot 2 \text{ ist Quadratzahl (13.2)}$$

$$\sqrt{5625} = 75 \text{ (16.1)}$$

$$\sqrt{10000} = 100 \text{ (16.3)}$$

$$\sqrt{2} = 1 \text{ Ganzes } 24' + \text{Rest (17.2)}$$

$$\sqrt{2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{13}} = 1\frac{21}{39} + \text{Rest (17.3)}$$

$$\sqrt{2} = 1 + 24' + 50'' + 24''' \text{ (19.2)}$$

ANHANG 3

GLOSSAR

Aufgeführt sind die Eigennamen und alle im weiteren Sinne mathematischen oder rechentechnischen Fachausdrücke mit Ausnahme der Kardinalzahlen. Die in Klammern beigefügten Belegstellen beziehen sich auf die Abschnitte der vorliegenden Ausgabe. Ein hinzugefügter Stern gibt an, daß das Wort in dem betreffenden Abschnitt mehr als einmal vorkommt. Falls es in dem Teil des Textes, der in N und in C überliefert wird (d.h. in den Kapiteln 1 bis 12.3), Unterschiede beim Vorkommen gibt, ist dies in eckigen Klammern vermerkt. So bedeutet etwa „[N*C]“, daß das betreffende Wort im angegebenen Abschnitt in N mehr als einmal, in C aber nur einmal vorkommt, und „[N]“ bedeutet, daß es in N genau einmal, in C aber nicht vorkommt. – Falls die dem lateinischen Text zugrunde liegenden arabischen Fachausdrücke aus den arabischen Paralleltexten oder aus der lateinischen Formulierung erschlossen werden konnten, wurden sie in Klammern hinzugefügt.

abbreviatio (*adbreviatio*, *abreviatio*) = abgekürzte Form, Abkürzung (1.1, 7.2, 16.3*)

abbreviatus = abgekürzt (9[N], 18)

abire = verschwinden (16.1)

accidere = sich ereignen (4.3[N])

accipere = nehmen (2.2*, 3*, 5, 7.2, 11.4[N], 16.3*, 17.1, 17.3, 18*, 19.1*, 19.2*)

ad instar = ganz so (6[N], 14)

ad placitum = wie es gefällt, beliebig (2.4[C])

addere = hinzufügen (1.5, 1.7, 1.8, 7.1[C], 9[NC*], 12.4, 14, 16.2, 18*, 19.1*, 19.2)

[zāda]

addere super = addieren zu (1.7, 2.1*, 4.3[C], 7.2[C], 9[N*], 11.3, 12.4, 17.3) [zāda ‘alā]

affinitas = Verwandtschaft (17.2)

Alchoarizmi / *Alchoarismi* (N), *Algorizmi* (C) = al-Ḥwārizmī (1[N], 1.1, 1.2, 1.4)

algebr = Rückversetzen (1.3) [al-ğabr]

almucabalah = Gegenüberstellung (1.3) [al-muqābala]

altior / *alcior differentia* = höhere Stelle, höchste Stelle (2.2*, 3[N], 4.1, 4.2[N*], 6[N*],

11.1[C], 11.4[C])

altior numerus = obere Zahl (6[N])

ante = vor (1.5[C], 1.6*, 3[C*], 7.2*, 14, 16.1*, 16.2, 18*, 19.1, 19.2*)

anullare = zu nichts machen (16.1)

arismethica (N), *arithmetica* (C) = Arithmetik (1[N], 1.1, 1.3)

ascendere = ansteigen (1.5, 1.7)

aspicere = betrachten (1.2, 6, 9[N])

aufferre = wegnehmen, beseitigen (1.3, 3[N*], 14, 15, 16.3)

augere = hinzufügen (12.3[N])

augere super = hinzufügen zu (4.3[N], 7.2[N]) [zāda ‘alā]

- augmentare* = vergrößern, hinzufügen (1.6, 1.8)
augmentatio = Vergrößerung (2[N], 2.2, 11[N]) [ziyāda]
bis = zweimal (13.4*, 14, 15*, 17.3*, 19.2)
brevior = kürzer (9[C])
cadere = fallen, vor sich gehen (14, 16.1)
capere = beginnen (= incipere) (2.3)
character = Symbol (1.5*, 1.6, 1.7*, 1.8*)
carere = entbehren, nicht haben (11.1[C], 13.3*, 13.4, 14, 17.1, 18, 19.1)
centenus = Hunderter (1.5, 1.6*, 1.7[NC*], 1.8*, 13.3, 14, 15)
centies mille milium = Hundertmillionen (1.8[N])
C milia milium = Hundertmillionen (1.8[C])
centies milies mille milium = Hundertmilliarden (1.8[N])
C milia milia milium tribus vicibus = Hundertmilliarden (1.8[C])
centum milia = Hunderttausender (1.8[N*])
C milia = Hunderttausender (1.8[C*])
certus = genau (1.2)
certus: siehe auch *radix certa*, *radix certissima*
cessare = ablassen (4.2[C])
circulus = Kreis, Null (1.5*, 1.6*, 1.7, 1.8, 2.1*, 2.2[N*C], 3, 4.3*, 6, 7.1*, 7.2*, 10.3, 11.1*, 11.3*, 14, 16.2*, 16.3*, 18*, 19.1*, 19.2*) [dā'ira]
collectio = Ansammlung, Zusammenfügung, Addition (1.1, 1.3, 11[N]) [ḡam']
colligere = ansammeln, zusammenfügen (1.7*, 1.8, 2.1*, 3[N], 4.2, 4.3, 5[C*], 6[N], 7.1[N*], 8.1[N*C], 11.2, 11.4[N*C], 13.1, 13.2, 13.3*, 19.1) [ḡama'a; *collectum fuit* iḡtama'a]
componere super = zusammensetzen aus (1.3)
compositus = zusammengesetzt (1.3)
concordare = übereinstimmen (4.1[N])
concors esse = übereinstimmen (4.1[C])
confringere = zerbrechen (10.1[N])
coniungere = verbinden (8.1[C])
consimilis = entsprechend (2.3)
constituere = aufstellen, schreiben (1.2, 1.8, 2.3, 2.4, 3[C*], 4.1[N], 6[N], 11.1*, 11.2[N], 12.1*, 12.2[N], 12.3[C], 13.3*, 18, 19.2) [atbata]
consumere = aufbrauchen (6, 7.2, 14*, 16.1*, 16.2, 16.3) [afnā]
contentus = enthalten (15)
conveniēns = passend (7.1)
converso: siehe *e converso*
cordetenus = im Herzen, auswendig (4.1[N])
crescere = wachsen (1.6, 3[C], 4.3[C])
cura est nobis = wir kümmern uns (19.2)
curare = sich kümmern (18)
deberi = zukommen (1.6*)
deberi: siehe auch *quod debetur uni*
decem milia, *X milia* = Zehntausender (1.5[N], 1.8)
 $\overline{X}$ = Zehntausender (1.5[C])

- decenus* = Zehner (1.5*, 1.6*, 1.7, 1.8*, 2.1*, 14)
decies mille milium = Zehnmillionen (1.8[N])
X milia milium = Zehnmillionen (1.8[C])
decies milies mille milium = Zehnmilliarden (1.8[N])
X milia milia milium tribus vicibus = Zehnmilliarden (1.8[C])
decima = Zehntel (8.1, 13.4)
decima (differentia) = zehnte Stelle (1.8, 8.1[N])
X^a mansio = zehnte Stelle (8.1[C])
delere = tilgen (4.3, 19.2) [maḥā]
describere = schreiben (1.7*, 1.8, 7.1[N*], 12.4)
desinere = aufhören (4.2[N], 14)
destruere = tilgen (12.3[N*])
desuper = oberhalb, außerdem (1.7, 4.2[N*C], 7.1[N], 7.2[NC*], 9[N], 12.4)
deus: siehe *si deus voluerit*
dextera, dextera pars = rechte Seite (1.5, 1.6, 1.8, 2.3, 3[N], 4.2*, 4.3*, 6*, 7.1*, 7.2*, 14*, 16.1, 16.3*, 18*)
dictum = das Gesprochene (1.8)
differentia = Stelle (1.5*, 1.6*, 1.7*, 1.8*, 2.1*, 2.2*, 2.3*, 2.4[N*C], 3*, 4.1[N*], 4.2*, 4.3*, 6*, 7.1[N*C], 7.2*, 8.1*, 9*, 10.1[C*], 10.3*, 11.1*, 11.2*, 11.3*, 11.4*, 12.2*, 12.4, 13.3*, 13.4*, 14*, 15*, 16.1*, 16.2*, 16.3*, 17.1*, 17.3*, 18*, 19.1*, 19.2*) [martaba, plur. marātib; rutba; manzila, plur. manāzil]
differentia: siehe auch *altior differentia, duodecima differentia, impar differentia, inferior differentia, nona differentia, novissima differentia, octava differentia, par differentia, penultima differentia, posterior differentia, precedens differentia, prima differentia, prior differentia, quarta differentia, quinta differentia, secunda differentia, septima differentia, sequens differentia, sexta differentia, superior differentia, tercia differentia, terciadecima differentia, ultima differentia, undecima differentia*
dimidium = Halbes (8.2*, 10.2*, 12.3*, 13.2, 18*, 19.1*, 19.2*)
diminutio = Verringerung (2[N], 2.2, 6) [nuqṣān]
dimittere = lassen (1.7*, 2.1, 2.2[N*C])
directo: siehe *in directo*
discere = lernen (1.2*)
dis(s)persio = Zerlegung (1.1) [tafrīq]
disponere = darstellen (1.1[N], 1.2[N], 13.4)
dispositio = Darstellung (1.2, 1.5)
diversitas = Unterschied (1.3*)
diversus = verschieden (4.1, 12.4, 13.1)
dividere = teilen (3[C], 6*, 7.1*, 7.2*, 10.3, 10.4[C*], 10.5[C], 12.1, 12.2*, 12.3[N], 12.4*, 18*, 19.1*)
dividere in = teilen durch (8.1[C*])
dividere per = teilen durch (5*, 6[N], 7.1[N], 7.2[N*], 8.1[N*], 8.2*, 9*, 10.1*, 10.2[NC*], 10.3[N], 10.4[N*], 10.5[N*C], 12.1, 12.2[NC*], 12.3[N], 12.4, 13.2*)
dividere super = teilen durch (6*, 7.1*, 7.2[NC*], 10.1[N*C], 10.2[N], 10.3*, 10.4*, 10.5[C*], 12.1[N], 12.2[N], 12.3[N], 12.4*, 13.2) [qasama ‘alā]

- divisio* = Division (1.1, 6[N*C], 7[N], 7.1[NC*], 7.2*, 10[N], 10.2[N*C], 10.4*, 12[N], 12.2, 13.2, 17.3) [qisma]
- ducere super* = multiplizieren mit (13.4)
- duodecima (differentia)* = 12. Stelle (1.8)
- duplare* = verdoppeln (3[C*], 5[C*], 11.4[C])
- duplatio* = Verdopplung (5[C])
- dup(p)licare* = verdoppeln (1.4*, 1.5*, 1.6*, 3[N*], 5*, 11.4[N*], 14*, 15*, 16.1*, 16.2*, 16.3*) [da‘‘afa, ad‘afa]
- uplicare* = vervielfältigen (4.1) [da‘‘afa, ad‘afa]
- uplicatio* = Verdopplung (1.4[C], 5[N*], 15) [taḍ‘īf, id‘āf]
- dup(p)licitas* = Verdopplung (1.3, 1.4[N], 14, 15, 16.3)
- e converso* = umgekehrt (7.1[C])
- effici* = sich ergeben (1.4, 8.1[NC*], 14)
- equalis* = gleich (12.4*, 13.1*)
- equalitas* = Gleichheit (10.2[C])
- equare* = gleichgemacht werden (12.4)
- erigere* = bringen (1.7*, 2.1, 9[C]) [atbata]
- errare* = irren (5*, 6)
- evenire* = sich ereignen (4.3[C])
- excedere* = übertreffen (1.4, 3[C])
- exemplar* = Beispiel (1.6[C], 1.8, 4.2, 7.1, 7.2, 8.1[N], 10.4, 11.1, 12.1, 12.2[N], 16, 16.3, 17.2, 19.2)
- exemplum* = Beispiel (1.6[N], 2.3)
- exiguus* = sehr klein (1.1, 13.2*)
- exire* = herauskommen, sich ergeben (1.8, 4.2[N*C], 4.3*, 5[N], 6*, 7.1, 7.2, 8.1*, 8.2*, 9*, 10.1*, 10.2*, 10.3*, 10.4*, 10.5*, 12.1, 12.2, 12.3[N*], 12.4*, 13.1, 13.2*, 14*, 16.1, 16.3*, 17.1, 17.2, 17.3*, 18*, 19.1*, 19.2*) [haraġa]
- exitus* = Ausgangspunkt (8.1) [maḥraġ]
- exponere* = darstellen (1.1, 1.2*, 11.4[C])
- extra* = außerhalb (1.3*, 12.1[C])
- extrahere* = herausziehen, erarbeiten (18)
- extrahi* = herauskommen (10.4[C])
- extrahere (radicem)* = (eine Wurzel) (aus)ziehen (13, 14*, 16.1, 16.2, 16.3, 17.1*, 17.2*, 17.3*, 18*, 19.1*, 19.2) [ġaddara; aḥraġa (al-ġidr); istaḥraġa (al-ġidr)]
- extractio (radicis)* = Ausziehen (einer Wurzel) (7.2[C], 14, 16, 19) [taġḍīr; iḥrāġ (al-ġidr); istiḥrāġ (al-ġidr)]
- facere de* = machen aus (1.7*, 2.1*, 2.2*, 3, 4.2[N*C], 4.3[N], 7.2*, 11.2[C], 11.3[N*], 11.4)
- facere ex* = machen aus (4.3[C], 11.2[N])
- fieri* = entstehen, stehen, gemacht werden, geschehen (1.2, 1.3, 1.4*, 1.5, 1.6, 1.7*, 7.1[C], 7.2[C], 8.1[N*], 9[N*C], 10.2[N], 10.4, 11.3[C], 12.2, 13.3*, 13.4*, 15*, 16.1*, 17.2, 19.2*) [šāra]
- figura* = Form (1.3*, 1.5*, 1.6*, 1.7[C], 7.1*) [šūra, plur. šuwar]
- hec figura eius est* = so sieht sie aus (1.3, 1.5, 1.8, 2.3*, 2.4[N*], 4.2, 4.3[N*C], 7.1*, 7.2*, 11.1, 16.1) [wa-hāḍihī šūratuhū/-hā/ šūrat dālīka]

- figurare* = darstellen (9)
- finire* = zu einem Ende bringen (4.3[N], 11.3, 15, 16.2, 19.1)
- fractio* = Bruch (7.2, 8[N], 8.1*, 9*, 10[N], 10.1*, 11[N], 11.1, 11.2, 11.3*, 11.4, 12[N], 12.1[NC*], 12.2[C], 12.3[N], 12.4*, 13.1, 13.4*, 14, 17, 17.1*, 17.2*, 17.3*, 18, 19, 19.1*) [kasr, plur. kusūr]
- fractio*: siehe auch *prima fractio*
- geminatio* = Verzweifachung (1.3)
- genus* = Art (1.6, 2.1, 2.2, 8.1, 9[C], 10.1*, 10.2[N], 10.3, 11.3[N], 12.1*, 12.2*, 12.3[N*], 12.4*, 17.1, 17.3*, 19.1*) [ğins]
- gradus* = Grad (8.1*, 8.2*, 9*, 10.1, 10.5*, 11.1[N*C], 19.1, 19.2) [darağa, plur. darağ oder darağāt]
- impar / inpar (differentia)* = ungerade Stelle (13.3, 13.4*, 14)
- impar / inpar (numerus)* = ungerade Zahl (3*, 11.4[N], 14) [fard]
- imperfectus / inperfectus* = unvollständig (11.3)
- in directo* = in gerader Richtung (6*, 7.1*, 7.2*)
- in invicem* = miteinander (4.1, 8.1[NC*], 9[N], 11[N], 12.1*, 12.2)
- in simul* = zu einer (1.7)
- in successionem* = nachfolgend (11.2[C])
- incipere* = anfangen (1.6, 1.8, 2.2, 3[N*C], 4.2, 7.1, 7.2, 11.3, 11.4*, 14*, 18)
- Indi* = Inder (1.1, 1.2[N*C], 1.5[N], 4.1, 4.2[N*], 8.1, 9, 13.3, 18*)
- Yndi* = Inder (1.2[C], 1.5[C])
- indus* = indisch (4.2[C])
- indigere* = brauchen (1.3*)
- inferior* = unterer, unten stehend (4.2*, 4.3*, 6*, 7.1[N*C], 7.2[N], 10.1[C], 14*, 16.1)
- inferior (differentia)* = darunterliegende Stelle, niedrigere Stelle, niedrigste Stelle (1.5[C*], 2.2, 6[N], 7.1[N], 9, 10.1[C*], 11.3[N*], 11.4, 12.1[N], 17.3, 19.1)
- infinitus* = unbegrenzt (1.4, 8.1*)
- infra* = unterhalb (1.6*, 1.7, 2.1*, 2.2[N], 5[C*], 9, 10.1[N], 11.3[C], 13.4, 14*, 15*, 16.1, 16.3, 19.1)
- inicium / initium* = Anfang (1.5, 4.1[N], 6, 7.1[C], 7.2[C], 11.4, 14, 19.1, 19.2*)
- innumerabilis* = unzählbar (8.1)
- instar*: siehe *ad instar*, *reddere ad instar*
- integer* = ganz (8.1[N*C], 8.2, 9*, 10.2*, 10.3[C], 12.2[N])
- integer*: siehe auch *radix integra*
- integer numerus* = ganze Zahl (7.2, 8.1*, 8.2[N], 9, 10.1*, 10.2[N], 10.3[N], 11[N], 11.1*, 12.1, 12.2*, 12.3[N], 12.4*, 13.1, 17.1, 17.2, 18, 19, 19.1*, 19.2) [ṣaḥīḥ, plur. ṣiḥāḥ]
- intelligere* = sehen, verstehen (1.3, 1.5, 1.7, 2.3, 5*)
- intentio* = Absicht (1.2)
- invenire* = finden, sich ergeben, das Richtige finden (1.2, 1.3*, 1.4, 1.5, 1.7*, 3, 5*, 6[N], 7.2, 11.4, 12.4, 13.3)
- inventio* = Existenz (1.3)
- invicem* = miteinander (8.1, 11.2[N], 12.1[N])
- invicem*: siehe auch *in invicem*

- iterum* = wiederum, noch einmal (1.7*, 2.4[N*], 4.2[N], 5[C], 6[C], 7.1*, 8.1[C*], 8.2, 9, 10.4[N*], 10.5, 11.3[C], 12.2[N], 13.4*, 15, 18, 19.2)
- iungere* = verbinden (1.7*)
- levis* = leicht (1.1, 1.2*, 2.2, 18, 19.1)
- levitas* = Leichtigkeit (1.1)
- liber algebr et almucabalah* = Buch über Algebra (1.3) [kitāb al-ğabr wa-l-muqābala]
- lit(t)era* = Buchstabe (1.5)
- lit(t)era* = Symbol (1.1, 1.2*, 1.3*, 1.8, 4.1, 4.2[N*C]) [ḥarf, plur. aḥruf oder ḥurūf]
- locus* = Platz (1.4*, 1.5[N*C], 1.7, 3[NC*], 4.3*, 7.1[C], 10.3, 11.2, 12.2[N*], 12.3[N*], 14, 15, 16.1*, 16.2, 16.3, 18*, 19.2)
- locutio* = Reden (1.8[C])
- magnus numerus* = große Zahl (1.7)
- maior (numerus)* = größere Zahl (2.3)
- manere* = bleiben (1.7)
- mansio* = Stelle (4.1[C], 7.1[C], 8.1[C], 11.2[C]) [manzila, plur. manāzil]
- mansio*: siehe auch *X^a mansio*, *nona mansio*, *prima mansio*, *quarta mansio*, *secunda mansio*, *tercia mansio*, *ultima mansio*
- maximus numerus* = sehr große Zahl (1.1, 13.2*)
- mediare* = halbieren (3[NC*], 11.4[C], 14*, 15, 16.1, 16.3, 18, 19.2) [naṣṣafa]
- mediatio* = Halbierung (11.4[C]) [tanṣīf]
- medietas* = Hälfte, Halbe (3*, 8.1, 10.2*, 11.4[N*], 12.3[N*], 16.3*) [niṣf]
- miles* = Tausender (1.5, 1.6, 1.8*)
- milies mille milium* = Milliarde (1.8[N])
- mille milia milium tribus vicibus* = Milliarde (1.8[C])
- milies mille mille milium* = Billion (1.8[N])
- mille milia milia milium quatuor vicibus* = Billion (1.8[C])
- mille milia* = Million (1.8[N])
- mille milium* = Million (1.8[C])
- minor (numerus)* = kleinere Zahl (2.3, 11.3[N], 14*)
- minuere* = verringern (2.1, 2.3[N], 4.3, 7.1[C], 10.3, 11.3, 17.1*, 17.3*, 18*, 19.1, 19.2) [naqaṣa min; asqaṭa min; alqā min]
- minuere de* = subtrahieren von (2.1, 2.2*, 2.3*, 2.4[N*C], 6*, 7.1*, 7.2*, 11.3*, 14*, 16.1*, 16.3)
- minuere ex* = subtrahieren von (1.8, 6[N], 11.3*)
- minus* = kleiner, weniger (1.8, 2.2, 5[N*C], 6*, 7.1[N*C], 11.3[C], 14*)
- minutum* = Minute (1/60 Grad) (8.1*, 8.2*, 9*, 10.2*, 10.3*, 10.4*, 10.5*, 11.1*, 12.1*, 12.2[N*C], 12.3, 13.4*, 17.2*, 17.3*, 19.1*, 19.2*) [daqīqa, plur. daqā'iq]
- modicus* = mäßig (17.2, 17.3*, 19.2)
- modus* = Art (1.4, 2.3*, 2.4[NC*], 7.2[N], 9[N*C])
- multiplicare* = multiplizieren (4.2*, 4.3, 5, 6, 7.2[N], 8.1*, 8.2[C], 9[N*C], 12.1*, 12.2, 14*, 15*)
- multiplicare in* (c. abl.) = multiplizieren mit (4.1*, 4.2*, 4.3*, 5*, 6*, 7.1*, 7.2*, 8.1*, 8.2*, 9*, 10.3[C*], 10.4*, 12.1, 12.2[N*C], 12.3[N*C], 12.4*, 13.1*, 13.2*, 13.3*, 13.4*, 14*, 15*, 16.1*, 16.2*, 16.3*, 17.3*, 18*, 19.1, 19.2*) [ḍaraba fī]
- multiplicare in* (c. acc.) = multiplizieren mit (4.3[N], 9, 10.5, 12.2[N], 13.4)

- multiplicare per* = multiplizieren mit (5[N], 7.2[N], 9[N*], 10.3[N*], 12.2[N])
- multiplicatio* = Multiplikation, Multiplizieren (1.1, 4[N], 4.1, 4.2*, 4.3*, 5[NC*], 6*, 7.1[NC*], 7.2*, 8[N], 8.1[N*C], 9*, 12[N], 12.1, 12.3[N*], 13.1*, 13.2, 15) [darb]
- multus numerus* = hohe (große) Zahl (1.7, 1.8)
- mutare* = verändern, verschieben (1.7[NC*], 4.2*, 4.3, 6*, 7.1*, 7.2, 15*, 16.1, 16.2, 16.3)
- mutare ad* = bringen an (1.7*, 7.2, 14)
- mutare de* = verändern an (1.7)
- mutatio* = Veränderung, Verschiebung (6)
- narrare* = darlegen (6, 7.2[N])
- nichil* = Null (2.4[N*])
- nodus* = Knoten (= Zehner) (15*) [‘aqd, plur. ‘uqūd]
- nona* = Neuntel (8.1)
- nona (differentia)* = neunte Stelle (1.8, 8.1[N])
- nona (mansio)* = neunte Stelle (8.1[C])
- nota* = Zeichen (1.3, 1.8[NC*], 5*)
- notare* = notieren, kenntlich machen (4.2[N], 4.3*, 12.4)
- notare sub* = kenntlich machen durch (2.3)
- novena* = Neuntel (12.2*, 13.2)
- novissima (differentia)* = letzte Stelle (4.1[N])
- numerare* = zählen (1.8, 14*, 18*, 19.1*, 19.2*)
- numerus* = Rechenweise (1.1, 9, 16.3)
- numerus* = Zahl (1.1*, 1.2, 1.3*, 1.4*, 1.5*, 1.6*, 1.7*, 1.8*, 2.1*, 2.2*, 2.3*, 2.4*, 3*, 4.1*, 4.2*, 4.3*, 5*, 6*, 7.1*, 7.2*, 8.1[N*C], 8.2[C], 9[N*C], 10.1*, 10.4*, 11[N], 11.4*, 12.1[NC*], 12.2[N], 12.3[N], 12.4*, 13.1*, 13.2*, 13.3, 14*, 15*, 16.1*, 16.2*, 16.3*, 17.1*, 18*, 19.1*)
- numerus*: siehe auch *altior numerus*, *impar numerus*, *integer numerus*, *magnus numerus*, *maior numerus*, *maximus numerus*, *minor numerus*, *multus numerus*, *par numerus*
- occupare* = (eine Stelle) einnehmen (1.5, 2.1)
- octava* = Achtel (12.4*, 13.4*)
- octava / VIII^{va} (differentia)* = achte Stelle (1.8)
- octava (pars)* = Achtel (19.1)
- octavum* = Oktave (1/60 Septime) (8.1[N], 13.4)
- operari* = bearbeiten, arbeiten (1.5, 3[C], 11.3[NC*], 14*, 19.1*)
- operatio* = Vorgehen (7.2[N])
- oppositio* = Gegenüberstellung (1.3) [muqābala]
- opus* = Ausführung, Verfahren (1.1, 1.2, 2.2, 7[N], 7.2[C], 12.1*, 14*, 16.1, 16.3*, 17.1, 17.2, 18*, 19.1*, 19.2) [‘amal]
- ordinatim* = der Reihe nach (12.2[N])
- ordo* = Ordnung, Reihe, Zeile (1.6, 2.1, 7.1*, 7.2*, 9[C], 16.1, 16.3*) [saṭr]
- ostendere* = zeigen (1.5, 1.6*, 1.7)
- par* = gleich (14, 16.1)
- par* = gerade (16.3, 18*, 19.1, 19.2)
- par (differentia)* = gerade Stelle (13.3, 13.4*, 14)

- par* (*numerus*) = gerade Zahl (3*, 14) [zaugš]
pars = Teil, Bruchteil, Seite (3[C], 6, 7.1*, 8.1*, 11.3[C*], 11.4, 12.1[NC*], 12.2*, 12.3*, 12.4*, 13.4*, 14*, 16.1, 17.2, 17.3*, 18)
pars: siehe auch *dextera pars*, *octava pars*, *quinta pars*, *septima pars*, *sexagesima pars*, *sinistra pars*, *tercia pars*, *XIII^{ma} pars*
pars de XIII = Dreizehntel (17.3*) [guz' min 13]
pars ex tredecim / XIII = Dreizehntel (8.1)
pars ex X et VIII / XVIII^{to} = Achzehntel (8.1)
parum = wenig (2.4[N])
patefacere = erörtern, offenkundig machen, klarmachen (1.1, 1.2, 1.3, 4.1, 12.1, 14, 15)
penultima (differentia) = vorletzte Stelle (6[N], 7.1[N])
per novem novem = immerfort durch 9 (5[N*])
per IX et IX = immerfort durch 9 (5[C*])
per successionem = nacheinander (4.2[N])
per successiones suas = nacheinander (1.8)
per successiones eorum = nacheinander (4.2[C])
perducere = hinführen (4.3[N])
perficere = vollenden (4.2[NC*], 4.3[C], 6)
pertinere = sich beziehen (1.5, 1.7)
pertransire = durchlaufen (4.2[N*])
pervenire = gelangen (1.7, 6, 9[C], 14*, 16.2, 17.3)
placere: siehe *ad placitum*
plus = mehr (1.7*, 1.8, 2.1, 6, 7.1, 7.2*, 11.2, 11.4, 16.1, 17.1, 18, 19.1)
ponere = setzen, aufstellen, (auf)schreiben (1.2[C], 1.5[NC*], 1.6*, 1.7*, 2.1*, 2.2, 2.3*, 2.4[N*C], 3[C*], 4.1*, 4.2*, 4.3[NC*], 6*, 7.1*, 7.2*, 8.1, 8.2[N*], 9*, 10.1[C], 10.3[NC*], 11.1*, 11.2*, 11.3[C], 11.4[C], 12.2[N*], 12.3[N*C], 12.4, 14, 16.1*, 16.2, 16.3*, 17.3*, 18*, 19.1, 19.2*) [waḍa'a]
poni = gesetzt werden, stehen (1.4*, 1.5*, 1.6*, 1.7, 6[N])
post = nach (1.5, 7.2, 16.2)
posterior differentia = spätere (= zweite, nächste) Stelle (1.5[N*], 1.7[N*], 3[N])
precedere = vorausgehen (1.3*, 1.5[C], 4.1, 19.1)
precedens (differentia) = vorangehende Stelle (3[N*], 4.2[C])
preponere = voranstellen (1.5[N*C])
prima (differentia) = erste Stelle (1.5*, 1.6*, 1.7*, 1.8, 2.1*, 2.3*, 2.4[N*], 3, 4.1, 4.2*, 4.3*, 6*, 7.1*, 7.2[N*C], 8.1, 11.1, 12.2[N*C], 13.3*, 13.4, 14*, 15*, 16.1*, 16.2, 17.3*, 18, 19.1)
prima fractio = erster Bruch (d.h. Bruch, der keine Wurzel hat) (13.4*)
prima mansio = erste Stelle (4.1[C])
prior differentia = frühere (= erste) Stelle (1.5[N*])
pro = anstelle von (1.7*, 2.1[C])
probare = beweisen, überprüfen (1.8, 5, 10.5)
probatio = Probe (5[N], 10.4) ['iyār, imtiḥān, mīzān]
producere = hinführen (4.3[C])
proicere = abwerfen (5*, 18, 19.2)
prope = nahe bei (6*, 17.2)

- propinquus* = leicht (7.2[C])
propior = näher, ziemlich nahe (14, 17.1, 17.3)
provenire = entstehen (13.3)
proximus = der nächste (14*, 16.1)
proximus = der am leichtesten zu verstehende (7.2[N]) [aqrab]
quantitas = Größe (4.1, 4.3[N])
quarta = Viertel (8.1, 8.2, 10.2*, 12.1, 12.4*, 13.2)
quarta (differentia) = vierte Stelle (1.5*, 1.6*, 1.7*, 1.8, 2.3*, 2.4[N], 4.2, 7.2, 8.1[N], 13.3, 13.4, 14, 16.1*)
quarta (mansio) = vierte Stelle (8.1[C])
quartanum = Quarte (1/60 Terz) (11.1[N], 13.4*, 17.3, 19.1)
quartum / IIII^{um} = Quarte (1/60 Terz) (8.1*, 10.1, 11.1*, 12.2[N], 13.4*, 17.2, 18, 19.1)
quater = viermal (13.4, 15)
querere = suchen (1.1, 6[N])
quinta = Fünftel (12.1, 13.4*, 19.1*)
quinta (differentia) = fünfte Stelle (1.5, 1.8, 16.3)
quinta / V^{ta} pars = Fünftel (13.4*)
quintum = Quinte (1/60 Quarte) (8.1[C], 13.4*, 17.3*, 18)
quod debetur / que debentur uni = was der Eins zukommt (6, 7.1, 7.2*, 10.3, 10.4*, 10.5, 12.4) [(wa-dālika) naṣīb al-wāḥid]
quotus = wie groß (1.8)
radix = Wurzel (1.3*, 7.2, 13, 13.1*, 13.2*, 13.3*, 13.4*, 14*, 16, 16.2, 16.3*, 17, 17.1*, 17.2*, 17.3*, 18*, 19, 19.1*, 19.2*) [ğidr]
radix certa = genaue Wurzel (16.3)
radix certissima = ganz genaue Wurzel (16.1, 18*) [ğidr ṣaḥīḥ]
radix integra = ganze Wurzel (14*) [ğidr ṣaḥīḥ]
radix numero est = eine Zahl hat eine Wurzel (13.1, 13.2*, 13.3*, 16.3)
radix vera = wirkliche Wurzel (14)
recuperatio = Wiedererlangung (1.3[N]) [ğabr]
reddere = zurückführen, wiedergeben, verwandeln, machen (1.1, 9*, 10.1[N*C], 11.3[C], 12.1[C], 12.2[N], 12.3[N*], 12.4*, 14, 15, 17.1*, 17.2, 17.3, 19.1)
reddere ad instar = auf die Gleichheit bringen (9[N], 12.1[N])
redire = (zurück)kommen, zurückkehren, sich wieder ergeben (1.3, 1.4, 1.5, 1.7[N], 4.2[C], 10.4*)
reducere = zurückführen (17.1)
reducere retro = zurücknehmen (7.1[N])
referri = sich beziehen (12.3[N*], 13.4, 19.1)
reiterare = wiederholen (6[N])
remanere = übrig bleiben, bleiben (1.7*, 1.8, 2.1*, 2.2*, 2.3*, 2.4[N*C], 3[N*C], 4.3*, 5*, 6*, 7.1*, 7.2*, 8.1, 9*, 11.3[N], 12.3[N], 12.4, 14*, 16.1*, 16.2, 16.3*, 18*, 19.2*)
removere = bewegen (14*, 16.2)
res = Sache (1.3, 4.1[C], 4.2[C], 7.2[C], 10.4, 11.1[C], 17.3, 19.1)
reservare = behalten (12.2[N])
residuus = übrig (1.8, 3[C], 7.2, 11.2[C], 11.3[NC*], 11.4[N], 18*, 19.1*, 19.2*)

- restare* = übrig sein (11.1[C])
- restauratio* = Wiederherstellung (1.3) [ğabr]
- retinere* = behalten (4.1, 5[N])
- retrahere* = zurückziehen (6[C], 7.1[C])
- retrahere retro* = zurückziehen (6[N])
- retro*: siehe *reducere retro*, *retrahere retro*, *reverti retro*
- reverti retro* = rückwärts gehen (14)
- scilicet* = nämlich, d.h. (1.1, 1.5, 1.6[N*C], 1.7[N*], 2.1*, 2.2*, 2.3*, 2.4[N], 3[N*], 4.2, 5[N], 7.1[N*C], 7.2[N], 8.1[N], 9, 10.2[N], 11.3[N], 12.1[N*C], 12.2[N], 12.3[N], 12.4, 13.2, 13.4*, 14, 15, 16.1*, 16.3*, 18)
- scribere* = schreiben (1.8, 3[N*], 4.2[C*], 6[N], 7.1*, 7.2*, 11.1[N], 11.3[N], 11.4[N], 12.2[N*], 12.3*, 14*, 16.3, 18, 19.1*)
- scriptor* = Schreiber (1.5, 1.6*, 1.8)
- secunda (differentia)* = zweite Stelle (1.5*, 1.6*, 1.7*, 1.8, 2.1*, 2.2*, 2.3*, 2.4[N*], 4.2[N*C], 6[NC*], 7.1[N], 8.1[N], 11.1[N], 12.2[N], 13.3, 14*, 16.1*)
- secunda mansio* = zweite Stelle (4.1[C], 8.1[C])
- secundum* = gemäß, in Anlehnung an (1.4, 1.6, 1.7, 1.8*, 4.1*, 4.3, 14, 16.3, 17.1, 18*, 19.1*)
- secundum / Idum* = Sekunde (1/60 Minute) (8.1*, 8.2*, 9*, 10.1*, 10.2*, 10.3*, 10.4*, 10.5*, 11.1*, 12.1*, 12.2[N*C], 12.3[N*], 13.4*, 17.2*, 17.3*, 18, 19.1*, 19.2*)
[tāniya, plur. tawānī]
- semel* = einmal (4.3[N], 15*)
- seorsum* = für sich (1.7[N], 18*, 19.1, 19.2)
- septima* = Siebtel (12.1*, 12.2*, 13.4*, 19.1*)
- septima (differentia)* = siebte Stelle (1.8)
- septima pars* = Siebtel (13.4*, 19.1)
- septimum* = Septime (1/60 Sexte) (17.2*)
- sequens (differentia)* = nächste Stelle (1.5, 1.7, 2.2[C], 3[NC*], 4.2[N*], 4.3, 7.1[N], 11.4)
- sequi* = folgen (1.6*, 4.2[N], 4.3[N], 7.2[N])
- sequi*: siehe auch *sequens differentia*
- servare* = behalten (5*, 9*, 12.2[N], 12.3[N], 18*, 19.1)
- sexagesima (pars)* = sechzigster Teil (12.3[N])
- sexta* = Sechstel (13.4)
- sexta (differentia)* = sechste Stelle (1.8)
- sextum* = Sexte (1/60 Quinte) (8.1[N], 10.1, 13.4*, 17.2, 19.1)
- si deus voluerit* = so Gott will (1.2, 2.2, 3, 7.2, 11.4[N], 12.1, 12.4) [in šā'a llāh]
- signare* = bezeichnen (1.3)
- significare* = bezeichnen (1.5*, 1.6, 1.7*, 2.1*, 2.4[N*])
- similis* = ähnlich, gleich (1.5[C], 2.4[N], 5*, 6, 7.1, 8.1[C], 11.3[N*], 12.1[NC*], 13.2, 13.4, 18*, 19.1*, 19.2)
- similiter* = in gleicher Weise, auf ähnliche Weise, ähnlich (1.3, 1.5[NC*], 1.6*, 1.7[NC*], 1.8, 2.1, 2.3, 3, 4.2[N*C], 4.3[N*C], 5[N], 6, 8.1[N*C], 8.2, 9, 10.2, 11.1, 11.2, 11.3, 11.4[N], 12.1[C], 12.3[N], 12.4, 13.2, 13.3*, 13.4*, 15*, 16.2, 17.1, 17.3, 18, 19.1*)
- similitudo* = Gleichheit, Ähnlichkeit (1.5, 6[C], 12.1[N], 14, 16.2)

simul: siehe in *simul*

sinistra, sinistra pars = linke Seite (1.6, 1.8, 4.1, 4.2, 4.3, 7.1*)

sub (c.abl.) = unter (1.6, 1.8*, 2.1*, 2.3*, 2.4[N*C], 3, 4.1*, 4.2*, 4.3, 6*, 7.1*, 7.2*, 11.1*, 11.2, 12.2[N*], 12.3*, 14*, 16.1*, 16.2, 16.3*, 18*, 19.1, 19.2*)

sub: siehe auch *notare sub*

sublevare = heben (11.4[C], 17.1*, 17.3, 19.1)

sublevare ad = heben zu (2.1*, 11.4[N], 12.1, 12.2, 17.1, 17.2, 17.3, 19.1)

substantia (?) = Wert (12.1[N])

subtilis = genau (17.2, 17.3, 18*, 19.1, 19.2)

succedere = folgen (2.2, 4.2*, 4.3, 6[C*], 7.1*, 11.4, 15)

successio: siehe in *successionem, per successionem, per successiones*

super = über (1.8*, 2.1*, 2.2, 2.3[C], 4.2[C], 4.3[NC*], 6*, 7.1*, 7.2[C*], 9, 10.2[N*], 11.2[C], 11.3, 12.4, 14, 19.1*)

super: siehe auch *addere super, augere super, componere super, dividere super, ducere super*

superesse = darüber sein (9[C])

superfluous = übrig (9[N], 11.2[N], 11.4[C], 18, 19.1, 19.2*)

superior = oberer, darüber stehend (2.2[N*C], 2.3[N], 2.4[N*], 4.2*, 4.3*, 6*, 7.1*, 7.2[N*], 14*, 16.1*, 16.3*)

superior (differentia) = darüberliegende Stelle, höhere Stelle, oberste Stelle (1.5[C*], 1.7[C*], 2.1, 2.2*, 2.3, 3[C], 4.3[N], 6[C*], 7.1[N], 11.1[N], 11.2, 11.3*, 11.4[N*])

supra = über (4.3[N], 6[C*], 7.1*, 7.2*, 11.2[N], 11.3[NC*], 11.4[C], 16.2*, 17.1)

surdus = taub (= irrational) (18) [aşamm]

urgere = sich ergeben (4.3[C])

sursum = nach oben (7.2[N])

su(b)stinere = ertragen (16.1, 16.3)

tabula = Tafel (4.1) [taht]

tercia = Drittel (8.1, 10.2*, 12.4*, 13.2, 17.3*)

tercia (differentia) = dritte Stelle (1.5*, 1.6*, 1.7*, 1.8, 2.1, 2.2, 2.3*, 2.4[N*], 4.2[NC*], 7.2, 8.1[N], 13.3, 13.4, 14*, 16.1*)

tercia (mansio) = dritte Stelle (8.1[C])

tercia pars = Drittel (17.3*)

terciadecima / XIII^a (differentia) = 13. Stelle (1.8)

tercianum = Terz (1/60 Sekunde) (8.1[N], 11.1[N], 12.1[N], 12.4, 13.4*)

tercium = Terz (1/60 Sekunde) (8.1*, 9*, 10.1*, 10.2*, 10.5*, 11.1*, 12.1[C*], 13.4*, 19.1*, 19.2*)

transire = (hin)übergehen (4.3, 6)

tredecimus = der dreizehnte (17.3)

XIII^{ma} pars = Dreizehntel (12.4*)

triplicare = verdreifachen (1.4*, 1.5*, 1.6*)

triplicatio = Verdreifachung (1.3, 1.4[C])

triplicitas = Verdreifachung (1.4[N])

ultima (differentia) = letzte Stelle (4.2*, 6*, 7.1*, 7.2, 9*, 10.1[N], 12.1[NC*], 12.2[N], 12.3[N], 14*, 16.1, 16.3, 17.1)

ultima mansio = letzte Stelle (4.1[C], 4.2[C])

ultimus = der letzte (9[C], 10.1[N*])

ultimus: siehe auch *ultima differentia*, *ultima mansio*

undecima (differentia) = 11. Stelle (1.8)

unitas = Einheit, Einer (1.3[NC*], 1.5*, 1.6*, 1.7*, 1.8, 2.1*, 4.1, 4.3, 8.1[N], 12.2[N], 14*, 15*) [aḥad, plur. āḥād]

universus = jeder einzelne, der gesamte; Plural: alle (1.1, 1.2, 1.3*, 3[C], 4.2*, 4.3*, 6*, 7.2, 9, 11.2, 12.3[N], 12.4, 13.3, 19.1)

unum = die Eins (1.3*, 1.4*, 1.5*, 1.6*, 1.7*, 1.8*, 2.1*, 2.2*, 2.3*, 2.4[N*], 3*, 4.1, 4.2, 4.3, 6, 7.1*, 7.2*, 8.1[C], 8.2*, 10.3, 11.2, 11.3*, 11.4, 12.2*, 12.3*, 12.4*, 13.2, 13.3*, 13.4*, 16.1*, 16.3*, 17.2, 17.3*, 19.2)

unum: siehe auch *quod debetur uni*

uti = gebrauchen (9[C])

utilis = nützlich (2.2)

vacuus = leer (1.5, 2.1*)

venire = kommen, sich ergeben (4.3[N], 6[N], 9[N], 12.2[N*])

versus = in Richtung auf, nach (1.6, 1.8, 3[N], 4.1, 4.2*, 4.3*, 6*, 7.1*, 7.2*, 14*, 16.1, 16.3*)

versus = umgekehrt (7.1[N])

vertere = umkehren, verwandeln (9[N*], 10.1*, 10.3[N], 10.5, 12.1[C*], 13.4*, 17.1, 17.2, 17.3)

verus: siehe *radix vera*

vicibus = -mal (1.8*)

videlicet = nämlich (4.3[N], 5[N])

vox = Wort (1.3)

ANHANG 4
VERZEICHNIS DER IM GLOSSAR ERWÄHNTEN ARABISCHEN
WÖRTER

Das Verzeichnis ist angeordnet nach arabischen Wurzeln.

- ʾ – ḥ – d
aḥad – *unitas*
- ʾ – n
in šā'a llāh – *si deus voluerit*
- t – ḥ – t
taḥt – *tabula*
- ṭ – b – t
aṭbata – *constituere; erigere*
- ṭ – n – y
ṭāniya – *secundum*
- ğ – b – r
al-ğabr – *algebr; liber ...; recuperatio; restauratio*
- ğ – d – r
ğaddara – *extrahere (radicem)*
ğidr – *radix*
ğidr ṣaḥīḥ – *radix integra; radix certissima*
tağdīr – *extractio (radicis)*
- ğ – z – ʾ
ğuz' (min) – *pars (de)*
- ğ – m – ʿ
ğama'a – *colligere*
iğtama'a – *collectum fuit*
ğam' – *collectio*
- ğ – n – s
ğins – *genus*
- ḥ – r – f
ḥarf – *lit(t)era*
- ḥ – r – ğ
ḥarağa – *exire*
aḥrağa (al-ğidr) – *extrahere (radicem)*
istaḥrağa (al-ğidr) – *extrahere (radicem)*
maḥrağ – *exitus*
iḥrāğ (al-ğidr) – *extractio (radicis)*
istiḥrāğ (al-ğidr) – *extractio (radicis)*

- d - r - ġ
 daraġa - *gradus*
 d - q - q
 daqīqa - *minutum*
 d - w - r
 dā'ira - *circulus*
 r - t - b
 rutba - *differentia*
 martaba - *differentia*
 z - w - ġ
 zauġ - *par (numerus)*
 z - y - d
 zāda - *addere*
 zāda 'alā - *addere super; augere super*
 ziyāda - *augmentatio*
 s - ṭ - r
 saṭr - *ordo*
 s - q - ṭ
 asqaṭa min - *minuere*
 ṣ - m - m
 aṣamm - *surdus*
 ṣ - w - r
 ṣūra - *figura*
 ṣ - y - r
 ṣāra - *fieri*
 ḍ - r - b
 ḍaraba fī - *multiplicare in*
 ḍ - ' - f
 ḍa'afa; aḍ'afa - *duplicare*
 taḍ'īf; iḍ'āf - *duplicatio*
 ' - q - d
 'aqd - *nodus*
 ' - m - l
 'amal - *opus*
 ' - y - r
 'iyār - *probatio*
 f - r - d
 fard - *impar (numerus)*
 f - r - q
 tafriq - *dispersio*
 f - n - y
 afnā - *consumere*
 q - b - l
 al-muqābala - *almucabalah; liber ...; oppositio*

q – r – b

aqrab – *proxima*

q – s – m

qasama ‘alā – *dividere super*

qisma – *divisio*

k – s – r

kasr – *fractio*

l – q – y

alqā min – *minuere*

m – ḥ – n

imtiḥān – *probatio*

m – ḥ – w

maḥā – *delere*

n – z – l

manzila – *differentia; mansio*

n – ṣ – b

(wa-dālika) naṣīb al-wāḥid – *deberi / quod debetur uni*

n – ṣ – f

naṣṣafa – *mediare; accipere medietatem*

niṣf – *medietas*

tanṣīf – *mediatio*

n – q – ṣ

naqaṣa min – *minuere*

nuqṣān – *diminutio*

w – z – n

mīzān – *probatio*

w – ḍ – ‘

waḍa‘a – *ponere*

BIBLIOGRAPHIE

- ALLARD, ANDRÉ (1978): *A propos d'un algorithme latin de Frankenthal: une méthode de recherche*. In: Janus 65, S.119-141.
- ALLARD, ANDRÉ (1991): *The Arabic origins and development of Latin algorisms in the twelfth century*. In: Arabic Sciences and Philosophy 1, S. 233-283.
- ALLARD, ANDRÉ (1992): *Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī: Le Calcul Indien (Algorismus). Histoire des textes, édition critique, traduction et commentaire des plus anciennes versions latines remaniées du XII^e siècle*. Paris / Namur.
- BEAUJOUAN, GUY (1948): *Étude paléographique sur la 'rotation' des chiffres et l'employ des apices du X^e au XII^e siècle*. In: Revue d'histoire des sciences 1, S.301-313.
- BERGMANN, WERNER (1985): *Innovationen im Quadrivium des 10. und 11. Jahrhunderts. Studien zur Einführung von Astrolab und Abakus im lateinischen Mittelalter*. Stuttgart.
- BJÖRNBO, AXEL A. (1914): *Die astronomischen Tafeln des Muḥammed ibn Mūsā al-Khwārizmī in der Bearbeitung des Maslama ibn Aḥmed al-Madrīṭī und der latein. Übersetzung des Athelhard von Bath auf Grund der Vorarbeiten von A. Björnbo † und R. Besthorn in Kopenhagen herausgegeben und kommentiert von H. Suter in Zürich*. Kopenhagen.
- BONCOMPAGNI, BALDASSARRE (1857): *Trattati d'aritmetica. I. Algoritmi de numero Indorum*. Rom.
- BONCOMPAGNI, BALDASSARRE (1857a): *Il Liber abbaci di Leonardo Pisano*. (Scritti di Leonardo Pisano, Bd. 1.) Rom.
- BOSE, D. M. / SEN, S. N. / SUBBARAYAPPA, B. V. (1971): *A concise history of science in India*. New Delhi.
- BUBNOV, NICOLAUS (1899): *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica (972-1003)*. Berlin.
- BULGAKOV, P. G. / KARIMOV, U. I. (Hrsg.) (1991): *Materials in History and History of Science and Culture of Nations of Central Asia* (in russisch). Taschkent.
- BURNETT, CHARLES (Hrsg.) (1987): *Adelard of Bath. An English Scientist and Arabist of the Early Twelfth Century*. London.
- BURNETT, CHARLES (1996): *Algorismi vel helcep decentior est diligentia: the Arithmetic of Adelard of Bath and his Circle*. In: Menso Folkerts (Hrsg.): *Mathematische Probleme im Mittelalter – der lateinische und arabische Sprachbereich*. Wiesbaden. S.221-332.
- BUSARD, HUBERT L. L. (1968): *Het rekenen met breuken in de middeleeuwen, in het bijzonder bij Johannes de Lineriis*. In: Mededelingen van de Koninklijke Vlaamse Academie voor Wetenschappen, Letteren en Schone Kunsten van België. Klasse der Wetenschappen, Jaargang 30, nr.7. Brüssel.
- CANTOR, MORITZ (1865): *Ueber einen Codex des Klosters Salem*. In: Zeitschrift für Mathematik und Physik 10, S.1-16.

- CARMODY, FRANCIS J. (1956): *Arabic astronomical and astrological sciences in Latin translation. A critical bibliography*. Berkeley / Los Angeles.
- CASTELLS, MARGARITA / SAMSÓ, JULIO (1995): *Seven chapters of Ibn al-Šaffār's lost Zīj*. In: Archives Internationales d'Histoire des Sciences 45, S.229-262.
- CROSSLEY, JOHN N. / HENRY, ALAN S. (1990): *Thus Spake al-Khwarizmi: A Translation of the Text of Cambridge University Library Ms. Ii.vi.5*. In: Historia Mathematica 17, S.103-131.
- DATTA, B. / SINGH, A. N. (1935-1938): *History of Hindu mathematics. A source book*. Lucknow.
- DICK, ADOLF (1925): *Martianus Capella*. Edidit Adolfus Dick. Leipzig.
- DICKEY, C. (1982): *Adelard of Bath: An Examination Based on Heretofore Unexamined Manuscripts*. Ph.D. dissertation, University of Toronto.
- DRECKER, J. (1931): *Hermannus Contractus, Über das Astrolab*. In: Isis 16, S.200-219.
- ENESTRÖM, GUSTAF (1913-1914): *Das Bruchrechnen des Jordanus Nemorarius*. In: Bibliotheca Mathematica, 3. Folge, 14, S.41-54.
- FAULHABER, CHARLES B. (1983): *Medieval manuscripts in the library of the Hispanic Society of America*. New York.
- FLÜGEL, GUSTAV (1871-1872): *Kitāb al-Fihrist. Mit Anmerkungen herausgegeben von Gustav Flügel*. 2 Bde. Leipzig.
- FOLKERTS, MENSIO (1970): „Boethius“ *Geometrie II. Ein mathematisches Lehrbuch des Mittelalters*. Wiesbaden.
- FOLKERTS, MENSIO (1997): *Frühe Abbildungen des Gerbertschen Abakus*. Im Druck.
- FRANK, JOSEF (1922): *Die Verwendung des Astrolabs nach al Chwārizmī*. In: Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin, Heft 3. Erlangen.
- FRIEDLEIN, GOTTFRIED (1867): *Anicii Manlii Torquati Severini Boetii De institutione arithmetica libri duo, De institutione musica libri quinque. Accedit geometria quae fertur Boetii*. Leipzig.
- GANDZ, SOLOMON (1931): *The Origin of the Ghubār Numerals, or The Arabian Abacus and the Articuli*. In: Isis 16, S.393-424.
- GANDZ, SOLOMON (1932): *The Mishnat ha Middot, the first Hebrew Geometry of about 150 C.E., and the Geometry of Muhammad ibn Musa al-Khowarizmi, the First Arabic Geometry (c. 820), Representing the Arabic Version of the Mishnat ha Middot. A New Edition of the Hebrew and Arabic Texts with Introduction, Translation and Notes*. In: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. A, 2. Band.
- GANDZ, SOLOMON (1936): *The Sources of al-Khowārizmī's Algebra*. In: Osiris 1, S.263-277.
- GANDZ, SOLOMON (1938): *The Algebra of Inheritance*. In: Osiris 5, S.319-391.
- GOLDSTEIN, BERNARD R. (1967): *Ibn al-Muthannā's Commentary on the Astronomical Tables of al-Khwārizmī. Two Hebrew versions, edited and translated, with an astronomical commentary*. New Haven / London.
- GROHMANN, A. (1935): *Texte zur Wirtschaftsgeschichte Ägyptens in arabischer Zeit*. In: Archiv Orientalní 7, S.437-472.
- HARDWICK, CH. / LUARD, H. R. (1858): *A catalogue of the manuscripts preserved in the library of the University of Cambridge*. Vol. 3. Cambridge.

- HOGENDIJK, JAN P. (1991): *Al-Khwārizmī's Table of the "Sine of the Hours" and the Underlying Sine Table*. In: *Historia Scientiarum* 42, S.1-12.
- HUGHES, BARNABAS B. (1986): *Gerard of Cremona's Translation of al-Khwārizmī's al-Jabr: A Critical Edition*. In: *Mediaeval Studies* 48, S.211-263.
- HUGHES, BARNABAS B. (1989): *Robert of Chester's Latin translation of al-Khwārizmī's al-Jabr. A new critical edition*. Stuttgart.
- AL-ḤWĀRIZMĪ (1983): Juschkewitsch, A. P. (Hrsg.): *Muchammad ibn Musa al-Chorezmi. K 1200-letiju so dnja roždenija*. Moskau.
- IFRAH, GEORGES (1986): *Universalgeschichte der Zahlen*. Frankfurt / New York.
- IRANI, RIDA A. K. (1955-1956): *Arabic numeral forms*. In: *Centaurus* 4, S.1-12.
- JONES, CH. W. (1975): *Bedae Venerabilis opera. Pars I: Opera didascalica*. Ed. Ch. W. Jones. Turnhout. (Corpus Christianorum, Series Latina, Band 123a)
- JONES, CH. W. (1980): *Bedae Venerabilis opera. Pars VI: Opera didascalica*. 3. Ed. Ch. W. Jones. Turnhout. (Corpus Christianorum, Series Latina, Band 123c)
- JUSCHKEWITSCH, A. P. (1964): *Über ein Werk des Abū 'Abdallah Muḥammad ibn Mūsā al-Ḥwārizmī al Mağūsī zur Arithmetik der Inder*. In: Beiheft zur Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin. Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin, hg. zum 60. Geburtstag Gerhard Harigs von I. Strube und H. Wußing, Leipzig, S.21-63.
- JUSCHKEWITSCH, A. P. (1964a): *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*. Leipzig.
- JUSCHKEWITSCH, A. P. (1983): *O trude po arifmetike Muchammada ibn Musy al-Chorezmi*. In: Muchammad ibn Musa al-Chorezmi. Matematičeskie traktaty. Taschkent. S.150-202.
- KARPINSKI, LOUIS C. (1910-1911): *Hindu numerals in the Fihrist*. In: *Bibliotheca Mathematica*, 3. Folge, 11, S.121-124.
- KARPINSKI, LOUIS C. (1921): *Two Twelfth Century Algorisms*. In: *Isis* 3, S.396-413.
- KAUNZNER, WOLFGANG (1986): *Die lateinische Algebra in MS Lyell 52 der Bodleian Library, Oxford, früher MS Admont 612*. In: Österreichische Akademie der Wissenschaften, Phil.-hist. Klasse, Sitzungsberichte, 475. Band. Wien. S.47-89.
- KENNEDY, E. S. (1964): *Al-Khwārizmī on the Jewish Calendar*. In: *Scripta Mathematica* 27, S.55-59 (Wiederabdruck in: Kennedy, E. S., und andere: *Studies in the Islamic Exact Sciences*. Beirut 1983, 661-665).
- KING, DAVID (1983): *Al-Khwārizmī and New Trends in Mathematical Astronomy in the Ninth Century*. In: Hagop Kevorkian Center for Near Eastern Studies. Occasional Papers on the Near East. Number Two. New York.
- KOPELEVIČ, JU. CH. / JUSCHKEWITSCH, A. P. (1983): *Muchammad ibn Musa al-Chorezmi, Kniga ob indijskom sčete. Pervod s latinskogo Ju. Ch. Kopelevič i A. P. Juškeviča*. In: Muchammad ibn Musa al-Chorezmi. Matematičeskie traktaty. Taschkent. S.5-19.
- LABARTA, ANA / BARCELÓ, CARMEN (1988): *Números y cifras en los documentos arábigohispanos*. Córdoba.
- LEMAY, RICHARD (1977): *The Hispanic origin of our present numeral forms*. In: *Viator* 8, S.435-462.
- LEMAY, RICHARD (1982): *Arabic numerals*. In: *Dictionary of the Middle Ages*, hg. v. Joseph R. Strayer, Band 1, S.382-398, New York.

- LEVEY, MARTIN / PETRUCK, MARVIN (1965): *Kūshyār ibn Labbān, Principles of Hindu Reckoning. A translation with introduction and notes by Martin Levey and Marvin Petruck of the Kitāb fī usūl hisāb al-hind*. Madison und Milwaukee.
- LINDGREN, UTA (1976): *Gerbert von Aurillac und das Quadrivium*. Wiesbaden.
- LITTLE, ANDREW G. (1914): *Roger Bacon. Essays. Contributed by various writers on the occasion of the commemoration of the seventh centenary of his birth*. Oxford.
- MIGNE, J.-P. (1882): *Patrologiae cursus completus. Series Latina*. Bd. 143. Paris.
- MILLÁS VENDRELL, EDUARDO, S.I. (1963): *El comentario de Ibn al-Muṭannā' a las Tablas Astronómicas de al-Jwārizmī. Estudio y edición crítica del texto latino, en la versión de Hugo Sanctallensis*. Madrid / Barcelona.
- MUŠARRAFA, 'A. M. / AḤMAD, M. M. (1939): *Muḥammad ibn Mūsā al-Ḥwārizmī [al-Khwārizmī]. Kitāb al-ğabr wa-l-muqābala. A treatise on Algebra. Edited, with an introduction, by 'Alī Muṣṭafā Mušarrafa and Muḥammad Mursī Aḥmad*. Kairo. Neuauflage 1968.
- MŽIK, HANS VON (1926): *Das Kitāb Šūrat al-Ard des Abū Ġā'far Muḥammad ibn Mūsā al-Ḥwārizmī*. Leipzig.
- NEUGEBAUER, OTTO (1962): *The Astronomical Tables of al-Khwārizmī. Translation with Commentaries of the Latin Version edited by H. Suter supplemented by Corpus Christi College MS 283*. Kopenhagen.
- PEDERSEN, FRITZ S. (1983): *Petri Philomenae de Dacia et Petri de S. Audomaro opera quadrivialia. Pars I: Opera Petri Philomenae*. Kopenhagen.
- PEDERSEN, FRITZ S. (1992): *Alkhwārizmī's astronomical rules: yet another Latin version?* In: Université de Copenhague. Cahiers de l'Institut du Moyen-Âge Grec et Latin 62, S.31-75.
- ROSEN, FREDERIC (1831): *The Algebra of Mohammed ben Musa. Edited and translated*. London.
- ROSENFELD, BORIS A. (1993): "Geometric trigonometry" in treatises of al-Khwārizmī, al-Māhānī and Ibn al-Haytham. In: *Vestigia mathematica. Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard*, hrsg. v. M. Folkerts und J. Hogendijk. Amsterdam. S.205-208.
- RUSKA, JULIUS (1917): *Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst*. Heidelberg (Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Philosophisch-historische Klasse, Jahrgang 1917, 2. Abhandlung).
- SAIDAN, A. S. (1973): *Abū l-Ḥasan Aḥmad ibn Ibrāhīm al-Uqlīdisī, al-Fuṣūl fī l-ḥisāb al-hindī*. Ed. A. Saidan. [Amman].
- SAIDAN, A. S. (1978): *The Arithmetic of Al-Uqlīdisī. The Story of Hindu-Arabic Arithmetic as told in Kitāb al-Fuṣūl fī al-Ḥisāb al-Hindī by Abū al-Ḥasan Aḥmad ibn Ibrāhīm al-Uqlīdisī written in Damascus in the year 341 (A.D. 952/3). Translated and annotated, from the unique copy, ms. 802 at Yeni Cami Library, Istanbul, written in the year 582 (A.D. 1186)*. Dordrecht / Boston.
- SAIDAN, A. S. (1985): *'Abd al-Qāhīr ibn Ṭāhīr al-Bağdādī, at-Takmila fī l-ḥisāb*. Ed. A. S. Saidan. Kuwait.
- SEZGIN, FUAT (1974): *Geschichte des arabischen Schrifttums, Band V: Mathematik*. Leiden.

- SMITH, DAVID EUGENE / KARPINSKI, LOUIS CHARLES (1911): *The Hindu-Arabic numerals*. Boston / London.
- SMITH, D. E. (1925): *History of Mathematics*, Band 2. Boston.
- STEELE, ROBERT (1922): *The Earliest Arithmetics in English*. London.
- THOMSON, RON B. (1976): *Jordanus de Nemore: Opera*. In: *Mediaeval Studies* 38, S.97-144.
- TK: THORNDIKE, LYNN / KIBRE, PEARL: *A catalogue of incipits of mediaeval scientific writings in Latin*. 2. Aufl. London 1963.
- TOOMER, G. J. (1973): *al-Khwārizmī*. In: *Dictionary of Scientific Biography*. New York. Band 7, S.358-365.
- TROPFKE, JOHANNES (1980): *Geschichte der Elementarmathematik*, 4. Auflage. Berlin / New York.
- VOGEL, KURT (1963): *Mohammed ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus. Das früheste Lehrbuch zum Rechnen mit indischen Ziffern. Nach der einzigen (lateinischen) Handschrift (Cambridge Un. Lib. Ms. Ii. 6.5.) in Faksimile mit Transkription und Kommentar herausgegeben*. Aalen.
- VOGEL, KURT (1985): *Gerbert von Aurillac als Mathematiker*. In: *Abhandlungen aus dem Archiv für Geschichte der Naturforschung und Medizin der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina*, hrsg. v. Georg Uschmann. Nr. 16. S.9-23. Halle.
- VAN DER WAERDEN, B. L. / FOLKERTS, MENSIO (1976): *History of Mathematics. Counting, Numerals and Calculation. 3: Written Numbers*. Milton Keynes (The Open University).

FAKSIMILE DER HANDSCHRIFT N

[illegible]

de re 20. et. q. immunes de suprou nro. r. nich remanebit. p. h. mutab. p. una diffra. n. d. ex. am. et. q. sub. cto. p. one. q. de sup. aliq. q. e. multiplicam. in. p. n. m. et. q. sup. p. r. e. c. u. l. u. l. 7. m. u. l. l. u. l. m. i. s. i. d. S. c. b. e. g. c. e. m. i. n. d. u. r. e. t. o. p. s. u. r. l. i. r. m. i. n. o. d. i. n. e. f. d. u. o. r. m. u. l. t. i. p. l. i. c. a. b. q. p. r. e. s. s. u. b. c. t. o. f. a. c. g. d. e. b. s. i. a. n. t. f. e. a. l. i. d. e. p. o. n. c. t. o. e. r. u. n. t. q. i. d. e. m. d. u. o. c. t. i. a. m. e. q. s. e. r. u. n. t. d. u. o. q. s. i. n. t. c. e. t. h. e. r. q. d. e. b. e. t. u. n. i. r. n. i. c. h. r. e. m. a. n. e. b. i. t. d. e. n. t. i. o. q. d. n. o. i. t. E. r. q. e. r. e. n. t. i. s. q. d. u. i. l. l. e. r. s. a. l. i. q. n. i. t. a. p. a. l. i. s. r. e. m. a. n. e. b. i. t. d. e. d. i. s. t. i. o. n. i. o. n. i. o. c. t. i. p. q. u. o. s. n. u. l. l. u. s. f. i. n. i. t. n. i. s. a. c. r. i. p. e. q. r. e. s. d. u. l. l. i. f. i. n. i. t. e. r. c. e. t. i. s. s. u. p. p. m. a. d. i. s. t. i. a. m. m. i. s. i. o. n. i. s. n. i. s. s. u. p. q. d. n. o. i. s. i. s. i. d. e. r. a. m. 7. a. n. g. e. a. l. l. u. d. s. u. p. n. i. t. a. q. e. r. u. n. t. d. e. d. u. i. l. l. i. o. n. e. 7. q. d. f. i. n. i. t. i. p. m. e. r. q. d. e. b. e. t. u. n. i. c. e. t. h. p. r. i. m. a. d. i. s. t. i. o. n. i. o. v. a. d. b. i. n. a. r. i. o. Q. d. a. u. t. q. u. i. m. u. l. p. m. i. s. e. m. o. o. p. a. n. o. n. i. s. C. u. s. a. m. p. l. a. r. i. s. q. e. p. o. s. s. e. m. i. n. u. l. l. e. r. o. d. i. n. g. e. r. e. s. f. i. n. i. t. d. u. o. c. t. i. i. n. t. e. r. a. d. i. s. t. i. a. f. u. e. r. i. t. v. i. n. i. n. q. u. a. m. u. n. i. t. P. o. s. i. u. n. g. i. t. p. r. i. s. i. b. v. i. n. i. s. v. i. n. i. s. q. e. c. e. n. t. p. l. u. s. i. l. l. o. n. i. o. q. e. r. u. n. t. i. n. t. a. m. a. d. i. s. t. i. a. s. i. s. o. n. i. s. n. i. t. f. i. n. i. t. q. h. f. i. g. a. c. o. p. 1 9 0
 C. u. m. a. p. o. s. i. u. s. s. e. n. t. i. u. d. i. r. e. c. t. o. p. r. s. i. p. v. i. n. i. t. d. u. o. m. u. l. t. i. p. l. i. c. a. t. i. s. s. e. n. t. i. q. c. a. 7. p. r. s. i. t. u. e. r. u. n. t. v. i. n. i. s. q. e. m. i. n. u. m. s. e. n. t. i. d. e. s. u. p. r. o. u. n. i. o. r. e. m. a. n. e. b. i. t. d. u. o. c. t. i. a. m. e. q. s. n. u. l. l. u. s. n. i. t. e. r. a. t. P. o. n. e. l. n. a. q. d. u. o. c. t. o. s. i. o. d. i. n. e. d. u. o. r. q. s. i. p. n. i. r. e. t. c. e. t. h. f. i. g. a. c. o. p. 2 0 0 h. i. s. g. u. n. i. t. a. q. n. e. c. i. a. f. i. h. o. l. b. i. g. e. r. d. i. u. i. s. i. o. n. e. 7. m. u. l. t. i. p. l. i. c. a. t. i. o. n. e. m. i. n. t. e. g. n. i. o. 7. m. e. n. s. i. q. u. e. f. e. c. i. t. h. i. s. p. a. r. t. i. m. i. n. e. p. r. e. n. t. n. a. r. a. r. e. m. u. l. t. i. p. l. i. c. a. t. i. o. n. e. f. r. a. c. t. i. o. n. i. s. 7. d. i. o. n. e. e. a. p. f. i. n. e. r. a. d. i. c. e. l. S. i. d. s. n. o. l. u. n. t. C. a. p. i. t. u. l. u. m. i. m. u. l. t. i. p. l. i. c. a. t. i. o. n. e. f. r. a. c. t. i. o. n. i. s. u. o. r. 7.
S E. c. t. o. q. f. r. a. c. t. i. o. n. e. s. n. o. i. e. n. t. m. u. l. t. i. p. l. i. c. a. t. i. o. n. e. b. i. q. u. o. r. n. i. s. i. n. t. u. a. b. i. t. 7. i. n. f. i. n. i. t. u. s. u. t. m. o. d. i. c. a. t. i. s. f. i. r. e. t. i. a. q. u. a. r. t. o. n. a. d. e. c. i. m. a. 7. m. a. p. e. r. t. r. e. d. e. c. i. 7. u. n. a. p. s. e. x. v. i. n. i. s. 7. c. i. m. i. p. o. s. s. e. n. t. q. u. i. p. a. r. t. i. u. s. u. a. s. d. e. l. x. H. o. l. a. u. e. r. i. t. q. u. n. a. p. r. e. m. e. x. l. x. a. g. y. m. u. r. a. t. i. e. n. o. i. a. n. e. r. i. t. c. o. s. p. r. e. s. m. i. n. u. t. a. B. u. r. s. i. d. u. i. l. l. e. r. i. t. u. n. i. q. u. e. m. i. n. u. t. i. p. l. x. p. r. e. s. q. u. o. c. a. u. e. r. i. t. s. e. d. a. C. u. r. g. u. n. a. p. s. d. e. c. i. b. i. m. u. l. t. i. b. 7. s. e. r. u. e. t. i. t. f. i. n. i. t. u. n. i. q. u. e. s. o. m. m. u. l. t. i. p. l. i. c. a. t. i. o. n. e. p. l. x. f. i. n. i. t. C. e. r. t. q. u. n. a. p. s. d. e. d. u. e. n. t. i. s. m. u. l. t. i. b. 7. s. e. r. d. e. c. i. m. u. l. t. i. b. 7. c. e. n. t. 7. u. n. i. q. u. e. s. o. m. d. u. i. d. u. t. p. l. x. q. n. o. i. a. n. t. q. u. a. r. t. a. C. e. n. a. f. i. n. i. t. d. i. s. t. i. e. n. t. q. u. a. d. i. n. f. i. n. i. t. u. s. n. i. t. p. m. a. g. d. i. s. t. i. a. 7. d. i. s. t. i. a. g. r. a. d. u. i. t. m. a. g. 7. i. n. t. r. o. g. e. r. n. i. s. 7. i. n. f. a. f. i. n. i. t. i. n. t. a. I. n. t. e. r. a. d. i. s. t. i. a. e. r. i. t. s. e. d. a. C. e. n. i. n. q. u. a. t. a. 7. d. i. s. t. i. a. i. t. r. a. n. o. r. C. e. n. s. i. m. i. l. i. t. u. n. i. q. u. e. a. d. n. o. n. a. 7. d. e. c. i. m. a. C. e. n. s. i. c. i. t. o. q. e. r. o. m. i. n. i. o. m. a. g. q. m. u. l. t. i. p. l. i. c. a. t. i. o. n. e. i. n. t. e. g. n. i. o. s. u. n. t. u. n. t. a. n. e. s. i. n. t. r. o. g. e. r. C. e. n. a. l. i. q. u. o. n. i. s. i. n. t. r. o. g. e. r. m. u. l. t. i. p. l. i. c. a. t. i. o. n. e. i. n. a. l. i. q. f. r. a. c. t. i. o. n. e. s. q. u. o. d. e. x. e. o. e. r. i. t. e. r. u. n. t. e. r. u. d. e. q. u. e. e. l. d. e. m. f. r. a. c. t. i. o. n. i. s. u. t. d. u. o. g. r. a. d. u. s. i. n. d. u. o. b. i. m. u. n. i. t. m. u. l. t. i. p. l. i. c. a. t. i. o. n. e. q. u. o. r. i. t. a. t. a. C. e. n. t. r. e. l. g. r. a. d. i. n. f. e. r. c. e. n. t. i. s. v. i. n. i. s. f. i. n. i. t. A. g. y. m. u. r. a. t. i. o. n. e. s. i. m. m. u. n. i. t. i. s. f. a. 7. f. a. i. n. f. i. s. q. u. a. r. t. a. 7. i. t. i. a. m. i. n. u. t. i. s. f. i. n. i. t. Q. u. i. a. i. n. q. u. a. d. r. o. c. t. u. a. C. e. n. h. i. s. f. i. t. q. u. c. o. l. l. i. g. i. t. u. r. l. i. q. d. i. s. t. i. a. q. u. i. m. u. l. t. i. p. l. i. c. a. t. i. o. n. e. i. n. a. g. e. r. e. n. i. n. a. l. i. a. m. 7. q. c. o. l. l. i. g. i. t. e. r. n. i. o. d. i. s. t. i. a. e. f. f. i. c. i. t. e. r. e. m. p. l. a. r. e. q. q. e. r. u. n. t. d. e. m. u. l. t. i. p. l. i. c. a. t. i. o. n. e. m. u. l. t. i. p. l. i. c. a. t. i. o. n. e. n. i. t.

Et si uolueris multiplicare **C**apitulum in multiplicacione mitorum ac sedoz.
ex aliquo numero duo integros. i. duos gradus. et xv. minuta inter unum. et xx. minutis
et xxx. scilicet. pone duos gradus minuta. i. multiplicacionis p. lx. et xv. et xx. adde
q. desuper. xx. minuta. et xv. clx. minuta q. debet finire quia residua ea mutua dif-
ferentia. deinde inter pondus tres gradus imminuta multiplicacione eos p. lx. et xv. clx. et
q. addes. v. gradus. et xv. clx. minuta. et ponde tres ipsa. clx. minuta infra multiplicando.
ea p. lx. et xv. et xv. milia quingenta. super q. addes. xx. sedas. q. sunt et eis ut red-
das ea ad instar utriusque differe q. in eis et fractione. et reddas omnia sedas erunt q.
x. milia sedas. et quingenta. et xv. sedas. q. multiplicacionis ea in c. lx. minuta. et
erit milia milia et quingenta. et lxxx. annis. de nonaginta. l. etia. q. multi-
plicasti minuta in seipsis ita sunt etia. Unde ergo ea p. lx. ut sunt sedas et xv. et
et unum milia. et quingenta. et xx. sedas. et remanebunt xxx. etia. deinde diuide. la-
p. lx. ut uerant minuta. Erunt ergo. dxxx. minuta. et remanebit sexages. lx. sa-
p. lx. diuide minuta p. lx. ut fiat gradus. et ipse nunc integer. Erunt q. xii. gradus. et
remanebit. xii. minuta. Erunt ergo de q. et de multiplicacione. v. gradus. xii. minuta.
et lx. sedas. et xx. etia. Sicut facies in multis fractionibus. pone. l. unum q. et unum.
q. uolueris multiplicare in unum in seipsis differe. Postea multiplicab unum ex eis
in alio et finit q. erit et fractiones de q. differe sit. Post h. diuides q. multiplicasti p.
lx. q. actum dunt. itaq. reddas illud in gradus et in seipsis uenit infra
gradus. et q. sunt. ipse erit q. erit et de multiplicacione unum et alio. Et q. et alio
modus ad binas. si super h. modus uolueris in di. finire nunc sunt. Capitulum in di-
Et si uolueris q. in omni numero et fractione q. diuides p. aliquem numero in seipsis fractionem
et fractionem. aut in uno et fractione q. diuides p. nunc integros et nunc integros
quid diuides p. nunc et fractionem et fractionem unum q. eorum quoniam reddas.
eos ex uno genere. i. inter eos in una fractione q. sunt et eis. i. si sunt in uno eorum sa-
uerit in seipsis. nunc in sedas. Et si sunt in seipsis eorum sedas et alio etia. inter in seipsis
nunc in etia. Si autem sunt et alio eorum q. et l. etia. et nunc h. et alio nunc sunt in se-
ger. inter in seipsis. nunc in una fractione q. sunt et eis. i. in una differe. Post h. di-
uide q. uolueris super alio. post q. residua eos unum q. et q. et xv. et xv. nunc in se-
ger. q. omni nunc q. sunt unum q. si diuides unum ex eis super alio. erit q. et nunc
integer. ut si. xx. etia super. v. etia diuides sunt. et erit de q. etia diuisi duo. et di-
uisi. Et de eis etia facit. v. integros. Erunt diuisi ea p. v. etia q. facit di-
os integros etia duo et diuides. Et sit sit. Et de medietate sit medietates.
et q. super q. etia. q. in unum q. sit minuta. et lox sit sa. et lox sit etia. l. q. et
et semper nunc integer. Cui q. uolueris diuides. sedas sit. v. minuta. inter minuta. et sa-
ut sit unum q. etia. et unum differe. Et. ccc. sa. sit q. uolueris diuides. x. sa. si pote-
sit diuides. x. p. ccc. Scito itaq. q. si erit et nunc nunc integros. Pone itaq. et lox
ilico unum. et multiplicas. x. p. lx. et xv. de. q. diuisi sit. cc. erit duo. q. et
duo minuta. et h. q. debet unum. q. di. multiplicares ea p. lx. et post ea diuides. ita
minuta ex eis una differe. q. sit minuta. Et scito q. omni nunc qui erit de alio nunc
sit q. sunt diuisi. si multiplicet item ita nunc. sit q. diuisi et recto etiam in se-
nunc sit q. diuisi. Cui rei exemplar. si q. diuidis. l. p. x. erit. v. q. debet
nunc. q. et multiplicasti q. erit de etia. i. v. etia sit q. diuisi q. sit. x. et ubi
p. nunc. v. Cui q. diuisi sit. x. sedas. p. v. minuta. etia duo minuta. q. debent
unum. Cui q. multiplicasti sit duo minuta. q. non erit de etia nunc p. que

¶ **D**ivisiō q̄ sunt. v. mīa. sūt. v. scā. Et h̄ p̄bano diuisionis. Et ē nolū dūde. r. mīa p. v. tē. nīe mīa mīa. tē. xxx. mīa. tē. q̄ dūdes p. v. tē. tē. v. mīa. c. grad. h̄ q̄ debet unū. c̄g nolū h̄ p̄are multiplicā. v. mīa. c. grad. mīa. c. grad. tē. tē. mīa. tē. q̄ ē dūss p. l. exhibu. dc. scā. sū ē dūss. dc. sū. p. l. exhibu. x. mīa. Caput in collectiōe itē nū ac

Uolūst ḡstare inteḡ nūm ac fractiones. ḡstare fractionē q̄ ē augmēto nūm inteḡ nūm insiōn distā. deū pones q̄q̄ sūt ex p̄ma distā. r. mīa. tē. sub inteḡ nūo. r. q̄q̄ sūt de scā distā. r. scā. sub mīa. r. sūmī tē sub sū. usq̄ indistā q̄ uolūst. Cū exemplar ē q̄ ē uolūst ḡstare. x. grad. r. xx. mīa. xv. scā. r. l. q̄m ḡstare. x. grad. deū posuim sub eis. xxx. indistā mīa. Et sub. xx. xv. indistā scā. r. pone indistā tē. cōs q̄ sūt tē. tē. ut sūt q̄ h̄ q̄m. postea scē sub eis. l. indistā q̄m. Et h̄c est fiḡa cō.

1	7	grad.
3	0	q̄m.
9	4	scā.
0	0	tē.
4	0	q̄m.

Et sūmī constitues ū distā fractionē nū sub sū. Cū a collecti sūnt malū distā. l. t. plus. ponem tūo loco q̄ q̄d sup̄ sūnt sup̄. l. r. ex. l. faciem unū. r. ponem illud ūtōn distā. Et sūmī sūolūst mīa fractionē ex fractionē mīa p̄sūm distā r. mīa unū q̄ distā ex illa que ē existit ḡt. Si a sūnt ūtōn distā nū mīa illo q̄ uol mīa ex cōt sūt tē. mīa de sūmī distā de illa. s̄ q̄ sup̄ p̄m. de qua uol mīa unū q̄ ex. l. mīa distā. r. sūmī cō fractionē q̄ op̄s. Mīa ex eo q̄ uolūst r. de q̄ remanet sup̄ mīa distā. Rūmī sūnt insiōn distā cōt mīa de distā que ē sū illam unū. r. fac de eo in mīa distā. l. deū mīa ex eo ē unū r. fac de. l. indistā q̄ uolūst. r. mīa de eo q̄ uolūst mīa. r. scē q̄ residu sūt. i. sū distā. r. q̄ sūt ē q̄ uolūst. Et si uolūst duplicare mīa t fractionem in ope duplicare a sūmī distā. Postea ab illa que h̄c succedit. r. q̄mīa collect sūt ūtōn distā nū plus nūo p̄m. scē q̄ residu sūt in sū distā. r. mīa q̄ collect ē sublenab ad sūmī distā. s̄ medietatē autē mīa ab sūmī distā r. accipies medietatē ei. deū facies sūmī distā. Si a sūnt ūtōn distā nū mīa fac de eo q̄mīa q̄mīa tūo sub r. mīa sūmī. Caput in aliō

Uolūst multiplicare fractionē q̄ sūnt in mīa fractionē r. dīo mīa. sū sū mīa. s̄ septimā. cōt. p̄s h̄c sūmī aut dūde cas s̄ se tūc. cōt. op̄ in h̄c ut op̄ in mīa. atq̄ scā. Et ḡstare exemplar ē. Si s̄ uolūst. Et iā p̄are ē t̄ in mīa mīa. atq̄ scā. sū tē. sū tē. q̄mīa constituas utq̄ subā q̄ uol multiplicare tūc unū ḡt. r. q̄mīa constituas utq̄ nūos ex ḡt mīa distā. multiplicando eos t̄ tūc q̄q̄ sūt. s̄. t̄ ex q̄mīa q̄ ex septimā. ut reddas eos ad mīa utime distā q̄ sūt tē. Deū multiplicas eos t̄ tūc. r. q̄mīa sublenab illd ad mīa inteḡ. r. dūdes illd p̄ sūmī eodem ḡt multiplicari malū ḡt. Cū exemplar h̄ ē. q̄mīa multiplicare. mīa. septimā. aut inteḡ mīa. r. uol. nouenā. ḡstare septimā atq̄ nouenā mīa distā ordina. ut in mīa. r. multiplicares eas tūc. r. sūmī ex ḡt dūbz distā. sū scā. q̄ uolles sublenare ad mīa inteḡ ḡt dūdes eos p̄ mīa distā. l. septimā t̄ nouenā. Et ūtōn dūss sūt. r. ex ḡt dūss aliq̄ nūl cōt. Et sū p̄t dūss. cōt. p̄s mīa. ḡt dūss. sup̄ q̄ dūss. cōt. t̄ septimā. r. uol. nouenā. x. p̄s. Deū p̄s. s̄. Cū uolūst multiplicare t̄ septimā aliq̄ t̄ ḡt nū. r. uol. nouenā. Deū. mīa. p̄t pone sub eis. cōt. mīa distā mīa.

alio: non habet radicem. Et omni numero quorum non dividit super aliam maximam.
 s. super aliquam. siue exiguius siue maximam. sicut illi numero radix que est de divisione: et
 multiplicans unum ex eis maximo. erit numero qui collectus fuerit ex multiplicacione unius eorum
 maximo radice. quoniam non sit primus nulli radice. ut. xviii. de quibus p. viii. Si it. xvi. di-
 uidant p. viii. quibus duo. et quatuor. et erit huius numero radice. summa et diuiduum. Summa
 si diuisus. viii. p. xvi. quibunt. illi. nouene. et eorum radice. due erit. Cumque mul-
 tiplicans. xviii. iii. viii. erit. cxi. et habet radicem. l. xii. Et similiter. viii. in duobus. et c.
 bis similia. Et scito quod multi constituerunt distinas siu nunc tali rade ut in prima distina
 erit unum. Quod multiplicantes. iii. x. et scilicet. x. distina. scilicet. Deum multiplicane
 nunt. x. i. x. et puenit inde. c. v. tota distina. Rursum multiplicauerunt. c. i. x. et
 scilicet. mille. i. quatuor distina. Et similiter fecerunt uniuersas distinas quas constituerunt.
 Primum distina eorum et unum et habet radicem. quod est multiplicans. i. x. non erit illi numero qui colligitur
 radice. quod x. erant radice. et a multiplicans. x. i. x. efficitur numero qui colligitur radice. Erat
 itaque qui multiplicans. c. i. unum. x. i. x. Cumque multiplicasti eum in semet ipso fecit
 unum qui collectus radice. Et distina centenorum. Deinde multiplicauerunt. c. i. x. et
 scilicet. q. q. caret radice. eo quod multiplicans aliquid huius radicem malique carente ra-
 dice. Iste quoque numero collecto. i. mille non inuenit radice. quod multiplicasti mille in uno. i.
 x. m. c. quod mille multiplicasti in uno. Et similiter omnes distine eorum una habet radicem.
 et aliam caret radice. et in imparibus distinis et radice. et in imparibus. Et similiter quatuor sunt
 infra unum extractionibus. ex numeris. s. ac sedis. ac centis. quatuor. ac quibus. quibus. quibus
 tarum. ac septenis. septenariis. Primum distina extractionibus quibus sunt minores non habet ra-
 dicem. quod uoluit inire unum in minora. i. uoluit multiplicare illud in. lx. scilicet in unum.
 minora. Rursum si uoluit ipse uicere in sedem. multiplicasti totum h. i. lx. quod sunt ea milia.
 de. Et quod multiplicares unum i. lx. in unum et in minora non habet radicem. Et scilicet sunt
 scilicet radice. quod multiplicasti ea milia. de. in uno. et scilicet sunt sedem huius radicem.
 Radice et sedem sunt minora. Tercius uero non erit radice. quod multiplicasti unum inducentis
 milibus. et. xvi. milibus quoniam huius radicem. i. multiplicasti. lx. minora. i. lx. minora et scilicet
 ea milia. et. de. sedem. Item multiplicasti ea in. lx. et erant. ducenta. xvi. milia etia i
 uno. Nongus huius etia radicem. Deinde multiplicasti etia i. lx. et erant quatuor milia huius
 radicem quorum radice sedem. quod quatuor scilicet. lx. i. lx. multiplicasti quatuor. sedem scilicet. lx.
 bis ducta. Cumque multiplicares sedem milibus scilicet scilicet quatuor. Et scilicet radice quatuor sedem.
 Quatuor uero non habet radicem. Secus quoque et radice et eorum radice scilicet. Illi erant omnibus distinis
 ex minores et sedis et centis. Erant. s. paribus radice quod scilicet. quatuor et sex. et quatuor et sex. et
 omnibus distinis paribus et radice. In paribus uero nulla et radice ut minores. et erant quatuor
 et bis similibus. Et similiter erant in alius fractionibus. quod illi que de paribus distinis fuerunt.
 et radice. et que de imparibus non et radice. Secus quoque octauis ac notis ac decimis.
 Et paribus. et. x. et. xii. siue. et. xiii. xiiii. xv. xvi. xvii. xviii. quodque ac. xxi. et c.
 Et he sunt prime fractiones que refertur ad unum. et non habet radicem. Cum. in mul-
 tiplicaueris unum aliquo quod fractionem semel. non erit ei radice. Cum autem multiplica-
 uis ipsum in eadem distina bis erit ei radice. Radice uero et fractione prima. ut quod preter
 carere radice. Quod autem quatuor huius radice reat radice. sunt quatuor. quod multiplica-
 sti quatuor in quatuor. et sic sunt quatuor quatuor. Et similiter septime preter non habet radicem.
 Septime autem septenariis radicem huius septenariis. Et aliter preter de. xii.
 non habet radicem. Preter autem primum de. xiii. que sunt preter de. c. lx. uero huius
 radicem. et erit radice et preter de. xiii. Tercie uero distine nulla et radice. ut si sep-

time preſeptimarum. ſeptimarum. & octauae octauarum. octauar. q̄. ſicut diſſiſſa ē
 dianoy. & q̄m diſſiſſa ē inducem q̄ ſumit^{de} preſ. v. c. c. & q̄ diſſiſſa ē anoy. & q̄
 taq̄m ē q̄m preſ q̄m. ita diſponit diſſiſſe eay. ut diſſiſſe m̄ay. & ſedoy. ac ſe
 anoy. & quartanoy. ¶ Itē. Capitulu^m extractiōis. & adiciōis. & m̄

Cum uoluit extrahere radicem alicuius numeri secundum diffinitam suam. et in
ape a prima diffinita. i. a diffinita unitatum quod est decimam partem patet et in
lib. Post hoc scito quod prima diffinita sit radix. scilicet non erit radix. Tercia quoque
habet radicem. et quarta ubi non desinit numerare diffinita usque multitudine quod est per
non. incipiens primum a diffinita unitatum. decem decem. Post ea centenorum. et. Cumque
pueris mundo adnotatam diffinitam si fuerit nullus et impar opabilis mea. et si fuerit par
non opabilis mea. Tunc retinere res donec sit opus sub impari diffinita quod ante ultimam dif
finitam si fuerit ultima pars. Opabilis autem ponet sub diffinita in quod cecidit opus. Aliquam
numeri quod multiplicatus in semetipso consumatur numerum qui fuerit super se et primum nu
merum eo. Cumque scitis eum multiplicabit eum in semetipso. et manet de superiori numero.
deum multiplicabit ipsum numerum qui in semetipso multiplicatus. per hunc remouebit eum una dif
finita infra diffinitam qui multiplicasti. i. mutat eum ad eam diffinitam ubi decem. deum scilicet
infra eum in eadem. scilicet diffinita. quod in decem est aliquid adnotat et. Aliquam numerum quem
multiplicasti ideo qui duplicasti in semetipso. consumatur superiorem numerum et primum nu
merum eo. Cumque multiplicasti eum ac minus de superiori numero. duplica et ipsum dif
finitam. quod non duplicasti in loco suo remouebit eam una diffinita ubi decem si fuerit idem nullus. et
est absque numero. Deum scilicet infra ipsum qui multiplicasti numerum diffinita adnotat in eum
quem scitis multiplicasti aliquid numerum quem est multiplicasti in duabus diffinitis quod per
duplicasti in semetipso consumatur superiorem numerum et primum numerum eo. Et ita se
per facies donec nichil remaneat ex numero et radice in extrahere aliquid remaneat
quod sit minus illo numero qui inferius duplicasti. Si uero remanserit aliquid quod sit minus illo et
per aliquid numerum qui exiit et minus postquam duplicasti et ultimam diffinitam. non extrahis
radicem de numero ubi habet radicem minorem eo qui habet eum numerum. Post hoc medietas ubi
qui duplicasti donec redcat idem eo qui fuerit primum et qui exiit erit integra radix uera.
et qui remansit erit per diffinitam duplicatam. et diffinita duplicare. et par sit illi. h
erit radix numerum quem uoluitis propter et si fuerit deus qui careat radice. si uero fuerit de
us qui habet radices non remanebit ex numero aliquid. et qui exiit de numero postquam media
tas. i. postquam abstruxit duplicatam quod addidisti efficitur ipsa radix integra. absque
ulla fractione. h et erit radix integra per semetipsum. **¶ Aliud capitulum**

¶ Jam patefecit et in alio libro meo q. omnis rursus de eodem. am
ex noctis runitatibz; si multiplices i noctis runitatibz; necesse ē ut
multiplicetur quat. Nodi. s. in noctis r nodi inunitatibz; r unita
tes in noctis r unitates inunitatibz. Et similiter nodi nodoy. Duplicauimus
q. primam distiam q. iam facta ē in loco nodoy. dum facta ē infra eam una distia.
quintuplicauimus q. ea semel. r tunc duplicatō illa ā multiplicatōe est bis. Et simi
faciemus ē uolumus ea mutare: secundo. duplicabim distiam q. fecim. r muta
bim una distia. q. facta ē in distia nodoy dū facta ē infra ea una distia. Et facta
ē prima distia in distia centenoy. Jam q. multiplicauimus ea semel. Cumq.
multiplicauimus nodos mea bis. postea in distia q. ea succedit q. fuit r
duplicata q. iam multiplicauimus ea bis. Jam faciet sit: donec finiat nūq. p. h
medias eū. r auferet duplicatorem donec reddat eū rēo q. fuit anq. dupli

Tunc enim.

Ponam ubi g^{ra} Capitulum in exemplum extrahendi radice.
 q^u uellem extrahere radicem. v. milia. 7. de. 23. Cum q^u uoluissem facere
 possum h^{oc} n^{um} p^{er} diffia^l fust. Cui figura: 4 6 7 9 fuerunt
 n^{um}q^{ue} in p^{ri}ma diffia^l v. 2. in scda. u. q^u sunt. xv. Intra quoq^{ue}. vi. q^u si de. in q^uta. q^u
 sunt. v. milia. Cecidit autem op^{er} in diffia^l ecia q^u 2. ante diffia^l m^ultura. Possumq^{ue}
 sub eade^m diffia^l aliq^u q^u multiplicarem m^ultura ipso. q^u m^ultura sup^{er}ior n^{um}. s. lvi. t^u qui
 m^ultura multiplicat est q^u p^{ri}mi. Non aut^{em} sustinuit plus. vii. multiplicam^{us} q^u
 vii. m^ultura ipso. r^uerunt. xv. q^u est m^ultura de s^upra n^{um}. s. lvi. remanet
 in scda diffia^l vii. Post h^{oc} duplicam^{us}. vii. u^ltiore^m in loco suo. r^uerunt. un^{um} sub q^uta
 diffia^l in q^u erunt. v. in loco suo. u^lti. Quidam^{us} g^o h^{oc} n^{um} una diffia^l u^l de xam 2
 fca sunt. u^lti. sub diffia^l duoy 2 un^{um} sub. vii. Rur^usi possum^{us} ante q^utuor. v. sub
 p^{ri}ma diffia^l in ordine eoy sub. v. s. aliq^u. v. q^u est multiplicarem iⁿ uno p^{ri}ma in
 u^lti. de m^ultura ipso. consumit^{ur} sup^{er}ior n^{um} in q^uta. 2. de. 23. q^u est multipli
 carem iⁿ uno q^u sub. vii. 2 m^ultura de sup^{er}ior n^{um} remanet^{ur} duo. s^u m^ultura
 phem^{us} eadem. v. m. u^lti. fca sunt. xv. q^u est m^ultura de sup^{er}ior n^{um} qui. 2. de.
 xv. remanet^{ur}. xv. de m^ultura ipso. fca sunt. xv. q^u est m^ultura de sup^{er}ior n^{um} q^u si. xv. aliter^{ur} 2 nich^{il} remanet^{ur}. Mediam^{us} g^o
 ill^{ud} q^u p^{er} duplicam^{us}. s. vii. fca sunt. vii. loco. u^lti. 2 am^ullata. diffia^l in u^lti.
 Exeruntq^{ue} nob^{is}. lxx. r^uerunt. radice certissima. illud n^{um} qui sunt. v. milia. de.
 xv. Et si aliquid remanet^{ur} infra h^{oc}. est p^{er} de septuaginta. v. duplicam^{us}. q^u
 sunt. et. t^u p^{ri}mi. Si aut^{em} extrah^{er} radice alit^{er} n^{um}. 2 remanet^{ur} in eo ecia ante
 quos sit m^ultura. 2 post quos m^ultura sit. t^u si uoluit^{ur}. duplica ip^{sa}m diffia^l ad q^u p^{ri}ma
 m^ultura. 2 remoue eam ad ecia. Postea addet^{ur} si uoluit^{ur} sub eo aliq^u q^u est multipli
 car^{ur} in p^{ri}ma diffia^l q^u duplicasti p^{ri}mi 2 m^ultura ipso q^u m^ultura supra se 2
 nullas n^{um} s^u supra se. Ponet^{ur} g^o in loco ei si uoluit^{ur} ecia. q^u ecia multiplicat^{ur} in q^u
 lib^{er} n^{um} ecia. 2 m^ultura in u^ltiore^m sui sit^{ur}. 2 de. Cum g^o duplicam^{us} eum. v. ecia
 nich^{il} aliud erit h^{oc} ecia. Post h^{oc} m^ultura eum simil^{iter} una diffia^l. donec fca^{nt} ecia
 omⁿⁱs diffia^l. Si u^l uoluit^{ur} alit^{er} h^{oc} face^{re} accipe medietate^m ecioy q^u remanet^{ur} r^ube est
 sub diffia^l quas duplicasti in ordine. s. eay u^l de xam. h^{oc} q^u ext^{ra} de aut^{em} p^{ri}
 rib^{us} r^u ad b^uatio n^{um}. Ordo a^u op^{er} q^u d^uam p^{ri}mi. Cui exemplar^{is} q^u est uoluit^{ur}
 sem^{per} extrahere radicem m^ultura possum^{us} ea. in q^uq^{ue} diffia^l. 2. u^lti. 2 de. 2 q^uta un^{um}.
 2 possum^{us} subultima diffia^l aliq^u q^u est multiplicarem m^ultura ipso. q^u m^ultura sup^{er}ior
 n^{um}. qui n^{um} subtinuit^{ur} n^{um} unum. q^u est multiplicarem m^ultura ipso fca^{nt} un^{um}. m^ultura
 in eum de sup^{er}ior n^{um} q^u est un^{um}. nich^{il} n^{um} remanet^{ur}. s^u remanet^{ur} in u^lti. ecia.
 q^u medietate^m a^u op^{er} q^u sunt duo. 2 possum^{us} eos u^lti una u^l de xam. 2 ordie
 s. un^{um}. r^uerunt. centum. 2. extrah^{er} centum q^u r^uerunt. xv. milia. h^{oc} ad b^uatio.
 est a^u op^{er} si duplicarem^{us} un^{um} in loco suo post h^{oc} m^ultura m^ultura una diffia^l u^l
 de xam scdm q^u fecim^{us} in ecia. sic ext^{ra} nob^{is} postq^u medietate^m. v. p^{ri}ma aut^{em}
 rem^ult^{ur} duplicarem^{us} q^u fecim^{us} cent^{um}. h^{oc} g^o op^{er} radice si fca^{nt} n^{um} ecia radice.
Ubi uoluit^{ur} extrahere. s^u p^{ri}ma in radice fractionu^m ap^{er}it^{ur} a^u;
 radice fractionu^m aut^{em} u^lti u^l est fractionib^{us}. 2 de n^{um} fractione^m
 ex g^one n^{um} medietate^m. Et si fca^{nt} ipsa diffia^l que h^{ab}et radicem. extrahere
 radicem euy scdm q^u p^{ri}ma m^ultura radice 2 scdm ex qua^m diffia^l sit. Post
 h^{oc} subleuat^{ur} eam adh^{uc} q^u p^{ri}ma subleuat^{ur} sup^{er} diffia^l suam. 2 q^u fca^{nt} ip^{sa} erit
 radice eoy q^u uoluit^{ur}. 2 similiter si uoluit^{ur} extrahere radicem alit^{er} n^{um} diffie. que

carat radice et uoluit subleuare eum. minue eum. i. uerte eum donec reddat eum. ex dicit
 in q. h. radice. Et q. i. plus mouetis eum. tantomagis erit q. ex de radice p. p.
 uiray. Post h. accipe radice et post q. reducit eum ad h. q. uoluit et scio ex qua dif-
 f. sit. postea subleuabit additum sua. Cui rei exemplar. q. c. uoluit eum ex he m-
 dice duos. unum duomissa et f. i. v. milia et ducenta sed. Et si reddem duo q. i. t. et
 f. i. t. op. eto subtili. Post h. ex t. i. m. v. milia radice et ducentoy sedoy. et tunc q. ex
 ur de radice. lxx. iiii. minuta. et fractio q. c. subleuare ad adum integru. fuit unu
 et f. i. xiiii. pres. de. lxx. i. p. e. sint mina. et fractio modica. et tunc h. p. e. uiratem eius.
 Quod si uoluit extrahere radice duoy. tunc unu. atq. unum pres. de. xii. pone in
 am et prem de. xii. ex uno genere. h. i. multiplica. vii. ity. et tunc. xxxv. Cuius est ter-
 cia p. i. unap. de. xii. Pone itaq. duos itia et prem de. xii. unu. q. i. t. et tunc unum
 ex eis. xxxv. et tunc duo. lxx. iiii. et tunc itia p. i. de. xxxv. et tunc decima p. i. de. iiii.
 Ad idem g. h. sup. lxxviii. et tunc. lxxviii. h. i. p. ma. offia. fractionu. multa diffia.
 et ex g. i. mitor. Post h. multiplica. lxxviii. et tunc. xxxv. donec minuas el bis. et tunc
 dif. ex g. i. sedoy que sit ta milia. et de. lxxv. Extrahere itaq. radice eoy sicut p. q. i.
 et tunc. lxxv. modica fractio. Et h. lxx. et ex g. i. unu. i. unu. diuisionis. q. c. xxxv.
 que est p. ma. diffia. et tunc ex g. i. mitor. Cuius q. h. lxx. unu. et tunc una p. i. de. xii.
 et tunc et tunc modica. Et h. i. radice q. uoluit. Et si h. minuas. unu. diffia. et tunc multipli-
 carit ta milia. de. lxxv. m. xxxv. bis. et tunc q. ex tunc ex g. i. q. i. tunc et tunc radice
 illi ex g. i. unu. eoy. xxxv. h. i. mille. d. xxxv. et tunc et tunc sedoy. Et si h. facit
 et tunc q. ex tunc de radice subtili. et tunc unu. Sub fac de unu. et tunc. et tunc ac tunc
 unu. et de q. i. tunc et tunc minue ea semp. i. uir ea semp. minuas. ad h. q. uoluit
 ex diffia. de h. q. h. radice. Post h. accipe radice et quo p. uir. et tunc ex q.
 diffia. sit. ac subleuare ad h. q. subleuare p. uir. ex diffia.

Item aliud caput ad binarium de radice. q. i. est ex ope mitor. si ego ex tunc
 illud sciam q. ostendit michi. Et tunc leui ope mitor. atq. subtili.

Cuius uoluit extrahere radice aliu. n. pone ante ipm. n. p. diffia. in-
 pient a p. e. dexta eoy et tunc q. uoluit. h. obliuati uoluit paret. et pone f.
 q. uoluit. i. pone duos et tunc si uoluit et tunc. t. vi. et tunc plus fuit
 et tunc post q. fuit paret tunc subtili. ad h. q. ex de radice. Post h. extrahere
 radice et tunc n. et tunc q. ad dicitur et tunc de mitor. n. uo medane sua illi. et tunc
 q. remanet si tunc p. uir illi et tunc de eo. Et tunc et tunc q. n. et tunc radice uoluit ex
 tunc sit fuit. i. et tunc radice. Non omi. et de it. qui h. radice. Si uoluit remanet.
 et tunc radice certissima absq. fractione. Post h. numeru a p. e. dexta a p. ma. f. diffia.
 et tunc radice. simile dimidi. et tunc q. addidit. et tunc p. residu et pone id seorsu
 ac minue id de loco suo. et tunc sit ipm. et tunc radice. q. uoluit multiplica in. lxx. et
 n. simile dimidi. et tunc q. addidit sup. n. et tunc q. residu fuit. et pone
 id seorsu sub n. p. q. minuit de loco suo. et tunc simile donec nich. remaneat.
 et tunc remanet. multiplica in. lxx. et tunc simile dimidi. et tunc et tunc illud. et tunc q.
 residu fuit et tunc sub n. que seorsu posuit. et tunc sed. Et si alq. remanet itaq.
 multiplica illud in. lxx. quemadmodum fecit ac diuidet illi q. admodum dimidi. et tunc et tunc
 et tunc sed. q. posuit. et tunc ante n. et tunc caput extrahit radice itaq. n. de fractionu.

Cuius uoluit extrahere radice n. et fractionu. t. n. ut sit mitor. et tunc. et
 itia siue septime pres. et octane. et tunc radice n. siue et tunc n. siue
 no siue fuit fractiones absq. n. ex g. i. mitor. et tunc q. fuit uir.

ISSN 0005-710X
ISBN 3 7696 0108 4