

Abhandlungen
der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung
Neue Folge. 8.
1931

**Theoretische und praktische Untersuchungen über
die Bestimmung der Randverdunkelung der Sonne
aus aktinischen Energiemessungen während einer
Sonnenfinsternis**

von

Paul Harzer

Vorgelegt am 6. Dezember 1930

München 1931
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

EINLEITUNG

1.

Die Kenntnis des Gesetzes der ungleichmäßigen Energieverteilung auf der Sonnenscheibe, die man kurz als Randverdunkelung bezeichnet, ist für die Erforschung der Vorgänge bei der Emission der Strahlung von großer Bedeutung. Man gelangt nun zu dieser Kenntnis nur durch Energiemessungen, die auf der Erdoberfläche an einer Strahlung ausgeführt werden, die durch die Erdatmosphäre hindurchgegangen ist und dabei Veränderungen erlitten hat. Diese Veränderungen bestehen hauptsächlich in einer Verminderung der Energie durch die Absorption und in der nach Art und Größe wirkenden Veränderung der Randverdunkelung durch die Zerstreuung, die sich in ihrer Bedeutsamkeit schon durch die allgemeine Aufhellung des Himmelsgrundes offenbart. Da die Absorption besonders berücksichtigt wird, handelt es sich bei der Zerstreuung nur um eine Veränderung in der Verteilung einer in ihrer Gesamtheit unverändert bleibenden Menge von Energie. Die den gemessenen Energiemengen proportionale Verminderung der Strahlung durch die Absorption kann nachträglich durch die Rechnung ausgeglichen werden. Im allgemeinen ist aber die rechnerische Ausgleichung der durch die Zerstreuung bewirkten Veränderungen nicht möglich, weil die verwickelten Vorgänge der Zerstreuung durch die Theorie bisher noch nicht erfaßt worden sind, und wenn sie es wären, gewiß zu sehr umständlichen Ausgleichungsrechnungen führen würden. Dieser Umstand wirkt wertvermindernd auf die früheren durch die Zerstreuung gefälschten Messungen der Energiedichte isolierter kleiner Flächenstücke der Sonnenscheibe. Die gemessene Energie ist nun aber glücklicherweise in dem einen Falle von der Fälschung durch die Zerstreuung merkbar frei, daß das Aktinometer auf einmal bis auf einen unmerklichen Rest die Gesamtenergie der Sonnenscheibe mißt, daß es also nicht nur die ganze Sonnenscheibe, sondern auch die sie umgebenden Teile des aufgehellten Himmelsgrundes bis zu Entfernungen von der Sonnenscheibe umfaßt, jenseits deren zu der gemessenen Gesamtenergie nur unmerkliche Beiträge hinzutreten. Daß in diesem Falle die Zerstreuung keinen merklichen fälschenden Einfluß auf die Messungen ausübt, geht aber sofort aus den zwei Umständen hervor, daß die Zerstreuung nur die Verteilung einer unveränderlichen Menge von Energie ändert und daß die Angaben des Aktinometers von der Richtung der einfallenden Strahlung nicht abhängen. Die Freiheit der gemessenen Gesamtenergie der

Sonnenstrahlung von dem Einflusse der Zerstreuung tritt aber nicht nur für die ganze Sonnenscheibe, sondern auch für diejenigen ihrer Teile ein, die bei einer Sonnenfinsternis von der Mondscheibe nicht verdeckt werden. Das hat den niederländischen Physiker W. H. Julius („A new method for determining the rate of decrease of the radiative power from the center toward the limb of the solar disk“, *Astrophys. Journ. B.* 23. Chicago 1906) bewogen, zur Bestimmung der wahren Energiedichte in den verschiedenen Punkten der Sonnenscheibe wie sie einem außerhalb der Erdatmosphäre befindlichen Beobachter erscheinen würde, nur solche Messungen der Gesamtenergie der Sonnenstrahlung zu verwenden, die während einer Sonnenfinsternis angestellt worden sind. Er erhält dann den wahren, von der Zerstreuung nicht gefälschten Wert der Energie eines von dem Mondrande in einer gewissen Zeit überstrichenen Streifens der Sonnenscheibe durch die entsprechende zeitliche Veränderung der gemessenen Gesamtenergie. Julius hat auch eine empirische Methode der Bestimmung der Energiedichte der Sonnenscheibe aufgestellt und an zwei Beispielen durch die numerische Rechnung geprüft (am angeführten Orte und außerdem in „The total solar radiation during the annular eclipse on April 17. 1912“, *Astrophys. Journ. B.* 37, Chicago 1913). Das Prinzip dieser Methode, die von jeder theoretischen Untersuchung der während einer Finsternis eintretenden Veränderungen der Gesamtenergie der Sonnenscheibe absieht, ist das folgende: Die als ruhend angenommene kreisförmige Sonnenscheibe wird in großem Maßstabe auf Papier homogener Beschaffenheit und konstanter Dicke gezeichnet; unter der Voraussetzung, daß die Energiedichte auf der Sonnenscheibe konzentrisch angeordnet sei, wird die Sonnenscheibe in konzentrische Zonen im allgemeinen gleicher Breite und sodann in Streifen im allgemeinen gleichfalls gleicher Breite, geteilt, deren kreisförmige Ränder die veränderliche Lage des Randes der kreisförmigen Mondscheibe darstellen. Jeder der Zonen wird in ihrer ganzen Ausdehnung eine als Unbekannte behandelte mittlere Energiedichte zugeschrieben. Die Bestimmung der Werte der unbekannten Energiedichte, deren Zahl mit der der Zonen übereinstimmt, aus den durch die Messungen numerisch bekannt gewordenen Energiemengen der einzelnen Streifen ist das Ziel der Methode. Zur Erreichung dieses Zieles wird die Sonnenscheibe in die einzelnen Streifen und dann die Streifen längs der kreisförmigen Grenzen der Zonen in allseitig kreisförmig begrenzte Vierecke zerschnitten, und der Flächeninhalt dieser Vierecke wird ihren durch die Wägung ermittelten Gewichten proportional angenommen. Dann entstehen die linearen Gleichungen zur Bestimmung der Werte der Unbekannten dadurch, daß die numerisch bekannte Energie eines Streifens durch eine über alle Vierecke des Streifens erstreckte Summe von Gliedern dargestellt wird, deren jedes in der Gestalt des Produktes des bekannten Gewichtes und der unbekannten Energiedichte eines Viereckes die Energiemenge dieses Viereckes bezeichnet. Es werden nur diejenigen Messungen berücksichtigt, die während der großen Phasen der Finsternis, bei denen mindestens die Hälfte des Durchmesser der Sonnenscheibe bedeckt ist, erlangt worden sind, und die Streifen sind so eingerichtet, daß die erste, der größten Phase entsprechende Gleichung nur eine Unbekannte, die Randenergiedichte, und jede mit abnehmender Phase folgende Gleichung, wenn nötig unter Vereinigung zweier oder auch mehrerer Streifen, stets eine Unbekannte mehr, als die unmittelbar vorhergehende Gleichung enthält. Die Zahl der Gleichungen ist in dieser Weise der Zahl der Unbekannten gleich gemacht worden; und die Gleichungen sind bereits nach den einzelnen Unbekannten aufgelöst.

Gegen diese Methode von Julius lassen sich nun gewichtige Bedenken erheben:

1. Die Vierecke können aus dem Papiere nur mit ungenügender Genauigkeit ausgeschnitten werden und auch die Genauigkeit ihrer in den Beispielen mit höchstens drei Stellen angegebenen und gewiß in der letzten Stelle unsicheren Gewichte ist ungenügend; sie findet aber in der Inhomogenität des Papiers und in der beschränkten Empfindlichkeit der Wage ihre unüberschreitbare Grenze;
2. eine Berücksichtigung der tatsächlich sehr stark verschiedenen Genauigkeit der den einzelnen Streifen zugehörigen gemessenen Energiemengen ist unmöglich; die Genauigkeit bleibt bei der Methode unbekannt; und auch wenn sie bekannt wäre, könnte sie nicht berücksichtigt werden, weil zur Bestimmung des Wertes einer Unbekannten nur je eine nötigenfalls aus benachbarten Streifen zusammengezogene Gleichung zur Verfügung steht;
3. eine Bestimmung der mittleren Fehler der Werte der Unbekannten, wie sie bei Ausgleichungsrechnungen regelmäßig ausgeführt wird, ist unmöglich;
4. die für die Bestimmung der Werte der Unbekannten an sich vorteilhafte aufgelöste Form der Gleichungen, hat eine Fortschleppung der Fehler der bereits bestimmten Unbekannten auf alle später ermittelten Unbekannten und dadurch eine wachsende Ungenauigkeit der Werte dieser Unbekannten zur Folge;
5. die gänzliche Ausschließung der bei kleineren Phasen der Finsternis gemessenen Energiemengen, die vorgenommen zu sein scheint, um die Gleichungen in der aufgelösten Form zu erhalten, ist, obwohl nach meinen Rechnungen die Messungen tatsächlich bei den kleinen Phasen wesentlich ungenauer sind, als bei großen, unberechtigt.

— Zusammengefaßt muß es bezweifelt werden, ob die Methode von Julius selbst bei ausreichender Genauigkeit der Energiemessungen überhaupt im Stande sei, Werte der Energiedichte von ausreichender Genauigkeit zu liefern. Nicht zweifelhaft aber kann es sein, daß sie nur einen Notbehelf gegenüber einer Methode darstellt, die auf theoretischen Untersuchungen über die Energieabnahme bei Sonnenfinsternissen aufgebaut wird. Solche Untersuchungen waren zu der Zeit der Arbeiten von Julius noch nicht vorhanden; inzwischen habe ich aber meine Schriften „Über die Helligkeitsabnahme von Bedeckungsveränderlichen“ (Publ. XVI d. Sternw. Kiel, Kiel 1927, weiterhin als (A) angeführt) und „Über die Bestimmung der Randverdunkelung der Sonne während einer Sonnenfinsternis“ (Astr. Nachr. B. 235, Nr. 5633, Kiel 1929, weiterhin als (B) angeführt) veröffentlicht. Beide Schriften behandeln die Energieabnahme während einer Finsternis, die dadurch bewirkt wird, daß an der Himmelskugel eine kreisförmige strahlende Scheibe mit einer nur von der Entfernung von dem Mittelpunkt der Scheibe abhängigen Energiedichte der Strahlung von einer gleichfalls kreisförmigen, aber für die Strahlung undurchlässigen Scheibe bedeckt wird. Beide Schriften unterscheiden sich dadurch voneinander, daß die beiden Scheiben bei (A) entsprechend den Finsternissen veränderlicher Sterne als unmeßbar klein, bei (B) entsprechend den Sonnenfinsternissen, als mäßig groß angesehen werden. Infolgedessen ist die Bestimmung der Energieabnahme in (A) ein mit der ebenen Trigonometrie zu behandelndes Problem der Ebene, in (B) ein Problem der Kugel, das in Strenge mit der sphärischen Trigonometrie behandelt werden müßte, aber, wie in (B) gezeigt worden ist, bei der vorausgesetzten mäßigen Größe der beiden Scheiben mit einer für das Problem völlig ausreichenden Genauigkeit auf dasselbe Problem zurückgeführt werden kann, das in (A) direkt vorliegt. Man braucht nämlich der Untersuchung, wie in (B), nur statt des Vorganges an der Himmelskugel dessen Bild in der Bildebene einer Lochkamera mit unendlich kleinem Loche und mit einer der Einheit gleichen Bildweite

zu unterbreiten. Ein solches Bild liegt mit ausreichender Genauigkeit in einem Photogramme der Finsternis vor. Bei einer beliebigen Aufstellung der Kamera werden zwar die Bilder beider kreisförmigen Scheiben der Himmelskugeln elliptisch; wenn man aber die Kamera auf die Sonnenscheibe zentriert, also dafür sorgt, daß das von dem Loche auf die Bildebene gefällte Lot, rückwärts verlängert, durch den Mittelpunkt der Sonnenscheibe an der Himmelskugel geht, so wird zunächst das Bild der kreisförmigen Sonnenscheibe gleichfalls kreisförmig, und es bleibt auch die Energiedichte in diesem Bilde, in allerdings verändertem Betrage, allein von der Entfernung von dem Mittelpunkte des Bildes abhängig; sodann aber weicht auch das elliptische Bild der kreisförmigen Mondscheibe an der Himmelskugel im Verlaufe einer Finsternis nur um Beträge von der Kreisform ab, die bei unserem Probleme ganz bedeutungslos sind. Ersetzt man nämlich den wahren elliptischen Rand des Bildes der Mondscheibe durch einen Kreis, der das Bild des Mittelpunktes der Mondscheibe zentrisch umschließt und den Rand in dem dem Mittelpunkte des Sonnenbildes am nächsten liegenden Punkte berührt, so unterscheiden sich die in der Bildebene von dem Bilde des Mittelpunktes der Mondscheibe in derselben Richtung nach dem wahren elliptischen und nach dem untergeschobenen kreisförmigen Rande des Mondbildes gezogenen beiden Radien, wenn man nur solche Punkte des Randes berücksichtigt, die vor dem Bilde der Sonnenscheibe erscheinen und folglich allein zu dessen Verfinsterung beitragen, nach (B) nur um Beträge voneinander, die im Sinne Kreis minus Ellipse genommen, nur zwischen $\varepsilon_1 = -1/150136$ und $\varepsilon_2 = +1/281357$ ihrer ganzen Länge liegen und deshalb bei unserem Probleme unbedenklich vernachlässigt werden dürfen. Das Problem (B) ist dann auf das Problem (A) zurückgeführt; die Formeln von (A) bleiben dann auch für (B) ohne jede andere Änderung gültig, als daß die an den kreisförmigen gekrümmten Scheiben der Himmelskugel gemessenen Größen auf die gleichfalls kreisförmigen aber ebenen Scheiben des Bildes übertragen werden müssen. Wir haben nun die dazu dienenden Formeln aus (B) hier anzuführen; wir wollen dabei aber eine Änderung in der Bezeichnung vornehmen; in (B) sind die auf die Himmelskugel bezüglichen Größen mit ungestrichenen, die für die Bildebene geltenden analogen Größen mit denselben, aber gestrichenen Buchstaben bezeichnet worden; hier sollen umgekehrt die gestrichenen Buchstaben für die Himmelskugel benutzt werden, damit für die im weiteren Verlaufe der Untersuchung ausschließlich gebrauchten Bezeichnungen für das Bild die einfacheren ungestrichenen Buchstaben benutzt werden können. Wir bezeichnen also an der Himmelskugel die kreisförmige Sonnenscheibe mit S'_1 , die gleichfalls kreisförmige Mondscheibe mit S'_2 , ihre Mittelpunkte mit M'_1 und M'_2 , ihre sphärisch gemessenen Halbmesser mit r'_0 und s' ; die sphärisch gemessene Entfernung ihrer Mittelpunkte M'_1 und M'_2 mit m' ; ferner setzen wir $a' = m' - s'$, $b' = m' + s'$. Für einen beliebigen Punkt P' der Scheibe S'_1 bezeichnen wir die sphärische Entfernung vom M'_1 mit r' und die Energiedichte, also die von der den Punkt P' umschließenden Flächeneinheit der gekrümmten Himmelskugel innerhalb der Scheibe S'_1 in der Zeiteinheit ausstrahlende Energiemenge, mit f' . Die bezeichneten Größen sind mit Ausnahme von a' stets positiv; a' aber ist nach der Definitionsformel positiv oder negativ, je nachdem die Scheibe S'_2 den Mittelpunkt M'_1 der Scheibe S'_1 freiläßt oder verdeckt. Bei den kreisförmigen Bildern der zentrierten Kamera benutzen wir für die analogen Gebilde die gleichen Buchstaben, aber ohne die Striche und mit dem Unterschiede, daß hier die linearen Größen r , s , m , a , b in der Einheit des Halbmessers $\text{tgr} r'_0$ des kreisförmigen Bildes der Sonnen-

scheibe ausgedrückt sind. Daß man den die kreisförmigen Scheiben nahezu in Ellipsen verwandelnden Einfluß der astronomischen Strahlenbrechung hier unberücksichtigt läßt, bedarf wohl keiner Rechtfertigung; die Energieabnahme ist von ihm in aller Strenge unabhängig.

Nach (B) gelten nun für die auf die Bildebene bezüglichen Größen r , s , m , a , b die Formeln

$$r = \frac{\operatorname{tg} r'}{\operatorname{tg} r'_0} \quad s = \frac{\sin s'}{\operatorname{tg} r'_0 \cos a' \cos m'} \quad m = \frac{\operatorname{tg} m'}{\operatorname{tg} r'_0} \quad a = \frac{\operatorname{tg} a'}{\operatorname{tg} r'_0} \quad b = \frac{\cos a' \sin m' + \sin s'}{\operatorname{tg} r'_0 \cos a' \cos m'}$$

In der Formel für b ist angenommen, daß der ganze Rand von S_2 kreisförmig sei; in Strenge gilt sonst der Wert $b = \frac{\operatorname{tg}(m' + s')}{\operatorname{tg} r'_0}$; durch den Unterschied der zwei Werte von b entsteht aber in den berechneten Werten der Energieabnahme keine Abweichung, die einem die Grenzen ε_1 und ε_2 überschreitenden Fehler des Radius entspräche; das ist ohne Weiteres klar, wenn der ganze Rand von S_2 innerhalb der Scheibe S_1 liegt; also bei ringförmigen Finsternissen; aber auch bei partiellen Finsternissen, wo ein Teil des Randes von S_2 außerhalb S_1 liegt, wird das mit Rücksicht darauf klar, daß außerhalb der Scheibe S_1 liegende Teile der Scheibe S_2 zur Energieabnahme überhaupt keinen Beitrag liefern.

Es möge noch bemerkt werden, daß die Größe $r = \frac{\operatorname{tg} r'}{\operatorname{tg} r'_0}$ hier, wie in (A), die Variable für die zur Bestimmung der Energieabnahme auszuführenden Integrationen darstellt.

Die Energiedichte f' der Scheibe S'_1 an der Himmelskugel in dem beliebigen Punkte P' ist eine Funktion allein des in diesem Punkte geltenden Emissionswinkels i' ; diesen fassen wir dabei als denjenigen Winkel auf, den der von P' ausgehende Strahl mit der in seinem Ausgangspunkte errichteten äußeren Flächennormale der kugelförmigen Sonnenoberfläche bildet. Diese Energiedichte kann nach (A) als trigonometrische Reihe nach den Cosinus der ganzen Vielfachen von i' von der Gestalt

$$f' = a'_0 + 2 \sum_1^{\infty} a'_a \cos a i'$$

dargestellt werden; und es wird angenommen, daß die Koeffizienten a'_a , auch in ihrer etwaigen Abhängigkeit von der Wellenlänge der Strahlung, für alle Punkte der Sonnenoberfläche dieselben Werte haben. Für die Untersuchung der Energieabnahme ist es in (A) zweckmäßiger gewesen, die trigonometrische Reihe in eine Potenzreihe nach $\cos i'$ von der Gestalt

$$f' = 1 - \sum_1^{\infty} c'_a + \sum_1^{\infty} c'_a \cos^a i'$$

zu verwandeln. Dieser für die Himmelskugel im Punkte P' geltenden Reihe entspricht nun in der Bildebene in dem Bildpunkte P von P' nach (B) die folgende Formel für die Energiedichte

$$f = 1 - \sum_1^{\infty} c_a + \sum_1^{\infty} c_a (\sqrt{1 - r^2})^a$$

die mit der den Untersuchungen von (A) zu Grunde gelegten Formel übereinstimmt. Zwischen den Koeffizienten beider Formeln gelten nach (B) mit der Abkürzung $q = \sin^2 r'_0$ die folgenden Formeln

$$c_1 = (1 - 2q)c'_1, \quad c_2 = (1 - \frac{5}{2}q)c'_2 + \frac{3}{2}q(1 - \sum_1^{\alpha} c'_a)$$

$$c_a = (1 - \frac{1}{2}(\alpha + 3)q)c'_a + \frac{1}{2}(\alpha + 1)qc'_{a-2} \quad (\alpha \geq 3)$$

Es besteht also zwischen den Koeffizienten c'_a und c_a ein qualitativer Unterschied: Die Koeffizienten c'_a gehören einem auf der Sonnenoberfläche entstehenden Vorgange an, sie können also mit der Entfernung des Ortes, an dem der Vorgang später beobachtet wird, nichts zu tun haben; die Koeffizienten c_a aber sind, da die für sie geltenden Formeln den scheinbaren Halbmesser der Sonne r'_0 enthalten, von der Entfernung des Beobachtungs-ortes von der Sonne abhängig; wegen der Kleinheit der Größe r'_0 und ihrer geringen Veränderlichkeit wird aber dieser Unterschied in den Beobachtungen quantitativ nie erkennbar werden. Nach der in (A) ausgeführten Untersuchung einer an der unbedeckten Sonnenscheibe erlangten Reihe von Energiemessungen, ist in (A) angenommen worden, daß es in der Potenzreihe für f ausreiche, die vier ersten Koeffizienten zu berücksichtigen; demgemäß setzen wir auch hier mit einer veränderten Bezeichnung der Koeffizienten, die in unserem Probleme die zu bestimmenden Unbekannten bilden,

$$f = x + y\sqrt{1-r^2} + z(1-r^2) + w(\sqrt{1-r^2})^3$$

Diese Formel entsteht aus der in (A) benutzten Formel durch die Hinzufügung des Faktors $p = x + y + z + w$; und es wird dann

$$c_0 = 1 - (c_1 + c_2 + c_3) = \frac{x}{p}$$

$$c_1 = \frac{y}{p}; \quad c_2 = \frac{z}{p}; \quad c_3 = \frac{w}{p}$$

Wir wollen uns mit diesem Ansätze zugleich von der bisher geltenden Annahme befreien, daß die Energiedichte im Mittelpunkte der Sonnenscheibe S_1 den Wert 1 annehme. Zu der neuen Einheit der Energiedichte gelangt man auf die folgende Weise: Der allen berechneten Werten der Energieabnahme h gemeinsame Faktor γ diene in (A) dazu, die Werte von h in der Einheit der bei Sternbedeckungen unveränderlichen Gesamtenergie der unbedeckten Scheibe S_1 auszudrücken; dadurch erlangt die Formel für h die Gestalt eines Bruches, in dem sowohl der Nenner, wie der Zähler eine lineare Funktion der hier unbekannten Koeffizienten der Energiedichte ist; das wurde in (B), wo die Gesamtenergie, nämlich die der unbedeckten Sonnenscheibe S_1 veränderlich war, dahin geändert, daß dem Faktor γ durch den Wert $\gamma = \operatorname{tg}^2 r'_0$ nur die Aufgabe zugewiesen wurde, der durch die veränderliche Entfernung bewirkten Veränderlichkeit der Gesamtenergie der Scheibe S_1 Rechnung zu tragen. Dann stellt sich h als lineare Funktion der Koeffizienten der Energiedichte, ohne Nenner, dar. Behält man nun den Wert $\gamma = \operatorname{tg}^2 r'_0$ hier bei und führt man die letzte Formel für f ein, so nehmen die vermittelnden Gleichungen unseres Problems

die folgende Gestalt an, in der die Ordnungszahl durch den unteren Index α bezeichnet wird

$$a_{\alpha}x + b_{\alpha}y + c_{\alpha}z + d_{\alpha}w = h_{\alpha}.$$

Hier steht links der mit den berechneten Größen a , b , c , d gebildete und nach den einzelnen Unbekannten x , y , z , w zerspaltete Wert der Energieabnahme, rechts deren gemessener Wert; und zwar ist dieser in einer Einheit ausgedrückt, die von den besonderen Verhältnissen des benutzten Instrumentariums abhängt. In dieser Einheit ausgedrückt ist der Wert der Energiedichte der Sonnenscheibe in deren Mittelpunkt gleich $p = x + y + z + w$ und sie wird also numerisch erst bekannt, nachdem die zu den vermittelnden Gleichungen gehörenden Normalgleichungen nach den Unbekannten aufgelöst worden sind, also am Ende der Rechnung. Es entsteht aber dadurch keinerlei Nachteil.

Die zur Berechnung der Größen a , b , c , d dienenden Formeln werden in dem theoretischen Teile dieser Schrift mitgeteilt; es ist dabei von einer in (A) gemachten Erfahrung Nutzen gezogen worden; es hat sich nämlich dort gezeigt, daß die Berechnung von h bei kleinen Werten von $a = m - s$ beträchtliche Schwierigkeiten bereitet, und daß diese dadurch vermieden werden können, daß man nicht h selbst, sondern den Differentialquotienten $\frac{dh}{d\varpi}$ von h nach einer Größe ϖ berechnet, die ihrerseits zu dem jeweiligen Werte von a mit der Hilfe des Minimalwertes a_0 , den a im Verlaufe der Finsternis annimmt, nach der Formel

$$\operatorname{tg}^2 \varpi = \frac{1 - a}{a - a_0}$$

bestimmt wird, und demgemäß während der Finsternis, stets wachsend, das Bereich $0 \leq \varpi \leq \pi$ durchläuft. Für dieses ganze Bereich werden, bei Verzicht auf jede direkte Berechnung von h , für äquidistante Werte von ϖ die Werte von $\frac{dh}{d\varpi}$ berechnet und dann für die gleichen Werte von ϖ die Werte von h durch die mechanische Quadratur erlangt. Das gleiche Verfahren, wie in (A) für h , wird hier für die Größen a , b , c , d benutzt; bei der numerischen Rechnung kommen die in (A) mitgeteilten Tabellen für gewisse vollständige elliptische Integrale zur erneuten Benutzung und ähnliche Tabellen, die hier wegen der Veränderlichkeit der in (A) konstanten Größe s nötig sind, werden im Anhang der vorliegenden Schrift mitgeteilt. Als ich nun die hier skizzierten Rechnungen für das zweite, aus dem Jahre 1912 stammende Beispiel von Julius ausführte, stellte sich eine überraschende Erscheinung ein, die sich zweifellos bei jedem Beispiele wiederholen wird: Nach einer siebenstellig geführten Rechnung, die in den bei der Bildung der Normalgleichungen auftretenden Summen noch die achte zählende Stelle ergibt, zerstören sich nämlich die für sich getrennt summierten positiven und negativen Teile der dem vierten Grade angehörenden Determinante D der Koeffizienten der Normalgleichungen in allen direkt berechenbaren 8 Stellen vollständig; ja durch eine Umgestaltung von D kann erkannt werden, daß sich 15 zählende Stellen von D zerstören würden, wenn sie berechnet werden könnten; ferner zerstören sich auch in allen 10 voneinander verschiedenen Unterdeterminanten erster Ordnung von D gegenseitig die positiven und negativen Teile bis auf ganz wenige Einheiten der letzten, nicht ganz sicheren, achten zählenden Stelle; und erst die Unterdeterminanten zweiter Ordnung von D bleiben, auch sie durch die Gegenwirkung der positiven

und negativen Teile stark vermindert, sämtlich mit vier zählenden Stellen berechenbar, also von Null merkbar verschieden, übrig. Wenn nun die Determinante D und alle ihre Unterdeterminanten erster Ordnung in streng mathematischem Sinne verschwinden, so ist die Bestimmung aller vier Unbekannten überhaupt nicht möglich; als möglich bekannt ist dann nach früheren Untersuchungen nur das Folgende: Damit die Auflösung der Normalgleichungen überhaupt möglich werde, müssen die von den Beobachtungen abhängigen rechten Seiten der Normalgleichungen, die hier als „Bekannte“ bezeichnet werden, zudritt gewisse, insgesamt 24, lineare homogene, hier als „Trinome“ bezeichnete, Gleichungen erfüllen; dann können zwei beliebige der vier Unbekannten willkürlich gewählt und zu ihnen die beiden übrigen Unbekannten aus zwei beliebigen der vier Normalgleichungen bestimmt werden. Diesem Altbekannten ist nach meinem Aufsätze „Über einen Ausnahmefall der Ausgleichungsrechnung“ (Astr. Nachr. Bd. 240, Nr. 5757, Kiel 1930) das folgende Neue hinzuzufügen:

Trotz der bei der Auflösung der Normalgleichungen obwaltenden Willkür führt jedes der unendlich vielen Systeme der vier Unbekannten, wie immer es auch erlangt worden sein mag, zu demselben Werte der gewichteten Summe der Fehlerquadrate und also zu derselben Genauigkeit der Darstellung der vermittelnden Gleichungen.

Trotz der sehr großen Genauigkeit, mit der die Determinante D und ihre 10 Unterdeterminanten erster Ordnung und auch alle 24 Trinome verschwinden, kann es doch von vornherein nicht zweifelhaft sein, daß es sich hier nicht um ein Verschwinden in streng mathematischem Sinne, sondern nur um ein Wegfallen einer großen Zahl zählender Stellen handeln kann. In der Tat gelangt man zu einer bei dem strengen Verschwinden unmöglichen Bestimmung aller vier Unbekannten auf dem folgenden, in dem genannten Aufsätze angegebenen Wege: Die Bestimmung der Unbekannten erfolgt in zwei Schritten; bei dem ersten Schritte werden aus zweien der vier Normalgleichungen x und y als lineare Funktionen von z und w berechnet; durch die Einsetzung der Ausdrücke für x und y in die einzelnen vermittelnden Gleichungen werden diese als lineare Funktionen von z und w allein dargestellt. Der zweite Schritt besteht dann darin, für diese umgestalteten vermittelnden Gleichungen die zwei Normalgleichungen aufzustellen und nach z und w aufzulösen. Dadurch, daß die Bestimmung der Unbekannten statt in einem einzigen in zwei Schritten vorgenommen wird, entsteht keine Änderung des Problems im mathematischen Sinne, wohl aber konnte von vornherein vermutet werden, daß die Umrechnung der vermittelnden Gleichungen von vier auf zwei Unbekannte kleine Reste des bei dem ersten Schritte nicht völlig erschöpfbaren Inhaltes dieser Gleichungen zu deutlicher Wirkung bringen würde. Und diese Vermutung hat sich bei der numerischen Rechnung bestätigt: Die bei dem einzigen Schritte auftretende, mit 8 zählenden Stellen verschwindende Determinante vierten Grades D zerfällt sich bei zwei Schritten in das Produkt zweier nicht verschwindender, mit mindestens 4 zählenden Stellen berechenbarer Determinanten zweiten Grades. Damit ist also erwiesen, daß die Unbekannten alle vier auf dem eingeschlagenen Umwege in zwei Schritten mit einer noch eben ausreichenden Genauigkeit bestimmt werden können. Wir stellen nun noch die Zahlen zusammen, die sich für die Unbekannten x , y , z , w und ihre mittleren Fehler μ_x , μ_y , μ_z , μ_w und für den mittleren Fehler μ der Gewichtseinheit der vermittelnden Gleichungen ergeben haben, und bemerken dabei, daß diese Gewichtseinheit einer um die Zeit der größten Phase angestellten, hier genauesten, Energiemessung zukommt.

Erster Schritt

$$\begin{aligned}x &= + 0.0032826 \pm 0.0002154 \\y &= + 0.0062393 \pm 0.0003121 \\ \mu &= 17.753\end{aligned}$$

Zweiter Schritt

$$\begin{aligned}x &= + 0.0043607 \pm 0.0013707 \\y &= + 0.0087496 \pm 0.0077185 \\z &= + 0.0183527 \pm 0.0137734 \\w &= + 0.0161291 \pm 0.0077728 \\ \mu &= 14.433\end{aligned}$$

Von dem für die vermittelnden Gleichungen mit den ihnen beigelegten Gewichten p_a berechneten Werte $\sum_a p_a h_a^2 = 669239500$ nimmt der erste Schritt durch die Unbekannten x und y 669213969, also vier zählende Stellen hinweg, sodaß noch 25531 übrigbleibt; davon nimmt der zweite Schritt unter Mitwirkung der Unbekannten z und w weitere 9067, also knapp noch eine zählende Stelle hinweg, sodaß also für die gewichtete Summe der Fehlerquadrate noch 16464 übrigbleibt. Der zweite Schritt trägt also zur Verminderung von $\sum_a p_a h_a^2$ nur wenig bei und diesem geringen Vorteile steht als sehr großer Nachteil eine starke Vergrößerung der mittleren Fehler der Unbekannten, rund im Verhältnisse von 33 zu 1 gegenüber. Das Verhältnis der Vergrößerung fällt ausschließlich der Methode zur Last; in ihr spiegelt sich die durch die zwei Schritte überwundene Schwierigkeit wieder, und sie muß, wenn man auf die Bestimmung aller vier Unbekannten ausgeht, in den Kauf genommen werden. Was aber die mittleren Fehler der Unbekannten betrifft, die eine Größe erreichen, die den Werten der Unbekannten fast alles Vertrauen entziehen muß, so beweisen sie, daß die benutzten Energiemessungen von der hier erforderlichen Genauigkeit noch sehr weit entfernt sind. Da der mittlere Fehler der Gewichtseinheit $\mu = 14.433$ bei 83 vermittelnden Gleichungen auf eine Größe $\sqrt{\frac{\sum_a p_a h_a^2}{83}} = 2839.6$ fällt, so sind die gemessenen Energiemengen mit einem mittleren Fehler von 5 pro mille behaftet. Die Methode der Bestimmung der Energieverteilung auf der Sonnenscheibe gewährt also, besonders wenn man alle vier Koeffizienten der Formel für die Energiedichte bestimmen will, nur dann Hoffnung auf einen ausreichenden Erfolg, wenn die Genauigkeit der Energiemessungen gegenüber den vor 19 Jahren angestellten Beobachtungen ganz wesentlich erhöht werden kann. Inbetreff der gegenwärtig erreichbaren Genauigkeit habe ich, da ich selbst in aktinischen Messungen keine Erfahrung habe, Herrn Rosenberg gefragt; mit seiner Zustimmung teile ich hier mit, daß er es auf Grund von Versuchen für wahrscheinlich hält, daß man die Genauigkeit der Energiemessungen gegenüber den vor 19 Jahren von Julius ausgeführten Beobachtungen auf die Größenordnung des Hundertfachen werde erhöhen können, wenn man inbetreff des Instrumentariums der auch von Julius benutzten Thermosäule das von den Herren Moll und Burger konstruierte Thermorelais hinzufüge und inbetreff des Beobachtungsverfahrens eine Kompensationsmethode benutze, bei der die Galvanometerausschläge auf ganz geringen Größen gehalten werden. Immerhin würden auch dann noch die Werte der Koeffizienten der Formel für die Energiedichte, je nachdem man nur die beiden ersten oder alle vier bestimmt, mit einer mäßigen Unsicherheit der vierten oder dritten zählenden Stelle behaftet bleiben.

Für künftige Beobachtungen möchte ich hier neben dem Wunsche, daß die äußerste Genauigkeit und Gleichförmigkeit der Energiemessungen erstrebt werde, noch einige Wünsche äußern, deren Nichterfüllung bei den hier benutzten Beobachtungen mir hinderlich gewesen ist; diese Wünsche beziehen sich auf die Beschaffung von 1. Material, nach dem die gemessenen Energiemengen wegen der Absorption der Strahlung in der Erdatmosphäre auf

das Zenit des Beobachtungsortes reduziert werden können; 2. Material zur Bestimmung der relativen Gewichte der einzelnen Energiemessungen; 3. Photogramme, die an dem Beobachtungsorte der Energiemessungen hergestellt, für den ganzen Verlauf der Finsternis in der Einheit des Sonnenhalbmessers gemessen die jeweiligen Werte des Mondhalbmessers s und des Abstandes des Mondrandes von dem Sonnenmittelpunkte a mit einer Genauigkeit von wenigstens 5 zählenden Stellen ergeben und uns dadurch der Notwendigkeit entheben, uns mit den ungenaueren Werten dieser Größen zu begnügen, die sonst durch mühsame Rechnungen nach den mit unbekannten Fehlern behafteten Ephemeriden der Sonne und des Mondes beschafft werden müßten.

Bei der Unzulänglichkeit und unzureichenden Genauigkeit des Beobachtungsmaterials, das mir für meine Rechnungen allein zur Verfügung stand, mußte ich erwägen, ob ich deren Ergebnisse überhaupt veröffentlichen sollte; jedenfalls kann ich die Rechtfertigung der vorliegenden Veröffentlichung nicht auf die errechnete, noch sehr unsichere Energieverteilung, sondern nur darauf begründen, daß meine Erfahrungen künftigen Bearbeitungen desselben Gegenstandes, denen auf der Grundlage eines genaueren und vollständigeren Beobachtungsmaterials ein besserer Erfolg in Aussicht stünde, die Wege weisen und ebnen können.

Theoretischer Teil.

2.

Nachdem die in der Einleitung dargelegten zur Zurückführung der Erscheinung an der Himmelskugel auf die Bildebene erforderlichen Änderungen ausgeführt worden sind, handelt es sich auch bei den Sonnenfinsternissen mit einer weitaus genügenden Genauigkeit um ein Problem nicht mehr der Kugel, sondern der Ebene und dementsprechend um die Anwendung der in (A) abgeleiteten Formeln, die hier weiterhin mit der Seitenzahl angeführt werden sollen. Vorher mögen aber die folgenden Bezeichnungen in Erinnerung gebracht werden: Die kreisförmige Scheibe S_1 mit dem Mittelpunkte M_1 und dem Halbmesser 1 wird von der gleichfalls kreisförmigen Scheibe S_2 mit dem Mittelpunkte M_2 und dem Halbmesser s teilweise bedeckt; ein auf der Scheibe S_1 mit dem Halbmesser r um deren Mittelpunkt M_1 beschriebener Kreis schneidet den Rand von S_2 in zwei zur Geraden $M_1 M_2$ symmetrischen Punkten, von denen der eine mit P bezeichnet wird. Für das ebene Dreieck $M_1 M_2 P$ wird dann die folgende Bezeichnung benutzt:

$$\begin{array}{lll} M_1 P = r & M_2 P = s = \frac{1}{2}(b - a) & M_1 M_2 = m = \frac{1}{2}(b + a) \\ P M_2 M_1 = \psi & P M_1 M_2 = \varphi & M_1 P M_2 = \pi - (\varphi + \psi) \end{array}$$

Ferner betrachten wir im folgenden die Energieabnahme h nicht direkt, sondern trennen von ihr den mit dem scheinbaren Sonnenhalbmesser r'_0 gebildeten veränderlichen Faktor $\gamma = \operatorname{tg}^2 r'_0$ ab und setzen

$$h = \gamma h'$$

Die Größe h' soll, wie in der Einleitung dargelegt worden ist, nicht direkt, sondern durch die mechanische Quadratur aus den Differentialquotienten $\frac{dh'}{d\varpi}$ berechnet werden; wir brauchen

deshalb nicht auf die Formeln für h' zurückzugreifen, sondern können sogleich an die Formeln für $\frac{\partial h'}{\partial a}$ und $\frac{\partial h'}{\partial b}$ anknüpfen. Das hat zur Folge, daß man nicht, wie bei h' , vier Fälle der Art der Bedeckung zu unterscheiden braucht (A 6 links), sondern nur zwei. In (A 12 rechts) ist nämlich nachgewiesen worden, daß der Umstand, daß die Grenzen r_1 und r_2 der beiden Integrale der mit der Energiedichte f gebildeten Formel

$$h = 2\gamma \left(e\pi \int_0^{r_1} f r dr + \int_{r_1}^{r_2} f \varphi r dr \right) \quad \begin{cases} (e = 0, \text{ wenn } a \geq 0) \\ (e = 1, \text{ wenn } a \leq 0) \end{cases}$$

von a abhängig sind, in dem totalen Differentialquotienten $\frac{dh}{da} = \frac{\partial h}{\partial a} + \frac{\partial h}{\partial b}$ zwar Glieder hervorruft, aber Glieder, die sich in allen vier Arten der Bedeckung gegenseitig zerstören; und es ist auf dem dort eingeschlagenen Wege sogleich ersichtlich, daß das nicht nur für die dort allein auftretende Summe der beiden partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial h}{\partial a}$ und $\frac{\partial h}{\partial b}$, sondern auch für einen jeden dieser hier einzeln vorkommenden Differentialquotienten besonders gilt. Die Folge davon ist, daß, wie in (A 13 links und rechts) so auch hier das bei h' unterscheidend wirksame, nämlich den Fall 1 vom Falle 2 und den Fall 3 vom Falle 4 trennende Merkmal des positiven oder negativen Wertes von a bei der Untersuchung der Größen $\frac{\partial h}{\partial a}$ und $\frac{\partial h}{\partial b}$ und also auch der Größen $\frac{\partial h'}{\partial a}$ und $\frac{\partial h'}{\partial b}$ nicht mehr unterscheidend wirksam ist; die beiden Fälle 1 und 2 verschmelzen deshalb zu einem einzigen Falle I mit dem Merkmale der partiellen Finsternis, und die beiden Fälle 3 und 4 zu einem einzigen Falle II mit dem Merkmale der ringförmigen Finsternis. Damit der Fall I eintreten könne, muß $b \geq 1$, damit der Fall II wirksam werden könne, muß $b \leq 1$ sein.

Indem wir die beiden Fälle I und II zunächst noch gemeinsam behandeln, gelten also die Formeln

$$\frac{\partial h'}{\partial a} = 2 \int_{r_1}^{r_2} f \frac{\partial \varphi}{\partial a} r dr \quad \frac{\partial h'}{\partial b} = 2 \int_{r_1}^{r_2} f \frac{\partial \varphi}{\partial b} r dr$$

Nun besteht mit der Abkürzung

$$\varrho = \sqrt{(r^2 - a^2)(b^2 - r^2)}$$

die Formel

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varrho}{ba + r^2}$$

und daraus folgt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = \frac{r^2 - b^2}{(b + a)\varrho} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b} = \frac{r^2 - a^2}{(b + a)\varrho}$$

Es wird also

$$\frac{\partial h'}{\partial a} = \frac{2}{b + a} \int_{r_1}^{r_2} f \frac{(r^2 - b^2)r}{\varrho} dr \quad \frac{\partial h'}{\partial b} = \frac{2}{b + a} \int_{r_1}^{r_2} f \frac{(r^2 - a^2)r}{\varrho} dr$$

Führt man nun aber anstatt a und b die Größen $m = \frac{1}{2}(b + a)$ und $s = \frac{1}{2}(b - a)$ ein, so wird

$$\frac{\partial h'}{\partial m} = h_1 = + \frac{\partial h'}{\partial a} + \frac{\partial h'}{\partial b} = - \frac{2}{b + a} \int_{r_1}^{r_2} f \frac{(b^2 + a^2 - 2r^2)r}{\varrho} dr$$

$$\frac{\partial h'}{\partial s} = h_2 = - \frac{\partial h'}{\partial a} + \frac{\partial h'}{\partial b} = + 2(b - a) \int_{r_1}^{r_2} f \frac{r}{\varrho} dr$$

Es sei nun t die Weltzeit (m. Z. Gr.); dann wird die Geschwindigkeit, mit der sich h' ändert, durch den Ausdruck

$$\frac{dh'}{dt} = h_1 \frac{dm}{dt} + h_2 \frac{ds}{dt}$$

dargestellt. Die Werte der Größen $\frac{dm}{dt}$ und $\frac{ds}{dt}$ müssen Ephemeriden der Größen m und s entnommen werden. Am Besten werden diese Ephemeriden, wie schon bemerkt, durch die Ausmessung von Photogrammen erhalten, die gleichzeitig und an demselben Orte, wie die Energiemessungen hergestellt werden; und nur in Ermangelung solcher Photogramme, wie bei unserem Beispiele, wird man sich mit den weniger genauen Werten begnügen müssen, die man aus den mit unbekannten Fehlern behafteten Ephemeriden der Sonne und des Mondes berechnet.

Um schließlich die Formel für $\frac{dh}{d\varpi}$ zu erlangen, ist noch die Formel für $\frac{da}{d\varpi}$ abzuleiten. Zur Vorbereitung der Bestimmung der Größe a als Funktion von ϖ ermittelt man aus der genannten Ephemeride die Zeiten des Anfangs (t_1) und des Endes (t_2) der Finsternis, zu denen a zweimal den Wert 1 annimmt; und sodann die Zeit (t_0) der größten Phase, als der Zeit, zu der a entsprechend der Formel $\left(\frac{da}{dt}\right)_{t=t_0} = 0$ den kleinsten Wert a_0 erreicht; diesen Wert a_0 entnimmt man der Ephemeride.

Aus der Formel

$$a = 1 - (1 - a_0) \sin^2 \varpi$$

ergibt sich dann, indem die Wurzel stets positiv genommen wird,

$$\frac{da}{d\varpi} = \pm 2 \sqrt{(1 - a)(a - a_0)}$$

und zwar ist offenbar in dem ersten Teile der Finsternis ($t_1 \leq t \leq t_0$) das untere und in dem zweiten Teile der Finsternis ($t_0 \leq t \leq t_2$) das obere Vorzeichen zu nehmen. Daraus folgt mit der gleichen Entscheidung über das doppelte Vorzeichen die Formel

$$\frac{dt}{d\varpi} = \pm 2 \frac{\sqrt{(1 - a)(a - a_0)}}{\frac{da}{dt}}$$

Mit dem absoluten Werte $\left|\frac{da}{dt}\right|$ von $\frac{da}{dt}$ kann man den stets positiven Wert der Größe

$\frac{dt}{d\varpi}$ auch durch die Formel

$$\frac{dt}{d\varpi} = 2 \frac{\sqrt{(1-a)(a-a_0)}}{\left| \frac{da}{dt} \right|} = (1-a_0) \left| \frac{\sin 2\varpi}{\frac{da}{dt}} \right|$$

darstellen. Für eine gegebene Zeit wird der Wert von $\frac{dt}{d\varpi}$ bekannt, indem man der Ephemeride die Werte von a und $\frac{da}{dt}$ entnimmt. Der Wert von $\frac{dt}{d\varpi}$ wird aber in dem einen Falle der größten Phase ($t = t_0$) unbestimmt; in deren Nähe ist aber

$$a - a_0 = \frac{1}{2} (t - t_0)^2 \left(\frac{d^2 a}{dt^2} \right)_{t=t_0} + \dots \quad \frac{da}{dt} = (t - t_0) \left(\frac{d^2 a}{dt^2} \right)_{t=t_0} + \dots$$

In diesem Ausnahmefall wird also

$$\left(\frac{dt}{d\varpi} \right)_{t=t_0} = \sqrt{\frac{2(1-a_0)}{\left(\frac{d^2 a}{dt^2} \right)_{t=t_0}}}$$

und den stets positiven Wert von $\left(\frac{d^2 a}{dt^2} \right)_{t=t_0}$ entnimmt man der Ephemeride.

Man kennt also nun für jeden Wert von ϖ im Bereiche $0 \leq \varpi \leq \pi$ die Werte von $\frac{dt}{d\varpi}$ und somit auch die Werte von

$$\frac{dm}{d\varpi} = \frac{dm}{dt} \frac{dt}{d\varpi} \quad \frac{ds}{d\varpi} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{d\varpi}$$

und damit wird auch der Wert von

$$\frac{dh'}{d\varpi} = h_1 \frac{dm}{d\varpi} + h_2 \frac{ds}{d\varpi}$$

bekannt.

Es ist nunmehr nur noch nötig, die Formeln für die Größen h_1 und h_2 in die für die numerische Rechnung geeignetste Gestalt zu verwandeln; und dabei sind die beiden Fälle I und II zu unterscheiden. Für die Größe h_1 ist die Verwandlung schon in (A) ausgeführt worden, denn diese Größe ist dieselbe, die in (A) mit $\frac{1}{\gamma} \frac{dh}{da} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial h}{\partial a} + \frac{\partial h}{\partial b} \right)$ bezeichnet worden ist. Die dort erlangten Formeln übertragen wir der Vollständigkeit wegen hierher; es darf dabei aber nicht übersehen werden, daß die Energiedichte in (A) mit f , hier aber nach der Einleitung mit pf bezeichnet wird, und daß man deshalb der Formel für $\frac{1}{\gamma} \frac{dh}{da}$ den Faktor p hinzufügen und sodann die Größen $p(1 - c_1 - c_2 - c_3)$, pc_1 , pc_2 , pc_3 mit den Größen x , y , z , w vertauschen muß.

Zuerst wird nach (A 13)

für I

$$c = 1 \quad k = \sin \theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-a^2}{s(s+a)}} \quad \operatorname{ctg} \theta = \sqrt{\frac{4s(s+a)}{1-a^2}} - 1$$

$$h_1 = h_{1x}x + h_{1y}y + h_{1z}z + h_{1w}w$$

$$h_{1x} = -2s \cdot \sin 2\theta$$

$$h_{1y} = -4 \sqrt{s^3(s+a)} \cdot \sin^2 \theta \cdot \nu_1$$

$$h_{1z} = -s^2(s+a)(4\theta - \sin 4\theta)$$

$$h_{1w} = -12 \sqrt{s^5(s+a)^3} \cdot \sin^4 \theta \cdot \nu_3$$

Die Logarithmen der hierin vorkommenden und mit Hilfe der Abkürzungen

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \omega}} d\omega \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \omega} d\omega$$

durch die Formeln

$$\nu_1 = \frac{2}{3 \sin^2 \theta} (\cos^2 \theta \cdot K - \cos 2\theta \cdot E),$$

$$\nu_3 = \frac{4}{15 \sin^4 \theta} \left(-(3 + \cos 2\theta) \cos^2 \theta \cdot K + \frac{1}{2} (7 + \cos 4\theta) E \right)$$

dargestellten Größen sind in (A) mit dem äquidistanten Argumente θ tabuliert worden.

Sodann wird nach (A 15)

für II

$$c = b \quad k = \sin \theta = 2 \sqrt{\frac{s(s+a)}{1-a^2}} \quad \operatorname{ctg} \theta = \sqrt{\frac{1-a^2}{4s(s+a)}} - 1$$

$$h_1 = h_{1x}x + h_{1y}y + h_{1z}z + h_{1w}w$$

$$h_{1x} = 0$$

$$h_{1y} = -2s \sqrt{1-a^2} \cdot \sin^2 \frac{1}{2} \theta \cdot \nu_2$$

$$h_{1z} = -\frac{1}{2} \pi s (1-a^2) \cdot \sin^2 \theta$$

$$h_{1w} = -\frac{3}{2} s \sqrt{(1-a^2)^3} \cdot \sin^2 \theta \cdot \nu_3$$

Die Logarithmen der hier neu auftretenden Größe

$$\nu_2 = \frac{2}{3 \sin^2 \frac{1}{2} \theta \sin^2 \theta} (-2 \cos^2 \theta \cdot K + (1 + \cos^2 \theta) E)$$

sind gleichfalls in (A) und in gleicher Weise wie die Größen ν_1 und ν_3 tabuliert worden.

In derselben Weise, wie in (A) die Formel $\gamma h_1 = \frac{dh}{da}$ kann hier die Formel für h_2 umgestaltet werden; da es sich hierbei Schritt für Schritt um dieselben Operationen handelt, wie in (A), so genügt es ohne weitere Erklärungen, die Formeln für h_2 in den einzelnen Zuständen der Entwicklung anzuführen.

Setzt man in die Formel für h_2 die Reihe

$$f = x + z - zr^2 + (y + w - wr^2) \sqrt{1-r^2}$$

ein, so erhält sie die Gestalt

$$h_2 = 2(b-a) \left(\int_{r_1}^{r_2} ((x+z)r - zr^3) \frac{1}{\varrho} dr + \int_{r_1}^{r_2} ((y+w)r - wr^3) \frac{\sqrt{1-r^2}}{\varrho} dr \right)$$

Ferner wird

$$(A 7) \quad \int \frac{r}{\varrho} dr = \frac{1}{2} \psi \quad \int \frac{r^3}{\varrho} dr = \frac{1}{4} ((b^2 + a^2) \psi - (b^2 - a^2) \sin \psi)$$

$$(A 6) \quad r^2 = a^2 + (c^2 - a^2) \sin^2 \omega$$

$$h_2 = \left\{ \begin{array}{l} (b-a) \left[(x+z - \frac{1}{2} z (b^2 + a^2)) \psi + \frac{1}{2} z (b^2 - a^2) \sin \psi \right]_{r_2}^{r_1} \\ + 2 (b-a) \sqrt{c^2 - a^2} \int_0^{\pi/2} (y+w(1-a^2-(c^2-a^2)\sin^2 \omega)) \frac{\sqrt{1-a^2-(c^2-a^2)\sin^2 \omega}}{\sqrt{b^2-a^2-(c^2-a^2)\sin^2 \omega}} \cos \omega d\omega \end{array} \right.$$

Nach dieser für beide Fälle I (partielle Finsternis) und II (ringförmige Finsternis) geltenden Formel sind nun die Formeln für die beiden Fälle getrennt aufzustellen.

Zuerst wird

für I

$$c=1 \quad k = \sin \theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-a^2}{s(s+a)}} \quad \operatorname{ctg} \theta = \sqrt{\frac{4s(s+a)}{1-a^2} - 1}$$

$$(A 6) \quad \psi_{r=r_1} = 0 \quad \psi_{r=r_2} = \beta \quad (A 13) \quad \beta = 2\theta$$

$$h_2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{4s}{k^2} ((x+z)k^2 - \frac{1}{2} z (1 - (1-2k^2)a^2)) \theta + \frac{1}{4} z (1-a^2) \sin 2\theta \\ + 4ks \sqrt{1-a^2} \int_0^{\pi/2} \frac{y \cos^2 \omega + w(1-a^2) \cos^4 \omega}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \omega}} d\omega \end{array} \right.$$

$$(A 10) \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\alpha \omega}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \omega}} d\omega \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \omega}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \omega}} d\omega = \frac{\pi}{4} (a_0 + a_1)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 \omega}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \omega}} d\omega = \frac{\pi}{16} (3a_0 + 4a_1 + a_2) = \frac{\pi}{6} \left(a_0 - \frac{1-2k^2}{k^2} a_1 \right)$$

$$(A 10) \quad a_0 = \frac{2}{\pi} K \quad a_1 = \frac{2}{\pi k^2} (- (2-k^2) K + 2E)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \omega}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \omega}} d\omega = \frac{1}{k^2} (- (1-k^2) K + E)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 \omega}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \omega}} d\omega = \frac{1}{3k^4} ((1-k^2)(2-3k^2)K - 2(1-2k^2)E)$$

Setzt man also

$$v_4 = \frac{2}{\sin^2 \theta} (-\cos^2 \theta \cdot K + E) \quad v_5 = \frac{8}{9 \sin^4 \theta} (\cos^2 \theta (2-3 \sin^2 \theta) K - 2 \cos 2\theta \cdot E)$$

so wird

$$h_2 = h_{2x} x + h_{2y} y + h_{2z} z + h_{2w} w$$

$$h_{2x} = 4s\theta$$

$$h_{2y} = 4 \sqrt{s^3(s+a)} \cdot \sin^2 \theta \cdot v_4$$

$$h_{2z} = 4s^2(s+a)(\sin 2\theta - 2\theta \cos 2\theta)$$

$$h_{2w} = 12 \sqrt{s^5(s+a)^3} \cdot \sin^4 \theta \cdot v_5$$

Sodann wird

für II

$$c=b \quad k=\sin \theta=2 \sqrt{\frac{s(s+a)}{1-a^2}} \quad \operatorname{ctg} \theta=\sqrt{\frac{1-a^2}{4 s(s+a)}}-1$$

$$(A 6) \quad \psi_{r=r_1}=0 \quad \psi_{r=r_2}=\pi$$

$$h_2=\left\{ \begin{array}{l} 2 s \pi\left(x+\frac{1}{2} z(1-a^2)(2-k^2)\right) \\ +4 s \sqrt{1-a^2} \int_0^{\pi/2}(y+w(1-a^2)(1-k^2 \sin^2 \omega)) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \omega} d \omega \end{array} \right.$$

$$(A 10) \quad b_a=\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos 2 \alpha \omega \sqrt{1-k^2 \sin^2 \omega} d \omega \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1-k^2 \sin^2 \omega)^3} d \omega=\frac{\pi}{4}((2-k^2) b_0+k^2 b_1)$$

$$(A 10) \quad b_0=\frac{2}{\pi} E \quad b_1=\frac{2}{3 \pi k^2}(-2(1-k^2) K+(2-k^2) E)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{(1-k^2 \sin^2 \omega)^3} d \omega=\frac{1}{3}(-(1-k^2) K+2(2-k^2) E)$$

Setzt man also

$$v_6=E \quad v_7=\frac{1}{3}(-\cos^2 \theta \cdot K+2(2-\sin^2 \theta) E)$$

so wird

$$h_2=h_{2x} x+h_{2y} y+h_{2z} z+h_{2w} w$$

$$h_{2x}=2 \pi s$$

$$h_{2z}=\pi s(1-a^2)(2-\sin^2 \theta)$$

$$h_{2y}=4 s \sqrt{1-a^2} \cdot v_6$$

$$h_{2w}=4 s \sqrt{(1-a^2)^3} \cdot v_7$$

Nachdem die Werte der Größen $h_{1x} \dots, h_{2x} \dots$ berechnet worden sind, werden durch die mechanische Quadratur auch die Werte der zwischen den Grenzen 0 und ϖ genommenen Integrale

$$a=\gamma \int\left(h_{1x} \frac{d m}{d \varpi}+h_{2x} \frac{d s}{d \varpi}\right) d \varpi \quad b=\gamma \int\left(h_{1y} \frac{d m}{d \varpi}+h_{2y} \frac{d s}{d \varpi}\right) d \varpi$$

$$c=\gamma \int\left(h_{1z} \frac{d m}{d \varpi}+h_{2z} \frac{d s}{d \varpi}\right) d \varpi \quad d=\gamma \int\left(h_{1w} \frac{d m}{d \varpi}+h_{2w} \frac{d s}{d \varpi}\right) d \varpi$$

bekannt und mit deren Hilfe gelangt man endlich zu der Formel für $h=\gamma h'$, die in der Gestalt

$$a_a x+b_a y+c_a z+d_a w=h_a$$

bei Einsetzung der gemessenen Energiemengen h_a die vermittelnde Gleichung des Problemes darstellt.

Praktischer Teil.

4.

Als Beispiel für die Anwendung der vorgetragenen Methode sollen die Energiemessungen dienen, die von Julius und seinen Gehilfen, bei der ringförmigen Sonnenfinsternis 1912 April 17 in dem bei Maastricht gelegenen Finsternislager (2 Greenw. östl. = $0^h 22^m 37^s 41$, $\varphi = +50^\circ 51' 49''.60$ ausgeführt worden sind. Es ist schon in der Einleitung dargelegt worden, daß diesen vor 19 Jahren angestellten, aber durch keine neueren ersetzbaren Messungen noch nicht die zur Bestimmung der Energieverteilung auf der Sonnenscheibe erforderliche Genauigkeit zukommt, und daß die hier mitzuteilenden Rechnungen vorwiegend die Methode prüfen sollen, zur Erreichung des eigentlichen Zieles der Rechnungen, eben der Energieverteilung, nicht entscheidend beitragen können. Die Messungen und einige, leider nicht ausreichende, Bemerkungen dazu sind von Julius in seiner Schrift „The total solar radiation during the annular eclipse on April 17, 1912“ (Astrophys. Journ. V. 37, May 1913, Number 4, Chicago 1913) veröffentlicht worden; sie sind mit einer Thermosäule und einem Drehspulengalvanometer angestellt worden, indem der Gesamt Widerstand des Thermosäulenkreises „in einigen wenigen Stufen von 1300 für vollen Sonnenschein auf 100 für die mittlere Viertelstunde und dann wieder zurück geändert“ wurde. Leider findet sich keinerlei weitere Mitteilung über die Änderung der Widerstände, weder in betreff der Zeiten noch der Größe; und besonders fehlt auch jede Angabe über die mittleren Fehler der Messungen in ihrer Abhängigkeit von der Phase der Finsternis; es wird daher nötig werden, diesen Mangel durch Annahmen zu ersetzen, die unsicher bleiben müssen. Soweit ich habe in Erfahrung bringen können — Julius ist inzwischen verstorben — ist mit großer Wahrscheinlichkeit anzunehmen, daß die von Julius angegebenen Energiemengen nicht wegen der Absorption verbessert worden sind; das muß also hier zunächst nachgeholt werden. Es geschieht mit der Hilfe des Reduktionsfaktors f , durch den die in der jeweiligen wahren Zenitdistanz z gemessenen Energiemengen auf das Zenit zurückgeführt werden. Die numerischen Werte dieses Faktors verdanke ich Herrn Wirtz, der sie dem eigenen Beobachtungsmateriale entnehmen konnte. Für das hier in Betracht kommende Bereich sind die von ihm mitgeteilten Werte, ein wenig ausgeglichen, die folgenden:

z	f	z	f	z	f
40°	1.016087	43°	1.019420	46°	1.023258
41	17142	44	20643	47	24650
42	18252	45	21922	48	26097

In der folgenden Tabelle stehen in den einzelnen Kolonnen zuerst die hier, wie weiterhin, in Einheiten der Minute ausgedrückten Weltzeiten t , sodann die wahren Zenitdistanzen des Sonnenmittelpunktes z , die auch für deren Lichtschwerpunkt angenommen worden sind, und schließlich der Reduktionsfaktor f

t	z	f	t	z	f	t	z	f
m								
-65.936	41.384	1.017562	-9.561	40.514	1.016622	+46.814	42.871	1.019266
-60.811	41.172	17328	-4.436	40.598	16711	+51.939	43.231	19698
-55.686	40.985	17125	+0.689	40.709	16829	+57.064	43.614	20164
-50.561	40.824	16952	+5.814	40.847	16977	+62.189	44.018	20664
-45.436	40.690	16809	+10.939	41.011	17154	+67.314	44.443	21200
-40.311	40.583	16695	+16.064	41.202	17362	+72.439	44.888	21775
-35.186	40.503	16611	+21.189	41.419	17600	+77.564	45.353	22387
-30.161	40.450	16556	+26.314	41.661	17869	+82.689	45.837	23036
-24.936	40.425	16529	+31.439	41.927	18169	+87.814	46.338	23722
-19.811	40.427	16531	+36.564	42.218	18502	+92.939	46.856	24447
-14.686	40.457	16562	+41.689	42.533	18867	+98.064	47.391	25209

In der weiter folgenden zweiten Tabelle enthalten die einzelnen Kolonnen zuerst die Weltzeiten t der Energiemessungen, dann die gemessene Energiemenge e_0 der bedeckten Sonnenscheibe, ferner die um die Absorption verbesserten Werte $e = e_0 f$, schließlich die als Überschüsse der Gesamtenergie E der als unbedeckt angenommenen Sonnenscheibe über e berechneten Energieabnahmen h ; die dem jeweiligen Werte von $\gamma = \text{tg}^2 r'_0$ proportionalen, während der Finsternis nur um 0.3 veränderlichen Werte von E sind dabei aus dem ersten in der Tabelle angeführten Werte von e ($e = 5047.0$) berechnet worden, der den einzigen außerhalb der Finsternis, nämlich 1^m483 vor ihrem Anfange, liegenden Wert von e darstellt.

T_e

t	e_0	e	h	t	e_0	e	h	t	e_0	e	h	t	e_0	e	h
m				m				mum				m			
-65.552	4960	5047.0	0	-4.286	1438	1462.0	3585	2.5	2.5	5044	+37.331	1313	1337.4	3709	
-62.352	4950	5036.1	11	-3.052	1342	1364.5	3682	20	20.3	5026	+38.031	1386	1411.8	3635	
-54.852	4725	4805.7	241	-1.069	1203	1223.2	3824	+17.931	50	50.9	4996	+38.948	1453	1480.1	3567
-52.669	4625	4703.7	343	-0.119	1107	1125.6	3921	+18.308	70	71.2	4976	+39.898	1550	1579.0	3468
-49.902	4460	4535.5	511	+0.698	1054	1071.7	3975	+18.674	89	90.6	4956	+40.981	1640	1670.9	3376
-48.269	4360	4433.6	613	+1.531	978	994.5	4052	+19.218	119	121.1	4926	+42.014	1738	1770.8	3276
-46.469	4280	4352.0	695	+2.198	925	940.6	4106	+19.744	149	151.6	4895	+43.198	1839	1873.9	3173
-40.686	3950	4016.0	1031	+3.448	849	863.4	4183	+20.231	178	181.1	4866	+45.331	1962	1999.6	3047
-39.069	3880	3944.7	1102	+5.764	680	691.5	4355	+20.559	198	201.5	4845	+46.348	2010	2048.7	2998
-37.486	3765	3827.7	1219	+7.114	593	603.0	4444	+21.184	238	242.2	4805	+47.698	2095	2135.5	2911
-31.552	3355	3410.6	1636	+10.088	410	417.0	4630	+21.794	277	281.9	4765	+48.898	2190	2232.6	2814
-29.419	3170	3222.5	1824	+10.641	375	381.4	4666	+22.344	317	322.6	4724	+49.881	2325	2370.4	2676
-27.602	3150	3202.1	1845	+11.238	335	340.8	4706	+22.908	356	362.3	4684	+51.214	2382	2428.8	2618
-26.219	3075	3125.8	1921	+12.908	224	227.9	4819	+25.998	545	554.7	4492	+80.731	4340	4438.9	608
-14.336	2213	2249.7	2797	+13.538	183	186.2	4861	+26.964	612	623.0	4424	+82.731	4380	4480.9	566
-12.802	2075	2109.4	2937	+14.014	153	155.6	4891	+28.681	733	745.9	4301	+84.231	4425	4527.9	519
-11.252	1934	1986.4	3060	+14.518	122	124.4	4922	+29.664	805	819.5	4227	+86.731	4520	4626.6	420
-9.819	1828	1858.4	3188	+15.161	87	88.5	4958	+30.681	872	887.8	4159	+88.231	4600	4709.4	337
-8.186	1685	1713.0	3334	+15.531	66.5	67.7	4979	+31.781	945	962.2	4085	+94.231	4590	4703.1	344
-6.302	1551	1576.9	3470	+15.941	46	46.8	5000	+32.431	993	1011.1	4036	+96.231	4660	4776.2	270
				+16.454	21	21.4	5025	+32.998	1034	1052.9	3994				
				Mini-	2.5	2.5	5044	+36.098	1222	1244.6	3802				

5.

Es soll nun aus den wegen der Absorption verbesserten Werten e die Zeit der größten Phase ermittelt werden; und zwar soll das auf die folgende Weise geschehen: Zu beiden Seiten der größten Phase wird ein das Minimum der Werte von e übertreffender Wert von e zweimal erreicht; wenn man also zwei Werte der Zeit ermittelt, zu denen

derselbe Wert von e gehört; so ist deren arithmetisches Mittel bei mäßigen Zwischenzeiten um so näher die Zeit der größten Phase, je gleichmäßiger die relative Bewegung der Mondscheibe gegen die Sonnenscheibe erfolgt und je weniger veränderlich ihre scheinbaren Halbmesser sind. Es ist wahrscheinlich, daß die Ungleichmäßigkeiten in den genannten Größen der auf diese Weise berechneten Zeit der größten Phase weniger schädlich sein werden, als die Ungenauigkeit auch guter Energiemessungen. Das angedeutete Verfahren wird folgendermaßen ausgeführt: Die 11 Werte von e , die in dem Zeitbereiche $10^m088 \leq t \leq 16^m454$ vor der Zeit der größten Phase, und die 12 Werte von e , die in dem Zeitbereiche $17^m334 \leq t \leq 22^m908$ nach der Zeit der größten Phase liegen, werden, jede Reihe für sich, durch eine quadratische Form der Größe $\tau = t - 16^m8975$ dargestellt. Die Koeffizienten der quadratischen Formen werden bei gleichem Gewichte aller Werte e nach der M. d. kl. Q. bestimmt. Es ergaben sich so die folgenden Formeln

$$e = -3.835 - 50.9757 \tau + 1.65714 \tau^2$$

$$e = -0.460 + 47.2961 \tau + 2.16840 \tau^2.$$

Bei diesen Formeln bleiben in den beiden Reihen die folgenden mittleren Fehler eines einzelnen Wertes von e übrig: 2.240 und 0.775.

Diese Formeln wurden nun in der folgenden Weise benutzt: Für τ wurde eine Reihe von positiven Werten angenommen, die sich über das Bereich von 0^m5 bis 6^m0 erstrecken, das bei der zweiten Reihe für die Größen e benutzt worden ist. Diese Werte von τ sind in der nachfolgenden Zusammenstellung mit τ_2 bezeichnet worden. Zu diesen Werten wurden nach der zweiten Formel für e die in die Zusammenstellung aufgenommenen Werte von e berechnet; und zu diesen Werten von e wurden dann nach der ersten Formel für e die Werte von τ ermittelt; sie sind in der Zusammenstellung, mit τ_1 bezeichnet, aufgeführt. Schließlich steht die nach der Formel $t_0 = 16^m8975 + \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2)$ errechnete Zeit der größten Phase

$\tau_2 = +0^m5$	$+1^m0$	$+2^m0$	$+3^m0$	$+4^m0$	$+5^m0$	$+6^m0$
$e = 23.730$	49.004	102.806	160.944	223.419	290.230	361.379
$\tau_1 = -0^m4587$	-1^m0038	-1^m9664	-2^m9497	-3^m9507	-4^m9668	-5^m9958
$t_0 = 16^m9182$	16^m8956	16^m9143	16^m9227	16^m9222	16^m9141	16^m8996

Der angenommene gleichgewichtete Mittelwert ist

$$t_0 = 16^m9124$$

6.

Es ist nun eine für das Finsternislager geltende Ephemeride der sphärisch gemessenen Größen r'_0 , s' , m' herzustellen; ob im Finsternislager Photogramme der Finsternis, die dazu dienen könnten, hergestellt worden sind, ist mir nicht bekannt; jedenfalls bin ich ihrer nicht habhaft geworden. Es blieb deshalb leider nur übrig, die Ephemeride mit der Hilfe der Jahrbücher zu berechnen; man durfte dabei auf Werte von einiger Genauigkeit nur dann hoffen, wenn die Verbesserungen der Angaben der Jahrbücher ermittelt werden konnten. Erfreulicher Weise standen nun hier die Untersuchungen zur Verfügung, die Herr Wilkens auf Grund der von ihm selbst in Kiel gemachten Photogramme derselben Finsternis angestellt hat („Über die relativen Örter der Sonne und des Mondes nach photographischen Aufnahmen der Sonnenfinsternis 1912 April 16–17“. Astr. Nachr. B. 193, Nr. 4615, Kiel 1913). Herr Wilkens hat diese Photogramme dazu benutzt, aus Sehnenmessungen die zu den Angaben

des Berliner Jahrbuches hinzuzufügenden Verbesserungen $x = d(\alpha_{\odot} - \alpha_{\odot})$, $y = d(\delta_{\odot} - \delta_{\odot})$ als Funktionen der Verbesserungen $dr_{\odot}$, $dr_{\odot}$ zu bestimmen; in jeder der beiden demgemäß aufgestellten Normalgleichungen sind nun die Koeffizienten der Größen $dr_{\odot}$, $dr_{\odot}$ nicht merkbar voneinander verschieden, sodaß die Größen $dr_{\odot}$, $dr_{\odot}$ nur zur Summe $z = dr_{\odot} + dr_{\odot}$ vereint, auftreten; ferner aber sind auch die analogen Koeffizienten von x , y , z in den beiden Gleichungen nur so wenig voneinander verschieden, daß man mit einigem Gewichte eine gesonderte Bestimmung der Werte der Größen x , y als Funktion von z nicht erreichen kann und um sie dennoch zu erlangen, eine ähnliche an einem anderen Orte ausgeführte Untersuchung zu Hilfe haben müßte. In Ermangelung einer solchen Hilfe muß man zu Notbehelfen greifen.

Zunächst setzen wir nur das gleichgewichtete Mittel der Wilkensen Gleichungen in der folgenden Gestalt an:

$$+ 4.281 x + 3.185 y = - 64.564 + 3.8220 z$$

Sodann verschaffen wir uns einen Wert von z , und zwar dadurch, daß wir die Unterschiede der geozentrischen Werte von $r_{\odot}$, $r_{\odot}$, die das Berliner Jahrbuch für 1912 und verändert für 1930 gibt, nämlich der Werte

	$r_{\odot}$	$r_{\odot}$
1912	959.63	932.59
1930	961.50	933.96

als Verbesserungen der Werte von 1912 annehmen. Es entstehen so die Werte ($dr_{\odot} = + 1.87$), $dr_{\odot} = + 1.37$. Infolge eines Schreibfehlers ist statt des ersten, durch die Einklammerung ausgeschlossenen Wertes der Wert $dr_{\odot} = + 2.07$ angenommen worden; die erst später bemerkte kleine Abweichung wird vermutlich durch die Unsicherheit der eingeklammerten Zahl gedeckt sein. Wir nehmen also den Wert $z = + 3.44$ an. Ferner können für die Verbesserung des Mondortes, wie schon Herr Wilkens bemerkt hat, die in American Ephemeris and Nautical Almanac für 1912 S. X für die vorliegende Finsternis angegebenen, von Newcomb nach neueren Sternbedeckungen berechneten Werte $d\lambda_{\odot} = + 9.8$, $d\beta_{\odot} = + 1.7$ benutzt werden, die Herr Wilkens auf $d\alpha_{\odot} = + 8.7$, $d\delta_{\odot} = + 5.1$ umgerechnet hat. Diese geozentrischen Werte gehen für Kiel in $d\alpha_{\odot} = + 8.8$, $d\delta_{\odot} = + 5.2$ über. Setzt man nun diese Werte und den angegebenen Wert von z in die Normalgleichung ein, so erhält sie die Gestalt

$$a) + 4.281 d\alpha_{\odot} + 3.185 d\delta_{\odot} = + 2.895$$

Um nunmehr die Werte von $d\alpha_{\odot}$, $d\delta_{\odot}$ einzeln zu erhalten, bedarf man noch einer Gleichung zwischen diesen beiden Größen; ich habe mir diese durch eine Annahme verschafft, die ohne beweisbar zu sein, doch einige Wahrscheinlichkeit für sich hat; die nur langsam veränderliche Lage der Bahnebene der Sonne gegen den Äquator darf nämlich als merkbar fehlerfrei betrachtet werden; infolge dessen wird es sich bei der Verbesserung des Sonneortes wesentlich um eine Verschiebung der Sonne längs ihrer Bahn handeln; wenn das der Fall ist, so besteht zwischen den Größen $d\alpha_{\odot}$, $d\delta_{\odot}$ die mit der Schiefe der Ekliptik ε gebildete Formel $d\delta_{\odot} = \operatorname{tg} \varepsilon \cos^2 \delta_{\odot} \cos \alpha_{\odot} d\alpha_{\odot}$ oder numerisch für die Mitte der Finsternis die Gleichung

$$b) d\delta_{\odot} = + 0.3786 d\alpha_{\odot}$$

Aus den beiden Gleichungen a) und b) folgen dann die Werte

$$d\alpha_{\odot} = +0.53 \quad d\delta_{\odot} = +0.20$$

Es entbehrt vielleicht nicht des Interesses zu sehen, welche Beziehung sich aus der für den Mond gemachten Annahme, daß es sich auch bei den Verbesserungen $d\lambda_{\odot}$, $d\beta_{\odot}$ um eine Verschiebung des Mondes längs seiner Bahn handele, ergibt. Es ist aber dabei zu berücksichtigen, daß die Annahme bei dem Monde weit weniger als bei der Sonne berechtigt ist, weil die Lage der Mondbahn gegen die Ekliptik viel schneller veränderlich ist und die Bewegung des Mondes viel stärker von der Regelmäßigkeit abweicht, als die Bewegung der Sonne. Aus den Längen und Breiten des Mondes für April 16.0, 16.5, 17.0 Weltzeit folgen mit Berücksichtigung einer täglichen Abnahme der Länge des Knotens der Mondbahn im Betrage von 3.177 für April 17.0 Weltzeit für diese Länge und für die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik die Werte $\theta = 21^{\circ}35.7$, $i = 5^{\circ}18.0$; und die Formel

$$d\beta_{\odot} = \operatorname{tg} i \cos^2 \beta_0 \cos(\lambda_{\odot} - \theta) d\lambda_{\odot}$$

liefert für dieselbe Zeit mit Hilfe der dann geltenden Werte $\lambda_{\odot} = 27^{\circ}16.44$ und $\beta_{\odot} = +0^{\circ}31.54$ die Gleichung

$$d\beta_{\odot} = +0.0923 d\lambda_{\odot}$$

Zu dem angeführten Werte $d\lambda_{\odot} = +9.8$ gehört dann statt des gleichfalls angeführten Wertes $d\beta_{\odot} = +1.7$ der Wert $d\beta_{\odot} = +0.9$; das ist unter schwierigen Verhältnissen eine erträgliche Abweichung, die vielleicht zu Gunsten der Annahme für die einfacheren Verhältnisse der Sonne gedeutet werden kann.

Zusammenfassend werden also die folgenden Verbesserungen der geozentrischen Angaben des Berliner Jahrbuches angenommen

$$\begin{array}{lll} \text{B. Z. } d\alpha_{\odot} = +0.53 & d\delta_{\odot} = +0.20 & dr_{\odot} = +2.07 \\ d\alpha_{\odot} = +8.70 & d\delta_{\odot} = +5.10 & dr_{\odot} = +1.37 \end{array}$$

Da wir in den folgenden Rechnungen den Nautical Almanac benutzen werden, möge hinzugefügt werden, daß für ihn wegen der gleichen benutzten Quellen, die für das Berliner Jahrbuch angeführten Werte der Größen $d\alpha_{\odot}$, $d\delta_{\odot}$, $d\alpha_{\odot}$, $d\delta_{\odot}$ unverändert gelten; durch die Vergleichung der von beiden Jahrbüchern für April 17.0 Weltzeit angegebenen geozentrischen Werte von $r_{\odot}$, $r_{\odot}$ erhält man dagegen die für den Nautical Almanac zu benutzenden geozentrischen Verbesserungen

$$\text{N. A. } dr_{\odot} = +0.53 \\ dr_{\odot} = -0.17$$

Der letzte Wert ist innerhalb der Finsternis gegen diesen für die größte Phase geltenden Wert von -0.16 bis -0.19 veränderlich. Zur Berechnung der scheinbaren Örter der Sonne und des Mondes für das Finsternislager bedarf man noch der Werte der Parallaxen beider Körper; daß der den beiden Jahrbüchern gemeinsame mittlere Wert $\pi_{\odot} = 8.80$ unverändert beibehalten wird, bedarf keiner Erklärung; für die Zeit der Finsternis sind aber die augenblicklichen Werte der Parallaxe des Mondes nach dem Nautical Almanac um 0.04 kleiner, als nach dem Berliner Jahrbuche, das den Mittelwert $\pi_{\odot} = 3422.27$ benutzt; ferner führt die American Ephemeris an der genannten Stelle neben den von uns benutzten Werten von $d\lambda_{\odot}$, $d\beta_{\odot}$ als gleichfalls für die Finsternis geltend und aus derselben Quelle fließend den Wert $d\pi_{\odot} = +0.4$ an und gibt, vermutlich mit Rücksicht auf diese Änderung,

den Mittelwert $\pi_c = 3422.68$ mit dem Zusatze an, daß für die Berechnung der Finsternis der Hansensche mittlere Wert $\pi_c = 3422.23$ benutzt worden sei. Ich trage nun aber Bedenken den großen Wert $d\pi = +0.4$ ebenso anzunehmen, wie es mit den zugehörigen Werten von $d\lambda_c$, $d\beta_c$ geschehen ist, und nehme an, daß die vom Berliner Jahrbuche gegebenen augenblicklichen Werte von π_c der Verbesserungen nicht bedürfen; dann sind an die augenblicklichen Werte der Parallaxen des Nautical Almanac die folgenden Verbesserungen anzubringen

$$\begin{aligned} \text{N. A. } d\pi_\odot &= 0.00 \\ d\pi_c &= +0.04 \end{aligned}$$

Die Unsicherheit der angenommenen Werte der Verbesserungen berechtigt nicht eben zu großer Zuversicht, daß sich die nunmehr zu besprechende Ephemeride mit derjenigen vergleichen könne, die durch Photogramme, die im Finsternislager selbst hergestellt worden waren, hätte erlangt werden können. Es mag zweckmäßig sein, über die mit den angegebenen Verbesserungen berechnete Ephemeride vorgreifend das Folgende zu bemerken: Die größte Phase tritt zur Zeit $t = +16^m 9.540$, also $2^s 50$ später ein, als sich aus den Energiemessungen ergeben hat. Das Aussehen der Finsternis zu dieser Zeit wird durch die folgenden für die Himmelskugel geltenden Werte bestimmt: $r'_0 = 957.63$, $s' = 956.71$, $m' = 1.71$; es ist daraus zu ersehen, daß die Finsternis nach der Rechnung nicht ringförmig wird, wie sie doch offenbar gewesen ist, sondern partiell bleibt, daß aber die Mondscheibe nur um 0.79 nach dem Mittelpunkt der Sonnenscheibe zu verschoben zu werden braucht, um eine innere Ränderberührung der beiden Scheiben herbeizuführen und die Finsternis durch eine weitere Verschiebung ringförmig zu machen, bis sie durch eine weitere Verschiebung um 0.92 zentral wird; in dieser Stellung würde die Sonnenscheibe bis auf einen gleichbreiten Kreisring von 0.92 Breite von der Mondscheibe verdeckt sein. Man wird sich also wohl, namentlich mit Rücksicht auf die noch nicht zureichende Genauigkeit der Energiemessungen, mit der berechneten Ephemeride zufrieden geben können.

7.

Man entnimmt nun dem Nautical Almanac für äquidistante Zeiten t ($\Delta t = 10^m$) die geozentrischen Rektaszensionen, Deklinationen und Halbmesser der Sonne und des Mondes und überdies die Parallaxe des Mondes und fügt den Größen die ermittelten Verbesserungen hinzu; das ist in den linken Teilen der folgenden Tabellen geschehen; die rechten Teile der Tabellen enthalten die scheinbaren Örter und Halbmesser, so, wie sie sich in bekannter Weise aus den Daten der linken Seiten für das Finsternislager (λ Greenw. östl. = $0^h 22^m 37.41$, $\varphi = +50^\circ 51' 49.6$; $\log q = 9.999129$, $\varphi' + 50^\circ 40' 32.9$) ergibt.

t	$\odot$					
	geozentrisch			Finsternislager		
	R	Dekl.	Halbm.	$R = \alpha'_\odot$	Dekl. = $\delta'_\odot$	Hm. = r'_0
— 100 ^m	25°5' 8"12	10°25'20"03	957"608	25°5' 9"98	10°25'14"32	957"65
— 90	5 31.30	25 28.85	.607	5 32.92	25 23.15	.65
— 80	5 54.48	25 37.66	.605	5 55.87	25 31.97	.64
— 70	6 17.66	25 46.47	.603	6 18.81	25 40.79	.64
— 60	6 40.85	25 55.27	.601	6 41.76	25 49.60	.64
— 50	7 4.03	26 4.08	.599	7 4.69	25 58.42	.64

⊙						
t	geozentrisch			Finsternislager		
	R	Dekl.	Halbm.	R = α'⊙	Dekl. = δ'⊙	Hm. = r'⊙
— 40 ^m	25°7'27"21	10°26'12"89	957"597	25°7'27"63	10°26' 7"23	957"64
— 30	7 50.39	26 21.69	.596	7 50.56	26 16.04	.63
— 20	8 13.57	26 30.50	.594	8 13.50	26 24.85	.63
— 10	8 36.75	26 39.30	.592	8 36.43	26 33.64	.63
0	8 59.93	26 48.10	.590	8 59.37	26 42.44	.63
+ 10	9 23.11	26 56.90	.588	9 22.30	26 51.24	.63
+ 20	9 46.29	27 5.70	.586	9 45.24	27 0.03	.63
+ 30	10 9.47	27 14.51	.585	10 8.18	27 8.83	.63
+ 40	10 32.65	27 23.31	.583	10 31.12	27 17.62	.62
+ 50	10 55.83	27 32.11	.581	10 54.06	27 26.41	.62
+ 60	11 19.02	27 40.91	.579	11 17.02	27 35.19	.62
+ 70	11 42.20	27 49.71	.577	11 39.97	27 43.98	.62
+ 80	12 5.38	27 58.51	.575	12 2.93	27 52.76	.61
+ 90	12 28.56	28 7.31	.574	12 25.89	28 1.54	.61
+ 100	12 51.75	28 16.11	.572	12 48.87	28 10.32	.61
+ 110	13 14.93	28 24.91	.570	13 11.84	28 19.09	.61
+ 120	13 38.12	28 33.71	.568	13 34.82	28 27.87	.61
+ 130	14 1.30	28 42.51	.566	13 57.81	28 36.64	.60
+ 140	14 24.48	28 51.31	.564	14 20.80	28 45.42	.60
Konstante Parallaxe 8"77						

⊙							
t	geozentrisch				Finsternislager		
	R	Dekl.	log sin Paral.	Halbm.	R = α'⊙	Dekl. = δ'⊙	Hm. = s'
— 100 ^m	24°16' 2"25	10°34'56"4	8.224 434	943"790	24°27'53"09	9°57' 5"0	955"45
— 90	21 9.60	37 27.1	465	.857	31 29.91	59 42.3	.65
— 80	26 17.10	39 57.8	497	.923	35 5.72	10 2 18.9	.83
— 70	31 24.60	42 28.4	528	.991	38 40.50	4 54.8	956.00
— 60	36 32.25	44 59.0	560	944.057	42 14.61	7 30.0	.16
— 50	41 40.05	47 29.5	591	.124	45 48.17	10 4.4	.28
— 40	46 48.00	49 59.9	622	.191	49 21.40	12 38.1	.40
— 30	51 56.10	52 30.3	654	.257	52 54.46	15 11.1	.50
— 20	57 4.30	55 0.6	685	.324	56 27.47	17 43.2	.57
— 10	25 2 12.60	57 30.9	716	.390	25 0 0.61	20 14.7	.64
0	7 21.00	11 0 1.1	747	.457	3 34.04	22 45.3	.68
+ 10	12 29.55	2 31.2	778	.524	7 8.01	25 15.1	.70
+ 20	17 38.25	5 1.2	810	.590	10 42.69	27 44.0	.71
+ 30	22 47.10	7 31.2	841	.656	14 18.24	30 12.2	.69
+ 40	27 56.10	10 1.2	872	.723	17 54.84	32 39.7	.66
+ 50	33 5.25	12 31.0	903	.789	21 32.65	35 6.2	.61
+ 60	38 14.55	15 0.8	934	.855	25 11.86	37 32.0	.55
+ 70	43 24.00	17 30.5	965	.922	28 52.62	39 57.0	.47
+ 80	48 33.45	20 0.2	996	.987	32 34.94	42 21.2	.37
+ 90	53 43.05	22 29.8	8.225 027	945.053	36 19.13	44 44.6	.25
+ 100	58 52.80	24 59.3	058	.120	40 5.36	47 7.2	.12
+ 110	26 4 2.70	27 28.7	089	.185	43 53.78	49 29.0	955.98
+ 120	9 12.75	29 58.1	120	.251	47 44.53	51 50.1	.81
+ 130	14 22.95	32 27.4	151	.317	51 37.75	54 10.4	.64
+ 140	19 33.30	34 56.6	181	.382	55 33.59	56 29.9	.46

Nun wird mit den für das Finsternislager geltenden Werten m und s nach den folgenden Formeln berechnet:

$$\Delta \alpha' = \alpha'_{\odot} - \alpha'_{\odot} \quad \Delta \delta' = \delta'_{\odot} - \delta'_{\odot} \quad \Sigma \delta' = \delta'_{\odot} + \delta'_{\odot}$$

$$x = m \sin p = \frac{\operatorname{tg} m' \sin p}{\operatorname{tg} r'_0} = \frac{\cos \frac{\Delta \delta' + \Sigma \delta'}{2} \cdot \sin \Delta \alpha'}{\operatorname{tg} r'_0 \left(\cos \Delta \delta' \cdot \cos^2 \frac{\Delta \alpha'}{2} - \cos \Sigma \delta' \cdot \sin^2 \frac{\Delta \alpha'}{2} \right)}$$

$$y = m \cos p = \frac{\operatorname{tg} m' \cos p}{\operatorname{tg} r'_0} = \frac{\sin \Delta \delta' \cdot \cos^2 \frac{\Delta \alpha'}{2} + \sin \Sigma \delta' \cdot \sin^2 \frac{\Delta \alpha'}{2}}{\operatorname{tg} r'_0 \left(\cos \Delta \delta' \cdot \cos^2 \frac{\Delta \alpha'}{2} - \cos \Sigma \delta' \cdot \sin^2 \frac{\Delta \alpha'}{2} \right)}$$

$$m = \frac{\operatorname{tg} m'}{\operatorname{tg} r'_0} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{tg} m' = m \operatorname{tg} r'_0$$

$$s = \frac{\sin s'}{\operatorname{tg} r'_0 \cos (m' - s') \cos m'}$$

Die Größe p , die den am Sonnenmittelpunkt gemessenen und von Nord über Ost positiv gerechneten Positionswinkel des Mondmittelpunktes bedeutet, braucht nicht berechnet zu werden.

t	$\log x$	$\log y$	$\log m$	$\log s$	t	$\log x$	$\log y$	$\log m$	$\log s$
— 100 ^m	0.3618809 _n	0.2459796 _n	0.4620879	9.999051	+ 30 ^m	9.4095058	9.2821926	9.5055640	9.999574
— 90	0.3224441 _n	0.2060706 _n	0.4224767	133	+ 40	9.6585146	9.5268808	9.7530381	562
— 80	0.2793185 _n	0.1623261 _n	0.3791228	206	+ 50	9.8165723	9.6815307	9.9098992	541
— 70	0.2317159 _n	0.1139110 _n	0.3312212	275	+ 60	9.9328984	9.7948627	0.0251840	514
— 60	0.1784633 _n	0.0596744 _n	0.2776075	343	+ 70	0.0251687	9.8841993	0.1164431	480
— 50	0.1179559 _n	9.9980412 _n	0.2166880	391	+ 80	0.1018011	9.9578823	0.1920678	440
— 40	0.0477901 _n	9.9265469 _n	0.1460378	442	+ 90	0.1674525	0.0205302	0.2567023	392
— 30	9.9641652 _n	9.8413562 _n	0.0618443	484	+ 100	0.2249940	0.0749806	0.3132069	341
— 20	9.8605728 _n	9.7359991 _n	9.9576143	515	+ 110	0.2763038	0.1231034	0.3634580	287
— 10	9.7241892 _n	9.5972372 _n	9.8203766	545	+ 120	0.3226693	0.1662171	0.4087538	220
0	9.5239571 _n	9.3937194 _n	9.6189744	564	+ 130	0.3650228	0.2052245	0.4500179	152
+ 10	9.1396189 _n	9.0016672 _n	9.2319336	577	+ 140	0.4040626	0.2408174	0.4879472	084
+ 20 ^m 8.7708033 8.6619698 8.8736529 9.999581									

Zu allen Werten mit den Charakteristiken 9, 8 . . . ist hier und weiterhin — 10 hinzuzufügen.

Es soll nun zunächst das Verhalten der Größen a , $\frac{da}{dt}$, $\frac{d^2a}{dt^2}$ in der Nachbarschaft der größten Phase ($\frac{da}{dt} = 0$) untersucht werden. Zu diesem Zwecke werden die Werte von x , y für die vier, die größte Phase einschließenden Zeiten $t = 0^m$, 10^m , 20^m , 30^m durch die folgenden Potenzreihen nach $\tau = \frac{1}{3}(t - 15^m)$ dargestellt:

$$x = -0.0395558 + 0.0984518 \tau + 0.0000942 \tau^2 + 0.0000037 \tau^3$$

$$y = -0.0271338 + 0.0731741 \tau - 0.0001002 \tau^2 + 0.0000039 \tau^3$$

Diese zwei Reihen bleiben für jede Zeit innerhalb des Bereiches $0^m \leq t \leq 30^m$ auch für die geringste Entfernung des Mondmittelpunktes vom Sonnenmittelpunkte gültig.

Durch die Differentiation dieser Formeln erhält man hieraus die Reihen für $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$; und durch die Formeln

$$m^2 = x^2 + y^2$$

$$m \frac{dm}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}$$

$$m \frac{d^2 m}{dt^2} + \left(\frac{dm}{dt} \right)^2 = x \frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + y \frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

gelangt man für das Bereich $0^m \leq t \leq 30^m$ zu den Werten von m , $\frac{dm}{dt}$, $\frac{d^2 m}{dt^2}$ und, da die mechanische Berechnung von s , $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\Delta t} \left(s'(t) - \frac{1}{6} s''(t) + \dots \right)$, $\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{1}{(\Delta t)^2} (s''(t) - \dots)$ leicht ausgeführt werden kann, so findet man nach der Formel $a = m - s$ auch die Werte von a , $\frac{da}{dt}$, $\frac{d^2 a}{dt^2}$; und man kann nach der Bedingungsgleichung $\frac{da}{dt} = 0$ die Zeit der größten Phase und die für sie geltenden Werte a_0 , $\left(\frac{d^2 a}{dt^2} \right)_0$ von a , $\frac{d^2 a}{dt^2}$ bestimmen. Mit Berücksichtigung weiterer Bedürfnisse stellt man nun, indem hier und weiterhin bei den Größen $\frac{d}{dt}$, $\frac{d^2}{dt^2}$ eine Minute m. Zt. als Zeiteinheit angenommen wird, die folgende Tabelle her:

t	m	$m \frac{dm}{dt}$	s	$m \frac{ds}{dt}$	a	$m \frac{da}{dt}$
+ 0 ^m	0.415886	-0.0102056	0.998997	+0.0000013	-0.583111	-0.0102069
+ 5	0.293223	-0.0071925	0.999014	+0.0000006	-0.705791	-0.0071931
+ 10	0.170582	-0.0041836	0.999026	+0.0000003	-0.828444	-0.0041839
+ 15	0.047854	-0.0011758	0.999033	+0.0000001	-0.951179	-0.0011759
+ 20	0.074757	+0.0018341	0.999035	-0.0000001	-0.924278	+0.0018343
+ 25	0.197484	+0.0048491	0.999030	-0.0000004	-0.801546	+0.0048495
+ 30	0.320305	+0.0078722	0.999020	-0.0000008	-0.678715	+0.0078730

Aus den Werten von $m \frac{da}{dt}$ erkennt man, daß die größte Phase zur Zeit $t_0 = 16^m 95403$ Weltzeit eintritt; bezeichnet man die für diese Zeit geltenden Größen wieder mit dem Index 0, so findet man direkt nach den Reihen die folgenden Werte.

$$\begin{array}{lll} \log x_0 = 7.02776 n & \log \left(\frac{dx}{dt} \right)_0 = 8.29459 & \log \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)_0 = 4.89653 \\ \log y_0 = 7.15746 & \log \left(\frac{dy}{dt} \right)_0 = 8.16477 & \log \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right)_0 = 4.88366 n \\ \log m_0 = 7.25267 & \log \left(\frac{dm}{dt} \right)_0 = 4.51102 n & \log \left(\frac{d^2 m}{dt^2} \right)_0 = 9.52683 \end{array}$$

Ferner ist $\log s_0 = 9.999531$ und $\frac{d^2 s}{dt^2} = 0$; damit wird $\log a_0 = 9.998802 n$, $\log \left(\frac{d^2 a}{dt^2} \right)_0 = 9.52683$ und nach der Formel $\left(\frac{dt}{d\varpi} \right)_0 = \sqrt{\frac{2(1-a_0)}{\left(\frac{d^2 a}{dt^2} \right)_0}}$ findet man $\log \left(\frac{dt}{d\varpi} \right)_0 = 0.53732$.

B_1

ϖ	t	α	s	$\log \Delta \varpi \frac{dt}{d\varpi}$	$\log \Delta \varpi \frac{dm}{d\varpi}$	$\log \Delta \varpi \frac{ds}{d\varpi}$
0°	m	— 64.1590	+ 1.00000	0.99842	— ∞	— ∞
2	— 64.0613	+ 0.99757	43	9.29062	7.68664 _n	4.467
4	— 63.7687	+ 0.99028	43	9.59067	7.98665 _n	4.767
6	— 63.2827	+ 0.97818	44	9.76507	8.16096 _n	4.941
8	— 62.6053	+ 0.96132	45	9.88766	8.28343 _n	5.064
10	— 61.7400	+ 0.93978	47	9.98154	8.37715 _n	5.128
12	— 60.6903	+ 0.91366	48	0.05699	8.45241 _n	5.203
14	— 59.4613	+ 0.88311	50	0.11951	8.51470 _n	5.266
16	— 58.0588	+ 0.84826	52	0.17236	8.56730 _n	5.318
18	— 56.4888	+ 0.80928	53	0.21769	8.61234 _n	5.332
20	— 54.7597	+ 0.76637	55	0.25680	8.65118 _n	5.371
22	— 52.8792	+ 0.71973	57	0.29078	8.68488 _n	5.405
24	— 50.8559	+ 0.66959	59	0.32034	8.71419 _n	5.399
26	— 48.7004	+ 0.61619	61	0.34607	8.73967 _n	5.425
28	— 46.4226	+ 0.55980	64	0.36839	8.76171 _n	5.409
30	— 44.0333	+ 0.50069	67	0.38762	8.78069 _n	5.429
32	— 41.5439	+ 0.43914	70	0.40404	8.79682 _n	5.404
34	— 38.9669	+ 0.37547	73	0.41781	8.81033 _n	5.418
36	— 36.3143	+ 0.30997	76	0.42911	8.82137 _n	5.429
38	— 33.5991	+ 0.24297	78	0.43811	8.83006 _n	5.438
40	— 30.8341	+ 0.17479	80	0.44489	8.83653 _n	5.399
42	— 28.0326	+ 0.10376	83	0.44951	8.84080 _n	5.404
44	— 25.2080	+ 0.03623	85	0.45199	8.84295 _n	5.355
46	— 22.3744	— 0.03347	87	0.45218	8.84296 _n	5.297
48	— 19.5473	— 0.10300	89	0.45019	8.84082 _n	5.295
50	— 16.7405	— 0.17203	91	0.44597	8.83659 _n	5.224
52	— 13.9671	— 0.24021	93	0.43964	8.83014 _n	5.217
54	— 11.2405	— 0.30722	95	0.43118	8.82146 _n	5.130
56	— 8.5742	— 0.37271	97	0.42033	8.81042 _n	5.119
58	— 5.9804	— 0.43639	98	0.40704	8.79693 _n	5.009
60	— 3.4726	— 0.49793	99	0.39100	8.78081 _n	4.993
62	— 1.0629	— 0.55704	0.99900	0.37200	8.76183 _n	4.974
64	+ 1.2351	— 0.61343	00	0.35002	8.73983 _n	4.827
66	+ 3.4109	— 0.66693	01	0.32466	8.71438 _n	4.626
68	+ 5.4564	— 0.71697	01	0.29541	8.68507 _n	4.596
70	+ 7.3570	— 0.76361	02	0.26173	8.65138 _n	4.563
72	+ 9.1065	— 0.80652	02	0.22290	8.61253 _n	4.524
74	+ 10.6958	— 0.84550	03	0.17789	8.56752 _n	4.479
76	+ 12.1151	— 0.88035	03	0.12520	8.51492 _n	4.426
78	+ 13.3624	— 0.91090	03	0.06308	8.45264 _n	4.063
80	+ 14.4271	— 0.93701	03	9.98787	8.37737 _n	3.985
82	+ 15.3059	— 0.95856	03	9.89438	8.28366 _n	3.894
84	+ 15.9942	— 0.97542	0.99903	9.77274	8.16122 _n	3.778

 B_3

ϖ	t	α	s	$\log \Delta \varpi \frac{dt}{d\varpi}$	$\log \Delta \varpi \frac{dm}{d\varpi}$	$\log \Delta \varpi \frac{ds}{d\varpi}$
96°	+ 17.9140	— 0.97542	0.99903	9.77263	8.16122	— ∞
98	+ 18.6025	— 0.95856	04	9.89421	8.28368	— ∞
100	+ 19.4809	— 0.93701	04	9.98769	8.37737	3.988 _n
102	+ 20.5451	— 0.91090	04	0.06283	8.45264	4.063 _n
104	+ 21.7902	— 0.88035	03	0.12503	8.51494	4.125 _n
106	+ 23.2097	— 0.84550	03	0.17754	8.56752	4.479 _n
108	+ 24.7986	— 0.80652	03	0.22240	8.61252	4.523 _n
110	+ 26.5449	— 0.76361	03	0.26109	8.65137	4.562 _n
112	+ 28.4435	— 0.71697	03	0.29470	8.68507	4.596 _n
114	+ 30.4836	— 0.66683	02	0.32381	8.71437	4.625 _n
116	+ 32.6549	— 0.61343	00	0.34906	8.73982	4.626 _n
118	+ 34.9474	— 0.55704	00	0.37095	8.76185	4.848 _n
120	+ 37.3496	— 0.49793	0.99899	0.38978	8.78083	4.867 _n
122	+ 39.8502	— 0.43639	98	0.40578	8.79693	5.008 _n
124	+ 42.4366	— 0.37271	97	0.41911	8.81044	5.021 _n
126	+ 45.0960	— 0.30722	96	0.42989	8.82147	5.032 _n
128	+ 47.8142	— 0.24021	95	0.43825	8.83016	5.137 _n
130	+ 50.5778	— 0.17203	94	0.44436	8.83660	5.143 _n
132	+ 53.3740	— 0.10300	92	0.44825	8.84084	5.226 _n
134	+ 56.1876	— 0.03347	90	0.45001	8.84296	5.228 _n
136	+ 59.0063	+ 0.03623	88	0.44966	8.84295	5.295 _n
138	+ 61.8154	+ 0.10576	87	0.44717	8.84083	5.292 _n
140	+ 64.6021	+ 0.17479	84	0.44252	8.83655	5.346 _n
142	+ 67.3517	+ 0.24297	82	0.43566	8.83009	5.339 _n
144	+ 70.0510	+ 0.30997	80	0.42655	8.82139	5.381 _n
146	+ 72.6874	+ 0.37547	78	0.41506	8.81032	5.415 _n
148	+ 75.2477	+ 0.43914	76	0.40115	8.79685	5.401 _n
150	+ 77.7201	+ 0.50069	73	0.38457	8.78068	5.426 _n
152	+ 80.0923	+ 0.55980	71	0.36522	8.76171	5.406 _n
154	+ 82.3533	+ 0.61619	69	0.34273	8.73968	5.384 _n
156	+ 84.4923	+ 0.66959	67	0.31689	8.71421	5.358 _n
158	+ 86.4987	+ 0.71973	64	0.28719	8.68493	5.328 _n
160	+ 88.3633	+ 0.76637	62	0.25309	8.65122	5.294 _n
162	+ 90.0775	+ 0.80928	60	0.21388	8.61237	5.255 _n
164	+ 91.6333	+ 0.84826	58	0.16854	8.56737	5.210 _n
166	+ 93.0237	+ 0.88311	56	0.11562	8.51474	5.195 _n
168	+ 94.2416	+ 0.91366	55	0.05307	8.45245	5.132 _n
170	+ 95.2818	+ 0.93978	54	9.97756	8.37718	5.057 _n
172	+ 96.1395	+ 0.96132	53	9.88366	8.28348	4.963 _n
174	+ 96.8106	+ 0.97818	52	9.76105	8.16102	4.840 _n
176	+ 97.2922	+ 0.99028	51	9.58662	7.98669	4.666 _n
178	+ 97.5821	+ 0.99757	51	9.28655	7.68669	4.366 _n
180	+ 97.6789	+ 1.00000	0.99851	— ∞	— ∞	— ∞

 B_3

ϖ	t	α	$\log \Delta \varpi \frac{dt}{d\varpi}$	$\log \Delta \varpi \frac{dm}{d\varpi}$	ϖ	t	α	$\log \Delta \varpi \frac{dt}{d\varpi}$	$\log \Delta \varpi \frac{dm}{d\varpi}$	ϖ	t	α	$\log \Delta \varpi \frac{dt}{d\varpi}$	$\log \Delta \varpi \frac{dm}{d\varpi}$			
84°	m	15.9942	— 0.97542	9.17068	7.55914 _n	88°	m	16.7980	— 0.99481	8.73798	7.08488 _n	92°	m	17.1698	— 0.99344	8.81545	7.18157
84.5	16.1364	— 0.97890	9.13389	7.52194 _n	88.5	16.8479	— 0.99588	8.65459	6.96005 _n	93.0	17.2408	— 0.99177	8.88439	7.26049			
85.0	16.2664	— 0.98207	9.09378	7.48096 _n	89.0	16.8889	— 0.99663	8.57097	6.78406 _n	93.5	17.3231	— 0.98980	8.94590	7.32716			
85.5	16.3845	— 0.98495	9.04945	7.43561 _n	89.5	16.9234	— 0.99709	8.50658	6.48316 _n	94.0	17.4172	— 0.98753	9.00041	7.38482			
86.0	16.4906	— 0.98753	9.00041	7.38483 _n	90.0	16.9540	— 0.99724	8.47817	— ∞	94.5	17.5236	— 0.98495	9.04935	7.43562			
86.5	16.5847	— 0.98980	8.94573	7.32717 _n	90.5	16.9846	— 0.99709	8.50611	6.48315	95.0	17.6417	— 0.98207	9.09354	7.48096			
87.0	16.6671	— 0.99177	8.88434	7.26048 _n	91.0	17.0190	— 0.99663	8.57057	6.78411	95.5	17.7717	— 0.97890	9.13378	7.52186			
87.5	16.7381	— 0.99344	8.81533	7.18155 _n	91.5	17.0601	— 0.99588	8.65468	6.96010	96.0	17.9140	— 0.97542	9.17058	7.55918			
					92.0	17.1099	— 0.99481	8.73812	7.08482								

$$s = 0.99903 \quad \log \Delta \varpi \frac{ds}{d\varpi} = -\infty$$

Die beiden Tabellen B_1, B_3 sind für die weiteren Rechnungen stets ohne daß eine Interpolation nötig würde, zu benutzen; bei der Tabelle B_2 trifft das aber nur bei partiell bleibenden Finsternissen zu; bei Finsternissen, die total oder ringförmig werden, wird zwei Mal eine Interpolation nötig, nämlich für diejenigen Zeiten, in der die Totalität oder die Ringförmigkeit beginnt und endet. Diese beiden Zeiten begrenzen nämlich das Zeitintervall, innerhalb dessen die Größe der Energieabnahme bei der Totalität nicht besonders berechnet zu werden braucht, weil sie der Gesamtintensität der gänzlich verdeckten Sonnenscheibe gleich ist; bei der Ringförmigkeit aber nicht nach den sonst stets anzuwendenden Formeln für den Fall I, sondern nach den Formeln für den Fall II berechnet werden müssen. Die Werte von ϖ für die genannten beiden Zeiten entsprechen bei der Totalität dem Werte $a = -1$, bei der Ringförmigkeit aber dem Werte $a = 1 - 2s$; die Wertpaare von ϖ werden also bei der Totalität durch die Formel $\operatorname{tg}^2 \varpi = \frac{2}{-(1+a_0)}$, bei der Ringförmigkeit aber durch die Formel $\operatorname{tg}^2 \varpi = \frac{2s}{1-a_0-2s}$ bestimmt.

Es kommen nun hier, da die Finsternis nach der Rechnung partiell bleibt, nur die Formeln für den Fall I zur Anwendung; wir führen deshalb nur die eine kontinuierliche Reihe der nach der Formel

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1-a^2}{(a+2s)^2-1}$$

berechneten Werte des Modulwinkels θ an:

ϖ	θ	ϖ	θ	ϖ	θ	ϖ	θ	ϖ	θ
0°	0° 0.0	42°	28° 15.1	84° 0	45° 50.0	96°	45° 50.0	138°	28° 15.0
2	1 24.9	44	29 26.0	84.5	46 5.3	98	45 6.0	140	27 2.7
4	2 49.7	46	30 35.4	85.0	46 23.4	100	44 33.2	142	25 49.0
6	4 14.4	48	31 43.0	85.5	46 45.9	102	44 2.9	144	24 34.1
8	5 39.0	50	32 49.0	86.0	47 14.6	104	43 31.9	146	23 18.0
10	7 3.4	52	33 53.1	86.5	47 52.3	106	42 58.7	148	22 0.9
12	8 27.5	54	34 55.1	87.0	48 43.3	108	42 22.9	150	20 42.8
14	9 51.3	56	35 55.0	87.5	49 53.9	110	41 44.2	152	19 23.7
16	11 14.7	58	36 52.6	88.0	51 32.9	112	41 2.6	154	18 3.9
18	12 37.6	60	37 47.9	88.5	53 51.8	114	40 18.1	156	16 43.3
20	14 0.1	62	38 40.6	89.0	56 50.4	116	39 30.7	158	15 22.0
22	15 22.0	64	39 30.7	89.5	59 53.0	118	38 40.6	160	14 0.1
24	16 43.3	66	40 18.1	90.0	61 15.6	120	37 47.9	162	12 37.6
26	18 4.0	68	41 2.6	90.5	59 53.0	122	36 52.6	164	11 14.6
28	19 23.8	70	41 44.2	91.0	56 50.4	124	35 55.0	166	9 51.2
30	20 42.8	72	42 22.9	91.5	53 51.8	126	34 55.0	168	8 27.5
32	22 1.0	74	42 58.7	92.0	51 32.9	128	33 53.0	170	7 3.4
34	23 18.1	76	43 31.9	92.5	49 53.9	130	32 48.9	172	5 39.0
36	24 34.2	78	44 3.1	93.0	48 43.3	132	31 43.0	174	4 14.4
38	25 49.1	80	44 33.5	93.5	47 52.3	134	30 35.3	176	2 49.7
40	27 2.8	82	45 6.4	94.0	47 14.6	136	29 26.0	178	1 24.9
42	28 15.1	84	45 50.0	94.5	46 45.9	138	28 15.0	180	0 0.0
				95.0	46 23.4				
				95.5	46 5.3				
				96.0	45 50.0				

Es hätte völlig genügt, diese Tabelle auf die Hälfte beschränkt, mit dem doppelten Argumente ϖ , $180^\circ - \varpi$ zu geben.

6.

Mit der Hilfe der in den Anhängen zu der Schrift (A) und zu dieser Schrift mitgeteilten Tabellen für die Größen $\nu_1, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ berechnet man nun nach den Formeln für den Fall I

auf den S. 16 und 17 für jeden der 109 Werte von ϖ die Werte der Größen $h_{1x}, h_{1y}, h_{1z}, h_{1w}; h_{2x}, h_{2y}, h_{2z}, h_{2w}$. Man nimmt dann einen konstanten Mittelwert γ_0 der Werte an, die γ im Verlaufe der Finsternis erreicht und berechnet dann für jeden Wert von ϖ und für die vier Werte $p = x, y, z, w$ die Werte der Größe

$$f_p = \Delta \varpi \frac{dh'_p}{d\varpi} = \gamma_0 \Delta \varpi \left(h_{1p} \frac{dm}{d\varpi} + h_{2p} \frac{ds}{d\varpi} \right)$$

und bildet dann durch die mechanische Quadratur die Werte der zwischen den Grenzen 0 und ϖ genommenen Integrale

$$h'_p = \int \frac{dh'_p}{d\varpi} d\varpi$$

und findet dann schließlich die Werte der Koeffizienten der vermittelnden Gleichungen

$$a = \frac{\gamma}{\gamma_0} h'_x \quad b = \frac{\gamma}{\gamma_0} h'_y \quad c = \frac{\gamma}{\gamma_0} h'_z \quad d = \frac{\gamma}{\gamma_0} h'_w$$

Bei der mechanischen Quadratur bereitet nun der Umstand einige Schwierigkeit, daß die Werte der höheren Differenzen am Anfange erst allmähig in der Form einer Treppe beginnen und am Ende ebenso allmähig in der Form einer Treppe aufhören. Das meistens anwendbare Mittel zur Vermeidung dieser Schwierigkeit, nämlich die Rechnung ein paar Stufen höher zu beginnen und ein paar Stufen tiefer zu beenden, ist hier nicht anwendbar, da die Energieabnahme außerhalb der Finsternis nicht existiert und unstetig mit der Finsternis anfängt und aufhört. Überwunden werden aber kann hier die Schwierigkeit durch die Feststellung des analytischen Charakters des Integranden als Funktion der Integrationsvariablen ϖ . Dieser Charakter wird folgendermaßen festgestellt: Die Tabelle auf S. 33 zeigt, daß θ für kleine Werte von ϖ proportional zu ϖ , oder symbolisch geschrieben, $\theta pr \varpi^1$ ist; ferner ist, immer für kleine Werte von ϖ , $apr \varpi^0, spr \varpi^0$; dann zeigen die Tabellen für die Größen v_α ($\alpha = 1, 3, 4, 5$), daß $v_\alpha pr \varpi^0$; sodann ist nach den Tabellen auf S. 32 $\Delta \varpi \frac{dm}{d\varpi} pr \varpi^1, \Delta \varpi \frac{ds}{d\varpi} pr \varpi^1$ und aus den Formeln auf den S. 16 und 17 ist dann ersichtlich, daß $h_{1x} pr \varpi^1, h_{1y} pr \varpi^2, h_{1z} pr \varpi^3, h_{1w} pr \varpi^4, h_{2x} pr \varpi^1, h_{2y} pr \varpi^2, h_{2z} pr \varpi^3, h_{2w} pr \varpi^4$ ist; die Formel für f_p zeigt dann, daß $f_x pr \varpi^2, f_y pr \varpi^3, f_z pr \varpi^4, f_w pr \varpi^5$ wird, und daß also schließlich für kleine Werte von ϖ mit der Hilfe von konstanten Größen A, B, C, D gesetzt werden kann

$$h'_x = A \varpi^3 \quad h'_y = B \varpi^4 \quad h'_z = C \varpi^5 \quad h'_w = D \varpi^6$$

Ganz ähnlich, wie am Anfange, sind die Verhältnisse am Ende der Rechnung; hier gelten Formeln, die man aus den vorstehenden durch die Vertauschung von ϖ mit $\pi - \varpi$ erhält.

Es möge an einem Beispiel gezeigt werden, wie die Berechnung der Integrale am Anfange und am Ende mit der Hilfe dieser Formeln auszuführen ist. Während sonst die Winkel, wie ϖ, θ nur als Argumente von Tabellen in Graden ausgedrückt werden, bei der Berechnung der Energieabnahmen aber natürlich in Einheiten des Halbmessers darzustellen sind, ist es bei den nunmehr darzulegenden Rechnungen ausnahmsweise, wie berechtigt, so auch zweckmäßig, die Größen ϖ und $\Delta \varpi$ in Graden ausgedrückt beizubehalten. Als Beispiel wählen wir den Anfang für die Größe h'_x , setzen also $p = x$; die folgende kleine Tabelle enthält die direkt berechneten ersten Werte von $f = \Delta \varpi \frac{dh'_x}{d\varpi}$

und der Differenzen f' , f'' , f''' ; indem die Integrale von $\varpi = 0$ an gerechnet werden, setzt man in die Zeile $\varpi = 1$ der summierten Reihe $'f$ die unbekannte Größe c und bildet dann die folgenden Glieder der Reihe; die Tabelle erhält dann die folgende Gestalt:

ϖ	$'f$	f	f'	f''	f'''
0°	c	0	103		
2	$c + 103$	103	309	206	— 7
4	$c + 515$	412	508	199	— 6
6	$c + 1435$	920	701	193	
8	$c + 3056$	1621			

In der üblichen Weise fügt man den Größen f , f'' , f''' in Klammern denjenigen Wert von ϖ hinzu, auf dessen Zeile sie stehen, und setzt für die ungeraden Differenzen f' , f''' ... und für $'f$ und für jeden Wert von ϖ , der ein ganzes positives Vielfaches von 2^α ist,

$$f^{(2\alpha+1)}(\varpi) = \frac{1}{2} (f^{(2\alpha+1)}(\varpi - 1) + f^{(2\alpha+1)}(\varpi + 1))$$

Man findet dann für jeden in der Argumentenreihe stehenden Wert von ϖ den Wert des Integrales nach der Formel

$$h'_x(\varpi) = 'f(\varpi) - \frac{1}{12} f'(\varpi) + \frac{11}{720} f''(\varpi) - \frac{191}{60480} f^{(V)}(\varpi) - \dots$$

Der erste hiernach mit Berücksichtigung von f''' berechenbare Wert von h'_x , nämlich der Wert für $\varpi = 4$ ist

$$h'_x(4) = c + 274.86$$

Für die Größe $f(4)$ liest man nun einerseits aus der Tabelle den Wert $f(4) = 412$ ab, andererseits ist er nach der aus der Formel $h'_x(\varpi) = A \varpi^3$ folgenden Gleichung $f(\varpi) = 3 A \varpi \cdot A \varpi^2$ gleich $f(4) = 96 A$; also ist $A = \frac{1.03}{2.4}$ und damit ergibt dann die Formel $h'_x(\varpi) = A \varpi^3$ den Wert $h'_x(4) = 274.67$ und durch die Vergleichung mit dem schon gefundenen Wert von $h'_x(4)$ ergibt sich schließlich der Wert $c = -0.19$. Mit diesem auf $c = 0$ abgerundeten Werte ist also die summierte Reihe zu beginnen und die Werte von $h'_x(0)$, $h'_x(2)$, die aus der Tabelle nicht direkt bestimmt werden können, findet man nach der Formel $h'_x(\varpi) = A \varpi^3$ zu $h'_x(0) = 0.00$, $h'_x(2) = 34.33$. Die Integralreihe fängt also, abgerundet, mit den Werten $h'_x: 0, 34, 275$ an.

Es mögen nun die benutzten Werte der sehr langsam veränderlichen Grösse γ zusammengestellt werden:

ϖ	$\log \gamma$
0° — 12°	5.33357
14 — 62	6
64 — 134	5
136 — 180	4

angenommener Mittelwert $\log \gamma_0 = 5.33355$

Nunmehr werden die Hauptstufen der mit fünfstelligen Logarithmen geführten Berechnungen der Größen a , b , c , d zusammengestellt; dabei werden aber Größen ausgelassen, die sich mit ganz geringer Mühe aus angegebenen Größen berechnen lassen; so werden alle Differenzenreihen unterdrückt; es wird also auch im Besonderen nur die summierte Reihe angeführt, aber selbst deren erste Differenz, nämlich die direkt berechneten Werte von

$f_p = \gamma_0 \Delta \varpi \left(h_{1p} \frac{dm}{d\varpi} + h_{2p} \frac{ds}{d\varpi} \right)$ weggelassen, es werden die einzelnen Glieder der Integrale $\frac{\gamma_0}{\gamma} a = \gamma_0 \int_0^{\varpi} \left(h_{1x} \frac{dm}{d\varpi} + h_{2x} \frac{ds}{d\varpi} \right) d\varpi, \dots$ nicht angegeben und es werden auch an dieser Stelle nicht die Größen a, b, c, d selbst mitgeteilt, weil der von der Einheit sehr wenig verschiedene Faktor $\frac{\gamma}{\gamma_0}$ zweckmäßig erst an die für die Zeiten der Beobachtungen interpolierten Werte von $\frac{\gamma_0}{\gamma} a, \dots$ angebracht wird. Es mag erwähnt werden, daß die Werte der Größen $h_{1p}, h_{2p}, a, \dots$, um sie auf bequeme Größenordnung zu bringen sämtlich mit 10^{10} multipliziert worden sind.

ϖ	log		f_x	$\frac{\gamma_0}{\gamma} a$	ϖ	log		f_x	$\frac{\gamma_0}{\gamma} a$	ϖ	log		f_x	$\frac{\gamma_0}{\gamma} a$
	$\gamma_0 h_{1x}$	$\gamma_0 h_{2x}$				$\gamma_0 h_{1x}$	$\gamma_0 h_{2x}$				$\gamma_0 h_{1x}$	$\gamma_0 h_{2x}$		
0°	— ∞	— ∞	0	0						96°	5.63398 _n	5.838	669302	666353
2	4.32736 _n	4.328	103	34						98	5.63416 _n	5.831	663062	659092
4	4.62771 _n	4.628	515	275						100	5.63411 _n	5.826	654786	649816
6	4.80265 _n	4.804	1435	925						102	5.63392 _n	5.821	644518	638574
8	4.92606 _n	4.929	3056	2179						104	5.63358 _n	5.816	632312	625426
10	5.02100 _n	5.025	5559	4227						106	5.63306 _n	5.810	618234	610444
12	5.09776 _n	5.104	9111	7241						108	5.63234 _n	5.804	602362	593712
14	5.16186 _n	5.170	13862	11381						110	5.63132 _n	5.797	584786	575327
16	5.21657 _n	5.227	19945	16788						112	5.62999 _n	5.790	565611	555400
18	5.26400 _n	5.278	27471	23584	84.0	5.63398 _n	5.838	665559	666350	114	5.62827 _n	5.782	544952	534052
20	5.30561 _n	5.323	36529	31869	84.5	5.63385 _n		667119	667846	116	5.62612 _n	5.774	522938	511419
22	5.34243 _n	5.363	47184	41721	85.0	5.63365 _n	5.844	668551	669213	118	5.62348 _n	5.764	499710	487648
24	5.37523 _n	5.400	59477	53193	85.5	5.63334 _n		669853	670450	120	5.62027 _n	5.754	475422	462896
26	5.40457 _n	5.434	73424	66313	86.0	5.63283 _n	5.852	671025	671557	122	5.61643 _n	5.744	450235	437333
28	5.43092 _n	5.464	89014	81083	86.5	5.63197 _n		672067	672533	124	5.61192 _n	5.732	424326	411138
30	5.45464 _n	5.493	106214	97482	87.0	5.63048 _n	5.865	672977	673377	126	5.60664 _n	5.720	397875	384493
32	5.47604 _n	5.520	124966	115464	87.5	5.62778 _n		673755	674089	128	5.60057 _n	5.707	371071	357592
34	5.49533 _n	5.544	145190	134959	88.0	5.62271 _n	5.890	674400	674666	130	5.59358 _n	5.693	344103	330625
36	5.51274 _n	5.567	166783	150877	88.5	5.61303 _n		674910	675108	132	5.58564 _n	5.678	317170	303790
38	5.52842 _n	5.589	189622	178104	89.0	5.59596 _n	5.931	675284	675415	134	5.57665 _n	5.662	290464	277278
40	5.54253 _n	5.609	213569	201510	89.5	5.57271 _n		675524	675591	136	5.56656 _n	5.646	264177	251278
42	5.55520 _n	5.628	238469	225946	90.0	5.56010 _n	5.965	675638	675648	138	5.55521 _n	5.628	238494	225972
44	5.56654 _n	5.646	264153	251253	90.5	5.57271 _n		675638	675591	140	5.54254 _n	5.609	213595	201535
46	5.57666 _n	5.662	290442	277255	91.0	5.59576 _n	5.931	675524	675415	142	5.52843 _n	5.589	189648	178130
48	5.58565 _n	5.678	317149	303768	91.5	5.61303 _n		675284	675108	144	5.51274 _n	5.567	166809	155903
50	5.59359 _n	5.693	344084	330606	92.0	5.62271 _n	5.890	674910	674667	146	5.49533 _n	5.544	145216	134986
52	5.60057 _n	5.707	371052	357573	92.5	5.62778 _n		674401	674090	148	5.47604 _n	5.520	124993	115490
54	5.60666 _n	5.720	397859	384477	93.0	5.63048 _n	5.865	673756	673378	150	5.45466 _n	5.493	106239	97506
56	5.61193 _n	5.732	424311	411122	93.5	5.63197 _n		672978	672534	152	5.43093 _n	5.465	89038	81107
58	5.61644 _n	5.744	450221	437319	94.0	5.63283 _n	5.852	672068	671558	154	5.40459 _n	5.434	73448	66337
60	5.62028 _n	5.755	475408	462882	94.5	5.63334 _n		671027	670452	156	5.37524 _n	5.400	59501	53217
62	5.62349 _n	5.764	499697	487634	95.0	5.63365 _n	5.844	669855	669215	158	5.34244 _n	5.363	47208	41745
64	5.62613 _n	5.774	522926	511406	95.5	5.63385 _n		668553	667848	160	5.30562 _n	5.323	36553	31893
66	5.62828 _n	5.782	544941	534041	96.0	5.63398 _n	5.889	667122	666353	162	5.26401 _n	5.278	27495	23608
68	5.63000 _n	5.790	565601	555390				665562		164	5.21656 _n	5.228	19969	16812
70	5.63133 _n	5.798	584777	575318						166	5.16186 _n	5.171	13886	11405
72	5.63235 _n	5.804	602354	593703						168	5.09777 _n	5.104	9135	7265
74	5.63307 _n	5.810	618227	610436						170	5.02102 _n	5.025	5583	4251
76	5.63359 _n	5.816	632306	625420						172	4.92608 _n	4.929	3080	2203
78	5.63392 _n	5.821	644512	638568						174	4.80268 _n	4.804	1459	948
80	5.63411 _n	5.826	654781	649810						176	4.62772 _n	4.629	539	299
82	5.63416 _n	5.831	663058	659087						178	4.32737 _n	4.328	127	58
84	5.63398 _n	5.838	669299	666350						180	— ∞	— ∞	24	24

Zu den Werten der 2. u. 3. Kolonne einer jeden der drei Spalten ist — 10 hinzuzufügen; die Werte der 4. u. 5. Kolonne sind durch 10^{10} zu dividieren.

ϖ	log		f_y	$\frac{\gamma_0}{\gamma}$	ϖ	log		f_y	$\frac{\gamma_0}{\gamma}$	ϖ	log		f_y	$\frac{\gamma_0}{\gamma}$
	$\gamma_0 h_{1y}$	$\gamma_0 h_{2y}$				$\gamma_0 h_{1y}$	$\gamma_0 h_{2y}$				$\gamma_0 h_{1y}$	$\gamma_0 h_{2y}$		
0°	— ∞	— ∞	0	0						96°	4.92104 _n	5.063	450603	450061
2	3.06579 _n	3.066	0	0						98	5.03064 _n	5.168	449395	448444
4	3.66621 _n	3.667	6	23						100	5.11759 _n	5.251	447333	44586
6	4.01564 _n	4.016	51	114						102	5.18837 _n	5.320	444207	44213
8	4.26173 _n	4.264	201	355						104	5.24720 _n	5.375	439832	437063
10	4.45068 _n	4.454	552	586						106	5.29671 _n	5.421	434049	430523
12	4.60309 _n	4.608	1225	1748						108	5.33872 _n	5.460	426733	422401
14	4.72990 _n	4.737	2362	3182						110	5.37443 _n	5.492	417794	412628
16	4.83772 _n	4.846	4119	5318						112	5.40476 _n	5.519	407181	401171
18	4.93074 _n	4.942	6662	8323	84°0	4.92104 _n	5.063	449903	450059	114	5.43036 _n	5.540	394882	388040
20	5.01186 _n	5.025	10156	12360	84.5	4.88892 _n		450206	450339	116	5.45172 _n	5.556	380926	373281
22	5.08309 _n	5.099	14762	17584	85.0	4.85456 _n	5.000	450464	450576	118	5.46918 _n	5.570	365380	356985
24	5.14596 _n	5.165	20626	24131	85.5	4.81774 _n		450681	450773	120	5.48303 _n	5.580	348355	339278
26	5.20162 _n	5.224	27877	32119	86.0	4.77819 _n	4.929	450860	450936	122	5.49345 _n	5.584	329993	320322
28	5.25095 _n	5.276	36617	41635	86.5	4.73595 _n		451006	451066	124	5.50059 _n	5.587	310474	300309
30	5.29462 _n	5.323	46918	52734	87.0	4.69084 _n	4.851	451122	451168	126	5.50455 _n	5.588	290004	279459
32	5.33321 _n	5.365	58817	65433	87.5	4.64312 _n		451211	451246	128	5.50541 _n	5.582	268815	258013
34	5.36716 _n	5.403	72314	79714	88.0	4.59386 _n	4.775	451278	451303	130	5.50816 _n	5.576	247154	236225
36	5.39680 _n	5.437	87369	95517	88.5	4.54432 _n		451326	451343	132	5.49781 _n	5.566	225283	214359
38	5.42248 _n	5.467	103903	112744	89.0	4.49806 _n	4.718	451358	451368	134	5.48934 _n	5.552	203467	192680
40	5.44438 _n	5.493	121799	131258	89.5	4.46150 _n		451377	451382	136	5.47769 _n	5.535	181968	171445
42	5.46274 _n	5.516	140901	150886	90.0	4.44660 _n	4.703	451386	451387	138	5.46374 _n	5.516	161037	150899
44	5.47767 _n	5.535	161025	171433	90.5	4.46150 _n		451386	451382	140	5.44440 _n	5.493	140913	131268
46	5.48936 _n	5.552	181956	192669	91.0	4.49806 _n	4.718	451377	451368	142	5.42249 _n	5.467	121810	112755
48	5.49782 _n	5.566	203457	214350	91.5	4.54431 _n		451358	451343	144	5.39682 _n	5.437	103915	95529
50	5.50317 _n	5.576	225273	236216	92.0	4.59386 _n	4.775	451326	451303	146	5.36717 _n	5.403	87381	79726
52	5.50542 _n	5.582	247145	258004	92.5	4.64312 _n		451278	451246	148	5.33324 _n	5.365	72326	65445
54	5.50457 _n	5.586	268806	279451	93.0	4.69084 _n	4.851	451211	451168	150	5.29463 _n	5.323	58828	52745
56	5.50060 _n	5.587	289996	300301	93.5	4.73595 _n		451122	451066	152	5.25096 _n	5.276	46929	41646
58	5.49346 _n	5.586	310466	320314	94.0	4.77819 _n	4.929	451006	450936	154	5.20163 _n	5.223	36628	32130
60	5.48304 _n	5.580	329986	339272	94.5	4.81774 _n		450860	450773	156	5.14598 _n	5.165	27888	24142
62	5.46919 _n	5.570	348349	356980	95.0	4.85456 _n	5.000	450681	450576	158	5.08309 _n	5.099	20637	17594
64	5.45172 _n	5.556	365375	373277	95.5	4.88892 _n		450465	450340	160	5.01186 _n	5.024	14773	12372
66	5.43037 _n	5.539	380921	388035	96.0	4.92104 _n	5.063	450208	450061	162	4.93075 _n	4.942	10168	8335
68	5.40477 _n	5.519	394878	401167				449906		164	4.83772 _n	4.846	6674	5330
70	5.37444 _n	5.491	407177	412625						166	4.72991 _n	4.737	4131	3194
72	5.33873 _n	5.461	417791	422398						168	4.60309 _n	4.608	2374	1760
74	5.29672 _n	5.421	426730	430520						170	4.45070 _n	4.454	1237	868
76	5.24721 _n	5.375	434046	437060						172	4.26174 _n	4.264	564	367
78	5.18839 _n	5.320	439829	442128						174	4.01565 _n	4.016	213	126
80	5.11760 _n	5.251	444205	445865						176	3.66622 _n	3.666	63	35
82	5.03066 _n	5.168	447331	448442						178	3.06567 _n	3.066	18	13
84	4.92104 _n	5.063	449393	450059						180	— ∞	— ∞	12	12
			450602										12	12

Zu den Werten der 2. u. 3. Kolonne einer jeden der drei Spalten ist -10 hinzuzufügen; die Werte der 4. u. 5. Kolonne sind durch 10^{10} zu dividieren.

[illegible]

[illegible]

ϖ	log		f_w	$\frac{\gamma_0}{\gamma} d$	ϖ	log		f_w	$\frac{\gamma_0}{\gamma} d$	ϖ	log		f_w	$\frac{\gamma_0}{\gamma} d$
	$\gamma_0 h_{1w}$	$\gamma_0 h_{2w}$				$\gamma_0 h_{1w}$	$\gamma_0 h_{2w}$				$\gamma_0 h_{1w}$	$\gamma_0 h_{2w}$		
38°	5.28280 _n	5.311	54602	60970	89°0	2.27127 _n	2.401	270869	270869	134°	5.38073 _n	5.421	130297	121899
40	5.31887 _n	5.351	67575	74626	89.5	2.18153 _n		270869	270869	136	5.36765 _n	5.405	113555	105377
42	5.34708 _n	5.382	81883	89511	90.0	2.14794 _n	2.295	270869	270869	138	5.34708 _n	5.382	97310	89519
44	5.36764 _n	5.405	97302	105369	90.5	2.18153 _n		270869	270869	140	5.31889 _n	5.351	81891	74634
46	5.38075 _n	5.421	113548	121893	91.0	2.27127 _n	2.401	270869	270869	142	5.28282 _n	5.311	67583	60977
48	5.38644 _n	5.430	130291	138735	91.5	2.39679 _n		270869	270869	144	5.23854 _n	5.265	54609	48738
50	5.38479 _n	5.432	147172	155533	92.0	2.53956 _n	2.649	270869	270869	146	5.18565 _n	5.209	43125	38037
52	5.37570 _n	5.425	163825	171922	92.5	2.68563 _n		270869	270869	148	5.12362 _n	5.144	33213	28918
54	5.35905 _n	5.411	179893	187560	93.0	2.82883 _n	2.927	270868	270867	150	5.05172 _n	5.071	24883	21359
56	5.33464 _n	5.390	195050	202144	93.5	2.96488 _n		270867	270866	152	4.96918 _n	4.985	18082	15278
58	5.30215 _n	5.360	209019	215426	94.0	3.09250 _n	3.185	270865	270864	154	4.87486 _n	4.889	12698	10541
60	5.26117 _n	5.322	221584	227226	94.5	3.21205 _n		270862	270860	156	4.76745 _n	4.780	8580	6981
62	5.21117 _n	5.275	232601	237436	95.0	3.32335 _n	3.413	270858	270856	158	4.64518 _n	4.656	5547	4411
64	5.15142 _n	5.217	242000	246025	95.5	3.42719 _n		270852	270848	160	4.50584 _n	4.514	3408	2639
66	5.08102 _n	5.150	249786	253032	96.0	3.52425 _n	3.612	270843	270837	162	4.34638 _n	4.354	1972	1480
68	4.99878 _n	5.070	256030	258556				270831		164	4.16277 _n	4.169	1062	768
70	4.90316 _n	4.977	260859	262748						166	3.94924 _n	3.953	525	363
72	4.79212 _n	4.868	264445	265793						168	3.69739 _n	3.701	234	154
74	4.66280 _n	4.740	266984	267895						170	3.39411 _n	3.397	93	59
76	4.51148 _n	4.592	268684	269261						172	3.01741 _n	3.018	34	22
78	4.33266 _n	4.414	269747	270083						174	2.52616 _n	2.527	14	11
80	4.11819 _n	4.202	270357	270533						176	1.82800 _n	1.828	9	8
82	3.85539 _n	3.941	270670	270750						178	0.62743 _n	0.627	8	8
84	3.52425 _n	3.612	270808	270837						180	— ∞	— ∞	8	8
			270856											

Zu den Werten der 2. u. 3. Kolonne einer jeden der drei Spalten ist — 10 hinzuzufügen; die Werte der 4. u. 5. Kolonne sind durch 10^{10} zu dividieren.

Die diesen vier Tabellen gemeinsame Erscheinung, daß die Werte der Koeffizienten a , b , c , d zwar mit verschwindenden Werten anfangen, aber mit nicht verschwindenden positiven Werten enden, ist darin begründet, daß der scheinbare Halbmesser der Sonnenscheibe und mit ihm die Gesamtenergie der unbedeckten Sonnenscheibe im Verlaufe der Finsternis beständig, wenn auch nur sehr wenig, abnimmt. Die Gesamtenergie der Sonnenscheibe wird durch den Ausdruck $\gamma\pi(x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}z + \frac{2}{5}w)$ dargestellt; benutzt man für eine beliebige Größe x die Bezeichnung $\Delta x = x_{\varpi=180^\circ} - x_{\varpi=0^\circ}$, so müßten also, wenn die berechneten Werte der Größen Δa , Δb , Δc , Δd ihre Entstehung allein der Abnahme der Gesamtenergie der Sonnenscheibe verdanken, durch die Formeln $\Delta a = -\pi\Delta\gamma$, $\Delta b = -\frac{2}{3}\pi\Delta\gamma$, $\Delta c = -\frac{1}{2}\pi\Delta\gamma$, $\Delta d = -\frac{2}{5}\pi\Delta\gamma$ dargestellt werden. Nun hat olg $\Delta\gamma$ bei der angewendeten fünfstelligen Rechnung, nur mit einer einzigen Stelle bestimmbar, den Wert $\log \Delta\gamma = 1.18 - 10$; es müßte also, wiederum nur mit einer Stelle bestimmbar, sein $\Delta a = 46$, $\Delta b = 31$, $\Delta c = 23$, $\Delta d = 18$; die Werte der Tabellen betragen aber im Vorzeichen übereinstimmend, nur rund die Hälfte. Der Unterschied ist vermutlich hauptsächlich darin begründet, daß sich die sehr kleinen Änderungen der fünften Stelle im Werte von γ von den sonstigen unvermeidlichen und unregelmäßigen Fehlern der abgekürzten fünfstelligen Rechnung zwar durch die Regelmäßigkeit, aber nicht durch die Größenordnung unterscheiden, und daß deshalb in der Übereinanderlagerung die Anteile beider Quellen nicht getrennt werden können. Für alle Fälle handelt es sich hierbei um Größen, die gegenüber der Ungenauigkeit wenigstens der hier vorliegenden Messungen bedeutungslos sind und wohl auch bei künftigen genaueren Messungen bedeutungslos bleiben werden.

Es ist nun als unabhängige Variable statt der Zeit t die Größe ϖ einzuführen; genauer ausgedrückt ist die Frage zu beantworten, welche Werte ϖ statt der Werte t in das Argument der auf S. 21 angegebenen Tabelle T_e der Energieabnahmen h einzusetzen seien, um die Werte $h = h(t)$ in Werte $h(\varpi)$ zu verwandeln. Die Antwort hierauf ergibt sich in einfacher und eindeutiger Weise, wenn für denselben Beobachtungsort, an dem die Energiemessungen ausgeführt worden sind, auch zahlreiche Photogramme der Finsternis vorliegen; der Zusammenhang $t = t(\varpi)$ zwischen t und ϖ wird dann in der folgenden Weise hergestellt: Aus der Ausmessung der Photogramme ergibt sich eine Tabelle, die mit dem Argumente t die Werte der direkt messbaren Größe a als $a = a(t)$ liefert; aus ihr wird auch der Wert a_0 des Minimums von a erkennbar; nach der Formel $\operatorname{tg}^2 \varpi = \frac{1-a}{a-a_0}$

werden die zu den Werten von a gehörenden Werte von ϖ als $\varpi = \varpi(a)$ bekannt und man erlangt also eine Tabelle T_a , die mit dem Argumente t die Werte von ϖ als $\varpi = \varpi(t)$ liefert. Da nun durch die Herstellung der Energiemessungen und der Photogramme an demselben Orte gewährleistet wird, daß die Zeit t in den beiden Tabellen T_e und T_a dieselbe Bedeutung hat, so kann man die der Tabelle T_a zu entnehmenden Werte von $t = t(\varpi)$ benutzen, die Argumente der Tabelle T_e in die entsprechenden Argumente ϖ zu verwandeln; die Tabelle T_e liefert dann mit dem Argumente ϖ die Werte der Größe h als $h(\varpi)$. Wenn nun aber die Photogramme, wie bei dem vorliegenden Beispiele, fehlen, so muß die Tabelle T_a mit der Hilfe der Rechnung durch eine Tabelle T'_a ersetzt werden; dieser Rechnung wird zwar gleichfalls ein Wert der Zeit zu Grunde gelegt; diese Zeit bedeutet aber etwas Anderes, als das Argument der Tabelle T_e ; sie wird nicht, wie jene an einer Uhr abgelesen, sondern willkürlich gewählt als Argument, mit dem man den Tafeln der Sonne und des Mondes die zu der Rechnung erforderlichen Daten entnimmt. Diese Zeit, die bisher gleichfalls mit t bezeichnet worden ist, werde nun t' genannt; demgemäß ist in den Tabellen B als Überschrift der zweiten Kolonne t' statt t zu lesen. Die Zeit t' stimmt mit der Zeit t nur bei völlig fehlerfreien Tafeln der Sonne und des Mondes überein. Da dies, trotz unserer Bemühungen, die Verbesserungen der Tafeln zu bestimmen, nicht der Fall ist, so sind die Werte der Zeit t in der Tabelle T_e und der Zeit t' in der Tabelle B voneinander verschieden. Man könnte nun daran denken, den Unterschied der beiden Zeiten zu vernachlässigen; dann würde aber ein beiden Tabellen gemeinsames und aus beiden Tabellen bestimmbares Ereignis, nämlich die größte Phase, auf verschiedene Zeiten fallen, denn nach der Tabelle T_e hat sich dafür ergeben $t = 16^m 9124$ und nach der mit B übereinstimmenden Tabelle auf S. 28 $t' = 16^m 9540$; es ist ratsamer, den Unterschied zwischen t und t' , statt ihn zu vernachlässigen, während der 163^m dauernden Energiemessungen als konstant anzunehmen. Um der Tabelle B die für die Tabelle T_e zu benutzenden Werte von ϖ direkt entnehmen zu können, muß man die jetzt t' lautende Überschrift der zweiten Kolonne von B von t' in t dadurch zurückverwandeln, daß man von den jetzt da stehenden Werten die Größe 0.0416 abzieht. Der Anfang der Tabelle B gewinnt dann also das folgende Aussehen:

ϖ	t	ϖ	t
0°	— 64 ^m 2006	8	— 62 ^m 6469
2	— 64.1029	10	— 61.7816
4	— 63.8103	12	— 60.7319
6	— 63.3243	14	— 59.5029

Aus dieser veränderten Tabelle berechnet man ohne weitere Änderungen direkt die zu den Beobachtungszeiten t der Tabelle T_e auf S. 21 gehörenden Werte von ϖ ; so gehört zu der um eine Stelle erweiterten Beobachtungszeit der ersten, nach dem Beginne der Finsternis gemessenen Energieabnahme, also zu der Zeit $t = -62^m 35.25$ bei Berücksichtigung der dritten Differenz der Reihe der t der Wert $\varpi = 8.7304$, der um eine Stelle gekürzt in die folgende, alle Beobachtungszeiten umfassende Tabelle als Argument für die noch einmal, jetzt logarithmisch, angegebenen Werte von h eingetragen worden ist. Den einzelnen Zeilen ist eine Ordnungszahl α hinzugefügt und die der größten Phase ($\alpha = 41$) zugehörige Zeile ist zweimal geschrieben worden, um hervorzuheben, daß der größeren Sorgfalt, die auf die Energiemessung dieser Zeile verwendet worden ist, durch die Zuerteilung des doppelten Gewichtes Rechnung getragen werden wird. — Die Zeit ist nunmehr bei dem ganzen weiteren Verlaufe der Rechnung ausgeschaltet.

α	ϖ	$\log h$	α	ϖ	$\log h$	α	ϖ	$\log h$	α	ϖ	$\log h$	α	ϖ	$\log h$	α	ϖ	$\log h$
0	0°000	— ∞	14	51.762	3.44669	28	68.356	3.63899	41	90.000	3.70278	55	110.500	3.64582	69	124.609	3.50147
1	8.730	1.04139	15	52.880	3.46790	29	69.780	3.64777	42	93.787	3.70122	56	112.281	3.63357	70	126.205	3.48387
2	19.943	2.38202	16	54.022	3.48572	30	73.262	3.66558	43	96.194	3.69862	57	113.253	3.62603	71	126.956	3.47683
3	22.256	2.53529	17	55.909	3.50352	31	73.982	3.66894	44	97.326	3.69688	58	114.226	3.61899	72	127.945	3.46404
4	24.938	2.70842	18	56.327	3.52297	32	74.793	3.67265	45	98.284	3.69513	59	115.247	3.61119	73	128.817	3.44932
5	26.424	2.78746	19	57.781	3.54033	33	77.304	3.68296	46	99.533	3.69249	60	115.836	3.60595	74	129.528	3.42749
6	27.996	2.84198	20	59.377	3.55449	34	78.380	3.68673	47	100.609	3.68975	61	116.342	3.60141	75	130.487	3.41797
7	32.705	3.01326	21	60.377	3.56608	35	79.262	3.68940	48	101.519	3.68717	62	119.003	3.58001	76	152.591	2.78390
8	33.953	3.04218	22	62.030	3.58252	36	80.275	3.69214	49	102.096	3.68529	63	120.018	3.56926	77	154.383	2.75282
9	35.154	3.08600	23	62.845	3.59340	37	81.740	3.69531	50	103.128	3.68169	64	120.586	3.56050	78	155.789	2.71517
10	39.513	3.21378	24	63.559	3.59934	38	82.710	3.69714	51	104.068	3.67806	65	121.319	3.55230	79	158.284	2.62325
11	41.042	3.26102	25	64.302	3.60767	39	83.960	3.69897	52	104.869	3.67431	66	122.070	3.54008	80	159.899	2.52763
12	42.335	3.26600	26	64.908	3.61342	40	86.026	3.70114	53	105.650	3.67062	67	122.914	3.52840	81	168.054	2.53656
13	43.312	3.28353	27	66.074	3.62149	41	90.000	3.70278	54	109.439	3.65244	68	123.709	3.51534	82	172.355	2.43136

Mit den in dieser Tabelle angegebenen Werten von ϖ als Argumenten werden nun aus den Tabellen auf S. 36—39 die Werte von $\frac{\gamma_0 a}{\gamma}$, $\frac{\gamma_0 b}{\gamma}$, $\frac{\gamma_0 c}{\gamma}$, $\frac{\gamma_0 d}{\gamma}$ interpoliert; es darf dabei nicht vergessen werden, den Faktor $\frac{\gamma_0}{\gamma}$, den die tabulierten Größen enthalten, auszugleichen, indem man den durch die Interpolation erlangten fünfstelligen Logarithmen von $\frac{\gamma_0 a}{\gamma}$, ... die höchstens 2 Einheiten der 5. Dezimale betragende Werte von $\log \frac{\gamma}{\gamma_0}$ hinzufügt. Das Ergebnis dieser Rechnung enthält die folgende Tabelle:

α	$\log a$	$\log b$	$\log c$	$\log d$	α	$\log a$	$\log b$	$\log c$	$\log d$	α	$\log a$	$\log b$	$\log c$	$\log d$
1	3.45105	2.70001	2.00732	1.36361	29	5.75831	5.61432	5.50630	5.41888	55	5.75625	5.61270	5.50509	5.41799
2	4.49986	4.08741	3.73372	3.41335	30	5.78137	5.63115	5.51805	5.42687	56	5.74231	5.60151	5.49637	5.41139
3	4.63449	4.26355	3.95066	3.67060	31	5.78554	5.63392	5.51980	5.42794	57	5.73415	5.59434	5.49080	5.40699
4	4.77188	4.44236	4.16995	3.92979	32	5.78999	5.63679	5.52154	5.42896	58	5.72555	5.58716	5.48460	5.40195
5	4.84077	4.53157	4.27889	4.05814	33	5.80224	5.64397	5.52553	5.43112	59	5.71608	5.57867	5.47741	5.39593
6	4.90875	4.61923	4.38563	4.18350	34	5.80677	5.64635	5.52671	5.43168	60	5.71039	5.57351	5.47291	5.39210
7	5.08698	4.84692	4.66063	4.50442	35	5.81016	5.64800	5.52746	5.43201	61	5.70537	5.56891	5.46885	5.38853
8	5.12870	4.89964	4.72373	4.57749	36	5.81371	5.64961	5.52815	5.43229	62	5.67473	5.54192	5.44417	5.36646
9	5.16693	4.94771	4.78103	4.64360	37	5.81823	5.65144	5.52884	5.43254	63	5.66531	5.53034	5.43319	5.35646
10	5.29163	5.10258	4.96365	4.85237	38	5.82079	5.65236	5.52914	5.43264	64	5.65987	5.52355	5.42666	5.35012

α	log a	log b	log c	log d	α	log a	log b	log c	log d	α	log a	log b	log c	log d
11	5.33068	5.15034	5.01920	4.91513	39	5.82362	5.65325	5.52940	5.43271	65	5.64944	5.51441	5.41779	5.34166
12	5.36198	5.18829	5.06301	4.96430	40	5.82712	5.65412	5.52961	5.43275	66	5.64170	5.50651	5.41001	5.33418
13	5.38466	5.21560	5.09434	4.99926	41	5.82972	5.65455	5.52967	5.43276	67	5.62883	5.49318	5.39675	5.32125
14	5.54946	5.40728	5.30751	5.23048	41	5.82972	5.65455	5.52967	5.43276	68	5.61803	5.48184	5.38533	5.30998
15	5.56754	5.42733	5.32883	5.25265	42	5.82736	5.65418	5.52961	5.43275	69	5.60538	5.46841	5.37163	5.29631
16	5.58521	5.44667	5.34915	5.27353	43	5.82330	5.65316	5.52937	5.43271	70	5.58177	5.44292	5.34523	5.26951
17	5.61269	5.47622	5.37962	5.30431	44	5.82071	5.65233	5.52913	5.43263	71	5.57014	5.43019	5.33184	5.25576
18	5.62070	5.48237	5.38587	5.31052	45	5.81816	5.65141	5.52883	5.43254	72	5.55429	5.41264	5.31323	5.23645
19	5.63797	5.50266	5.40622	5.33050	46	5.81435	5.64988	5.52825	5.43233	73	5.53979	5.39643	5.29587	5.21827
20	5.65801	5.52310	5.42623	5.34971	47	5.81064	5.64822	5.52756	5.43205	74	5.52761	5.38271	5.28104	5.20264
21	5.66989	5.53493	5.43757	5.36030	48	5.80717	5.64654	5.52680	5.43172	75	5.51065	5.36343	5.26007	5.18034
22	5.68843	5.55296	5.45444	5.37582	49	5.80481	5.64534	5.52622	5.43144	76	4.88407	4.58738	4.34691	4.13813
23	5.69707	5.56116	5.46192	5.38250	50	5.80029	5.64291	5.52498	5.43084	77	4.80412	4.48410	4.22097	3.99004
24	5.70438	5.56799	5.46803	5.38787	51	5.79584	5.64035	5.52360	5.43012	78	4.73660	4.39649	4.11381	3.86375
25	5.71172	5.57474	5.47399	5.39302	52	5.79179	5.63790	5.52220	5.42935	79	4.60438	4.22395	3.90179	3.61269
26	5.71753	5.57998	5.47855	5.39690	53	5.78759	5.63526	5.52062	5.42843	80	4.50992	4.10058	3.75012	3.43339
27	5.72823	5.58944	5.48658	5.40357	54	5.76392	5.61862	5.50945	5.42118	81	3.85539	3.23787	2.68341	2.17667
28	5.74745	5.60566	5.49971	5.41396						82	3.28217	2.48887	1.76790	1.26482

Zu allen Logarithmen ist die Zahl -10 hinzuzufügen.

Es ist nun die wichtige Frage zu entscheiden, welche Gewichte den einzelnen Energiemessungen zuzuerteilen seien. Schon früher (S. 20) ist darauf hingewiesen worden, daß die dem Verzeichnisse der Messungen beigegebenen spärlichen Bemerkungen zur Beantwortung dieser Frage nicht genügen und daß es ohne unsichere Annahmen nicht abgehen werde. Daß aber die Annahme eines konstanten Gewichtes für alle Messungen unzulässig sei, wird schon durch die Zeichnung der Kurve mit t als Abszisse und h als Ordinate durch die von der Mitte aus nach beiden Enden stark zunehmenden Schwankungen erkennbar. Es ist zu vermuten, daß die hierdurch gekennzeichnete Veränderlichkeit der Genauigkeit der Messungen mit der in einigen wenigen Stufen vollzogenen Änderung des Gesamtwiderstandes des Thermosäulenkreises zusammenhänge. Dann würden die Zeitpunkte der Änderungen der Genauigkeit vermutlich durch größere Pausen in den Beobachtungszeiten kenntlich werden. Solche Pausen treten in den zwei letzten Tabellen zwischen den Argumenten $\alpha = 13, 14; 29, 30; 53, 54; 75, 76$ auf; dadurch wird das Ganze in fünf Gruppen (I, II, III, IV, V) zerspaltet, für die man nun suchen muß, die Genauigkeit der Messungen getrennt zu ermitteln. Zu diesem Zwecke ist vorübergehend angenommen worden, daß allen Messungen dasselbe Gewicht zukomme und daß die Energieabnahme h durch die auf zwei Glieder beschränkte Formel $h = ax + by$ dargestellt werden könne. Es wurden bei der Rechnung, die zu einer Zeit ausgeführt wurde, als die für die gesamte Aufgabe anzuwendende Methode in Einzelheiten noch nicht feststand, nicht die Energieabnahmen, sondern die direkt beobachteten Energiereste benutzt. Die Auflösung der mit den vermittelnden Gleichungen gebildeten Normalgleichungen nach der M. d. kl. Q. ergab die Werte $x = 0.003755$, $y = 0.005152$; bei Benutzung dieser Werte blieben in den einzelnen vermittelnden Gleichungen die folgenden im Sinne Beobachtung minus Rechnung genommenen Fehler:

I	II	III	IV	V
+ 180.7	+ 27.2	+ 21.8	+ 7.4	+ 57.5
+ 118.9	+ 6.1	+ 22.2	+ 8.5	+ 9.0
+ 91.6	+ 3.5	+ 19.8	+ 10.1	— 7.2
+ 31.8	+ 71.3	+ 10.4	+ 11.4	— 4.3

	I	II	III	IV	V
	+ 0.6	— 23.5	+ 6.1	+ 6.6	+ 27.7
	+ 2.3	— 21.1	+ 3.1	— 0.7	— 129.2
	— 31.6	+ 20.0	+ 0.3	— 0.2	— 83.2
	— 10.0	+ 17.4	— 0.4	— 1.0	
	— 32.6	+ 27.4	— 1.6	— 54.1	
	— 70.6	+ 1.9	— 1.5	— 46.6	
	— 113.7	+ 9.5	— 2.1	— 20.9	
	— 7.6	— 5.5	— 3.5	— 29.1	
	+ 14.1	— 9.7	— 3.5	+ 9.8	
		+ 5.0	— 1.4	+ 3.7	
		+ 0.2	+ 0.3	+ 23.0	
		+ 6.6	+ 1.3	+ 33.8	
			+ 1.2	— 6.9	
			+ 2.1	— 37.0	
			+ 2.9	— 55.1	
			+ 4.3	— 51.0	
			+ 5.3	+ 10.9	
			+ 8.5	— 33.1	
			+ 10.7		
			+ 17.0		
			+ 20.8		
Mittel	+ 13.4	+ 8.5	+ 5.8	— 9.6	— 18.5

Es ist nach dem Gange, der in diesen Reihen erkennbar ist, zu vermuten, daß die Anzahl der Gruppen zu vergrößern sei; ich habe aber davon abgesehen und bin weiter so verfahren: von den Zahlen jeder Gruppe ist der in der letzten Zeile angegebene Mittelwert abgezogen und dann das Mittel ε der absoluten Werte gebildet worden. Den so für die fünf Gruppen erlangten Logarithmen der Werte von ε fügen wir die Logarithmen der für diese Gruppen gebildeten Mittelwerte der gemessenen Energiemengen e_0 und des Verhältnisses dieser beiden Größen hinzu:

$\log \varepsilon$	1.756	1.182	0.833	1.358	1.700
$\log e_0$	3.600	3.128	2.214	3.158	3.653
$\log \frac{\varepsilon}{e_0}$	8.156	8.054	8.619	8.200	8.047

In der letzten Zeile könnte vielleicht, allerdings unter dem Widerspruche der mittleren Gruppe, eine Andeutung erblickt werden, daß das Verhältnis $\frac{\varepsilon}{e_0}$ konstant wäre. Ich habe aber das Gewicht p einer vermittelnden Gleichung innerhalb einer jeden Gruppe als konstant angenommen und die den Quadraten der Größen ε umgekehrt proportionalen Werte von p auf die folgenden Zahlen abgerundet:

I	II	III	IV	V
$p = 0.015$	0.200	1.000	0.100	0.020

Die beiden äußeren Gruppen tragen hiernach zu den Normalgleichungen nur wenig bei. — Die Energiemessungen sind auch daraufhin geprüft worden, ob bei dem Übergange von der einen Gruppe zur nächsten eine Unstetigkeit vorhanden sei; es konnte aber ein einigermaßen deutliches Anzeichen dafür nicht gefunden werden, und es wurde deshalb von einer entsprechenden Änderung der Messungen abgesehen.

Es sind nun zur Aufstellung der Normalgleichungen für die n vermittelnden Gleichungen die [] — Klammerausdrücke nach den Formeln

$$[a a] = \sum_1^n p_a a_a a_a \quad [a b] = \sum_1^n p_a a_a b_a \quad \dots$$

zu bilden; dabei ist es aber, um die Größenordnung der hinzuschreibenden Zahlen bequem zu machen, zweckmäßig von den Koeffizienten a, b, c, d und den Energieabnahmen h Potenzen von 10 abzutrennen, nämlich die durch die Formeln

$$a_a^* = 10^5 a_a \quad b_a^* = 10^5 b_a \quad c_a^* = 10^5 c_a \quad d_a^* = 10^5 d_a \quad h_a^* = 10^{-3} h_a$$

eingeführten Größen zu benutzen. Setzt man dann noch

$$x^* = 10^{-8} x \quad y^* = 10^{-8} y \quad z^* = 10^{-8} z \quad w^* = 10^{-8} w$$

so wird erreicht, daß die bisher in der Gestalt

$$a_a x + b_a y + c_a z + d_a w = h_a$$

geschriebenen vermittelnden Gleichungen bis auf die Hinzufügung der Sterne unverändert die Gestalt

$$a_a^* x^* + b_a^* y^* + c_a^* z^* + d_a^* w^* = h_a^*$$

erhalten.

Mit den aus den angegebenen Werten von a, b, c, d, h abgeleiteten Werten von a^*, b^*, c^*, d^*, h^* und überdies mit den Werten der Größe $s^* = a^* + b^* + c^* + d^*$ sind nun die Werte der [] — Klammerausdrücke berechnet worden; aus der folgenden Tabelle ist ersichtlich, wie sich diese Werte aus den schon mit den Gewichten multiplizierten Beiträgen der fünf Gruppen zusammensetzen:

	$a^* a^*$	$a^* b^*$	$a^* c^*$	$a^* d^*$	$a^* h^*$	$a^* s^*$	$b^* b^*$	$b^* c^*$	$b^* d^*$	$b^* h^*$
I	0.4023	0.2568	0.1851	0.1428	0.3309	0.9871	0.1651	0.1196	0.0927	0.2110
II	71.4770	52.0088	41.2714	34.3306	56.1838	199.0882	37.8448	30.0330	24.9830	40.8824
III	1042.7160	715.8190	542.4610	435.7470	788.1910	2736.7440	491.5480	372.5600	299.2850	541.1560
IV	46.4011	33.7047	26.7162	22.2116	36.6409	129.0338	24.4841	19.4086	16.1369	26.6163
V	0.0313	0.0147	0.0079	0.0047	0.0284	0.0586	0.0070	0.0038	0.0022	0.0131
	1161.0277	801.8040	610.6416	492.4367	881.3750	3065.9117	554.0490	422.1250	340.4998	608.8788
	a	b	c	d	A		e	f	g	B

	$b^* s^*$	$c^* c^*$	$c^* d^*$	$c^* h^*$	$c^* s^*$	$d^* d^*$	$d^* h^*$	$d^* s^*$	$h^* h^*$	$h^* s^*$
I	0.6342	0.0871	0.0675	0.1519	0.4594	0.0527	0.1170	0.3558	0.2723	0.8109
II	144.8706	23.8348	19.8290	32.4434	114.9686	16.4966	26.9886	95.6398	44.1662	156.4992
III	1879.2090	282.3910	226.8590	410.1300	1424.2750	182.2520	329.4560	1144.1400	595.8330	2068.9330
IV	93.7346	15.3862	12.7938	21.0990	74.3052	10.6392	17.5437	61.7816	28.9392	101.9000
V	0.0277	0.0021	0.0012	0.0070	0.0150	0.0007	0.0041	0.0088	0.0288	0.0527
	2118.4761	321.7012	259.5505	463.8313	1614.0232	209.4412	374.1094	1301.9260	669.2395	2328.1958
	h	i	C		k	E		J		

Wir bilden nun die Determinante D der Koeffizienten der Normalgleichungen und benutzen für diese die abkürzende Bezeichnung, die in den letzten Zeilen der vorstehenden Tabelle angegeben sind; da wir auch die Unterdeterminanten erster und zweiter Ord-

nung aber ohne Rücksicht auf die Symmetrie der Determinante D berechnen wollen, bezeichnen wir die unter der Diagonalen ak stehenden Elemente von D mit den entsprechenden gestrichenen Größen; die Striche sollen dabei aber den Wert der Größen nicht ändern, sondern nur die Differentiation nach ihnen verhindern. Für die Unterdeterminanten bedienen wir uns der abkürzenden Bezeichnungen $\frac{\partial D}{\partial x} = (x)$, $\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} = (xy)$.

Von der Formel

$$D = \begin{vmatrix} a, b, c, d \\ b', e, f, g \\ c', f', h, i \\ d', g', i', k \end{vmatrix}$$

ausgehend erhalten wir dann, explizit geschrieben, die folgenden Formeln

$$D = \begin{array}{cccccc} + a e h k & - c i b' g' & + a f i g' & - b g c' i' & + a g f' i' & - b f i d' \\ + d e c' i' & - d b' f' i' & + c e i d' & - d f c' g' & + d h b' g' & - c g d' f' \\ + b g h d' & - b h k b' & + b f k c' & - c e k c' & + c k b' f' & - d e h d' \\ + b i b' i' & - a f k f' & + c g c' g' & - a g h g' & + d f d' f' & - a e i i' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (a) = + e h k \quad - f k f' \quad + f i g' \quad - g h g' \quad + g f' i' \quad - e i i' \\ (b) = + f k c' \quad - g c' i' \quad + g h d' \quad - h k b' \quad + i b' i' \quad - f i d' \\ (c) = + k b' f' \quad - i b' g' \quad + e i d' \quad - e k c' \quad + g c' g' \quad - g d' f' \\ (d) = + h b' g' \quad - b' f' i' \quad + e c' i' \quad - f c' g' \quad + f d' f' \quad - e h d' \\ (e) = + a h k \quad - c k c' \quad + c i d' \quad - d h d' \quad + d c' i' \quad - a i i' \\ (f) = + a i g' \quad - a k f' \quad + b k c' \quad - b i d' \quad + d d' f' \quad - d c' g' \\ (g) = + a f' i' \quad - a h g' \quad + b h d' \quad - b c' i' \quad + c c' g' \quad - c d' f' \\ (h) = + a e k \quad - b k b' \quad + b g d' \quad - d e d' \quad + d b' g' \quad - a g g' \\ (i) = + a f g' \quad - a e i' \quad + c e d' \quad - c b' g' \quad + b b' i' \quad - b f d' \\ (k) = + a e h \quad - b h b' \quad + b f c' \quad - c e c' \quad + c b' f' \quad - a f f' \end{array}$$

Von den Unterdeterminanten zweiter Ordnung, die bekanntlich auch bei einer un-symmetrischen Determinante paarweise entgegengesetzt gleich sind, führen wir hier nur diejenigen an, die bei der vorliegenden symmetrischen Determinante Werte von verschiedenem Betrage haben; das sind 21, und sie lassen sich bis auf einen letzten symbolisch durch in Klammern gesetzte ungestrichene Buchstaben darstellen; und nur bei dem letzten muß zur Darstellung die eine gestrichene Größe i' zu Hilfe genommen werden. Die 21 verschiedenen Unterdeterminanten zweiter Ordnung sind die folgenden:

$$\begin{array}{l} (ae) = h k - i i' \quad (af) = i g' - k f' \quad (ag) = f' i' - h g' \quad (ah) = e k - g g' \quad (ai) = f g' - e i' \\ (ak) = e h - f f' \quad (bf) = k c' - i d' \quad (bg) = h d' - c i' \quad (bh) = g d' - k b' \quad (bi) = b' i' - f d' \quad (bi') = i b' - g c' \\ (bk) = f c' - h b' \quad (cg) = c' g' - d' f' \quad (ci) = e d' - b' g' \quad (ck) = b' f' - e c' \quad (eh) = a k - d d' \\ (ei) = c d' - a i' \quad (ek) = a h - c c' \quad (fi) = a g' - b d' \quad (fk) = b c' - a f' \quad (hk) = a e - b b' \end{array}$$

Das Ergebnis der nach diesen Formeln mit siebenstelligen Logarithmen ausgeführten Rechnung ist nun bei getrennter Summierung der positiven und negativen Teile das folgende:

+ $10^{-10} D$ -			
$ae h k$	4.334167	$2 b c g i$	8.654128
$2 a f g i$	8.662678	$2 b d f i$	8.651900
$2 c d e i$	8.648420	$2 c d f g$	8.644196
$2 b d g h$	8.650042	$h k b^2$	4.331631
$2 b c f k$	8.657406	$e k c^2$	4.326962
$b^2 i^2$	4.330920	$e h d^2$	4.322168
$c^2 g^2$	4.323211	$a k f^2$	4.332980
$d^2 f^2$	4.320985	$a h g^2$	4.330409
		$a e i^2$	4.333456
	51.927829		51.927830

+ (a) -				+ (b) -				+ (c) --			
$e h k$	37330431	$k f^2$	37320214	$c f k$	53987037	$c g i$	53966593	$b f k$	70887787	$b g i$	70860935
$2 f g i$	74612155	$h g^2$	37298068	$d g h$	53941112	$b h k$	54023550	$d e i$	70814210	$c e k$	70859279
		$e i^2$	37324310	$b i^2$	54014691	$d f i$	53952704	$c g^2$	70797836	$d f g$	70779613
	111942586		111942592		161942840		161942847		212499833		212499827
+ (d) -				+ (e) -				+ (f) -			
$b g h$	87828980	$b f i$	87847840	$a h k$	78227127	$k c^2$	78097091	$a g i$	102607991	$a f k$	102646863
$c e i$	87812510	$c f g$	87769612	$2 c d i$	156094856	$h d^2$	78010582	$b c k$	102545542	$b d i$	102480330
$d f^2$	87747020	$d e h$	87771060			$a i^2$	78214309	$f d^2$	102362712	$c d g$	102389080
	263388510		263388512		234321983		234321982		307516245		307516273
+ (g) -				+ (h) -				+ (i) -			
$a f i$	127205351	$a g h$	127178035	$a e k$	134726460	$k b^2$	134647616	$a f g$	166878500	$a e i$	166960077
$b d h$	127019795	$b c i$	127079795	$2 b d g$	268884321	$e d^2$	134353498	$c d e$	166603831	$b c g$	166713769
$g c^2$	126966638	$c d f$	126933947			$a g^2$	134609658	$i b^2$	166862375	$b d f$	166670881
	381191784		381191777		403610781		403610772		500344706		500344727
				+ (k) -							
				$a e h$	206939569	$h b^2$	206818476				
				$2 b c f$	413357428	$e c^2$	206595571				
						$a f^2$	206882905				
					620296997		620296952				

(ae)		(af)		(ag)		(ah)		(ai)	
$\log(hk)$	4.8285148	$\log(gi)$	4.9463386	$\log(fi)$	5.0396628	$\log(ek)$	5.0646103	$\log(fg)$	5.1575578
$\log(-i^2)$	4.8284436 _n	$\log(-kf)$	4.9465031 _n	$\log(-gh)$	5.0395695 _n	$\log(-g^2)$	5.0642336 _n	$\log(-ei)$	5.1577700 _n
	1.04317		1.52480 _n		1.37171		2.00263		1.84662 _n
(ak)		(bf) = -(ce)		(bg) = -(de)		(bh)		(bi)	
$\log(eh)$	5.2510009	$\log(ch)$	5.1068485	$\log(dh)$	5.1998031	$\log(dg)$	5.2244672	$\log(bi)$	5.3182901
$\log(-f^2)$	5.2508820 _n	$\log(-di)$	5.1065722 _n	$\log(-ci)$	5.2000082 _n	$\log(-bk)$	5.2251304 _n	$\log(-df)$	5.3177914 _n
	1.68834		1.91031		1.87409 _n		2.40866 _n		2.37810
(bk)		(cg) = -(df)		(ci) = -(dh)		(ck)		(ch)	
$\log(ef)$	5.4112274	$\log(cg)$	5.3179032	$\log(de)$	5.4358986	$\log(bf)$	5.5295093	$\log(ak)$	5.3859047
$\log(-bh)$	5.4115210 _n	$\log(-df)$	5.3177914 _n	$\log(-bg)$	5.4361851 _n	$\log(-ce)$	5.5293346 _n	$\log(-d^2)$	5.3847008 _n
	2.24134 _n		1.72850		2.25539 _n		2.13393		2.82811

(ei)		(ek)		(fi) = - (gh)		(fk)		(hk)	
log (cd)	5.4781368	log (ah)	5.5722953	log (ag)	5.5969594	log (bc)	5.6898547	log (ae)	5.8083908
log (-ai)	5.4790644 _n	log (-c ²)	5.5715728 _n	log (-bd)	5.5964187 _n	log (-af)	5.6902836 _n	log (-b ²)	5.8081866 _n
	2.80817 _n		2.79299		2.69186		2.68464 _n		2.57565

Daß die Klammern () in den Überschriften dieser Tabellen symbolisch die Ausdrücke $\frac{\partial D}{\partial x} = (x)$, $\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} = (xy)$

(bi')	
log (bi)	5.3182901
log (-c ² g)	5.3179032 _n
	2.26791

darstellen, in den Argumenten der Kolonnen aber die gewöhnliche Bedeutung der Zusammenfassung haben, kann nicht zu Mißverständnissen Anlaß geben.

Das Verschwinden der Determinante D und aller ihrer Unterdeterminanten erster Ordnung, das das Verschwinden von D einschließt, begründet eine besondere Aufgabe, die ich in einem Aufsatz („Über einen Ausnahmefall der Ausgleichungsrechnung“, Astr. Nachr. Bd. 240, Nr. 5757, Kiel 1930) behandelt habe. Die Ergebnisse dieses Aufsatzes, soweit sie hier benutzt werden, mögen hier angeführt werden: Es wird dort unterschieden zwischen einem Verschwinden in streng mathematischem Sinne und dem Wegfallen einer größeren Zahl von zählenden Stellen. Im ersten Falle gilt das Folgende: Es können nicht alle vier Unbekannten, sondern nur zwei beliebige von ihnen als lineare Funktionen der willkürlich bleibenden beiden übrigen Unbekannten aus zwei beliebigen der vier Gleichungen bestimmt werden; und das auch nur unter der Voraussetzung, daß jede der vier Dreiergruppen, die aus den vier hier mit $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ bezeichneten bekannten Gliedern der Normalgleichungen gebildet werden können, sechs gewisse dreigliedrige lineare, homogene, für jede Gruppe verschiedene, als Trinome bezeichnete Gleichungen erfüllt. Welche zwei von den vier Unbekannten auch als willkürlich wählbare Unbekannte ausersehen und welche Werte auch ihnen willkürlich zuerteilt werden, aus welchen zweien der vier Gleichungen ferner auch die zwei übrigen Unbekannten bestimmt werden mögen, so behält doch die Summe $\mathfrak{U}$ der gewichteten Quadrate der Fehler v_a^* die bei der Einsetzung der Werte der vier Unbekannten in die einzelnen den Normalgleichungen zu Grunde liegenden vermittelnden Gleichungen übrigbleiben, denselben unveränderlichen Wert. Zwischen der Größe

$$\mathfrak{U} = \sum_1^n p_a v_a^{*2}$$

und den Größen $\mathfrak{H} = \sum_1^n p_a h_a^{*2}$ $\mathfrak{N} = \mathbb{A}x^* + \mathbb{B}y^* + \mathbb{C}z^* + \mathbb{D}w^*$

besteht die Gleichung

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{H} - \mathfrak{N}$$

Und für die Größe $\mathfrak{H}_{\alpha\beta}$ gelten, je nachdem man die verschiedenen Wertpaare der bestimmten Unbekannten benutzt, 6 Formeln zwar verschiedener Gestalt aber gleichen Wertes. Die Indices 1, 2, 3, 4 gelten dabei der Reihe nach für x^* , y^* , z^* , w^* . Die Formeln für die 24 verschwindenden Trinome und für die 6 Größen $\mathfrak{H}$ brauchen aus dem genannten Aufsatz hierher nicht besonders übertragen zu werden; man kann sie vielmehr den folgenden Tabellen entnehmen, in denen die einzelnen Glieder der Form und dem numerischem Werte nach in die positiven und negativen Teilen getrennt, angegeben werden:

Verschwindende Trinome

fi	66710409	gh	66696077	gi	53810790	fk	53831185	hk	41024717	i^2	41017991
fg	66668062	ei	66700646	ek	53823296	g^2	53776630	gi	40991953	fk	41007481
eh	66668060	f^2	66662348	fg	53772025	ei	53798309	fi	40988443	gh	40979632
+	200059071	-	200059071	+	161406111	-	161406124	+	123005113	-	123005104
cg	126600090	df	126567490	dh	96457022	ci	96502600	ck	77871636	ai	77822107
de	126548980	bg	126632480	bi	96527289	df	96416511	dg	77772696	bk	77891554
bf	126621630	ce	126570700	cf	96433067	bh	96498289	bi	77855393	cg	77786071
+	379770700	-	379770670	+	289417378	-	289417400	+	233499725	-	233499732
fk	59384838	i^2	59375110	ci	139691190	dh	139625240	di	112650470	ck	112722160
di	59283274	ck	59321000	cd	139475140	ai	139773350	ak	112788470	d^2	112476240
ci	59293466	dh	59265466	ah	139731350	c^2	139499100	cd	112495570	ai	112736100
+	177961578	-	177961576	+	418897680	-	418897690	+	337934510	-	337934500
fi	96565867	gh	96545111	gi	77893179	fk	77922679	df	183211270	cg	183258440
cg	96441333	bi	96527289	bk	77891554	dg	77772696	ag	183366240	bd	183138100
bh	96498289	cf	96433067	df	77766036	bi	77855393	bc	183169580	af	183350550
+	289505489	-	289505467	+	233550769	-	233550765	+	549747090	-	549747090
dg	147784200	bk	148010030	ek	102275380	g^2	102186710	bg	240627850	de	240469170
ak	148059250	d^2	147649360	dg	102093480	bk	102249510	bd	240408330	ag	240707830
bd	147712520	ag	147896530	bg	102137140	de	102069790	ae	240651940	b^2	240511160
+	443555970	-	443555920	+	306506000	-	306506010	+	721688120	-	721688160
fk	77922679	gi	77893179	bi	183421770	df	183211270	fg	126683070	ei	126744990
di	77822107	ck	77871636	cd	183091270	ai	183482740	bi	126712920	cg	126600090
cg	77786071	df	77766036	af	183350550	bc	183169580	ce	126570700	bf	126621630
+	233530857	-	233530851	+	549863590	-	549863590	+	379966690	-	379966710
bf	298311580	ce	298191590	cf	227189480	bh	227343090	eh	157094770	f^2	157051770
bc	298116160	af	298410690	ah	227418640	ce	227040630	cf	156948880	bh	157055020
ae	298366990	b^2	298192410	bc	227098740	af	227323130	bf	156939030	ce	156925880
+	894794730	-	894794690	+	681706860	-	681706850	+	471032680	-	471032670
cg	183258440	bi	183421770	zi	126744980	fg	126683070	gh	96545111	fi	96565867
ai	183482740	cd	183091270	df	126567490	bi	126712920	ei	96502600	dh	96457022
bd	183138100	ag	183366240	bg	126632480	de	126548980	df	96416511	cg	96441333
+	549879280	-	549879280	+	379944950	-	379944970	+	289464222	-	289464222

 $\mathcal{N}_{ab}$

eA^2	430397520	hA^2	249904620	kA^2	162698540	hB^2	119265360	kB^2	77646821	kC^2	45059062
aB^2	430431680	aC^2	249782830	aD^2	162494920	eC^2	119197780	eD^2	77543500	hD^2	45024604
$-2bA^2$	+860829200	$-2cA^2$	+499687450	$-2dA^2$	+325193460	$-2fB^2$	+238463140	$-2gB^2$	+155190321	$-2iC^2$	+90083666
	-860577400		-499271950		-324742980		-238430490		-155123000		-90076271
	+251800		415500		450480		32650		67321		7395
	5.40106		5.61857		5.65867		4.51388		4.82815		3.86894
(hk)	2.57565	(ek)	2.79299	(eh)	2.82811	(ak)	1.68834	(ah)	2.00263	(ae)	1.04317
$\log \mathcal{N}_{12}$	2.82541	$\log \mathcal{N}_{13}$	2.82558	$\log \mathcal{N}_{14}$	2.82556	$\log \mathcal{N}_{23}$	2.82554	$\log \mathcal{N}_{24}$	2.82552	$\log \mathcal{N}_{34}$	2.82577

Es ist ersichtlich, daß alle 24 Trinome mit derselben Genauigkeit verschwinden, wie die Determinante D und alle ihre Unterdeterminanten erster Ordnung; und daß auch die 6 Werte von $\mathcal{N}$ soweit übereinstimmen, wie es die Genauigkeit der Rechnung irgend ermöglicht. Gleichwohl muß man sehr schwere Bedenken tragen, für das Beispiel ein streng mathematisches Verschwinden der genannten Determinanten anzunehmen; denn dann würde anerkannt werden müssen, daß die Methode nicht im Stande sei, ihr Ziel, nämlich die Bestimmung aller vier Koeffizienten der Formel für die Energiedichte zu erreichen. Und,

selbst wenn man sich mit dem erreichbaren näheren Ziele der Bestimmung nur zweier der vier Koeffizienten begnügen wollte, so würde der ganz unbefriedigende Zustand eintreten, daß man keinen Anhalt dafür hätte, welche zwei aus den vier Koeffizienten man auswählen sollte. Es ist also der größte Nachdruck auf die Untersuchung des offenstehenden zweiten Falles zu legen, bei dem das Verschwinden der Determinanten nur als ein Wegfall einer größeren Anzahl zählender Stellen aufgefaßt wird. In dem angeführten Aufsätze ist für diesen Fall eine Auflösung der Normalgleichungen in zwei Schritten vorgetragen worden, indem mit dem ersten Schritte die Unbekannten z^* und w^* , mit dem zweiten Schritte die Unbekannten x^* und y^* bestimmt werden. Den aus dem Aufsätze hierher zu übertragenden Formeln schicken wir zur Erinnerung die bereits benutzte Bezeichnung, soweit sie hier wieder gebraucht wird, voraus. Die vermittelnden Gleichungen haben die Gestalt

$$a_a^* x^* + b_a^* y^* + c_a^* z^* + d_a^* w^* = h_a^*$$

Die Koeffizienten und die bekannten Glieder der Normalgleichungen sind, soweit sie hier zunächst gebraucht werden,

$$\begin{aligned} [a^* a^*] &= a & [a^* b^*] &= b & [a^* c^*] &= c & [a^* d^*] &= d \\ [b^* b^*] &= e & [b^* c^*] &= f & [b^* d^*] &= g \\ [a^* h^*] &= \mathfrak{A} & [b^* h^*] &= \mathfrak{B} \end{aligned}$$

Es werden nun die beiden ersten Unbekannten aus den Normalgleichungen eliminiert; zur Vorbereitung dazu berechnet man die Werte der Größen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$; a, b, c, d nach den Formeln

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{e}{\mathfrak{D}} & \mathfrak{B} &= -\frac{b}{\mathfrak{D}} & \mathfrak{C} &= \frac{a}{\mathfrak{D}} & \mathfrak{D} &= ae - b^2 \\ a &= -\mathfrak{A}c - \mathfrak{B}f & b &= -\mathfrak{A}d - \mathfrak{B}g \\ c &= -\mathfrak{B}c - \mathfrak{C}f & d &= -\mathfrak{B}d - \mathfrak{C}g \end{aligned}$$

Für jede vermittelnde Gleichung werden dann die Größen f_a^*, g_a^*, h_a^* , nach den Formeln

$$\begin{aligned} f_a^* &= c_a^* + a a_a^* + b b_a^* & g_a^* &= d_a^* + b a_a^* + d b_a^* \\ h_a^* &= h_a^* - (\mathfrak{A} a_a^* + \mathfrak{B} b_a^*) \mathfrak{A} - (\mathfrak{B} a_a^* + \mathfrak{C} b_a^*) \mathfrak{B} \end{aligned}$$

berechnet. Mit ihnen erhalten die vermittelnden Gleichungen die folgende Gestalt

$$f_a^* z^* + g_a^* w^* = h_a^*$$

Und ihnen gehören mit den Abkürzungen

$$[f^* f^*] = l \quad [f^* g^*] = m \quad [g^* g^*] = n \quad [f^* h^*] = \mathfrak{F} \quad [g^* h^*] = \mathfrak{G}$$

die folgenden Normalgleichungen zu

$$l z^* + m w^* = \mathfrak{F} \quad m z^* + n w^* = \mathfrak{G}$$

Mit den Abkürzungen

$$\mathfrak{E} = \frac{n}{\mathfrak{S}} \quad \mathfrak{F} = -\frac{m}{\mathfrak{S}} \quad \mathfrak{G} = \frac{l}{\mathfrak{S}} \quad \mathfrak{H} = ln - m^2$$

werden also zuerst die Werte der beiden letzten Unbekannten durch die Formeln

$$z^* = \mathfrak{E} \mathfrak{F} + \mathfrak{F} \mathfrak{G} \quad w^* = \mathfrak{F} \mathfrak{F} + \mathfrak{G} \mathfrak{G}$$

und sodann die zwei ersten Unbekannten durch die Formeln

$$x^* = \mathfrak{A} \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \mathfrak{B} + a z^* + b w^* \quad y^* = \mathfrak{B} \mathfrak{A} + \mathfrak{C} \mathfrak{B} + c z^* + d w^*$$

erlangt.

Die Wirksamkeit der vorgenommenen Umgestaltung der Normalgleichungen wird dadurch augenfällig, daß sich die vorher verschwindende Determinante D gemäß der Formel

$$D = \mathfrak{D} \mathfrak{H}$$

in das Produkt der zwei nichtverschwindenden Determinanten $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ verwandelt.

Um nun die mittleren Fehler der Unbekannten zu erlangen, berechnet man zuerst den mittleren Fehler der Gewichtseinheit μ ; bei n vermittelnden Gleichungen und 4 Unbekannten gelten dafür die Formeln

$$\mathfrak{U} = [k^* k^*] - (\mathfrak{C} \mathfrak{F}^2 + 2 \mathfrak{F} \mathfrak{H} \mathfrak{G} + \mathfrak{G} \mathfrak{G}^2)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\mathfrak{U}}{n - 4}}$$

Sodann möge sogleich die Formel für den mittleren Fehler einer beliebigen Funktion φ der vier Unbekannten angegeben werden, die die Formeln für die mittleren Fehler der einzelnen Unbekannten als besondere, sofort ablesbare Fälle einschließt: Setzt man

$$\varphi_a = \mathfrak{A} \frac{\partial \varphi}{\partial x^*} + \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi}{\partial y^*} \quad \varphi_b = \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi}{\partial x^*} + \mathfrak{C} \frac{\partial \varphi}{\partial y^*}$$

$$\varphi_l = (a \mathfrak{C} + b \mathfrak{F}) \frac{\partial \varphi}{\partial x^*} + (c \mathfrak{C} + d \mathfrak{F}) \frac{\partial \varphi}{\partial y^*} + \mathfrak{C} \frac{\partial \varphi}{\partial z^*} + \mathfrak{F} \frac{\partial \varphi}{\partial w^*}$$

$$\varphi_m = (a \mathfrak{F} + b \mathfrak{G}) \frac{\partial \varphi}{\partial x^*} + (c \mathfrak{F} + d \mathfrak{G}) \frac{\partial \varphi}{\partial y^*} + \mathfrak{F} \frac{\partial \varphi}{\partial z^*} + \mathfrak{G} \frac{\partial \varphi}{\partial w^*}$$

so wird der mittlere Fehler μ_φ von φ durch die folgende Formel erhalten:

$$\left(\frac{\mu_\varphi}{\mu} \right)^2 = \varphi_a^2 a + 2 \varphi_a \varphi_b b + \varphi_l^2 l + 2 \varphi_l \varphi_m m \\ + \varphi_b^2 e + \varphi_m^2 n$$

Im folgenden werden die Ergebnisse der numerischen Rechnung zusammengestellt:

log a	3.0648426	log $\mathfrak{A}$	0.1678982	$\mathfrak{D}$	{	5.8083908	2.57565
log b	2.9040683	log $\mathfrak{B}$	0.3284183 _n			5.8081366 _n	
log c	2.7857864	log $\mathfrak{C}$	0.4891926	f_a^*		$c_a^* + 0.36164 a_a^* - 1.28527 b_a^*$	
log d	2.6923504	log $\mathfrak{D}$	2.5756500	g_a^*		$d_a^* + 0.47834 a_a^* - 1.30679 b_a^*$	
log e	2.7435482	log a	9.55828—10	h_a^*		$h_a^* - 0.32826 a_a^* - 0.62393 b_a^*$	
log f	2.6254410	log b	9.67974—10				
log g	2.5321168	log c	0.10899 _n				
log $\mathfrak{A}$	2.9451608	log d	0.11621 _n				
log $\mathfrak{B}$	2.7845308						

In den Werten der Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ und damit auch der Unbekannten x^* und y^* können gut vier zählende Stellen erreicht werden.

Ferner wird

α	$\log f^*$	$\log g^*$	$\log k^*$	α	$\log f^*$	$\log g^*$	$\log k^*$	α	$\log f^*$	$\log g^*$	$\log k^*$
1	7.68055	7.85706	7.14613 _n	29	7.83123 _n	8.05881 _n	7.67761 _n	55	7.76938 _n	7.99123 _n	7.79727 _n
2	8.05338	8.23820	8.78483	30	8.17114 _n	8.41095 _n	8.35870 _n	56	6.81954 _n	6.89763	7.71012 _n
3	7.96979	8.12245	8.93977	31	8.19396 _n	8.43233 _n	8.36324 _n	57	7.79449	8.04336	7.65514 _n
4	7.76693	7.78426	9.15863	32	8.20737 _n	8.44342 _n	8.33224 _n	58	7.83059	8.17464	7.40483
5	7.55799	7.15776	9.23885	33	8.16465 _n	8.39076 _n	8.05767 _n	59	8.05385	8.36511	8.11093
6	7.10653	7.54630 _n	9.22866	34	8.09830 _n	8.32366 _n	7.80277 _n	60	8.12905	8.43838	8.14799
7	7.58917 _n	8.16778 _n	9.28187	35	8.00945 _n	8.22660 _n	7.52892 _n	61	8.18327	8.48728	8.20548
8	7.63939 _n	8.19913 _n	9.21832	36	7.84136 _n	8.05269 _n	6.14613 _n	62	8.16376	8.55473	8.88547
9	7.63899 _n	8.20047 _n	9.26421	37	7.07918 _n	7.26245 _n	7.26245	63	8.41963	8.73368	8.87105
10	6.37475 _n	7.84236 _n	9.30329	38	7.48996	7.70415	7.61172	64	8.51348	8.79532	8.71634
11	7.42700	6.75128 _n	9.37854	39	7.95182	8.15137	7.71181	65	8.45743	8.76477	8.79906
12	7.74663	7.76982	9.10387	40	8.26269	8.45225	7.83251	66	8.47114	8.77887	8.42553
13	7.90325	8.05243	9.00017	41	8.44295	8.62221	7.99034	67	8.48714	8.79484	8.57078
14	8.45606	8.75782	8.60184	42	8.44295	8.62221	7.99034	68	8.49499	8.80250	8.33365
15	8.47831	8.78270	8.74241	43	8.28081	8.46953	7.79518	69	8.49831	8.80543	8.18469
16	8.49262	8.79868	8.71483	44	7.91328	8.11491	7.52244	70	8.49052	8.79630	8.80502
17	8.49593	8.80375	8.40586 _n	45	7.46240	7.68034	7.23045	71	8.48116	8.78576	8.99114
18	8.58838	8.86558	8.83784	46	7.12057 _n	7.29885 _n	6.47712	72	8.46345	8.76537	9.08357
19	8.47683	8.78447	8.76782	47	7.79657 _n	8.00518 _n	7.01284 _n	73	8.44170	8.74131	9.08614
20	8.43743	8.74476	8.02572	48	7.99255 _n	8.20952 _n	7.49554 _n	74	8.41996	8.71684	8.80455
21	8.40088	8.70535	7.93902	49	8.08920 _n	8.31048 _n	7.65801 _n	75	8.38489	8.67715	9.05504
22	8.31408	8.62076	7.83759 _n	50	8.13162 _n	8.35564 _n	7.81425 _n	76	7.33626	7.21405 _n	9.06210
23	8.25600	8.56277	8.18308	51	8.18184 _n	8.41010 _n	7.97451 _n	77	7.68673	7.60595	9.22194
24	8.19257	8.50037	7.75967	52	8.20385 _n	8.43616 _n	8.03565 _n	78	7.83872	7.91787	9.26661
25	8.11261	8.42193	8.26079	53	8.20817 _n	8.44373 _n	8.27416 _n	79	7.99726	8.16122	9.26364
26	8.03100	8.34341	8.32201	54	8.20167 _n	8.43902 _n	8.35922 _n	80	8.05042	8.23426	9.18227
27	7.80482	8.18098	7.47712		7.95809 _n	8.19507 _n	7.82737 _n	81	7.93044	8.12024	9.49091
28	7.30535 _n	7.41162 _n	7.52763					82	7.55582	7.72933	9.41799

Zu allen Werten dieser Tabelle ist -10 hinzuzufügen. Zu den Größen $[f^* f^*]$, $[f^* g^*]$, ... liefern die einzelnen Gruppen

I ($1 \leq \alpha \leq 13$) II ($14 \leq \alpha \leq 29$) III ($30 \leq \alpha \leq 53$) IV ($54 \leq \alpha \leq 75$) V ($76 \leq \alpha \leq 82$)
die folgenden schon mit den Gewichten multiplizierten Beiträge:

	$f^* f^*$	$f^* g^*$	$f^* k^*$	$f^* s^*$	$g^* g^*$	$g^* k^*$	$g^* s^*$	$k^* k^*$	$k^* s^*$
I	0.000006632	0.000010629	0.00004524	0.000017261	0.000022614	—	0.00007936	0.000033243	0.0046972
II	0.001764136	0.003527684	0.00185712	0.005291816	0.007059924	—	0.00368380	0.010587638	0.0034967
III	0.005123920	0.008293530	0.00338913	0.013417520	0.013465900	—	0.00564770	0.021759480	0.0032229
IV	0.001208477	0.002433480	0.00266007	0.003641953	0.004908081	—	0.00537661	0.007341542	0.0081837
V	0.000007726	0.000010829	0.00018895	0.000018556	0.000015882	—	0.00025542	0.000026718	0.0059301
	0.008110891	0.014276152	0.00814051	0.022387106	0.025472401	—	0.01488417	0.039748621	0.0255306
	l	m	$\mathfrak{F}$	n	$\mathfrak{G}$				

Die numerische Rechnung hat ergeben:

$\log l$	7.9090685	— 10	$\log \mathfrak{E}$	3.9596279		$\mathfrak{H}$	6.3151384	
$\log m$	8.1546111	— 10	$\log \mathfrak{F}$	3.7081691 _n			6.3092222 _n	4.446442 — 10
$\log n$	8.4060699	— 10	$\log \mathfrak{G}$	3.4626265				
			$\log \mathfrak{H}$	4.4464420				
$\log \mathfrak{F}$	7.9106516	— 10						
$\log \mathfrak{G}$	8.1727246	— 10						

In den Werten der Größen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und damit auch der Unbekannten z^* und w^* können gut vier zählende Stellen erreicht werden.

Es wird nun $\log D = \log (\mathfrak{D} \mathfrak{H}) = 7.02209 - 10$; da sich nun vor der Zerlegung der Rechnung in zwei Schritte (S. 46) ergeben hatte, daß sich D aus zwei nahezu entgegen-

gesetzt gleichen Teilen von dem logarithmischen Betrage 11.71540 zusammengesetzt, und demnach der logarithmische Verlust $\Delta \log D = 14.69331$ beträgt, so wird ersichtlich, daß eine Rechnung, die von der Zerlegung in zwei Schritte absähe und überhaupt soweit geführt werden könnte, in dem Werte von D zu einem Verluste nicht nur der schon früher festgestellten 8, sondern von 14 zählenden Stellen führen müßte. Hierdurch wird die Wirkung der Zerlegung augenscheinlich, die es ermöglicht, trotz der auch hier noch eintretenden Verluste an zählenden Stellen die Werte der Unbekannten mit wenigstens vier zählenden Stellen zu erreichen.

Der weiteren Darlegung mögen zur Erinnerung die Formeln für die Energiedichte f vorausgeschickt werden, so wie sie sich in der inzwischen geänderten Bezeichnung gestalten:

$$f = 10^8 (x^* + y^* \sqrt{1-r^2} + z^* (1-r^2) + w^* (\sqrt{1-r^2})^3)$$

$$p^* = x^* + y^* + z^* + w^*$$

$$c_0 = \frac{x^*}{p^*} \quad c_1 = \frac{y^*}{p^*} \quad c_2 = \frac{z^*}{p^*} \quad c_3 = \frac{w^*}{p^*}$$

$$f = 10^8 p^* (c_0 + c_1 \sqrt{1-r^2} + c_2 (1-r^2) + c_3 (\sqrt{1-r^2})^3)$$

Man führt nun einen Winkel i ein, der mit dem Emissionswinkel i' der Strahlung auf der Sonnenoberfläche durch die Formel

$$\operatorname{tg} i = \cos r'_0 \operatorname{tg} i'$$

verbunden ist; mit Rücksicht auf die Formel

$$\sin r' = \sin r'_0 \sin i' \quad r = \frac{\operatorname{tg} r'}{\operatorname{tg} r'_0}$$

wird dann

$$r = \sin i \quad \sqrt{1-r^2} = \cos i$$

und die beiden Formeln für f nehmen dadurch die folgenden Gestalten an:

$$\begin{aligned} f &= 10^8 (x^* + y^* \cos i + z^* \cos^2 i + w^* \cos^3 i) \\ &= 10^8 p^* (c_0 + c_1 \cos i + c_2 \cos^2 i + c_3 \cos^3 i) \end{aligned}$$

Mit der Hilfe der Abkürzungen

$$\alpha_0 = \frac{x^* + \frac{1}{2} z^*}{p^*} \quad \alpha_1 = \frac{\frac{1}{2} y^* + \frac{3}{8} w^*}{p^*} \quad \alpha_2 = \frac{\frac{1}{4} z^*}{p^*} \quad \alpha_3 = \frac{\frac{1}{8} w^*}{p^*}$$

verwandeln sich diese Potenzreihen in die trigonometrische Reihe

$$f = 10^8 p^* (\alpha_0 + 2\alpha_1 \cos i + 2\alpha_2 \cos^2 i + 2\alpha_3 \cos^3 i)$$

Zuerst führen wir nun die Ergebnisse für die beiden ersten Unbekannten x^* und y^* an, indem wir $z^* = w^* = 0$ setzen; es wird dann

$$\begin{aligned} \log x^* &= 9.51622 - 10 & \log c_0 &= \log \alpha_0 = 9.53750 - 10 \\ \log y^* &= 9.79513 - 10 & \log c_1 &= \log 2\alpha_1 = 9.81641 - 10 \\ \log p^* &= 9.97872 - 10 \end{aligned}$$

Da nun hier $\mathfrak{H} = [k^* k^*]$ wird, so gilt für μ die Formel

$$\mu = \sqrt{\frac{\mathfrak{H}}{81}}$$

und danach wird

$$\log \mu = 8.24928 - 10$$

Überträgt man nun die Indices a, b, l, m , deren Bedeutung für eine beliebige Funktion φ aus den angegebenen Formeln für $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_l, \varphi_m$ zu erkennen ist, auf die besonderen Funktionen x^*, y^*, c_0, c_1 ; setzt man also z. B.

$$x_a^* = \mathfrak{A} \quad x_b^* = \mathfrak{B} \quad x_l^* = a\mathfrak{E} + b\mathfrak{F} \quad x_m^* = a\mathfrak{F} + b\mathfrak{G}$$

so wird bei der im vorliegenden Falle entstehenden Beschränkung auf die Indices a und b

$$\begin{aligned} \log x_a^* &= 0.16790 & \log x_b^* &= 0.32842_n \\ \log y_a^* &= 0.32842_n & \log y_b^* &= 0.48919 \\ \log (c_0)_a &= 0.26144 & \log (c_0)_b &= 0.41207_n \\ \log (c_1)_a &= 0.25144_n & \log (c_1)_b &= 0.41207 \end{aligned}$$

Nach der Formel für $\left(\frac{\mu_\varphi}{\mu}\right)^2$ wird dann

$$\begin{aligned} \log \frac{\mu_{x^*}}{\mu} &= 0.08395 & \log \frac{\mu_{c_0}}{\mu} &= 0.16763 \\ \log \frac{\mu_{y^*}}{\mu} &= 0.24498 & \log \frac{\mu_{c_1}}{\mu} &= 0.16763 \end{aligned}$$

Auf die Numeri übertragen wird also

$$\begin{aligned} x^* &= 0.32826 \pm 0.02154 & c_0 &= 0.34474 \pm 0.02612 & \alpha_0 &= 0.34474 \pm 0.02612 \\ y^* &= 0.62393 \pm 0.03121 & c_1 &= 0.65526 \pm 0.02612 & \alpha_1 &= 0.32763 \pm 0.01306 \end{aligned}$$

Die in den einzelnen vermittelnden Gleichungen bei Einsetzung der Werte von x^* und y^* übrigbleibenden Fehler im Sinne Beobachtung minus Rechnung sind die schon angegebenen Größen k_a^* . Diese Darstellung der Beobachtungen durch nur zwei Unbekannte ist nicht befriedigend; das zeigt sich in der langwellenförmigen Gestalt der Fehler und in dem großen Überwiegen der 72 Zeichenfolgen über die 9 Zeichenwechsel in der Reihe der Werte k_a^* . Immerhin aber haben die mittleren Fehler der Unbekannten wenigstens eine einigermaßen erträgliche Größe. Besonders muß aber hervorgehoben werden, daß sich der Wert von c_1 nur um einen kleinen, innerhalb des mittleren Fehlers liegenden Betrag von $\frac{2}{3}$ unterscheidet, daß also für die Energiedichte merkbar die Formel

$$f = \frac{1 + 2 \cos i}{3}$$

gilt, die Schwarzschild („Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre“, Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, 1906, Berlin 1907) als charakteristisch für das Strahlungsgleichgewicht der Sonne gefunden hat. Bei den in (A) angestellten Versuchen, den an der unbedeckten Sonnenscheibe angestellten aktinischen Messungen Cosinusreihen anzupassen, ist der Versuch mit einer nur zweigliedrigen Formel von der Gestalt der Schwarzschildischen mißlungen und erst mit einer viergliedrigen Formel konnte eine befriedigende Anpassung erzielt werden; das hat dort die Veranlassung gegeben, den Untersuchungen die viergliedrige Cosinusreihe zu Grunde zu legen. Wenn sich nun aber etwa auch an künftigen genaueren Messungen an Sonnenfinsternissen die Schwarzschildische Formel bestätigen sollte, so könnte man daran denken, den Umstand, daß die zweigliedrige Formel zwar für die bedeckte, aber nicht für die unbedeckte Sonnenscheibe gelte, der Wirkung der Zerstreuung der Sonnenstrahlung in der Erdatmosphäre zuzuschreiben. Allerdings müßte man dann

die bei der unbedeckten Sonnenscheibe ganz sicher festgestellte Abhängigkeit der Energieverteilung von der Wellenlänge der Strahlung gleichfalls als eine ausschließliche Wirkung der Zerstreuung auffassen.

Es ist nun darzulegen, wie sich die Rechnung gestaltet, wenn man auf die Bestimmung aller vier Unbekannten ausgeht. Es wird dann

$$\begin{array}{lll} \log x^* = 9.63956 - 10 & \log c_0 = 9.60266 - 10 & \log \alpha_0 = 9.64576_n - 10 \\ \log y^* = 9.94199 - 10 & \log c_1 = 9.90509 - 10 & \log \alpha_1 = 9.98111 - 10 \\ \log z^* = 0.26370_n & \log c_2 = 0.22680_n & \log \alpha_2 = 9.62474_n - 10 \\ \log w^* = 0.20761 & \log c_3 = 0.17071 & \log \alpha_3 = 9.26763 - 10 \\ \log p^* = 0.03690 & & \end{array}$$

Nach der Formel für $\mathfrak{U}$ auf S. 50 ergibt sich $\log \mathfrak{U} = 8.21653 - 10$ und nach der Formel $\mu = \sqrt{\frac{\mathfrak{U}}{79}}$ wird

$$\log \mu = 8.15935 - 10$$

Ferner wird

$$\begin{array}{llll} \log x_a^* = 0.16790 & \log x_b^* = 0.32842_n & \log x_l^* = 2.93069 & \log x_m^* = 2.66180_n \\ \log y_a^* = 0.32842_n & \log y_b^* = 0.48919 & \log y_l^* = 3.70224_n & \log y_m^* = 3.44281 \\ \log z_a^* = -\infty & \log z_b^* = -\infty & \log z_l^* = 3.95963 & \log z_m^* = 3.70817_n \\ \log w_a^* = -\infty & \log w_b^* = -\infty & \log w_l^* = 3.70817_n & \log w_m^* = 3.46263 \\ \\ \log (c_0)_a = 0.20256 & \log (c_0)_b = 0.36320_n & \log (c_0)_l = 2.92902 & \log (c_0)_m = 2.66389_n \\ \log (c_1)_a = 0.16754_n & \log (c_1)_b = 0.32812 & \log (c_1)_l = 3.65268_n & \log (c_1)_m = 3.39214 \\ \log (c_2)_a = 0.00827_n & \log (c_2)_b = 0.16960 & \log (c_2)_l = 3.90801 & \log (c_2)_m = 3.65556_n \\ \log (c_3)_a = 9.95218 - 10 & \log (c_3)_b = 0.11351_n & \log (c_3)_l = 3.64799_n & \log (c_3)_m = 3.40120 \\ \\ \log (\alpha_0)_a = 0.03529 & \log (\alpha_0)_b = 0.19561_n & \log (\alpha_0)_l = 3.68976 & \log (\alpha_0)_m = 3.43512_n \\ \log (\alpha_1)_a = 9.60147_n - 10 & \log (\alpha_1)_b = 9.76143 - 10 & \log (\alpha_1)_l = 3.59269_n & \log (\alpha_1)_m = 3.33805 \\ \log (\alpha_2)_a = 9.70724_n - 10 & \log (\alpha_2)_b = 9.86857 - 10 & \log (\alpha_2)_l = 3.60698 & \log (\alpha_2)_m = 3.35453_n \\ \log (\alpha_3)_a = 9.65115 - 10 & \log (\alpha_3)_b = 9.81248_n - 10 & \log (\alpha_3)_l = 3.34696_n & \log (\alpha_3)_m = 3.10017 \end{array}$$

Von den Größen $\left(\frac{\mu_{x^*}}{\mu}\right)^2, \left(\frac{\mu_{y^*}}{\mu}\right)^2 \dots$ führen wir die einzelnen Beiträge der in a, b, e, l, m, n multiplizierten Glieder an, damit ersichtlich werde, wie stark die drei ersten Glieder von den drei letzten übertroffen werden und wie sich auch hier zählende Stellen gegenseitig zerstören:

$$\begin{array}{rcccl} \left(\frac{\mu_{x^*}}{\mu}\right)^2 & & \left(\frac{\mu_{y^*}}{\mu}\right)^2 & & \left(\frac{\mu_{z^*}}{\mu}\right)^2 & & \left(\frac{\mu_{w^*}}{\mu}\right)^2 \\ \left. \begin{array}{l} + 2515.6 \\ - 5028.2 \\ + 2514.1 \\ + 5894.6 \\ - 11172.1 \\ + 5366.2 \end{array} \right\} 1.5 & & \left. \begin{array}{l} + 5268.4 \\ - 10536.8 \\ + 5271.4 \\ + 205848.0 \\ - 398736.0 \\ + 195745.0 \end{array} \right\} 3.0 & & + 673486 & + 211548 \\ & & & & - 1328750 & - 423100 \\ & & & & + 664371 & + 214452 \\ \hline 90.2 & & 2860.0 & & 9107 & 2900 \end{array}$$

$\left(\frac{\mu_{c_0}}{\mu}\right)^2$		$\left(\frac{\mu_{c_1}}{\mu}\right)^2$		$\left(\frac{\mu_{c_2}}{\mu}\right)^2$		$\left(\frac{\mu_{c_3}}{\mu}\right)^2$	
+ 2950.9	} 1.7	+ 2511	} 1	+ 1207	} 2	+ 932	} 1
- 5900.1		- 5021		- 2415		- 1865	
+ 2950.9		+ 2511		+ 1210		+ 934	
+ 5849.4		+ 163844		+ 531000		+ 160344	
- 11182.8	} 84.7	- 316564	} 2287	- 1045220	} 7205	- 319764	} 2191
5418.1		+ 155007		+ 521425		161611	
86.4		2288		7207		2192	

$\left(\frac{\mu_{a_0}}{\mu}\right)^2$		$\left(\frac{\mu_{a_1}}{\mu}\right)^2$		$\left(\frac{\mu_{a_2}}{\mu}\right)^2$		$\left(\frac{\mu_{a_3}}{\mu}\right)^2$	
+ 1366	} 1	+ 185	} 0	+ 302	} 0	+ 233	} 1
- 2729		- 370		- 604		- 466	
+ 1364		+ 185		+ 302		+ 234	
+ 194352		+ 124294		+ 132748		+ 40085	
- 380645	} 2642	- 243433	} 1689	- 261306	} 1798	- 79942	} 546
+ 188935		+ 120828		+ 130356		+ 40403	
2643		1689		1798		547	

$\log \frac{\mu_{x^*}}{\mu} = 0.97760$	$\log \frac{\mu_{c_0}}{\mu} = 0.96825$	$\log \frac{\mu_{a_0}}{\mu} = 1.71105$
$\log \frac{\mu_{y^*}}{\mu} = 1.72818$	$\log \frac{\mu_{c_1}}{\mu} = 1.67973$	$\log \frac{\mu_{a_1}}{\mu} = 1.61381$
$\log \frac{\mu_{z^*}}{\mu} = 1.97969$	$\log \frac{\mu_{c_2}}{\mu} = 1.92887$	$\log \frac{\mu_{a_2}}{\mu} = 1.62739$
$\log \frac{\mu_{w^*}}{\mu} = 1.73123$	$\log \frac{\mu_{c_3}}{\mu} = 1.67042$	$\log \frac{\mu_{a_3}}{\mu} = 1.36900$

Auf die Numeri übertragen wird schließlich

$x^* = + 0.43607 \pm 0.13707$	$c_0 = + 0.40055 \pm 0.13415$	$\alpha_0 = - 0.44234 \pm 0.74200$
$y^* = + 0.87496 \pm 0.77185$	$c_1 = + 0.80370 \pm 0.69037$	$\alpha_1 = + 0.95743 \pm 0.59314$
$z^* = - 1.83527 \pm 1.37734$	$c_2 = - 1.68577 \pm 1.22522$	$\alpha_2 = - 0.42145 \pm 0.61199$
$w^* = + 1.61291 \pm 0.77728$	$c_3 = + 1.48152 \pm 0.67573$	$\alpha_3 = + 0.18519 \pm 0.33756$

Ehe wir auf eine Deutung dieser Zahlen eingehen, mögen noch die in den einzelnen vermittelnden Gleichungen übrigbleibenden Fehler angeführt werden. In der folgenden Zusammenstellung stehen nebeneinander die im Sinne Beobachtung minus Rechnung genommenen Fehler, die sich bei der Bestimmung von nur zwei und aller vier Unbekannten ergeben haben. Im ersten Falle werden die Fehler durch die Größen k_a^* dargestellt, für die schon früher die Logarithmen angegeben worden sind, hier nun die Numeri angegeben werden; im zweiten Falle werden die Fehler unter der Bezeichnung v_a^* angeführt. Die Zahlen sind in Einheiten der Größe $h_a^* = 10^{-3} h_a$ und gegen die berechneten Werte um zwei zählende Stellen verkürzt angegeben.

α	k_a^*	v_a^*	α	k_a^*	v_a^*	α	k_a^*	v_a^*
1	-0.001	-0.004	29	-0.005	+0.001	55	-0.006	-0.001
2	+0.061	+0.054	30	-0.023	-0.009	56	-0.005	-0.008
3	+0.087	+0.083	31	-0.023	-0.008	57	-0.005	-0.011
4	+0.144	+0.145	32	-0.021	-0.006	58	+0.003	-0.009
5	+0.173	+0.178	33	-0.011	+0.001	59	+0.013	-0.004
6	+0.169	+0.177	34	-0.006	+0.005	60	+0.014	-0.006
7	+0.191	+0.208	35	-0.003	+0.005	61	+0.016	-0.005
8	+0.165	+0.183	36	-0.000	+0.005	62	+0.077	+0.046
9	+0.184	+0.201	37	+0.002	+0.003	63	+0.074	+0.035
10	+0.203	+0.214	38	+0.004	+0.002	64	+0.052	+0.011
11	+0.239	+0.245	39	+0.005	-0.001	65	+0.063	+0.022
12	+0.127	+0.128	40	+0.007	-0.005	66	+0.027	-0.016
13	+0.100	+0.097	41	+0.010	-0.007	67	+0.037	-0.007
14	+0.040	+0.000	41	+0.010	-0.007	68	+0.022	-0.023
15	+0.055	+0.013	42	+0.006	-0.006	69	+0.015	-0.030
16	+0.052	+0.007	43	+0.003	-0.003	70	+0.064	+0.020
17	-0.025	-0.071	44	+0.002	-0.001	71	+0.098	+0.055
18	+0.069	+0.022	45	+0.000	+0.001	72	+0.121	+0.081
19	+0.059	+0.015	46	-0.001	+0.004	73	+0.122	+0.054
20	+0.011	-0.029	47	-0.003	+0.005	74	+0.064	+0.028
21	+0.009	-0.027	48	-0.005	+0.006	75	+0.114	+0.081
22	-0.007	-0.036	49	-0.007	+0.005	76	+0.115	+0.122
23	+0.015	-0.010	50	-0.009	+0.004	77	+0.167	+0.167
24	+0.006	-0.017	51	-0.012	+0.003	78	+0.185	+0.184
25	+0.018	-0.001	52	-0.019	-0.004	79	+0.184	+0.178
26	+0.021	+0.005	53	-0.023	-0.008	80	+0.152	+0.145
27	+0.003	-0.007	54	-0.007	+0.002	81	+0.310	+0.304
28	+0.003	+0.004				82	+0.262	+0.260

Nach den ungekürzten Werten von v_a^* wird $[v^*v^*] = 0.0164625$, während sich nach der Formel

$$[v^*v^*] = [k^*k^*] - (\mathfrak{E}\mathfrak{F}^2 + 2\mathfrak{F}\mathfrak{H}\mathfrak{G} + \mathfrak{G}\mathfrak{G}^2)$$

der Wert 0.0164637 findet. Das auf S. 53 Mitte über k_a^* Gesagte gilt hier auch für v_a^* .

Kehren wir nun zu den Werten der Koeffizienten zurück, so ist festzustellen, daß in ihnen keine Spur einer Bestätigung der Schwarzschildischen Formel und besonders auch kaum eine Neigung zur Abnahme in der Reihe der Werte zu erkennen ist, während sich eine solche doch in den in (A) an den für die unbedeckte Sonnenscheibe geltenden Werten $c_0 = +0.33736$, $c_1 = +0.93107$, $c_2 = -0.39640$, $c_3 = +0.12797$ gezeigt hatte. Am ersten könnte man eine Abnahme noch bei den Größen α_0 , α_1 , α_2 , α_3 zugeben, denen als Koeffizienten einer trigonometrischen Reihe vielleicht ein Vorzug vor den anderen Koeffizienten, als denen von Potenzreihen, eingeräumt werden könnte. Nun wird aber der Aussage der Zahlen durch die sehr starke Vergrößerung, die die mittleren Fehler bei dem zweiten Schritte gegenüber dem ersten Schritte, trotz der allerdings nur unbedeutenden Verringerung des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit von 0.017753 auf 0.014433 erlitten haben, fast alles Vertrauen genommen. Als Maß für diese Vergrößerung kann man die Größe

$$V = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}((\mu_{x*})^2 + (\mu_{y*})^2 + (\mu_{z*})^2 + (\mu_{w*})^2)}_{\text{II}}}{\sqrt{\frac{1}{2}((\mu_{x*})^2 + (\mu_{y*})^2)}_{\text{I}}}$$

betrachten, indem der Zähler mit den Werten des zweiten Schrittes, der Nenner mit den des ersten Schrittes berechnet wird; es ergibt sich so der runde Wert $V = 33$.

In der folgenden Tabelle werden nun noch die für die Energiedichte erlangten Werte zusammengestellt. Die in den einzelnen Kolonnen enthaltenen Zahlen werden durch die Überschriften bezeichnet; die letzte Kolonne enthält die von Julius aus demselben Beobachtungsmateriale abgeleiteten Werte.

	zwei Unbekannte		vier Unbekannte		
r	$x^* + y^* \cos i$	$c_0 + c_1 \cos i$	$x^* + y^* \cos i$ $+ z^* \cos^2 i$ $+ w^* \cos^3 i$	$c_0 + c_1 \cos i$ $+ c_2 \cos^2 i$ $+ c_3 \cos^3 i$	Julius
1.00	0.328	0.345	0.436	0.401	0.400
0.95	0.523	0.549	0.578	0.531	0.610
0.90	0.600	0.630	0.602	0.553	0.690
0.85	0.657	0.690	0.623	0.573	0.742
0.80	0.703	0.738	0.649	0.596	0.778
0.75	0.741	0.778	0.679	0.623	0.807
0.70	0.774	0.813	0.712	0.654	0.833
0.60	0.827	0.869	0.787	0.723	0.874
0.50	0.869	0.912	0.865	0.795	0.910
0.40	0.900	0.945	0.938	0.862	0.938
0.30	0.923	0.970	1.001	0.919	0.965
0.20	0.940	0.987	1.049	0.963	0.983
0.10	0.949	0.997	1.079	0.991	0.995
0.00	0.952	1.000	1.089	1.000	1.000

Über die großen Beträge der mittleren Fehler, die den Werten der Unbekannten namentlich bei der Bestimmung aller vier Unbekannten anhaften und über deren wesentliche Verringerung, die man von einer künftigen Erhöhung der Genauigkeit der Energiemessungen erhoffen darf, ist schon in der Einleitung (S. 11) das Erforderliche gesagt worden. Wenn schon hier solche genaue Messungen vorgelegen hätten, so würde man nunmehr auf eine Verbesserung der Gewichte der einzelnen vermittelnden Gleichungen ausgehen müssen, denn die für sie gruppenweise konstant angenommenen Gewichte sind bei unzureichendem Materiale mehr erraten als berechnet worden. Es ist schon in der Einleitung angeregt worden, daß dafür künftig besonderes ausreichendes Material beschafft werden möge.

Was nun schließlich das Verhältnis der von Julius und uns erlangten Werte der Energiedichte betrifft, so können von uns nur die mit wesentlich geringeren mittleren Fehlern behafteten Werte für zwei Unbekannte in Rücksicht gezogen werden; zwischen den Werten von Julius und den gleichbedeutenden Werten von $c_0 + c_1 \cos i$ besteht nun eine größere Übereinstimmung, als bei der gänzlichen Verschiedenheit der beiderseits benutzten Methoden und der unzureichenden Genauigkeit des Beobachtungsmaterials zu erwarten war.

Die Übertragung der hier berechneten Energiedichte des Bildes der Sonnenscheibe auf die Sonnenscheibe an der Himmelskugel selbst, die nach der Umkehrung der auf der S. 8 unter Berücksichtigung allein der ersten Potenz von $q = \sin^2 r'_0$ angegebenen Formeln zwischen den Größen c_a und c'_a zu bewirken ist, kann hier unterbleiben, da die kleinen Werte der Größen $c'_a - c_a$ gegenüber der großen Ungenauigkeit der Werte der Größen c_a bedeutungslos sind.

Der Anhang enthält Tabellen für die Größen $\log v_a$ ($\alpha = 4, 5, 6, 7$), die in der vorliegenden Schrift zu den schon in (A) vorkommenden und tabulierten, auch hier wieder

gebrauchten Größen $\log \nu_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) neu hinzutreten. In den Formeln für $\frac{dh}{d\omega}$ erhalten die neuen Größen ν_α den kleinen Faktor $\frac{ds}{d\omega}$, die alten Größen ν_α aber den großen Faktor $\frac{dm}{d\omega}$; deshalb sind die tabulierten Mantissen der Größen $\log \nu_\alpha$ für die neuen Größen hier auf fünf Dezimalen beschränkt worden, während sie für die alten Größen in (A) mit sieben Dezimalen angegeben worden sind. Die Charakteristik ist für alle Werte von $\log \nu_\alpha$ gleich Null. Außerdem ist aber das Intervall des Argumentes θ der Tabellen, das für die alten Größen $\log \nu_\alpha$ zu $\Delta\theta = 0^\circ.1$ angenommen worden war, für die neuen Größen $\log \nu_\alpha$ auf $\Delta\theta = 1^\circ$ erhöht worden; und auch dann noch können die Werte von $\log \nu_\alpha$, da sie nur mit drei Dezimalen gebraucht werden, den Tabellen ohne eigentliche Interpolation, durch den bloßen Anblick entnommen werden. Die tabulierten Werte der neuen Größen $\log \nu_\alpha$ sind, wie die der alten in der letzten Stelle noch zuverlässig. Sie sind, wieder mit der Hilfe der Tabellen der vollständigen elliptischen Integrale im zweiten Bande von Legendres *Traité des fonctions elliptiques* sämtlich mit siebenstelligen, und wo es die Sicherung der Abkürzung auf fünf Dezimalen erforderte, mit acht- oder zehnstelligen Logarithmen berechnet worden. Die Erhöhung der fünften Dezimale ist wieder durch einen darüber gesetzten Strich bezeichnet worden. Die Werte von $\log (\nu_6 = E)$ sind, der Vollständigkeit wegen, aus dem *Traité* hierher überschrieben worden.

Sternwarte Kiel, Oktober 1930.

Paul Harzer.

ANHANG

TABELLEN

für die Größen $\log v_\alpha$ ($\alpha = 4, 5, 6, 7$)

θ	$\log v_4$	$\log v_5$	$\log v_6$	$\log v_7$	θ	$\log v_4$	$\log v_5$	$\log v_6$	$\log v_7$
0°	+19612	+19612	+19612	+19612	25°	+20641	+20288	+17555	+13596
1	19614	19613	19609	19602	26	20725	20342	17388	13123
2	19619	19616	19599	19572	27	20811	20398	17214	12634
3	19627	19622	19582	19523	28	20901	20456	17035	12131
4	19638	19630	19559	19453	29	20994	20516	16849	11612
	15	10	30	89		97	61	192	533
5	+19653	+19640	+19529	+19364	30	+21091	+20577	+16657	+11079
6	19672	19652	19493	19255	31	21190	20641	16458	10533
7	19693	19666	19450	19127	32	21293	20706	16254	09973
8	19718	19682	19400	18979	33	21398	20773	16043	09400
9	19746	19701	19344	18811	34	21507	20841	15826	08816
	31	21	63	187		112	70	223	597
10	+19777	+19722	+19281	+18624	35	+21619	+20911	+15603	+08219
11	19812	19745	19212	18418	36	21734	20983	15374	07612
12	19850	19770	19136	18193	37	21852	21057	15139	06995
13	19891	19797	19054	17948	38	21973	21132	14898	06368
14	19936	19827	18965	17685	39	22097	21209	14652	05731
	48	31	96	283		127	78	253	644
15	+19984	+19858	+18869	+17402	40	+22224	+21287	+14399	+05087
16	20035	19892	18767	17102	41	22354	21366	14141	04436
17	20089	19928	18658	16783	42	22486	21447	13878	03777
18	20147	19966	18543	16445	43	22622	21529	13609	03113
19	20208	20006	18421	16090	44	22761	21613	13334	02444
	64	42	128	373		141	84	280	673
20	+20272	+20048	+18293	+15717	45	+22902	+21697	+13054	+01771
21	20339	20092	18158	15327	46	23046	21783	12769	01095
22	20410	20138	18017	14919	47	23193	21870	12479	+00417
23	20484	20186	17869	14495	48	23343	21958	12184	-00262
24	20561	20236	17715	14054	49	23495	22047	11884	00941
	80	52	160	458		155	90	305	679

