

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1971

MÜNCHEN 1972

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Grundlagen der klassischen Physik in gegenwärtiger Sicht\*

Von Fritz Bopp

Sektion Physik der Ludwigs-Maximilians-Universität München

## Abstract:

The concepts of classical physics are developed from a modern point of view. Starting from the classical idea that all matter events are due to the motion of matter points in empty space, we deduce classical physics under the proposition that all matter points have their own space-time metric and follow space-time lines of stationary length. The most important results are the following: (i) Poincaré invariance is a consequence of the assumption that there is no possibility of orientation in empty space-time. – (ii) Breaking gauge invariance we obtain classical electrodynamics without selfinteraction – (iii) Breaking Poincaré invariance we obtain Einstein's theory of gravitation including the influence of electromagnetic fields, again without selfinteraction. – (iv) As a consequence we do not propose a unified field theory but rather a universal method for obtaining fields and field equations by breaking certain symmetries. We obtain as many fields as we have symmetries in the fields free case which may be broken, in classical physics electromagnetism and gravitation, in quantum physics probably some more, as e. g. the Heisenberg interaction of spinorfields by breaking Touscheck invariance.

## Inhalt:

1. Die Bewegungsgleichungen als Folge einer Metrik in der Raum-Zeit
2. Die Lagrangefunktion für Materiepunkte ohne Wechselwirkung
3. Das elektromagnetische Feld als Folge der Brechung der Eichsymmetrie
4. Das Gravitationsfeld als Folge der Brechung der Poincarésymmetrie
5. Ausblicke auf die Quantenphysik

---

\* Auszugsweise vorgetragen im Seminar des Department of Physics of the Catholic University of America, Washington DC, USA.

Die klassische Physik ist im wesentlichen abgeschlossen, so daß es überflüssig erscheinen könnte, noch einmal auf ihre Grundlagen einzugehen. Doch sind in diesem Jahrhundert in der speziellen und in der allgemeinen Relativitätstheorie, sowie in der Quantenmechanik neue Betrachtungsweisen entwickelt worden, die nicht ohne Rückwirkung auf die Darstellung der Grundlagen der klassischen Physik bleiben sollten, weil sie neue und vielleicht vertiefte Einblicke in diese gewähren. Eine solche neue Darstellung wollen wir hier entwickeln.

## 1. Die Bewegungsgleichungen als Folge einer Metrik in der Raum-Zeit

Der klassischen Mechanik liegt die Vorstellung zugrunde, daß alles materielle Geschehen auf die Bewegung von Materiepunkten im leeren Raum zurückgeführt werden kann.

Das bedeutet nicht, daß diese Vorstellung in Strenge mit der Wirklichkeit im Einklang ist. Aus der Quantenmechanik wissen wir, daß dies nicht zutrifft. Aber die klassische Mechanik beruht auf dieser Vorstellung und die klassischen Feldtheorien sind so eng mit ihr verquickt, daß sie innerhalb des Geltungsbereiches der klassischen Physik zu ihr paßt. Darum werden wir von ihr ausgehen und hier an ihr festhalten.

Ähnliches gilt für alle logisch abgeschlossenen Theorien. Der Zusammenhang zwischen Vorstellung und Theorie ist ein strenger. Doch stellen beide die Wirklichkeit nur innerhalb gewisser Grenzen dar, weil es außerhalb stehende Ordnungen gibt, sei es, daß sie außer Betracht bleiben, oder sei es, daß sie erst noch entdeckt werden müssen.

Wir gehen also von dem Satz aus: Alles Geschehen ist auf die Bewegung von Materiepunkten im leeren Raum zurückführbar. Was heißt darin „Raum“? Wir verstehen darunter nichts anderes als ein dreidimensionales Punktkontinuum, d. h. die Lage jedes Punktes soll durch drei reelle Zahlen, seine „Koordinaten“, bestimmt sein:

$$(1.1) \quad x = (x^1, x^2, x^3).$$

Zu jedem Tripel von reellen Zahlen in einem zu definierenden Bereich gehöre ein Punkt. Verschiedene Tripel bezeichnen verschiedene Punkte. Eineindeutige Transformationen

$$(1.2) \quad x^i \rightarrow x'^i = f^i(x^1, x^2, x^3)$$

liefern andere Koordinatensysteme, die das gleiche leisten wie das ursprüngliche. Sie sind also gleich gut zur Kennzeichnung der Lagen geeignet.

Aus der Annahme von Materiepunkten im Raum folgt, daß es in diesem ausgezeichnete Punkte gibt. Es seien endlich viele. Ihre Koordinaten bezeichnen wir mit

$$(1.3) \quad x_n = (x_n^1, x_n^2, x_n^3), n = 1, 2 \dots N.$$

Diese Punkte bewegen sich im Raume, d. h. sie verändern ihre Lage mit der Zeit. Entsprechend der Beschreibung aufeinanderfolgender Lagen mit Begriffen wie „vorher“ und „nachher“, können wir die verschiedenen Zeitpunkte je durch eine Zahl  $t$  darstellen, derart daß späteren Zeiten größere Zahlen zugeordnet werden. Die Gesamtheit aller Zeiten entspreche dem eindimensionalen Kontinuum aller reellen Zahlen.

Wenn die Lage aller Materiepunkte in jedem Augenblick definiert ist, sind die Koordinaten (1.3) Funktionen der Zeit:

$$(1.4) \quad x_n = x_n(x^0).$$

Diese Funktionen definieren und beschreiben die Bewegung von  $N$  Materiepunkten. Sie lassen sich durch  $N$  „Bahnkurven“ im Raum darstellen, die durch (1.4) in Parameterdarstellung gegeben sind. Hier ist der Parameter  $x^0$  gleich der Zeit, so daß die Funktionen (1.4) den Fahrplan für die Materiepunkte längs ihrer Bahn liefern.

Es empfiehlt sich, diesen nach Art eines graphischen Fahrplans darzustellen. Daraus folgt, daß wir Raum und Zeit als vierdimensionales Kontinuum betrachten, das wir dem Sprachgebrauch der Relativitätstheorie folgend „Raum-Zeit“ nennen.<sup>1</sup> Dabei gehen

<sup>1</sup> Die Zusammengehörigkeit von Raum und Zeit zeigt sich nicht erst in der speziellen Relativitätstheorie. Bereits in der nichtrelativistischen Mechanik kann man das Wirkungsprinzip raum-zeitsymmetrisch formulieren:

$$\delta \int (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} - E dt) = 0,$$

wenn man die Nebenbedingung berücksichtigt:

$$f(E, \mathbf{p}; t, \mathbf{r}) \equiv E - H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = 0.$$

die Bahnen im Raum in solche in der Raum-Zeit über, in „RZ-Bahnen“. Man entnimmt aus ihnen, wo sich die Materiepunkte in jedem Augenblick befinden. Geben wir auch die RZ-Bahnen in Parameterdarstellung an:

$$(1.5) \quad x_n = x_n(\tau) \text{ bzw. } x_n^\mu = x_n^\mu(\tau), \mu = 0, 1, 2, 3,$$

so hat nun der Parameter  $\tau$  keine physikalische Bedeutung mehr. Die physikalischen Gesetze müssen also parameterunabhängig, d. h. invariant gegen Parametertransformation sein, was nicht ausschließt, daß wir  $\tau$ , wenn es zweckmäßig ist, mit einer physikalischen Größe identifizieren können, z. B. mit der Zeit oder mit der später zu definierenden Eigenzeit.

Die klassische Mechanik handelt von dem Gesetz, dem die RZ-Bahnen folgen. Seine allgemeine Struktur ergibt sich aus den beiden folgenden Forderungen:

1. Zu jedem Materiepunkt gibt es eine ihm eigene Metrik in der Raum-Zeit, die im allgemeinen von den übrigen Materiepunkten abhängt.
2. Die RZ-Bahnen sind Linien stationärer Länge in bezug auf die den Materiepunkten eigenen Metrik.

Die Metrik hat folgende Eigenschaften:

- (a) Sie definiert den nicht notwendig positiv definiten Abstand zwischen zwei infinitesimal benachbarten Punkten:

$$(1.6) \quad dS = L(x, dx).$$

- (b) Dieser Abstand ist in den  $dx$  homogen vom ersten Grad:

$$(1.7) \quad L(x, \gamma dx) = \gamma L(x, dx).$$

- (c) Er ist in  $dx$  stetig; unabhängig vom Grenzübergang gilt:

$$(1.8) \quad \lim_{dx \rightarrow 0} L(x, dx) = 0.$$

Gl. (1.7) hat zur Folge, daß die Metrik auf die ganze Raum-Zeit ausgedehnt werden kann. Der Abstand zweier Punkte  $x_1$  und  $x_2$  längs einer Kurve  $C$ :

$$(1.9) \quad x = x(\tau), x(\tau_1) = x_1, x(\tau_2) = x_2$$

ergibt sich aus dem Linienintegral über das „Linielement“  
 $L(x, dx)$ :

$$(1.10) \quad S(C) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(x(\tau), \frac{dx(\tau)}{d\tau}\right) d\tau$$

Durch (1.8) werden Linienelemente ausgeschlossen, die wie  $dS = d\mathbf{x}^2/dx^0$  über alle Grenzen wachsen, wenn der Nenner im Limes rascher gegen 0 geht als der Zähler. Aus (1.7/8) folgt daher, daß nur Linienelemente folgender Form möglich sind:

$$(1.11) \quad a_\mu dx^\mu, \sqrt{b_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}, \sqrt[3]{c_{\lambda\mu\nu} dx^\lambda dx^\mu dx^\nu} \text{ usw.}, \\ a_\mu, b_{\mu\nu}, c_{\lambda\mu\nu} \dots = \text{Fkt.}(x).$$

Gl. (1.10) ist auf beliebigen Kurven in der Raum-Zeit definiert. RZ-Bahnen ergeben sich nach der zweiten Forderung aus dem Variationsprinzip

$$(1.12) \quad \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x, \dot{x}) d\tau = 0, \dot{x} = \frac{dx}{d\tau}.$$

Es ergibt sich also das „Hamiltonsche Prinzip“, in dem die „Lagrangefunktion“  $L(x, \dot{x})$  bis auf  $d\tau$  mit dem Linielement übereinstimmt. Nach Forderung 2 sind bei der Variation die Enden festzuhalten. Wegen der Parameterinvarianz kann man  $\tau$  auf den zu vergleichenden Kurven so wählen, daß  $d\tau$  verschwindet. Aus

$$(1.13) \quad \delta x(\tau_1) = \delta x(\tau_2) = 0, \delta \tau = 0$$

ergeben sich in bekannter Weise die Lagrangeschen Gleichungen:

$$(1.14) \quad \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^\mu}.$$

Wir werden im weiteren, ohne den metrischen Ursprung aus den Augen zu verlieren, von der Lagrangefunktion, auch vom Hamiltonprinzip und von den Lagrangeschen Gleichungen (zweiter Art) sprechen.

Da man in modernen Lehrbüchern der Mechanik für fortgeschrittene Studenten oft von der Lagrangefunktion und dem Hamiltonprinzip auszugehen pflegt, könnte man meinen, daß

die Zurückführung auf metrische Forderungen überflüssig sei. Dem ist aber nicht so. Zwar ist die Entwicklung der Mechanik aus dem Hamiltonprinzip sehr elegant. Doch setzt sie bereits die Kenntnis der ganzen Mechanik voraus. Sie kann nicht als elementarer Ausgangspunkt gelten. Denn auf die Frage, warum das Hamiltonsche Prinzip gilt, gibt es keine elementare Antwort.

Das ist bei den metrischen Forderungen anders. Natürlich bleibt auch in diesem Fall die klassische Mechanik die Antwort schuldig. Ziehen wir jedoch die Basiserfahrungen der Wellenmechanik heran, so gibt es eine natürliche Maßbestimmung, nämlich die De Broglie-Wellenlängen längs der Bahn (bei genauerem Zusehen auch längs der RZ-Bahn)<sup>2</sup>, so daß eine Metrik existiert, was unmittelbar aus Interferenzversuchen hervorgeht. Ferner folgen die Materiepunkte solchen RZ-Bahnen, längs denen benachbarte Wellenzüge günstig interferieren, so daß der in RZ-Wellenlängen gemessene Weg stationär ist.

Wir begnügen uns mit diesem qualitativen Hinweis, der einerseits zeigt, daß man Lagrangefunktion und Hamiltonprinzip als elementaren Ausgangspunkt der klassischen Mechanik betrachten kann, und andererseits, daß man die vielleicht tiefste Frage der klassischen Mechanik erst von der Quantenmechanik her beantworten kann. Die klassische Mechanik ist also erst von der Quantenmechanik her ganz zu verstehen.

In einem Punkt bleiben wir hinter der nichtrelativistischen klassischen Mechanik zurück. Wir haben keine Lagrangefunktion für das N-Punkt-System vorausgesetzt, sondern angenommen, daß jeder Materiepunkt eine eigene Lagrangefunktion hat:

$$(1.15) \quad L_n = L_n(x_n, \dot{x}_n), \quad n = 1, 2 \dots N.$$

Tatsächlich gibt es für das relativistische Mehrpunktsystem keine Lagrangefunktionen, weil die Laufzeiteffekte „Energie unterwegs“ liefern, die man mit der Punktvorstellung nicht erfassen kann. Doch bleibt es richtig, daß es für die einzelnen Materiepunkte Lagrangefunktionen geben muß, weil sie auch im relativistischen Fall Linien günstiger Interferenz folgen.

---

<sup>2</sup> Die Möglichkeit der Ausdehnung auf RZ-Bahnen ergibt sich aus dem Wirkungs-differential in<sup>1</sup>:

$$dS = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} - E \cdot dt = \hbar (\mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} - \omega dt).$$

## 2. Die Lagrangefunktionen für Materiepunkte ohne Wechselwirkung

Lassen wir zunächst außer Betracht, daß die Metrik eines Massenpunktes von Lage und Bewegung der übrigen abhängt, so kann man das Linienelement aus sehr allgemeinen Prinzipien ableiten, die am Ende die Poincarésymmetrie<sup>3</sup> der Raum-Zeit bestimmen.

Durch die Forderung der Stetigkeit der Linienelemente scheidet die nichtrelativistische Mechanik als eine strenge von vorne herein aus. Denn die Newtonsche Lagrangefunktion für kräftefreie Materiepunkte

$$L = \frac{mc^2}{2} \left( \frac{d\mathbf{x}}{dx^0} \right)^2$$

führt zu dem bereits erwähnten singulären Linienelement

$$dS = \frac{mc^2}{2} \frac{d\mathbf{x}^2}{dx^0}$$

das über alle Grenzen wächst, wenn  $d\mathbf{x}$  wie  $\varepsilon$  und  $dx^0$  wie  $\varepsilon^3$  gegen 0 geht. Es kommen nur Beiträge vom Typus (1.11) in Frage. Sie führen zu Funktionen der homogenen Formen  $F_n$  aus (1.11) wie etwa

$$(2.1) \quad dS = \sqrt{F_2} \exp \left( - \frac{F_4}{F_2' F_2''} \right).$$

Die nähere Bestimmung des Linienelements ergibt sich bei Vernachlässigung der Wechselwirkung mit der materiellen Umwelt aus folgenden Forderungen:

1. Für Materiepunkte in der leeren Raum-Zeit gibt es (a) keine ausgezeichnete Richtungen, (b) keine ausgezeichnete Lagen, (c) keine ausgezeichneten Längen.
2. Die Zeit bewahrt ihre Sonderstellung gegenüber dem Raum.

Wie sich zeigen wird, ist die Forderung 2 trotz der Raum-Zeit-Symmetrie erfüllt.

Bekanntlich sind die Koeffizienten in den Differentialformen (1.11) bei beliebigen Koordinatentransformationen (mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante) Tensoren (1., 2., 3. Stufe usw.). Sie erfahren lokal lineare Transformationen, und alle linearen Transformationen sind erreichbar.

---

<sup>3</sup> Poincarégruppe = inhomogene Lorentzgruppe.



Die Formen ungeraden Grades scheiden nach Forderung 1 von vorneherein aus. Denn Tensoren ungerader Ordnung kann man als Summe von Produkten aus Tensoren gerader Ordnung und Vektoren schreiben. Letztere ergeben Vorzugsrichtungen, was ausgeschlossen worden ist.

Somit brauchen wir nur die Formen  $F_2, F'_2 \dots, F_4 \dots$  zu betrachten. Zunächst fassen wir eine der quadratischen Formen ins Auge:

$$(2.2) \quad F_2 = b_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu.$$

Da man lokal beliebige lineare Transformationen erreichen kann, läßt sich die quadratische Form unter der Wurzel lokal stets auf Normalform bringen:

$$b_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}^0 dx^\mu dx^\nu, g_{\mu\nu}^0 = \varepsilon_\mu \delta_{\mu\nu}, \varepsilon_\mu = \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}.$$

Aus der Gleichwertigkeit der Raumrichtungen folgt, daß drei der Trägheitsindizes  $\varepsilon_\mu$  gleich sein müssen:

$$(2.3) \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3.$$

Um das festzustellen, braucht man nicht einmal die Isotropie. Es genügt die kubische Symmetrie. Der vierte Trägheitsindex  $\varepsilon_0$  muß von 0 verschieden sein, weil sonst die Zeit herausfällt. Die einzige Möglichkeit, der Forderung 2 Rechnung zu tragen, besteht in der Annahme, daß  $\varepsilon_0$  das entgegengesetzte Vorzeichen hat. Wir setzen daher:

$$(2.4) \quad \varepsilon_0 = -\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = +1.$$

Der Wert  $+1$  ergibt sich daraus, daß die Wurzel von (2.2) mindestens für  $d\mathbf{x} = 0$  reell sein muß.

Andere quadratische Formen, explizite vorkommende wie  $F'_2$  und auch solche, die sich ergeben, wenn wir Formen höheren Grades wie  $F_4$  als Produktsummen quadratischer Formen schreiben, lassen sich im allgemeinen nicht zugleich auf Normalform bringen. Eine zweite könnte simultan auf Hauptachsenform gebracht werden. Für weitere braucht nicht einmal das der Fall zu sein. In allen diesen Fällen ergäben sich Vorzugsrichtungen. Somit darf das Linienelement nur von solchen quadratischen

Formen abhängen, die sich lokal simultan auf Normalform bringen lassen. Es bleibt also bis auf konstante Faktoren nur eine quadratische Form übrig und wegen der Homogenitätsforderung für  $L$  nur das Linienelement

$$(2.5) \quad dS = -mc \sqrt{g_{\mu\nu}^0 dx^\mu dx^\nu}, (g_{\mu\nu}^0) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

das gegen die Transformationen der Poincarégruppe (der inhomogenen Lorentzgruppe) invariant ist. Die Poincarégruppe ist also eine Folge des Ausschlusses von Vorzugsrichtung, der Annahme der Gleichwertigkeit der Raumrichtung und der Beachtung der Sonderstellung der Zeit<sup>4</sup>. Es gilt also nicht nur die Umkehrung dieser Aussage. Der Faktor  $-mc$  ist nicht durch die Prinzipien bestimmt. Sämtliche Faktoren dieser Art sind in der klassischen Physik nur phänomenologisch bestimmbar. Hier hängt er in der angegebenen Weise mit der trägen Masse  $m$  zusammen.

Die spezielle Form von Gl. (2.5) gilt zunächst nur lokal. Global führen die obigen Argumente zu dem Ausdruck

$$(2.6) \quad dS = -mc \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}, \varepsilon = (+---).$$

Doch sind nach Forderung 1 nur solche  $g_{\mu\nu}(x)$  zugelassen, die zu keinen Vorzugslagen führen. Die Raum-Zeit muß homogen sein. Die Homogenität ist unmittelbar erkennbar, wenn

$$(2.7) \quad g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}^0$$

ist, wenn also (2.5) auch global gilt. Daneben gibt es andere metrische Tensoren  $g_{\mu\nu}(x)$  für homogene Räume und damit andere Räume, die dem durch (2.7) definierten etwa wie eine Kugelfläche der Ebene gegenüberstehen.<sup>5</sup>

<sup>4</sup> In der hier vorgelegten Fassung des Beweises sind kritische Anmerkungen von H. Richter und A. Schlüter zu einer früheren Fassung berücksichtigt worden. Auch hier möchte ich für ihren Hinweis danken.

<sup>5</sup> H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, 5. Aufl., Berlin 1923, legen wir den folgenden Nachweisen zugrunde, mit denen wir uns Rechnungen ersparen, die man in allen Lehrbüchern findet, in denen die allgemeine Relativitätstheorie ausführlich behandelt wird. – Vgl. hier: § 10.

Nach Forderung 1 (c) scheiden auch Räume mit konstanter Gaußscher Krümmung aus. Denn sie ergäben ohne Bezug auf Materie eine der Raum-Zeit innewohnende Maßbestimmung. Ebenso scheiden ebene Raum-Zeiten aus mit einem Zusammenhang im Großen, der mit dem bei Zylinderflächen vergleichbar ist, weil durch Größen wie dem Zylinderumfang rein geometrisch bestimmte Längeneinheiten ins Spiel kämen. Es bleibt also allein die Minkowskische Raum-Zeit übrig mit der Metrik (2.7) und dem Definitionsbereich  $(-\infty |x| + \infty)$ .

Auch wenn wir von (2.7) ausgehen, werden wir in § 4 den anderen Räumen wieder begegnen. Sie beschreiben dort eine – eventuell vorhandene – weltweite Wechselwirkung. Auch darum können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit Gl. (2.7) fordern und mit dem global gültigen Ausdruck

$$(2.8) \quad dS = -mc \sqrt{g_{\mu\nu}^0 dx^\mu dx^\nu}$$

definieren, was Wechselwirkungsfreiheit ist.

Damit sind wir bei der Poincaréinvarianz der speziellen Relativitätstheorie angelangt. Sie ist mit den Forderungen 1 und 2 verträglich. Auf den letzten Schritt kommen wir in § 4 noch einmal zurück.

### 3. Das elektromagnetische Feld als Folge der Brechung der Eichsymmetrie

Bisher haben wir die materielle Umwelt eines Materiepunktes außer Betracht gelassen und sind dabei zu dem Poincaréinvarianten Linienelement gelangt:

$$(3.1) \quad dS = -mc \sqrt{g_{\mu\nu}^0 dx^\mu dx^\nu}.$$

Bei Berücksichtigung jener Umwelt gibt es ausgezeichnete Punkte im Raum bzw. Linien in der Raum-Zeit, so daß bereits die erste Annahme in § 2 nicht mehr gilt, die Umwelt sei homogen. Daraus folgt, daß die Koeffizienten in (2.1) nicht mehr konstant sein müssen, was auch den weiteren Forderungen den Bo-

den entzieht. Die Symmetrie ist von vorneherein gebrochen. Der Willkür scheint Tür und Tor geöffnet.

Dem steht entgegen, daß sich das Poincaréinvariante Linienelement bestens bewährt. Es muß also auch nach der Symmetriebrechung seine Bedeutung bewahren, zumal sich das Gesamtsystem der RZ-Bahnen wieder der Raum-Zeit allein gegenüber sieht. Darum kann die Symmetrie nur partiell gebrochen sein. Die möglichen Symmetriebrechungen sollen durch das Linienelement (3.1) selbst bestimmt sein. Außerdem ist zu beachten, daß die Symmetriebrechung nur auf die Lagrangefunktionen für die einzelnen Materiepunkte bezogen sein kann. Das System befindet sich als Ganzes wieder der leeren Raum-Zeit gegenüber.

Den Weg zu solchen partiellen Brechungen der Symmetrie hat bereits Einstein in der allgemeinen Relativitätstheorie gewiesen. Durch Brechung der Poincaréinvarianz ist er zur Gravitationstheorie gelangt. Man hat immer wieder versucht, seine Methode so zu verallgemeinern, daß man auch das elektromagnetische Feld erhält.<sup>6</sup> Die Bemühungen, eine einheitliche Feldtheorie zu erhalten, müssen wohl als gescheitert betrachtet werden.<sup>7</sup> Die Frage, die jahrzehntelang zu so großen Anstrengungen ermutigt hat, bleibt aber bestehen. Die Gravitationstheorie ist in der allgemeineren Relativitätstheorie fest mit den Grundlagen der Mechanik verbunden. Kann eine solche Verbindung auch zwischen Mechanik und Elektrodynamik gefunden werden?

Schon Hermann Weyl<sup>8</sup> hat den Punkt erkannt, auf den es ankommt, ist aber durch sein Ziel, die einheitliche Feldtheorie, vom Wege abgekommen. Nicht eine einheitliche Feldtheorie sollte unser Ziel sein, sondern ein einheitliches Prinzip der Symmetriebrechung, derart daß jede vorhandene Symmetrie durch Brechung zu einem ihr eigentümlichen Feld führt. Nach einem solchen Prinzip wären sämtliche möglichen Wechselwirkungen bereits durch das Verhalten freier Teilchen bestimmt.

<sup>6</sup> Ein Beispiel hierzu verdanken wir H. Weyl, l. c. 5, § 40, p. 298 ff.

<sup>7</sup> H. Weyl stand solchen Bemühungen schon 1932 sehr skeptisch gegenüber. Im Göttinger Seminar „Struktur der Materie“ hat er die spät. „Relativitätstheorien“ darum scherzhaft mit Jahreszahlen benannt. Vgl. hierzu auch: H. Weyl, Z. f. Ph. 56, 330–351 (1929) 1. Absatz.

<sup>8</sup> H. Weyl, l. c. 6, § 17, p. 125.

In diesem Sinne gehen wir nun von dem Linienelement (3.1) aus. Es ist durch zwei Symmetrieeigenschaften gekennzeichnet. Von seiner Poincaréinvarianz haben wir ausführlich gesprochen. Auf deren Brechung gehen wir in § 4 ein. Hier betrachten wir die sogenannte „Eichinvarianz“. Der Name ist historisch bedingt und heute nicht mehr treffend. Was er bedeutet, ist darum allein durch die Definition bestimmt. Fügen wir zum Linienelement (3.1) ein vollständiges Differential hinzu:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} dS &= -mc \sqrt{g_{\mu\nu}^0 dx^\mu dx^\nu} - d\chi(x) \\ &= -mc \sqrt{g_{\mu\nu}^0 dx^\mu dx^\nu} - \partial_\mu \chi(x) dx^\mu, \end{aligned}$$

so ändern sich die daraus folgenden Lagrangeschen Gleichungen nicht, weil im Wirkungsintegral

$$S(C) = -mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{\mu\nu}^0 \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\tau - \chi(x_2) + \chi(x_1)$$

nur die Werte von  $\chi(x)$  an den Enden  $x_1$  und  $x_2$  erscheinen, die nach (1.13) keinen Beitrag liefern. Nicht das Linienelement, wohl aber die Bewegungsgleichungen sind invariant gegen die Eichtransformationen:

$$(3.3) \quad dS \rightarrow dS' = dS - d\chi(x);$$

sie sind eichinvariant.

Gl. (3.2) kann man auch wie folgt schreiben:

$$(3.4) \quad dS = (-mc \sqrt{g_{\mu\nu}^0 \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} - ze A_\mu(x) \dot{x}^\mu) d\tau,$$

wenn man die Forderung hinzufügt:

$$(3.5) \quad B_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) = 0.$$

Die Abspaltung des Zahlenfaktors  $ze$  ist hier unwesentlich. Mit ihr nehmen wir auf die erst später erfolgende physikalische Deutung Bezug. Die Brechung der Eichinvarianz besteht darin, daß wir die Nebenbedingung (3.5) aufgeben und annehmen, im allgemeinen sei

$$(3.6) \quad B_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \neq 0.$$

Offensichtlich müssen die von 0 verschiedenen  $B_{\mu\nu}(x)$  in den Lagrangeschen Gleichungen erscheinen:

$$-mc \frac{d}{d\tau} \frac{g_{\mu\nu}^0 \dot{x}^\nu}{\sqrt{g_{\mu\nu}^0 \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} = -ze B_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\nu.$$

Führen wir die Eigenzeit als Parameter ein:

$$(3.7) \quad ds = \frac{1}{c} \sqrt{g_{\mu\nu}^0 dx^\mu dx^\nu},$$

die nicht integral, wohl aber längs jeder RZ-Bahn definiert ist und außerdem die Vierergeschwindigkeit:

$$(3.8) \quad u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}, \quad u_\mu = g_{\mu\nu}^0 u^\nu,$$

so lauten die Lagrangeschen Gleichungen schließlich:

$$(3.9) \quad \frac{dm u_\mu}{ds} = ze B_{\mu\nu}(x) u^\nu.$$

Diese Gleichungen erscheinen in mehr vertrauter Form, wenn wir die Zeit  $t = x^0/c$  als Parameter wählen und in (3.9) die Raum- und Zeitkomponenten trennen. Die Gl. (3.7/8) haben danach folgende Gestalt:

$$(3.10) \quad ds = \sqrt{1 - \beta^2} dt, \quad \beta = v/c, \quad \beta = |\beta|.$$

Damit und mit den Bezeichnungen:

$$(3.11) \quad (A^0, \mathbf{A}^1) = \left( \frac{1}{c} \Phi, \mathbf{A} \right), \\ (\mathbf{B}_{01}, \mathbf{B}_{23}) = \left( \frac{1}{c} \mathbf{E}, -\mathbf{B} \right)$$

erhält man aus (3.4) die Lagrangefunktion:

$$(3.12) \quad L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - ze(\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

aus (3.6) mit  $\dot{\mathbf{A}} = \partial A / \partial t$ :

$$(3.13) \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

und aus (3.9) die Impuls- und die Energiegleichung:

$$(3.14) \quad \frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1 - \beta^2}} = ze (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = ze \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}.$$

Beide sind nicht unabhängig. Offensichtlich folgt aus (3.14) die Gleichung für die Leistung:

$$(3.15) \quad \frac{dE}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

mit

$$(3.16) \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

was unmittelbar auch aus (3.9) hervorgeht:

$$m u_\mu \frac{du^\mu}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{2} m u_\mu u^\mu \right) = 0$$

Danach ist  $u^\mu u_\mu$  konstant und nach (3.10) gleich

$$(3.17) \quad u^\mu u_\mu = c^2.$$

Schließlich folgen aus (3.13) die homogenen Maxwellgleichungen

$$(3.18) \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Aus (3.6) erhält man ihre kovariante Form:

$$(3.19) \quad \partial_\lambda B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu} = 0.$$

Damit ist der Anschluß an die Elektrodynamik erreicht.  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  zusammengefaßt in  $B_{\mu\nu}$ , beschreiben das elektrische und magnetische Feld,  $\Phi$  und  $\mathbf{A}$ , zusammengefaßt in  $A^\mu$ , sind das elektrische und das vektorielle magnetische Potential,  $ze$  (mit  $z = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ ) ist die elektrische Ladung des Materiepunktes,

$$(3.20) \quad U_{Lor} = ze (\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

ist das geschwindigkeitsabhängige Lorentzsche Potential einer Punktladung und

$$(3.21) \quad \mathbf{F} = ze (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

die Lorentzkraft.

Soweit stimmt unser Vorgehen weitgehend mit dem von Hermann Weyl überein und ist heute allgemein akzeptiert. Erst bei der Formulierung der Feldgleichungen trennen sich die Wege. Während es beim Ansatz der Lagrangedichte für das elektro-

magnetische Feld anders als in der Gravitationstheorie noch viele Möglichkeiten gibt, führt die Vorstellung, daß das Feld von den Materiepunkten der Umwelt herrührt, eindeutig zu den inhomogenen Maxwellgleichungen. Ehe wir darauf eingehen, müssen wir noch einem möglichen Einwand begegnen.

Wir haben in Gl. (3.10) zunächst rein formal die Eigenzeit eingeführt. Sie hat aber nicht nur formale Bedeutung, weil sich z. B. die Lebensdauer instabiler Teilchen nach der Eigenzeit richtet, so daß sie gemessen mit Uhren im Labor von der Geschwindigkeit abhängt. Man kann darum das Verhältnis der Eigenzeit zur Laborzeit experimentell bestimmen. Die Eigenzeit (3.10) hat sich z. B. bei der Beobachtung des Zerfalls freier Müonen bestätigt.<sup>9</sup> Damit ist zugleich gezeigt, daß die Eigenzeit bei freien Teilchen zum Linienelement proportional ist.

Wenn diesem eine physikalische Bedeutung zukommt, sollte man erwarten, daß die Eigenzeit im elektromagnetischen Feld durch (3.4) bestimmt ist. Die Messung der Zerfallzeit energiereicher Müonen in einem Speicherring des CERN,<sup>10</sup> also auf einer Kreisbahn im Magnetfeld, hat gezeigt, daß die Eigenzeit im Magnetfeld dieselbe ist wie bei freien Teilchen. Das scheint den Zusammenhang zwischen Eigenzeit und Linienelement zu zerstören. Tatsächlich ist aber nur eine genauere Bestimmung des Linienelements erforderlich.

Da wir auch in Gl. (3.4) ein vollständiges Differential addieren können, ohne daß sich die Lagrangeschen Gleichungen ändern (globale Wahrung der Eichsymmetrie), ist das Linienelement nicht eindeutig bestimmt. Wir können

$$(3.22) \quad A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \chi(x)$$

ersetzen, ohne daß sich  $B_{\mu\nu}(x)$  ändert. Wählen wir  $\chi(x)$  so, daß längs der RZ-Bahn

$$d\chi(x) = A_\mu(x) dx^\mu$$

ist, was längs einer Linie stets erreicht werden kann, so ist

<sup>9</sup> G. Cocconi, V. Tongiorgi, Z. Physik 118, 88 (1941).

<sup>10</sup> J. Bailey, E. Picasso: Progr. in Nuclear Phys., Vol. 12/1, 43-75 (1970) hier: p. 62-66.



$$(3.23) \quad A'_\mu(x) dx^\mu = 0 \text{ für } x \in \text{RZ-Bahn.}$$

Es gibt also stets eine Eichung, bei der das Linienelement längs der RZ-Bahn mit dem freier Teilchen übereinstimmt. Da man die Flächen  $\chi(x) = \text{const}$  außerhalb der RZ-Bahn beliebig wählen darf, ist die Eichung durch (3.23) keineswegs eindeutig bestimmt. Da wir in jedem Falle eine bestimmte Eichung zu wählen haben und eine vom Typus (3.23) wählen können, widersprechen die Genfer Messungen nicht unseren Annahmen über die Eigenzeit. Vielmehr wird nur eine schon im kraftfreien Fall bestehende Vieldeutigkeit eingeengt.

Kehren wir zu der Frage nach den Feldgleichungen zurück, so müssen wir von den RZ-Bahnen der Materiepunkte ausgehen:

$$(3.24) \quad x_n^\mu = x_n^\mu(\tau), \quad n = 1, 2 \dots N.$$

Das Linienelement für den  $n$ -ten Materiepunkt lautet danach:

$$(3.25) \quad L_n(x_n, dx_n) = -m_n c^2 \sqrt{g_{\mu\nu}^0 dx_n^\mu dx_n^\nu} - z_n e A_\mu^{(n)}(x_n) dx_n^\mu.$$

Darin müssen die  $A_\mu^{(n)}(x_n)$  durch  $x_m^\mu(\tau)$ ,  $m \neq n$ , bestimmt sein. Wir brauchen also Gleichungen zwischen  $A_\mu^{(n)}(x_n)$  und  $x_m^\mu(\tau)$ . Um diese Größen mathematisch vergleichbar zu machen, ordnen wir den RZ-Bahnen in Anlehnung an Dirac<sup>11</sup> mittels der vierdimensionalen  $\delta$ -Funktion  $\delta(x)$  Tensordichten beliebiger Stufe zu:

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \mathfrak{S}_n(x) &= a_n^0 \int \delta(x - x_n) ds_n, \\ \mathfrak{S}_n^\mu(x) &= a_n'^0 \int \delta(x - x_n) u_n^\mu ds_n, \\ \mathfrak{S}_n^{\mu\nu}(x) &= a_n''^0 \int \delta(x - x_n) u_n^\mu u_n^\nu ds_n \\ &\quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Die konstanten Faktoren  $a_n^{(\lambda)}$  sind aus Dimensionsgründen erforderlich und zugleich ein Maß für die Quellstärke. Die Größen in (3.26) sind offensichtlich Funktionen, die nur längs der RZ-Bahnen von 0 verschieden sind. Fordern wir

#### A. Superponierbarkeit der Stromdichten

so sind die Felder für den Materiepunkt durch folgende Summen über  $m \neq n$  bestimmt:

<sup>11</sup> P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. Land. A, 155, 447 (1936).

$$(3.27) \quad {}^n\mathfrak{J}(x) = \sum_{m \neq n} \mathfrak{J}_m(x), \quad {}^n\mathfrak{J}^\mu(x) = \sum_{m \neq n} \mathfrak{J}_m^\mu(x) \text{ usw.}$$

Durch die andere Stellung des Index  $n$  sei auf den Summationsprozeß hingewiesen. Man beachte, daß durch  $\sum_{m \neq n}$  die Selbstenergie ausgeklammert wird, die nach unserer Vorstellung an der Symmetriebrechung unbeteiligt ist. Daß wir nur von der Superponierbarkeit der Stromdichten sprechen, läßt die Möglichkeit zu, daß die Feldgleichungen wie in der allgemeinen Relativitätstheorie nichtlinear sind.

Wir suchen nun kovariante Gleichungen, die die Größen  $A_\mu^{(n)}$  und  $B_{\mu\nu}^{(n)}$  mit den Stromdichten  ${}^n\mathfrak{J}(x)$ ,  ${}^n\mathfrak{J}^\mu(x)$ ,  ${}^n\mathfrak{J}^{\mu\nu}(x) \dots$  verknüpfen. Solange es nur um diesen Zusammenhang geht, können wir den gemeinsamen Index  $n$  weglassen. Die einfachste kovariante Gleichung  $A_\mu = \mathfrak{J}_\mu$  scheidet von vorneherein aus – formal, weil sie nicht eichinvariant ist, – inhaltlich, weil  $\mathfrak{J}_\mu(x)$  am Ort jedes anderen Materiepunktes verschwindet und darum keine Wechselwirkung liefert. In den Feldgleichungen darf also nur der eichinvariante Schieftensor  $B_{\mu\nu}(x)$  vorkommen. Daraus müssen wir unter Heranziehung von Ableitungen Skalare, Vektoren und symmetrische Tensoren bilden.

Ausdrücke dieser Art ohne Ableitungen entstehen durch Spur- oder Produktbildung wie  $B^\nu_\nu$ ,  $B^{\mu e} B^\sigma_e$  usw. Der erste Ausdruck scheidet aus, weil die Spur des Schieftensors verschwindet, der zweite und alle entsprechenden, wenn man

## B. Linearität in den kovarianten Größen

fordert. Auch mittels Ableitungen kann man zu  $\mathfrak{J}$ ,  $\mathfrak{J}^\mu$ ,  $\mathfrak{J}^{\mu\nu} \dots$  passende Skalare, Vektoren und symmetrische Tensoren bilden z. B.

$$\partial_\nu B^{\mu\nu}, \partial_\lambda (\partial^\mu B^{\nu\lambda} + \partial^\nu B^{\mu\lambda}), \partial^\lambda \partial_{\lambda\nu} B^{\mu\nu}$$

usw.. Denkt man zunächst an solche Differentialoperatoren unendlich hoher Ordnung, so können diese zu nichtlokalen Strukturen führen. Allgemein können wir sagen, daß durch Ableitungen infinitesimal benachbarte Punkte in um so größerer Zahl ins Spiel kommen, je höher die Ableitung ist. Fordern wir

## C. maximale Lokalität in den kovarianten Größen

so bleibt von den obigen Kombinationen nur

$$(3.27) \quad \partial_\nu B^{\mu\nu}$$

übrig, und es ergeben sich die inhomogenen Maxwellgleichungen:

$$(3.28) \quad \partial_\nu B^{\mu\nu} = -\mu_0 {}^n\mathcal{J}^\mu(x)$$

mit

$$(3.29) \quad {}^n\mathcal{J}^\mu(x) = ec \sum_{m \neq n} Z_m \int \delta(x - x_m) dx_m^\mu.$$

Die aus (3.28) folgende Kontinuitätsgleichung

$$(3.30) \quad \partial_\mu {}^n\mathcal{J}^\mu(x) = 0$$

ist mit (3.29) verträglich; denn es ist

$$\begin{aligned} \partial_\mu \int \delta(x - x_m) dx_m^\mu &= \int \partial_\mu \delta(x - x_m) dx_m^\mu \\ &= - \int \frac{\partial \delta(x - x_m)}{\partial x_m^\mu} dx_m^\mu = - \int d\delta(x - x_m) = - \delta(x - x_m) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0. \end{aligned}$$

Die Abspaltung von Zahlenfaktoren ist auch hier zum Teil dimensionell, zum Teil phänomenologisch begründet. – Solche Faktoren sind in der klassischen Physik nicht durch Prinzipien bestimmt.

Die Brechung der Eichsymmetrie führt also zum Tensor  $B_{\mu\nu}$  des elektromagnetischen Feldes. Die Kovarianz der Gleichungen garantiert, daß die Symmetrien global erhalten bleiben. Die Forderungen der Linearität und der maximalen Lokalität entspringen dem Streben nach größter Einfachheit, das – hier deutlich erkennbar – eine tiefere Wurzel hat, als die der Denkökonomie oder dgl., weil bei Zulassung höherer Ableitungen, wie wir gesehen haben, Strukturannahmen hereinkommen, für die kein Grund erkennbar ist. Selbst in der Quantenelektrodynamik entsprechen die Grundgleichungen dem Ansatz in (3.28). Nichtlineare und nichtlokale Modifikationen ergeben sich dort erst als Folgen der Vakuumpolarisation. Im nächsten Paragraphen werden wir sehen, daß die Forderungen A und B auch in der Gravitationstheorie zum Ziele führen. Sie liefern auch, wie an anderer

Stelle gezeigt ist.<sup>12</sup> in der Spinorfeldtheorie die Heisenberg-Wechselwirkung.

#### 4. Das Gravitationsfeld als Folge der Brechung der Poincaré-Symmetrie

Auch hier gehen wir von dem Poincaréinvarianten Linienelement für freie Teilchen aus:

$$(4.1) \quad dS = -mc \sqrt{g_{\mu\nu}^0 dx^\mu dx^\nu}$$

und lassen zunächst das elektromagnetische Feld außer Betracht. Gehen wir zu beliebigen Koordinatensystemen über, so tritt an die Stelle des Lorentzischen metrischen Tensors  $g_{\mu\nu}^0$  ein von  $x$  abhängiger Tensor  $g_{\mu\nu}^P(x)$ . Er ist dadurch gekennzeichnet, daß es Koordinatentransformationen gibt, die zu  $g_{\mu\nu}^0$  zurückführen. Die Poincaréinvarianz ist in diesem Fall nicht gebrochen, sondern nur verschleiert.

Eine Brechung liegt erst vor, wenn wir auch  $g_{\mu\nu}(x)$  zulassen, die man nicht mehr in  $g_{\mu\nu}^0$  überführen kann. Im weiteren setzen wir eine solche Metrik voraus:

$$(4.2) \quad dS = -mc \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}.$$

Natürlich sind auch die Trägheitsindizes von  $g_{\mu\nu}(x)$  gleich  $\varepsilon = (+---)$ . Die Bewegungsgleichungen lauten<sup>13</sup>

$$(4.3) \quad -m \frac{du_\mu}{ds} = -\frac{1}{2} m \partial_\mu g_{\rho\sigma}(x) u^\rho u^\sigma.$$

Bekanntlich gibt es nur dann keine Rücktransformation, wenn der Riemannsche Krümmungstensor<sup>14</sup>

$$(4.4) \quad R_{\rho\sigma\mu\nu} \neq 0$$

ist. Diese Ungleichung entspricht der in (3.6) für  $B_{\mu\nu}(x)$ . Wir haben darum diesen Tensor mit den Stromdichten zu konfrontieren.

<sup>12</sup> F. Bopp, Sitz.-Ber. d. Bay. Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Kl. H. 2, 13 (1967).

<sup>13</sup> H. Weyl, l. c. 5, p. 133, Gl. (67).

<sup>14</sup> H. Weyl, l. c. 5, § 16, Gl. (48/49); § 18, p. 130/131.

An dieser Stelle müssen wir nicht davon Gebrauch machen, daß der Riemannntensor ein nichtlinearer Differentialausdruck zweiter Ordnung in  $g_{\mu\nu}(x)$  ist. Doch müssen wir die Symmetrieeigenschaften dieses Tensors kennen. Sie ergeben sich aus<sup>15</sup>

$$(4.5) \quad \begin{aligned} R_{\varrho\sigma\mu\nu} &= -R_{\varrho\sigma\nu\mu} = -R_{\sigma\varrho\mu\nu} = +R_{\mu\nu\varrho\sigma}, \\ R_{\varrho\sigma\mu\nu} + R_{\varrho\mu\nu\sigma} + R_{\varrho\nu\sigma\mu} &= 0. \end{aligned}$$

Halten wir an der Forderung der Linearität fest (linear in  $R_{\varrho\sigma\mu\nu}(x)$ , nicht mehr in  $g_{\mu\nu}(x)$ ) und lassen wir Ableitungen beiseite (im Einklang mit der Forderung maximaler Lokalität), so sind die einzigen Größen, die wir mit den Tensordichten vergleichen können

$$(4.6) \quad R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}, \quad R = R_{\lambda}^{\lambda}.$$

Nun ist die  $\delta$ -Funktion wegen  $\int \delta(x) d\tau_x = 1$  gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen eine skalare Dichte. Daraus folgt, daß auch die Größen  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{S}^{\mu}$ ,  $\mathfrak{S}^{\mu\nu}$  usw., im Sinne der Differentialgeometrie Dichten sind.<sup>15</sup> Darum müssen wir auch von (4.6) zu den Dichten übergehen:

$$(4.7) \quad \mathfrak{R}_{\mu\nu} = \sqrt{g} R_{\mu\nu}, \quad \mathfrak{R} = \sqrt{g} R, \quad g = -\det(g_{\mu\nu}).$$

Diese können wir mit  $\mathfrak{S}^{\mu\nu}$  konfrontieren. Die Feldgleichungen lauten

$$(4.8) \quad \mathfrak{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathfrak{R} g^{\mu\nu} = -\kappa \mathfrak{S}^{\mu\nu}.$$

Daraus folgt durch Verjüngung (vgl. (3.26)):

$$(4.9) \quad \mathfrak{R} = \kappa \mathfrak{S}_{\mu}^{\mu} \sim \kappa \mathfrak{S}.$$

Von der Kovarianz her gesehen sind die Koeffizienten der Summanden auf der linken Seite von (4.8) noch willkürlich. Die spezielle Kombination ist dadurch charakterisiert, daß die kovariante Divergenz ( $\nabla_{\mu}$  statt  $\partial_{\mu}$ ) verschwindet:<sup>16</sup>

$$(4.10) \quad \nabla_{\nu} (\mathfrak{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathfrak{R} g^{\mu\nu}) = 0.$$

<sup>15</sup> H. Weyl, l. c. 5, p. 111.

<sup>16</sup> H. Weyl, l. c. 5, p. 236, Gl. (26'), p. 238, vor Gl. (29).

Das ist nötig, weil auch die Divergenz von  $\mathfrak{S}^{\mu\nu}$  verschwindet:

$$(4.11) \quad \nabla_\nu \mathfrak{S}^{\mu\nu} = 0.$$

Während Gl. (4.10) in den Lehrbüchern abgeleitet ist, müssen wir Gl. (4.11) beweisen. Nach den Regeln der Tensorrechnung ist

$$(4.12) \quad \nabla_\nu \mathfrak{S}^{\mu\nu} = \partial_\nu \mathfrak{S}^{\mu\nu} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \mathfrak{S}^{\rho\sigma}.$$

Es genügt, wenn wir in (3.27) einen Summanden herausgreifen und nur das Integral

$$\mathfrak{S}^{\mu\nu} \sim \int \delta(x - x_n) u_n^\mu u_n^\nu ds_n$$

betrachten. Die gewöhnliche Divergenz lautet

$$\partial_\nu \mathfrak{S}^{\mu\nu} \sim - \int \frac{d\delta(x - x_n)}{ds_n} u_n^\mu ds_n = \int \delta(x - x_n) \frac{du_n^\mu}{ds_n} ds_n.$$

Da die Integration über eine RZ-Bahn erfolgt, können wir die Bewegungsgleichung benutzen, die wir hier in der Form schreiben:<sup>17</sup>

$$\frac{du_n^\mu}{ds_n} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu(x_n) u_n^\rho u_n^\sigma = 0.$$

Daraus folgt:

$$\partial_\nu \mathfrak{S}^{\mu\nu} \sim - \int \delta(x - x_n) \Gamma_{\rho\sigma}^\mu(x_n) u_n^\rho u_n^\sigma ds_n = - \Gamma_{\rho\sigma}^\mu(x) \mathfrak{S}^{\rho\sigma}(x).$$

Substitution in (4.12) ergibt wie behauptet:

$$(4.13) \quad \nabla_\nu \mathfrak{S}^{\mu\nu} = 0.$$

Somit brauchen wir auf der linken Seite von (4.8) gerade diejenige Kombination aus  $\mathfrak{R}^{\mu\nu}$  und  $\mathfrak{R}$ , deren Divergenz verschwindet; also die oben angegebene.

Das Einsteinsche Gravitationsgesetz folgt somit aus unseren Prinzipien. Wir schreiben es jetzt vollständig an, damit explizite zu erkennen ist, daß auch hier die Selbstwechselwirkung ausscheidet.

$$(4.14) \quad \mathfrak{R}^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} \mathfrak{R}(x) g^{\mu\nu}(x) = - \kappa {}^n \mathfrak{S}^{\mu\nu}(x),$$

$${}^n \mathfrak{S}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{c} \sum_{m \neq n} m_m \int \delta(x - x_m) u_m^\mu u_m^\nu ds_m.$$

<sup>17</sup> H. Weyl, l. c. 5, p. 115, Gl. (42) mit  $v^i = u^i$ , vgl. auch p. 116.

Die Ausklammerung der Selbstwechselwirkung ist neu und bedarf der weiteren Untersuchung. Sie ergibt sich aber – das sei noch einmal betont – notwendig aus der Vorstellung der Symmetriebrechung durch die materielle Umwelt.

Die Einbeziehung des elektromagnetischen Feldes in die Gravitationsgleichung (4.14) ergibt sich nun von selbst. Nach (3.9) lautet die Bewegungsgleichung für Punktladungen mit Gravitation:

$$(4.15) \quad m_n \left( \frac{du_n^\mu}{ds_n} + \Gamma_{\varrho\sigma}^\mu u_n^\varrho u_n^\sigma \right) = z_n e B_\nu^\mu(x_n) u_n^\nu$$

Nach obiger Rechnung ist

$$\nabla_\nu {}^n \mathfrak{S}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{c} \sum_{m \neq n} m_m \int \delta(x - x_m) \left( \frac{du_m^\mu}{ds_m} + \Gamma_{\varrho\sigma}^\mu(x_m) u_m^\varrho u_m^\sigma \right) ds_m,$$

d. i. nach (4.15) gleich

$$\frac{1}{c} \sum_{m \neq n} z_m e B_\nu^\mu(x) \int \delta(x - x_m) u_m^\nu ds_m$$

bzw. nach Gl. (3.29) gleich

$$\frac{1}{c^2} B_\nu^\mu(x) {}^n \mathfrak{S}^\mu(x).$$

Die inhomogenen Maxwellgleichungen lauten im Gravitationsfeld

$$\nabla_\nu \mathfrak{B}^{\mu\nu}(x) = -\mu_0 {}^n \mathfrak{S}^\mu(x), \quad \mathfrak{B}^{\mu\nu} = B^{\mu\nu} \sqrt{g}.$$

Somit folgt mit  $H_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} B_{\mu\nu}$  für

$$(4.16) \quad \nabla_\nu \mathfrak{S}^{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{c^2} H_\nu^\mu \nabla_\lambda \mathfrak{B}^{\nu\lambda} = -\frac{1}{c^2} \nabla_\lambda \left( H_\nu^\mu \mathfrak{B}^{\nu\lambda} + \frac{1}{4} H_{\varrho\sigma} \mathfrak{B}^{\varrho\sigma} g^{\mu\lambda} \right).$$

Danach verschwindet die Divergenz von  $\mathfrak{S}^{\mu\nu}$  nicht mehr. Wir müssen also in Gl. (4.8)  $\mathfrak{S}^{\mu\nu}$  durch die Differenz

$$\mathfrak{S}^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} \left( H_\varrho^\mu \mathfrak{S}^{\varrho\nu} + \frac{1}{4} H_{\varrho\sigma} \mathfrak{B}^{\varrho\sigma} g^{\mu\nu} \right)$$

ersetzen. Somit ist die Gleichung für das Gravitationsfeld durch<sup>18</sup>

<sup>18</sup> H. Weyl, l. c. 5, p. 229ff., § 30, Gl. (11) ff., Gl. (15).

$$(4.17) \quad \mathfrak{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathfrak{R} g^{\mu\nu} = -\kappa \left( \mathfrak{T}^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} \mathfrak{E}^{\mu\nu} \right) = -\kappa \mathfrak{S}^{\mu\nu}$$

zu ersetzen. Darin ist  $\mathfrak{E}^{\mu\nu}$  die Energie-Impuls-Tensordichte für das elektromagnetische Feld:

$$(4.18) \quad \mathfrak{E}^{\mu\nu} = H_{\varrho}^{\mu} \mathfrak{B}^{\varrho\nu} + \frac{1}{4} H_{\varrho\sigma} \mathfrak{B}^{\varrho\sigma} g^{\mu\nu}.$$

Da sich das System nach dem Konzept der Symmetriebrechung global wieder dem leeren Raum gegenüberstellt, muß es Transformationen geben, die asymptotisch zur Poincaréinvarianten Metrik zurückführen, so daß für die Gravitationsfeldgleichungen (4.14 bzw. 18) die asymptotischen Bedingungen<sup>19</sup>

$$(4.19) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}^0$$

gelten, vorausgesetzt, daß man an der (kosmologischen) Voraussetzungen festhält, daß sich alle Materiepunkte im Endlichen befinden. In diesem Fall sind die Lösungen der Feldgleichungen eindeutig bestimmt.

Die kosmologischen Gleichungen ergeben sich nur, wenn man die Voraussetzungen macht, daß man im Mittel eine gleichmäßige Materieverteilung hat, so daß alternativ zu (4.19) näherungsweise gilt:<sup>20</sup>

$$(4.20) \quad \mathfrak{S}^{\mu\nu} \sim g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \sqrt{g}.$$

Noch einmal sei unterstrichen, daß die Selbstwechselwirkung ausgeschlossen werden muß. Durch diese Forderung unterscheidet sich die hier begründete Feldtheorie von der herkömmlichen. Das bedarf weiterer Untersuchung. Denn damit nimmt man von

<sup>19</sup> Vgl. z. B. E. Schmutzer, Relativistische Physik, Teubner, Leipzig 1968, p. 381, Abs. 2.

<sup>20</sup> Das entspricht der Annahme einer globalen Wechselwirkung, die zu einem Raum mit konstanter Krümmung führt. Man könnte dieser auch Rechnung tragen, indem man Gl. (2.6) abändert und damit auf andere Weise definiert, was wechselwirkungsfreie Materiepunkte sind. Doch wäre das der Vorstellung von Massenpunkten wenig angemessen, weil die globale Wechselwirkung nur Ausdruck einer mittleren Materieverteilung ist und damit keinen elementaren Charakter hat. Von hier aus erscheint die Einschränkung in (2.6) nicht mehr willkürlich.



der Vorstellung Abschied, Materiepunkte als Energieballungen im Feld verstehen zu wollen, was nicht ohne wesentliche Folgen sein dürfte, aber im Hinblick auf die Quantenphysik nicht unplausibel ist.

### 5. Ausblicke auf die Quantenphysik

Wir haben gezeigt, daß man die klassische Mechanik und die klassische Feldtheorie aus der Vorstellung ableiten kann, daß sich alles materielle Geschehen auf die Bewegung von Materiepunkten zurückführen lasse. Klarerweise sind weitere Annahmen nötig gewesen, um diesen Rahmen mit Inhalt zu füllen. Doch fügen sich alle in die Punktvorstellung ein.

Dabei erscheint die Poincaréinvarianz in einem neuen Licht. Man muß sie nicht postulieren, sondern kann sie aus der Forderung ableiten, daß es für einen einzigen Materiepunkt in der Raum-Zeit keine Orientierungsmöglichkeiten geben darf, weder ausgezeichnete Lagen, noch ausgezeichnete Richtungen. Dabei sind die Voraussetzungen wesentlich, daß die Linienelemente in  $dx$  stetig sein müssen und daß die Zeit ihre Eigenständigkeit gegenüber dem Raum behauptet (was sich allein im Trägheitsindex zeigen kann).

Die Felder ergeben sich daraus, daß ein materieller Punkt, der in seine materielle Umgebung eingebettet ist, Orientierungsmöglichkeiten hat, so daß vorhandene Symmetrien gestört werden. Die Symmetriebrechungen liefern Felder, die davon abhängen, welche der Symmetrien gebrochen werden. Die Brechung verschiedener Symmetrien führt zu verschiedenen Feldern.

Zieht man auch Transformationen in Betracht, die nur die Bewegungsgleichungen und nicht das Linienelement invariant lassen, so gibt es in der klassischen Physik zwei verschiedene Felder. Aus der Brechung der Eichinvarianz folgt die Elektrodynamik, aus der Poincaréinvarianz die Gravitationstheorie in der ersten von Einstein gegebenen Form.<sup>21</sup>

---

<sup>21</sup> Es ist nicht ausgeschlossen, daß noch eine weitere Symmetriebrechung möglich ist. Denn auch wenn wir von dem Linienelement der allgemeinen Relativitätstheorie ausgehen, gilt der Satz, daß es keine Vorzugsrichtungen gibt.

Die Einheitlichkeit der klassischen Physik kommt nicht dadurch zustande, daß wir die verschiedenen Felder über einen Leisten schlagen, indem wir sie zu einer einheitlichen Feldtheorie verbinden, sondern dadurch, daß es ein einheitliches Prinzip gibt, sie aus den verschiedenen Symmetrien des Linienelements für freie Materiepunkte abzuleiten.

Dies dürfte Folgen für die Quantenmechanik haben, da es in ihr neben den genannten Symmetrien noch andere gibt. An anderer Stelle ist gezeigt worden,<sup>12</sup> daß die Brechung der Tauschkinvarianz des kinetischen Operators in der Heisenbergschen Vierfermionentheorie<sup>22</sup> zur Heisenbergschen Wechselwirkung führt. Daß hier noch weitere Untersuchungen nötig sein werden, zeigt sich z. B. darin, daß die Brechung der Eichinvarianz im Heisenbergfall eine andere als die von ihm betrachtete Wechselwirkung liefert, die neben seiner gleiches Recht hat. Es ist zu erwarten, daß diese andere Wechselwirkung die elektromagnetische ist, so daß die sehr naheliegenden Bemühungen Heisenbergs, die Quantenelektrodynamik aus seiner Wechselwirkung abzuleiten, ähnlich erfolglos bleiben müssen wie die Bemühungen um eine einheitliche Feldtheorie im klassischen Bereich. Natürlich hängt die Richtigkeit dieser Aussage davon ab, ob sich der Gedanke der Symmetriebrechung auch in der Quantenmechanik bewährt. Hier kann nur festgestellt werden, daß die Heisenberg-Wechselwirkung eine Folge der Brechung der Tauschkinvarianz ist.

Ein weiteres Ergebnis dieser Untersuchung, von dem Auswirkungen auf die Quantenmechanik zu erwarten sind, dürfte die Ausklammerung der Selbstwechselwirkung sein. Daß das für die Quantenmechanik von Bedeutung ist, zeigt m. E. die grund-

---

Die sogenannten Theorien mit doppelter Metrik (vgl. M. v. Laue, Die Relativitätstheorie, Band II, Vieweg, Braunschweig 1953, § 54) läßt sich hier einordnen. Vielleicht sollte man Theorien dieser Art losgelöst von dem Ziel einer universellen Feldtheorie noch einmal untersuchen. Allerdings ist die Symmetriebrechung hier von anderer Natur, radikaler, weil sie nicht mehr auf dem Wege Symmetrieverfleischung-Symmetriebrechung zustandekommt, was auch noch bei der Brechung der Tauschkinvarianz der Fall ist. Die zweite Metrik ist entweder da oder nicht da. Sie läßt sich nicht unter einschränkenden Bedingungen, vergleichbar mit  $B_{\mu\nu} = 0$  bzw.  $R_{\sigma\mu\nu} = 0$  wegtransformieren.

<sup>22</sup> W. Heisenberg, Einführung in die einheitliche Feldtheorie der Elementarteilchen, Stuttgart 1967, § 8-2/5.

legende Arbeit von Jordan und Wigner<sup>23</sup> über die Quantisierung von nichtrelativistischen Spinorfeldern, in der die Selbstwechselwirkung durch eine passende Ordnung der Operatoren im Integral für die Coulombwechselwirkung zwischen den Elektronen eliminiert wird. Vielleicht – vielleicht zeigt sie sich auch in der Renormierung der Quantenelektrodynamik.

Wir sind zu den Feldtheorien durch die Brechung der Symmetrien des Linienelements —  $mc \sqrt{g_{\mu\nu}^0 dx^\mu dx^\nu}$  gelangt. Dieses selbst haben wir aus der Grundvorstellung abgeleitet, wobei die Existenz von Linienelementen vorausgesetzt und angenommen worden ist, daß es für einen Materiepunkt in der Raum-Zeit keine Orientierungsmöglichkeit gibt. Das führt zu der Frage, welche Größe in der Quantenmechanik an die Stelle des Linienelements tritt, ob man etwa die Lagrangedichte  $\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$ , von der Heisenberg ausgeht, als Ausgangspunkt wählen kann, oder ob man sie im Hinblick auf die  $SU_3$ -Symmetrie durch eine andere ersetzen muß.

Was immer sich ergeben mag, man muß weiter fragen, ob man die elementare Lagrangedichte ähnlich wie obige Linienelemente aus einer Grundvorstellung ableiten kann, die mit der von Materiepunkten, die sich im leeren Raum bewegen, vergleichbar ist. Das ist um so mehr geboten, als es sich gezeigt hat, daß man die klassische Mechanik erst von der Quantenmechanik her wirklich verstehen kann. Nach allem, was wir erkennen können, tritt an die Stelle der Vorstellung von Materiepunkten, die sich im Raum bewegen, eine Menge von Elementarprozessen, von dichotomischen Prozessen (Rosenfeld<sup>24</sup>), aus deren Zusammenspiel sich nicht nur das Verhalten der Materie, sondern auch die Struktur der Raum-Zeit ergeben muß.

Das sind offene Fragen der Quantenphysik, die sich stellen, wenn man versucht, die Grundlagen der klassischen Physik von einer Warte aus zu betrachten, die ihre innere Geschlossenheit erkennen läßt. Mehr als die neuen Aspekte, die wir auf dem Wege gefunden haben, mögen diese Fragen die vorliegende Untersuchung rechtfertigen.

<sup>23</sup> P. Jordan, E. Wigner, Z. Physik, 47, 631 (1928).

<sup>24</sup> L. Rosenfeld, Nuclear Forces, Northholland, Amsterdam (1948), Ch. 4, 1.