

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1939. Heft I und II

Sitzungen Januar–Juli

München 1939

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung



Über zwei mit der Ortung von Luftaufnahmen zusammenhängende Aufgaben.

Von Sebastian Finsterwalder in München.

Vorgetragen in der Sitzung vom 1. Juli 1939.

Nachdem ich mich in einer früheren Arbeit¹ mit der rechnerischen Durchführung der Hauptaufgabe der Photogrammetrie beschäftigt habe, will ich jetzt die dabei angewendeten Grundsätze auf zwei weitere Aufgaben ausdehnen und deren rechnerische Durchführung auf möglichst einfache Art auseinanderzusetzen. Die erste ist das Rückwärtseinschneiden im Raum, bei der der Luftstandpunkt durch eine Aufnahme, die die Bilder einer Anzahl bekannter Bodenpunkte enthält, bestimmt wird, wobei auch noch ein gleichzeitig aufgenommenes Sonnenbild hinzutreten kann. Die zweite zu behandelnde Aufgabe ist im Gegensatz zur ersten schon oft behandelten neu und betrifft den Zusammenschluß von vier Luftaufnahmen des gleichen Geländes, die alle sonnengeortet sind, von denen aber das erste Paar bei einem anderen Sonnenstand aufgenommen wurde als das zweite Paar. Man kann nämlich gegen die früher behandelte Ortung von zwei Luftaufnahmen bei verschiedenem Sonnenstand den Einwand erheben, daß sie gegenüber der Ortung von zwei Aufnahmen gleichen Sonnenstandes dadurch benachteiligt sei, daß das raumbildliche Erfassen des Geländes bei Luftaufnahmen verschiedenen Sonnenstandes wegen der ungleichen Schatten schwieriger und ungenauer ist als bei solchen gleichen Sonnenstandes. Da nun Luftaufnahmen verschiedenen Sonnenstandes ohnehin zwei verschiedene Flüge über dem gleichen Gelände voraussetzen, so kann man ebenso gut zwei Paare von Aufnahmen des gleichen Geländes bei verschiedenen Sonnenständen zugrunde legen. Für beiderlei Aufgaben wird eine genäherte vorläufige Lösung vorausgesetzt, die eine rechnerische Verschär-

¹ S. Finsterwalder: Die rechnerische Durchführung der Ortung, insbesondere bei sonnengeorteten Luftaufnahmen. Diese Berichte 1939.

fung erfahren soll, wobei wie früher die grundsätzliche Trennung von Stellortung und Standortung den Rechenvorgang erleichtern soll.

1. Das Rückwärtseinschneiden im Raum.

Auf der annähernd georteten Luftaufnahme seien die Bilder bekannter Geländepunkte koordinatenmäßig ausgemessen und aus ihnen die Anteile der Einheitspfeile in den Zielrichtungen gerechnet. Diese Einheitspfeile werden mit $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ bezeichnet. Die Koordinaten der angezielten Punkte $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$ seien bekannt, der Luftstandpunkt werde mit O bezeichnet. δ_{ik} sei der Pfeil, welcher von P_i nach P_k führt. Das Zielstrahlenbündel der a wird nun einer gemeinsamen kleinen Drehung, die durch den Drehpfeil du gekennzeichnet ist, unterworfen und soll in seiner neuen Lage die geortete Stellung haben, bei welcher jeder Zielpfeil durch den entsprechenden Festpunkt geht. Der Zielpfeil a geht nach der Drehung in $a + du \times a$ über. Ein Kennzeichen der vollzogenen Stellortung ist nun der Umstand, daß bei ihr je zwei Zielpfeile und der Pfeil, welcher die beiden Zielpunkte miteinander verbindet, in einer Ebene liegen. Das drückt sich durch das Nullsetzen des gemischten Produktes aus den drei Pfeilen $a_i + du \times a_i, a_k + du \times a_k$ und δ_{ik} aus:

$$\begin{aligned} & \delta_{ik} \cdot (a_i + du \times a_i) \times (a_k + du \times a_k) \\ &= (\delta_{ik} \cdot (a_i \times a_k + du \times (a_i \times a_k))) = 0^1 \end{aligned}$$

$$\text{oder:} \quad \delta_{ik} \cdot a_i \times a_k + du \cdot (a_i \times a_k) \times \delta_{ik} = 0,$$

wobei die Glieder 2. O. in du vernachlässigt sind.

Sind nur drei Zielstrahlen und drei Festpunkte vorhanden, so erhält man auf diesem Wege drei Gleichungen für die drei Anteile von du . Bei n Zielstrahlen und Festpunkten lassen sich auf diesem Wege $n(n-1)/2$ lineare Gleichungen für die drei Anteile des Drehpfeiles du aufstellen. Um zwischen diesen Gleichungen zu vermitteln, betrachten wir die geometrische Bedeutung des konstanten Gliedes $\delta_{ik} \cdot a_i \times a_k$ einer solchen Gleichung. Die Länge des Pfeiles $a_i \times a_k$ ist gleich dem Sinus des Winkels

¹ Nach der Pfeilformel: $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C} + (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \times \mathcal{A} + (\mathcal{C} \times \mathcal{A}) \times \mathcal{B} = 0$.

α_{ih} zwischen den beiden Zielrichtungen, seine Richtung steht senkrecht auf der Ebene der beiden Zielrichtungen. Das Produkt $\delta_{ih} \cdot \alpha_i \times \alpha_h$ ist infolgedessen gleich dem Produkt der beiden Längen $P_i P_h$ und Sinus α_{ih} mal dem Kosinus des Winkels zwischen den Pfeilen $\alpha_i \times \alpha_h$ und δ_{ih} . Der Kosinus dieses Winkels ist aber gleich dem Sinus des Neigungswinkels von δ_{ih} gegen die Ebene der beiden Zielrichtungen. Bezeichnet man diesen (kleinen) Neigungswinkel mit ϵ , so ist das konstante Glied gleich: $P_i P_h \sin \alpha_{ih} \sin \epsilon$ und kann ganz gut als Maß für die Abweichung des Zielstrahlenpaares vom Festpunktpaar vor der Ausgleichung gelten. Man wird demnach die Ausgleichung so ansetzen, daß die Summe der Quadrate dieser Abweichungen nach der Drehung möglichst klein wird. Man braucht keineswegs alle Gleichungen anzusetzen, die sich aus der Paarung der Zielstrahlen ergeben, da ihre Zahl quadratisch mit der Zahl der Zielpunkte steigt. Es wird genügen, eine passende Anzahl möglichst gespreizter und in ihrer Lage verschiedener Zielstrahlenpaare auszuwählen.

Ist mit der Luftaufnahme, die zum Rückwärtseinschneiden dient, auch noch eine Sonnenaufnahme verbunden, die den Einheitspfeil $\mathfrak{s}$ zum Zielstrahlenbündel liefert und kennt man die geographischen Koordinaten eines der Festpunkte, so kann man aus der bekannten Aufnahmezeit den Pfeil $\mathfrak{s}'$ der Sonnenrichtung in dem Koordinatensystem dieses Festpunktes rechnen und mit dem um den Drehpfeil du veränderten Pfeil $\mathfrak{s}$ vergleichen. Beide müssen zusammenstimmen, woraus die Pfeilgleichung: $\mathfrak{s} + du \times \mathfrak{s} = \mathfrak{s}'$ folgt. Diese Pfeilgleichung $du \times \mathfrak{s} = \mathfrak{s}' - \mathfrak{s} = \Delta \mathfrak{s}$ läßt sich in 3 Gleichungen für die Anteile von du zerlegen, die aber nicht unabhängig sind. Man kann sie durch zwei voneinander unabhängige ersetzen, die aus der Pfeilgleichung durch Multiplikation einerseits mit du , andererseits mit $\Delta \mathfrak{s}$ hervorgehen. Sie lauten: $du \cdot \Delta \mathfrak{s} = 0$ und $du \cdot \mathfrak{s} \times \Delta \mathfrak{s} = (\Delta \mathfrak{s})^2$ und sind in den Anteilen der Pfeile geschrieben folgende:

$$du_1 ds_1 + du_2 ds_2 + du_3 ds_3 = 0$$

$$\text{und: } \begin{vmatrix} du_1 & du_2 & du_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ \Delta s_1 & \Delta s_2 & \Delta s_3 \end{vmatrix} = \Delta s_1^2 + \Delta s_2^2 + \Delta s_3^2$$

Die erste dieser Gleichungen sagt geometrisch aus, daß der Drehpfeil $\mathfrak{d}u$ senkrecht zu Δs stehen muß, und die zweite reguliert seinen Betrag nach der Abweichung Δs der beiden Sonnenrichtungen. Tritt zu diesen beiden Gleichungen noch eine der früheren Art, die aus einem Paar Zielstrahlen nach Bodenfestpunkten hervorgegangen ist, so ist die Stellortung des Rückwärtseinschneidens bereits bestimmt. Es ersetzt also das gleichzeitig aufgenommene Sonnenbild einen Festpunkt.

Man muß sich jedoch sehr hüten, auf das Rückwärtseinschneiden nach der Mindestzahl von drei Festpunkten viel zu vertrauen, da das Ergebnis von der Genauigkeit der Bildkoordinaten in weitem Umfang abhängig ist und nur bei einem Überschuß von Bestimmungspunkten Vertrauen beanspruchen kann.

Wenn durch Bestimmung des Drehpfeiles $\mathfrak{d}u$ die günstigste Stellung des Zielstrahlenbündels gegenüber dem Festpunkthaufen festgelegt ist, kann man an die Standortung gehen, aus welcher die Lage des Standpunktes im Koordinatensystem der Festpunkte hervorgeht. Man erhält durch folgende Überlegung einen geometrischen Ort für den Standpunkt. Aus der Stellortung geht die Stellung der Ebene zweier Zielstrahlen hervor. Legt man nun eine zu ihr parallele Ebene durch die entsprechenden Festpunkte, so muß sie den Standpunkt enthalten und ihre Gleichung bestimmt die Koordinaten des letzteren. Bei drei Festpunkten erhält man auf diese Weise drei solcher Ebenen, in deren Schnitt der Standpunkt liegt. Ist jedoch die Stellortung durch Ausgleich einer Überzahl von Bestimmungsgleichungen hervorgegangen, so wird sich die Ebene der zwei gewählten Zielstrahlen nicht genau parallel durch die beiden zugehörigen Festpunkte legen lassen und da ist es ein einfaches Auskunftsmittel, die Ebene durch den Mittelpunkt der beiden Festpunkte zu legen. Sind die Ortspfeile für die beiden Festpunkte $\mathfrak{X}_i$ und $\mathfrak{X}_h$ und ist jener für den Standpunkt $\mathfrak{X}$, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$\mathfrak{X} \cdot \bar{\mathfrak{a}}_i \times \bar{\mathfrak{a}}_h = \frac{1}{2} (\mathfrak{X}_i + \mathfrak{X}_h) \cdot \bar{\mathfrak{a}}_i \times \bar{\mathfrak{a}}_h$$

wobei $\bar{\mathfrak{a}}_i$ und $\bar{\mathfrak{a}}_h$ die aus der Stellortung hervorgegangenen Einheitszielpfeile bedeuten. Die Anteile von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_i$ und $\mathfrak{X}_h$ sind die rechtwinkligen Koordinaten der betreffenden Punkte.

2. Rechenbeispiel,

Es seien die Koordinaten der Bilder von vier Festpunkten auf einer Luftaufnahme mit 100,000 mm Brennweite in mm und die Festpunktskoordinaten selbst in m gegeben.

Tafel 1.

x_1 — 30,922	y_1 — 9,817	X_1 1000,0	Y_1 1000,0	Z_1 100,0
x_2 — 10,698	y_2 10,839	X_2 2000,0	Y_2 2000,0	Z_2 200,0
x_3 10,732	y_3 — 32,894	X_3 3000,0	Y_3 0,0	Z_3 500,0
x_4 31,652	y_4 21,610	X_4 4000,0	Y_4 2500,0	Z_4 300,0

Hieraus rechnen sich die Anteile der Einheitszielpfeile und ihrer Produkte folgendermaßen:

Tafel 2.

a_1 — 0,29438 — 0,09272 — 0,95119	$a_1 \times a_2$ 0,19365 — 0,19037 — 0,04138
	$a_1 \times a_4$ 0,27853 — 0,55604 — 0,03200
a_2 — 0,10582 0,10722 — 0,98860	$a_2 \times a_3$ — 0,40870 — 0,20021 0,02203
	$a_2 \times a_4$ 0,09937 — 0,39102 — 0,05304
a_3 0,10136 — 0,31092 — 0,94503	$a_3 \times a_1$ 0,20812 0,37461 — 0,10094
	$a_3 \times a_4$ 0,48108 — 0,18468 0,11236
a_4 0,29558 0,20179 — 0,93377	

Hieraus bildet man die sechs Fehlergleichungen für die drei Anteile du , du_2 , du_3 des Drehpfeils du

	du	du_2	du_3	$l = v$
$P_1 P_2$	22,35	— 60,74	383,92	— 0,76
$P_2 P_3$	— 15,99	144,64	1017,61	— 1,68
$P_3 P_1$	— 48,91	285,12	975,35	— 1,26
$P_1 P_4$	— 63,20	— 151,70	2085,90	— 4,87
$P_2 P_4$	— 12,59	— 116,02	831,71	— 2,08
$P_3 P_4$	— 243,95	208,57	1387,37	— 3,10

Zu ihnen gehören die Normalgleichungen:

$$\begin{array}{r} 66813 - 57445 - 535294 - 11,6238 \\ 185872 \quad 273244 \quad 2,2315 \\ 9066917 \quad 193,9982 \\ 42,6542 \end{array}$$

mit den Lösungen: $du_1 = -0,003956$ $du_2 = -0,002959$
 $du_3 = 0,001995$.

Mit diesen du werden jetzt die 6 Produkte nach der Formel $\bar{a}_i \times \bar{a}_k = a_i \times a_k + du \times (a_i \times a_k)$ umgerechnet, worauf dann die Fehlergleichungen für die Anteile $X Y Z$ von $\mathfrak{A}$ gebildet werden können. In ihnen treten die umgerechneten Produkte als Beiwerte von den unbekannten Anteilen $X Y Z$ auf.

Die Fehlergleichungen lauten:

	X	Y	Z	
$P_1 P_2$	0,19415	- 0,19015	- 0,04005	0,00
$P_2 P_3$	- 0,40836	- 0,20093	0,02161	- 1214,27
$P_3 P_1$	0,20767	0,37463	- 0,10180	- 572,11
$P_1 P_4$	0,27973	- 0,55561	- 0,02897	278,79
$P_2 P_4$	0,10031	- 0,39102	- 0,05119	591,66
$P_3 P_4$	0,48107	- 0,18328	0,11451	- 1500,46

Geht man bei der Ausgleichung von den Näherungswerten: $X = 2500$ $Y = 1500$ $Z = 5000$ m aus, so ergibt die schließliche Ausgleichung: $X = 2499,8$ $Y = 1500,1$ $Z = 4999,8$.

Die Ausgleichung geht praktisch auf; der m. F. von Z ist viermal so groß wie der von X und Y .

Wie wenig man übrigens einem räumlichen Rückwärtseinschnitt nach nur drei Festpunkten trauen darf, zeigt dieses Beispiel. Beschränkt man sich auf die ersten drei Festpunkte $P_1 P_2 P_3$, so erhält man folgende Ergebnisse:

$$du_1 = 0,00824 \quad du_2 = -0,00008 \quad du_3 = 0,00180, \quad X = 2514,7 \\ Y = 1441,4 \quad Z = 5006,2.$$

Der Grund für diesen großen Unterschied liegt darin, daß der Standpunkt nahe an dem gefährlichen Zylinder liegt, dessen Grundkreis der Umkreis des Festpunktsdreiecks $P_1 P_2 P_3$ ist.

Wollte man die Bestimmung des Standpunktes ohne Ausgleichung mit ausreichender Schärfe durchführen, so müßte man aus den vier Festpunkten andere drei Paare auswählen, z. B. $P_1 P_4$, $P_2 P_3$, $P_3 P_4$.

$$P_1 P_4 - 63,20 du_1 - 151,70 du_2 + 2085,90 du_3 - 4,87 = 0$$

$$P_2 P_3 - 15,99 du_1 + 144,64 du_2 + 1017,61 du_3 - 1,68 = 0$$

$$P_3 P_4 - 243,95 du_1 + 208,57 du_2 + 1387,37 du_3 - 3,10 = 0.$$

Diese werden durch $du_1 = -0,00400$ $du_2 = -0,00300$ $du_3 = 0,00200$ erfüllt.

Die Gleichungen für den Ortspfeil dX des Standpunktes werden nunmehr

$$P_1 P_4 \quad 0,27974 X - 0,55555 Y - 0,02894 Z + 278,65 = 0$$

$$P_2 P_3 - 0,40837 X - 0,20094 Y + 0,02160 Z - 1214,36 = 0$$

$$P_3 P_4 \quad 0,48105 X - 0,18327 Y + 0,11454 Z - 1500,41 = 0.$$

Hieraus rechnen sich die Koordinaten des Standpunktes zu:

$X = 2500,0$ $Y = 1500,0$ $Z = 5000,0$, was genau der bei Aufstellung des Rechenbeispiels gemachten Annahme entspricht.

3. Der „gefährliche“ Fall bei der Stellortung.

Die Aufgabe der Ortung beim Rückwärtseinschneiden im Raum kann folgendermaßen umschrieben werden: Man kennt einen Haufen von n Festpunkten $P_i P_h \dots$ und ein Bündel von n Einheitszielstrahlen $\alpha_i \alpha_h$; es soll das Bündel so gestellt werden, daß jeder Strahl durch seinen Punkt geht. Wir wollen den Festpunkthaufen für sich und das Strahlenbündel für sich gnomonisch auf je eine Kugel vom Halbmesser Eins abbilden. Das gnomonische Kugelbild des Punkthaufens besteht aus $n(n-1)(n-2)/6$ Großkreisen, deren Ebenen den Verbindungsebenen von je drei Punkten des Haufens parallel sind und die sich in $n(n-1)/2$ Paaren von Gegenpunkten P_{ih} schneiden, deren Verbindungslinien den Verbindungslinien je zweier Punkte P_i, P_h des Haufens parallel sind. Das gnomonische Kugelbild des Strahlenbündels besteht aus den Punkten $\alpha_i \alpha_h$ samt ihren Gegenpunkten, wozu wir noch

die je ein Paar verbindenden Großkreise K_{ih} nehmen wollen, welche den Ebenen durch zwei Zielstrahlen entsprechen. Bei vollzogener Ordnung liegen die beiden Bildkugeln so zueinander, daß, wenn ihre Mittelpunkte zusammenfallen, die Kreise K_{ih} durch die Punkte P_{ih} hindurchgehen. Denn hierbei liegt die Verbindungslinie zweier Festpunkte stets in der Ebene der beiden nach den Festpunkten zielenden Strahlen. Ein „gefährlicher“ Fall bei der Ortung liegt nur dann vor, wenn das geortete Ziel-

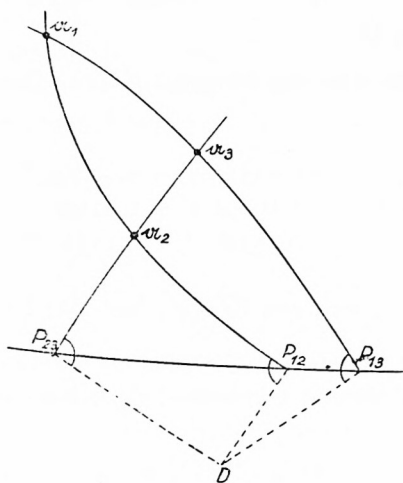


Abb. 1

strahlenbündel gegenüber dem Festpunkthaufen noch eine unendlich kleine Beweglichkeit aufweist. Im gnomonischen Bild drückt sich der Umstand dadurch aus, daß die Gesamtheit der Großkreise K_{ih} gegenüber der Gesamtheit der Punkte P_{ih} noch beweglich ist. Eine kleine Bewegung einer Kugelfigur ist aber stets eine Drehung um einen festen Punkt D (bzw. seinem Gegenpunkt). Dabei müssen die K_{ih} senkrecht zu den Radien DP_{ih} stehen, wenn durch die kleine Drehung das Kennzeichen der Stellortung, nämlich die Lage der Punkte P_{ih} auf den Kreisen K_{ih} nicht verwischt werden soll. Bei mehr als drei Festpunkten und Zielstrahlen ist ein solcher Drehpunkt D nicht vorhanden, wohl aber kann ein solcher bei nur dreien, also beim Rückwärts-

einschneiden ohne überschüssige Bedingungen, gefunden werden. Man kann leicht die Dreikante von Zielstrahlen angeben, welche mit drei vorgegebenen Festpunkten zu einem „gefährlichen“ Fall führen (Abb. 1). Das gnomonische Kugelbild der drei Festpunkte $P_1 P_2 P_3$ sind drei Punkte $P_{12} P_{23} P_{31}$, die auf einem Großkreis liegen, dem auch ihre Gegenpunkte angehören. Wählt man nun einen beliebigen Drehpunkt D auf der Kugel und verbindet man ihn mit $P_{12} P_{23} P_{31}$ durch Großkreise DP_{12} , DP_{23} und DP_{31} , so braucht man nur durch P_{22} einen Großkreis K_{12} zu legen, der auf DP_{12} senkrecht steht, ebenso durch P_{23} K_{23} senkrecht zu DP_{23} und durch P_{31} K_{31} senkrecht zu DP_{31} . Die drei Großkreise $K_{12} K_{23} K_{31}$ schneiden sich in den Punkten α_3 α_1 und α_2 und diese sind die Kugelbilder der Zielstrahlen, welche mit den Festpunkten $P_1 P_2 P_3$ einen gefährlichen Fall des Rückwärtseinschneidens bilden. D ist dabei der Drehpunkt, um den das Gebilde $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ ein wenig gedreht werden kann, ohne daß dabei $K_{23} K_{31} K_{12}$ die Bilder $P_{23} P_{31} P_{12}$ des Festpunktsdreieckes merklich verlassen.¹

Nicht ganz so einfach ist es, zu einem Zielstrahlendreikant die Festpunktsdreiecke zu finden, die mit ihm einen „gefährlichen“ Fall ausmachen, obwohl hier bereits die Kenntnis der Stellung der Ebene des Festpunktsdreieckes genügt. Sind $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ die Kugelbilder des Zielstrahlendreikants und $K_{23} K_{31} K_{12}$ die sie paarweise verbindenden Großkreise, und sei E der Großkreis, der die Ebene des Festpunktsdreieckes abbildet, so ergeben sich die Kugelbilder $P_{12} P_{23} P_{31}$ der Dreiecksseiten als Schnitte von E mit den Großkreisen K . Zum Auftreten eines „gefährlichen“ Falls ist es nötig, daß die drei in diesen Schnittpunkten zu den Großkreisen K errichteten senkrechten Großkreise sich in einem Punkt D schneiden. Es soll nun der geometrische Ort der möglichen Drehpunkte D und das Umhüllungsgebilde der zugehörigen Ebenen gefunden werden. Wir bezeichnen den Einheitspfeil nach D mit r und fällen von D einen zu K_1 senkrechten Großkreis, dessen (einen) Fußpunkt wir p bezeichnen wollen. Damit r auf den durch α_2 und α_3 gehenden Großkreis liegt, muß

¹ Hierbei ist noch zu bemerken, daß der Großkreis der Festpunkte außerhalb des Dreiecks der Zielstrahlenbilder verlaufen muß. Ist das nicht der Fall, so muß einer der Punkte α durch seinen Gegenpunkt — α ersetzt werden.

$p \cdot a_2 \times a_3 = (p \cdot a_2 \cdot a_3) = 0$ sein. Damit $p \cdot r$ senkrecht auf $a_2 \cdot a_3$ steht, müssen $p \cdot r$ und $a_2 \times a_3$ auf einem Großkreis liegen, also muß $(p \cdot r \cdot (a_2 \times a_3)) = 0$ sein. Aus beiden Gleichungen folgt: $p = p \cdot (a_2 \times a_3) \times (r \times (a_2 \times a_3))$, wobei p eine Zahl bedeutet.¹ In ähnlicher Weise werden die Einheitspfeile zu den Lotfußpunkten q auf K_2 und r auf K_3 durch: $q = q \cdot (a_3 \times a_1) \times (r \times (a_3 \times a_1))$ und: $r = r \cdot (a_1 \times a_2) \times (p \times (a_1 \times a_2))$ ausgedrückt. Die Bedingung, daß die drei Lotfußpunkte $p \cdot q \cdot r$ auf der Kugel in einer Flucht liegen, wird durch die Gleichung: $(p, q, r) = 0$ oder:

$$[(a_1 \times a_2) \times (r \times (a_1 \times a_2)), (a_2 \times a_3) \times (p \times (a_2 \times a_3)), (a_3 \times a_1) \times (q \times (a_3 \times a_1))] = 0$$

ausgedrückt. Die durch $p \cdot q \cdot r$ gehende Ebene ist der Ebene des Festpunktsdreiecks parallel, das mit dem aus den Zielpfeilen $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ gebildeten Dreikant einen „gefährlichen“ Fall des Rückwärtseinschneidens bildet. Die Winkel des Festpunktsdreiecks werden von den Pfeilen $p \cdot q$ und r gebildet. Die an die obige Gleichung gebundenen Pfeile r erfüllen einen Kegel 3. O., der die Kugel nach einer Kurve 6. O., dem Ort der Drehpunkte D schneidet. Aus der Gleichung geht ohne weiteres hervor, daß sie für $r = a_1 \times a_2$, $r = a_2 \times a_3$ und $r = a_3 \times a_1$ erfüllt ist, da jeweils einer der drei Faktoren im dreifachen Produkt verschwindet. Aus geometrischen Gründen schließt man ferner leicht, daß auch $r = a_1$ usw. der Gleichung genügen muß. Fällt man nämlich von a_1 Lote auf K_2 und K_3 , so fallen ihre Fußpunkte mit a_1 zusammen, sie sind demnach mit dem dritten Lotfußpunkt von a_1 , auf K_1 in einer Flucht, die der Höhe des Kugeldreiecks $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ von a_1 auf $a_2 \cdot a_3$ entspricht. Das gleiche gilt von a_2 und a_3 . Es enthält also der Kegel 3. O. sowohl die Kanten $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ des Zielstrahlendreikants wie auch jene des Polardreikants zumebengenannten, die durch $a_1 \times a_2$ usw. gekennzeichnet sind (Abb. 4). Aber noch weitere Mantellinien dieses Kegels 3. O. lassen sich aus seiner geometrischen Erzeugung auffinden. Bringt man die Ebenen, die einerseits a_1 mit $a_1 \times a_2$ und andererseits a_3 mit $a_2 \times a_3$ verbinden, zum Schnitt,

¹ $p \cdot a_2 \times a_3 = 0$ bedeutet, daß $p \perp a_2 \times a_3$ steht, ebenso $p \cdot r \times (a_2 \times a_3)$, daß $p \perp r \times (a_2 \times a_3)$ steht. Dann steht aber $p \perp$ zur Ebene beider Pfeile und ist ist ihrem Pfeilprodukt parallel.

so liegt diese Schnittgerade auch auf dem Kegel 3. O., da von den Lotfußpunkten hier zwei mit a_1 und a_3 zusammenfallen, also auf K_2 liegen, auf welcher Seite der dritte Lotfußpunkt ohnehin zu liegen kommt. Zwei ähnliche Mantellinien des gesuchten Kegels finden sich als Schnitt der Verbindungsebenen a_2 mit $a_2 \times a_3$ bzw. a_1 mit $a_3 \times a_1$, und a_3 mit $a_3 \times a_1$ bzw. a_2 mit $a_1 \times a_2$. Schließlich kann man noch K_1 mit der Verbindungsebene von $a_1 \times a_2$ und $a_3 \times a_1$ zum Schnitt bringen und zeigen, daß dieser Schnitt

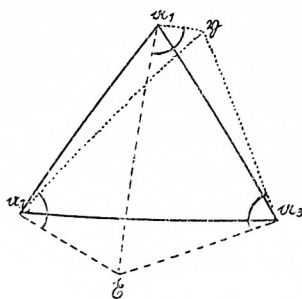


Abb. 2

auf dem Kegel 3. O. gelegen ist. Der Lotfußpunkt auf K_1 fällt mit dem Schnitt zusammen und die Lotfußpunkte auf K_2 und K_3 liegen auf der Verbindungsebene von $a_1 \times a_2$ mit $a_3 \times a_1$, die selber durch den Schnitt geht. Durch ringförmige Vertauschung der Zeiger ergeben sich zwei weitere Mantellinien des Kegels 3. O., von dem mithin 12 Mantellinien ermittelt sind.

Diesen merkwürdigen, mit einem Dreikant verbundenen Kegel 3. O. habe ich im Jahre 1905 bei einer anderen Untersuchung¹ gefunden. Es handelte sich damals um den „gefährlichen“ Ort beim Rückwärtseinschneiden auf der Kugel nach drei Punkten, die ich wieder mit $a_1 a_2 a_3$ bezeichnen will. Von einem Punkt r aus sind Großkreise nach diesen Punkten gezogen, die bekannte Winkel miteinander bilden und mit ihnen die Lage des Punktes r gegenüber dem Festpunktsdreieck bestimmen. Diese Bestimmung wird unsicher, wenn noch eine kleine Beweglichkeit des Groß-

¹ S. Finsterwalder: Der gefährliche Ort beim Rückwärtseinschneiden auf der Kugel. Diese Berichte 1905.

kreisbüschels gegenüber dem Festpunktsdreieck besteht (Abb. 2). Das tritt dann ein, wenn die auf den Kreisen des Büschels in den daraufliegenden Festpunkten errichteten Lote (d. h. senkrechte Großkreise) sich in einem Punkt η schneiden, der dann Drehpunkt für die mögliche kleine Beweglichkeit wird, bei der, wenn sie im Ausmaß von einem in 1. O. kleinen Winkel erfolgt, die Büschelkreise bis auf kleine Größen 2. O. auf den Festpunkten läßt. Liegt r auf dem gefährlichen Ort, so gehört ihm auch η an. Die Bedingung des Senkrechtstehens von r a_1 und η a_1 wird ausgedrückt $r \times a_1 \cdot \eta \times a_1 = \eta \cdot (a_1 \times (r \times a_1)) = 0$.

Ähnlich wird: $\eta \cdot (a_2 \times (r \times a_2)) = 0$ und $\eta \cdot (a_3 \times (r \times a_3)) = 0$. Bezeichnen wir vorübergehend die Doppelklammerausdrücke mit u v w , so sind die drei Gleichungen: $\eta \cdot u = 0$ $\eta \cdot v = 0$ und $\eta \cdot w = 0$ nur dann verträglich, wenn: $(u, v, w) = 0$ ist. Daher ist die gesuchte Gleichung:

$$(a_1 \times (r \times a_1), a_2 \times (r \times a_2), a_3 \times (r \times a_3)) = 0,$$

die sich von früheren Gleichungen des Kegels 3. O. nur dadurch unterscheidet, daß statt der Ecken des Polardreiecks jene des ursprünglichen Dreiecks der Festpunkte eingehen. Es läßt sich nun auf ganz gleiche Weise wie vorhin zeigen, daß dieser gefährliche Ort dieselben zwölf Mantellinien enthält, wie der früher betrachtete Ort der Drehpunkte D und demnach mit diesem zusammenfällt, da der zweite Kegel 3. O. mit dem ersten höchstens neun Mantellinien gemeinsam haben kann, ohne sich mit ihm zu decken.

Dieser Kegel 3. O. hat aber noch eine für das räumliche Rückwärtseinschneiden bedeutungsvolle Eigenschaft. Bisher wurde nur der Ort der Drehpunkte untersucht, die für die Beweglichkeit des gnomonischen Bildes der Zielstrahlen gegenüber jenem des Festpunktdreiecks im gefährlichen Fall maßgebend waren. Man kann jedoch auch nach dem Umhüllungsgebilde der Ebenen fragen, die aus einem Zielstrahlendreikant ein Festpunktsdreieck von der gefährlichen Eigenschaft ausschneiden. Im gnomonischen Kugelbild ist diese Ebene jeweils durch die drei Lotfußpunkte p q r gekennzeichnet, die in einer Flucht liegen. Was umhüllen diese Fluchten? Wir betrachten zu diesem Zweck die Pole dieser Fluchten und werden finden, daß diese Pole wieder auf der Kurve

liegen, die unser Kegel 3. O. aus der Bildkugel ausschneidet. Das heißt aber, daß das Umhüllungsgebilde der Fluchten das duale Gebilde zum Kegel 3. O., also ein Kegel 3. Kl. ist (Abb. 3).

Zum Drehpunkt $\mathfrak{r}$ gehören in bezug auf das Dreieck $a_1 a_2 a_3$ die Lotfußpunkte $p q r$, die auf einer Flucht F liegen. Um den Pol $\mathfrak{z}$ der Flucht F zu finden, suchen wir den Schnitt der drei Polaren von $p q$ und r . Die Polare von p geht durch $a_2 \times a_3$ und steht senkrecht zur Verbindung von p mit $a_2 \times a_3$; sie geht durch den Pol $\mathfrak{z}$, desgleichen die Polare von q , die durch $a_3 \times a_1$ geht und senkrecht zur Verbindung von q mit $a_3 \times a_1$ ist, sowie die Polare

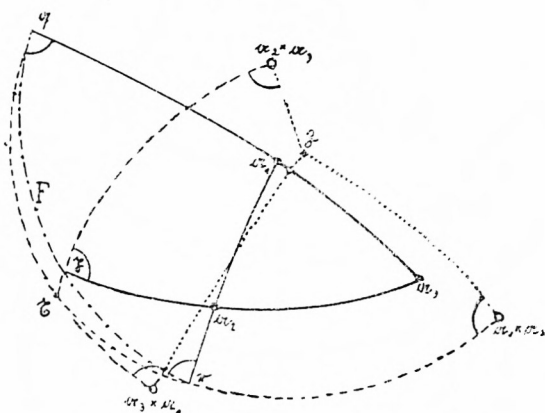


Abb. 3

von r , die durch $a_1 \times a_2$ geht und senkrecht zur Verbindung von r mit $a_1 \times a_2$ ist. Es steht also der Punkt $\mathfrak{z}$ zu $\mathfrak{r}$ in genau dem gleichen Verhältnis bezüglich des Polardreiecks wie $\mathfrak{y}$ zu $\mathfrak{r}$ bezüglich des ursprünglichen Dreiecks (vgl. Abb. 2).

Hieraus folgt übrigens auch eine einfache geometrische Konstruktion von beliebig vielen Punkten der Kurve, sobald außer den drei Bestimmungspunkten $a_1 a_2 a_3$ ein weiterer $\mathfrak{r}$ bekannt ist, der nicht mit den 12 schon angegebenen Punkten zusammenfällt. Man sucht den Gegenpunkt $\mathfrak{y}$ bezüglich des Dreiecks $a_1 a_2 a_3$, dann zu $\mathfrak{y}$ den Gegenpunkt in bezug auf das Polardreieck, zu diesem wieder den Gegenpunkt in bezug auf das ursprüngliche Dreieck usw. Alle diese Punkte liegen auf der Kurve.

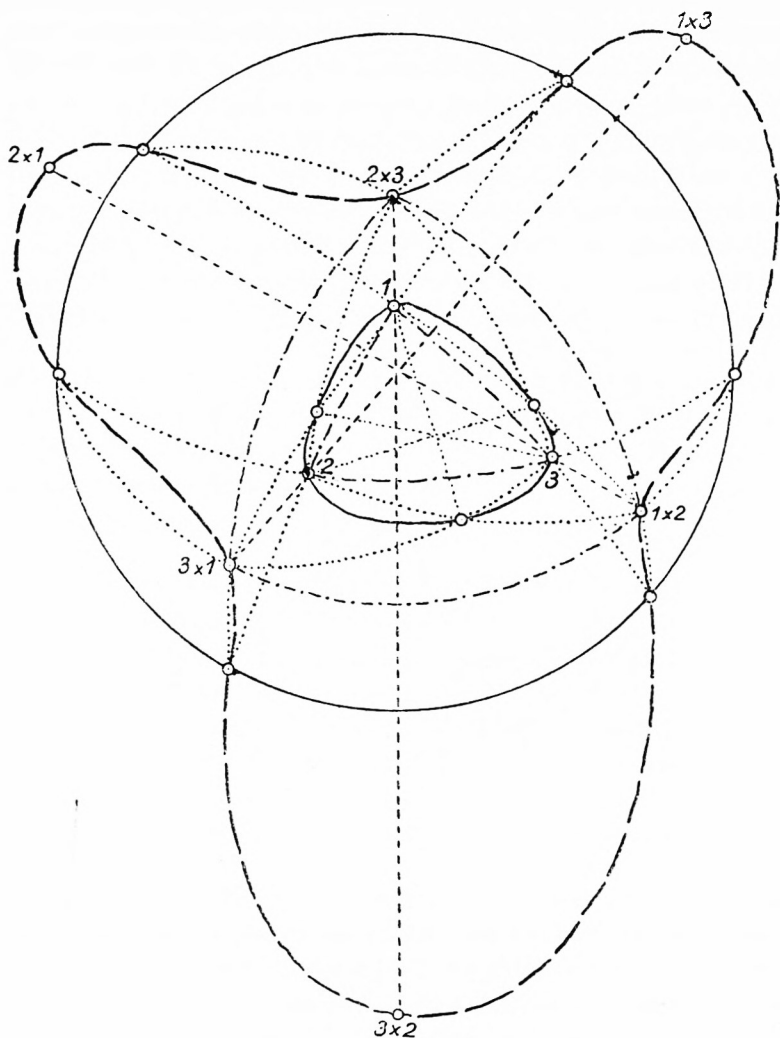


Abb. 4

stellt die auf der Bildkugel liegende gefährliche Kurve für die Stellortung in stereographischer Projektion dar. Die Abbildung erfolgt vom Höhenschnittpunkt des Festpunktsdreiecks 1, 2, 3 aus. Der ovale Teil durch die drei Festpunkte ist ausgezogen, der gewellte Teil durch die Ecken des Polar dreiecks 1×2 , 2×3 , 3×1 ist gestrichelt. Die mit kleinen Kreisen bezeichneten Punkte der Kurve ergeben sich durch geometrische Konstruktion auf der Kugel.

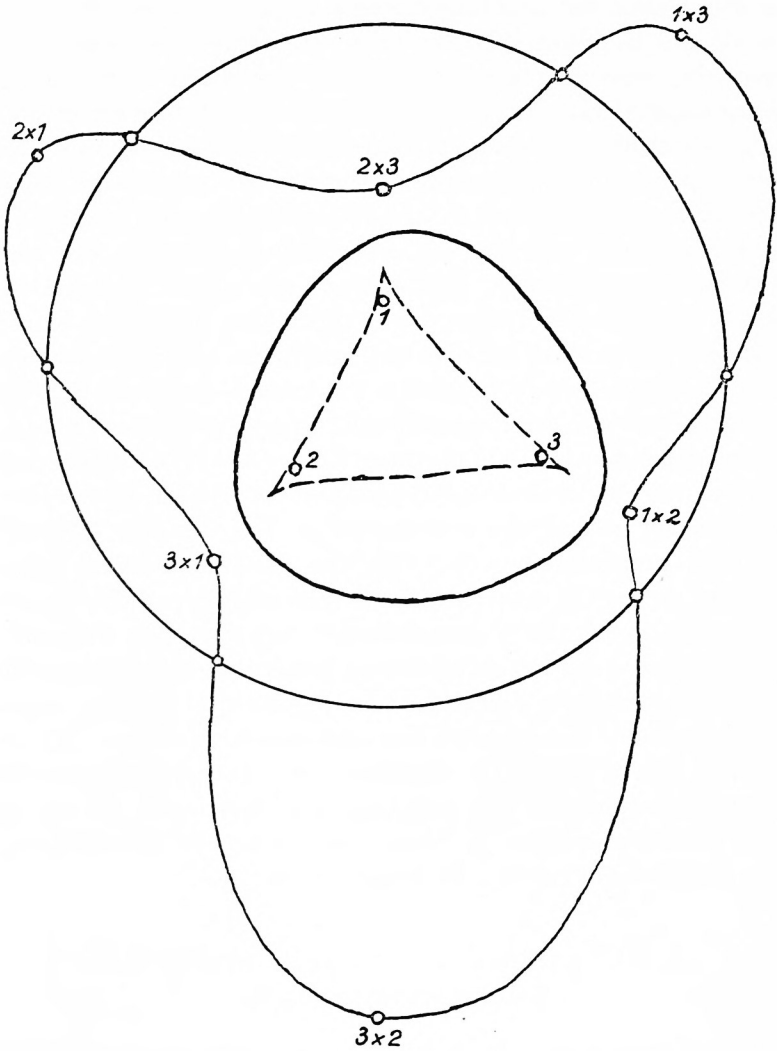


Abb. 5

stellt in gleicher stereographischer Projektion wie Abb. 4 die duale Kurve zu Abb. 4 dar. Sie besteht aus einem ausgezogenen Oval und einem gestrichelten dreispitzigen Zug. Der aus Abb. 4 übernommene wellenförmige Zug ist der Ort der Drehpunkte, die zu den Tangenten des Ovals gehören.

Wir wenden uns jetzt zu den gestaltlichen Verhältnissen der Kurve. Gehen wir vom Kugeldreieck $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ aus, so teilen seine Seiten die Kugel in acht Dreiecke, von denen zwei gegenüberliegende dadurch ausgezeichnet sind, daß die drei Höhen des Ausgangsdreieckes, die auch Höhen für alle acht Dreiecke sind, sich innerhalb des Dreiecks schneiden.¹ Eines davon legen wir den folgenden Betrachtungen zugrunde. Das zugehörige Polardreieck hat mit ihm Höhen und Höhenschnittpunkt gemeinsam und umschließt entweder das ursprüngliche Dreieck oder wird von ihm eingeschlossen. Das kleinere von diesen beiden Dreiecken ist dann der Träger des ovalförmigen Teiles der Kurve, während das größere auf dem wellenförmigen Teil der Kurve mit den Wendepunkten (d. h. solchen Punkten, in denen die Schmiegungebene durch den Kugelmittelpunkt geht) gelegen ist (Abb. 4). Dementsprechend besteht die duale Kurve (Abb. 5) aus einem ovalen Teil, der die Seiten des größeren Dreiecks berührt, also ihm eingeschrieben ist und einem dreispitzigen Teil, der dem kleineren Dreieck umgeschrieben ist. Hat das Zielliniendreikant spitze Winkel, so liegt es innerhalb des Polardreikants und die Ebenen der gefährlichen Festpunktsdreiecke umhüllen das Polardreikant, während die Drehpunkte oder besser ihre Kugelradien den zum wellenförmigen Zweig der Kurve gehörigen Teil des Kegels 3. O. besetzen. Festpunktsebenen, die den dreispitzigen Teil der dualen Kurve (Abb. 5) umhüllen und das Ausgangsdreieck schneiden, genügen dem praktischen Bedarf nicht, da sie auf den Rückwärtseinschnitt führen, bei dem ein Nebendreikant des Zielstrahlendreikants in Frage kommt.

4. Der gefährliche Ort beim räumlichen Rückwärtseinschnitt.

Dieser kann auch ohne die Trennung in Stell- und Standortung behandelt werden und ist schon vor dieser bekannt gewesen.² Liegt der Standpunkt auf dem Zylinder, der sich über dem Um-

¹ Den Ausnahmefall, daß das Dreieck drei rechte Winkel und damit keinen bestimmten Höhenschnittpunkt hat, lassen wir dabei außer Betracht.

² S. Finsterwalder: Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. Verlag B. G. Teubner, Leipzig 1899.

Es seien $P_1 P_2 P_3$ die drei Festpunkte, M der Mittelpunkt und r der Halbmesser des Umkreises des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$. O sei der auf die Dreiecksebene herabgelotete Standpunkt, dessen Höhe über der Dreiecksebene mit h bezeichnet werde. O sei auf dem Umkreis des Dreiecks gelegen. Wir suchen den O gegenüberliegenden Punkt D des Umkreises auf und drehen nun das Dreieck der Zielstrahlen ein wenig um die in D zur Dreiecksebene senkrechte Achse. Bei dieser Drehung um den Winkel $d\varphi$ bleibt der Standpunkt in der gleichen Höhe h wie vorher; er rückt mit seinem Lotfußpunkt O um die Strecke $2rd\varphi$ weiter, ohne den Kreiszyylinder bzw. den Umkreis merklich zu verlassen. Die an die Zielstrahlen geheftet gedachten Punkte $P_1 P_2 P_3$ bewegen sich dabei in der Dreiecksebene auf den Linien OP_1 OP_2 und OP_3 weiter um kleine Strecken, die $DP_1 d\varphi$, $DP_2 d\varphi$ und $DP_3 d\varphi$ betragen. Bezeichnen wir die Winkel, die die Halbmesser MP_1 , MP_2 und MP_3 mit MD einschließen (Abb. 7), mit α_1 α_2 α_3 , so sind jene Strecken: $2rd\varphi \sin \frac{\alpha_1}{2}$, $2rd\varphi \sin \frac{\alpha_2}{2}$ und $2rd\varphi \sin \frac{\alpha_3}{2}$. Die Strahlen des gedrehten Zielstrahlenbündels gehen zwar in ihrem Riß auf die Dreiecksebene noch durch die ursprünglichen Festpunkte, nicht aber im Raum. Die senkrecht zur Dreiecksebene gemessenen Abstände dh_1 , dh_2 , dh_3 der Festpunkte von den gedrehten Zielstrahlen werden nunmehr durch Multiplikation der in der Dreiecksebene zurückgelegten Strecken mit den Neigungen der Zielstrahlen gegen die Dreiecksebene, also: $h:OP_1$, $h:OP_2$ und $h:OP_3$ erhalten, wobei: $OP_1 = 2r \cos \frac{\alpha_1}{2}$, $OP_2 = 2r \cos \frac{\alpha_2}{2}$ und $OP_3 = 2r \cos \frac{\alpha_3}{2}$ ist. Auf diese Weise erhält man: $dh_1 = h d\varphi \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}$, $dh_2 = h d\varphi \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}$ und $dh_3 = h d\varphi \operatorname{tg} \frac{\alpha_3}{2}$. Verbindet man nun die außerhalb der Dreiecksebene gelegenen Enden $P_1 P_2 P_3$ obiger Abstände durch eine zur Dreiecksebene benachbarte Ebene, so schneidet diese die Dreiecksebene in einer Spur S und schließt mit ihr einen Winkel $d\psi$ ein. Mit dieser neuen Ebene $P_1 P_2 P_3$ denken wir uns nun das Zielstrahlenbündel in seiner gedrehten Lage fest verbunden und klappen nun die neue Ebene um die Spur S in die alte Ebene zurück, wobei die vorhin genannten Enden der Abstände mit den Ecken des Festpunktsdreiecks (bis

auf Größen 2. O.) wieder zur Deckung kommen. Man hat also durch Drehung um zwei Achsen, von denen die eine durch D senkrecht zur Festpunktebene steht und die andere S , die in der Festpunktebene gelegen ist, erreicht, daß das Zielstrahlenbündel in einer veränderten Lage wiederum durch die gleichen Festpunkte geht.

Es soll nun gezeigt werden, daß die Spur S als Verbindungs-
linie der Lotfußpunkte des Punktes D in bezug auf die Seiten des

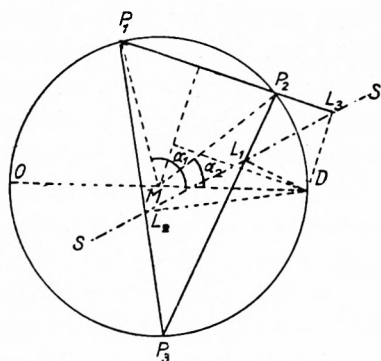


Abb. 7

Festpunktsdreiecks gefunden werden kann. Zu dem Zweck betrachten wir die beiden Festpunkte P_1 und P_2 , die den Abstand $P_1 P_2 = 2 \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$ voneinander haben und über welchen sich in Abständen $hd\varphi \operatorname{tg} \alpha_1$ und $hd\varphi \operatorname{tg} \alpha_2$ die Punkte P'_1 und P'_2 befinden. Wir verbinden nun P'_1 und P'_2 durch eine Gerade und suchen den Punkt L_3 auf ihr, der den Abstand Null hat, also auf der Dreiecksseite $P_1 P_2$ gelegen ist. Man findet alsbald, daß: $P_1 L_3 = 2r \sin \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_2}{2}$ und $P_2 L_3 = 2r \sin \frac{\alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1}{2}$ ist. Das sind aber auch die Entfernungen des Lotfußpunktes von P_1 und P_2 , der demnach mit L_3 zusammenfällt. Ein gleiches gilt von den andern Seiten des Festpunktsdreiecks.

Während die Veränderung des Standpunktes bei der Drehung um die Achse durch D auf dem gefährlichen Zylinder vor sich geht und für alle Lagen nur vom Drehwinkel $d\varphi$ abhängig ist, ist jene, die durch die Drehung um S hervorgerufen wird, nach

Größe und Richtung für die verschiedenen Lagen des Standpunktes verschieden. Die Lage der Drehachse S ist zwar für alle Standpunkte, die auf der gleichen Zylindermantellinie liegen, dieselbe, aber der Drehwinkel $d\psi$ wächst mit den Abständen $dh = h d\varphi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ im einfachen Verhältnis von h . Ist a der senkrechte Abstand des Punktes O von der Drehachse S , so ist die Entfernung des Standpunktes von S gleich $\sqrt{a^2 + h^2}$ und der Ausschlag des Standpunktes bei der Drehung $d\psi \sqrt{a^2 + h^2}$. Der Anteil dieses Ausschlages parallel zur Festpunktebene ist dann $h d\psi$ und jener senkrecht dazu $a d\psi$. Es folgt hieraus, daß der erstgenannte quadratisch, der letztgenannte im einfachen Verhältnis mit h wächst. Wenn demnach der zu bestimmende Standpunkt hoch über der Festpunktebene gelegen ist, so ist seine Unsicherheit in der Nähe des gefährlichen Falls vorab in der Richtung parallel zur Festpunktebene zu befürchten. Ganz besonders groß ist dieser Ausschlag, wenn O mit einem der drei Festpunkte $P_1 P_2$ oder P_3 zusammenfällt, also der Standpunkt selbst senkrecht über einem der drei Festpunkte steht. Hier stellt sich heraus, daß schon eine Abweichung des betreffenden Zielstrahles vom Zielpunkt in der dritten Größenordnung genügt, um einen Ausschlag des Standpunktes von der ersten Größenordnung hervorzurufen (vgl. Abb. 6).

Außer der Verteilung der Größe des Ausschlags im gefährlichen Ort verdient noch die Richtung dieses Ausschlages Beachtung. Wir untersuchen die auf die Festpunktebene herabgeloteten Ausschlagsrichtungen, die von der Höhe h des Standpunktes über dieser unabhängig sind. Die in der Dreiecksebene gelegenen Drehachsen S umhüllen die zu diesem Dreieck gehörige Steinersche Kurve 3. Kl.¹ mit drei Spitzen, deren Spitzentangenten sich in einem von M verschiedenen Punkt des Dreiecks der Festpunkte schneiden. Die zu untersuchenden Richtungen stehen auf den Geraden S senkrecht und gehen durch O , den jeweiligen Gegenpunkt D auf dem Umkreise, von dem aus die auf S liegenden Lotfußpunkte bestimmt wurden.

¹ Jakob Steiner: Über eine besondere Kurve dritter Klasse (und vierten Grades). Crelles Journal f. reine u. angew. Math. 53. Bd. S. 231, auch Ges. Werke 2. Bd. S. 641.

Sie umhüllen ebenfalls eine Kurve 3. Kl., die aber eine dreizählige Symmetrie um den Mittelpunkt M aufweist und eine dreispitzige Innenrollinie darstellt, welche den Umkreis des Dreiecks in 3 Punkten berührt. Die Spitzentangenten schneiden sich in M unter 120° ; eine von ihnen gehört zu dem Winkel $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) : 3$. Die Richtungen dieser Ausschläge wird in Abb. 6 durch kleine Pfeile in den jeweiligen Punkten O dargestellt, wobei die Länge dieser Pfeile der Größe der Ausschläge entspricht. Dabei ist ein unveränderter Drehwinkel $d\varphi$ für alle zugehörigen Drehachsen D vorausgesetzt.

Ich übergehe die Untersuchung des zur Dreiecksebene senkrechten Ausschlagsanteils, da die mit dem gefährlichen Fall zusammenhängenden Betrachtungen schon einen weit über das Anwendungsbedürfnis hinausgehenden Umfang angenommen haben.

5. Der Zusammenschluß von zwei Paaren sonnengeorteter Luftaufnahmen

Bei dieser bereits in der Einleitung näher umrissenen Aufgabe sind zwei zeitlich verschiedene Flüge bei ungleichem Sonnenstand vorausgesetzt, von denen jeder ein Paar Luftaufnahmen des gleichen Geländes liefert. Genauer Zeitpunkt und der Sonnenstand werden bei allen vier Bildern mitaufgenommen. Ein schnell hintereinander aufgenommenes Paar ermöglicht auf bekannte Weise die Wiederherstellung eines Punkthaufens im Gelände bis auf den Maßstab, dem auch die zugehörigen, kaum voneinander verschiedenen Sonnenrichtungen zugeteilt sind, welche jedoch zur Sternortung dieses Punkthaufens nicht ausreichen. Unter Sternortung ist dabei die Stellung des Punkthaufens gegenüber dem durch Himmelsachse und Widderpunkt bestimmten Koordinatensystem am Sternenhimmel verstanden. Eine genügende Sternortung setzt nämlich voraus, daß mit dem Punkthaufen die Richtungen nach zwei möglichst verschiedenen Sternörtern verbunden sind, und das erreicht man dadurch, daß man die beiden bei verschiedenen Sonnenständen aufgenommenen Punkthaufen so zusammenschließt, daß entsprechende Punkte beider Haufen sich möglichst decken und außerdem die mit ihnen verbundenen

Sonnenrichtungen die aus den Aufnahmezeiten zu errechnenden Winkel miteinander einschließen. Bei der Lösung dieser Aufgabe nehmen wir wieder die Trennung von Stellortung und Standortung vor und erreichen damit den Vorteil, von Maßstabverschiedenheiten beider Punkthaufen insoweit unabhängig zu sein, als es sich um die Stellortung handelt. Dazu bedienen wir uns der gnomonischen Kugelabbildung beider Punkthaufen, zu deren Herstellung wir nicht die Ermittlung der Koordinaten der Punkte eines jeden Haufens nötig haben, da wir sie bereits aus den Kugelbildern der Einzelaufnahmen entwickeln können. Es sei daran erinnert, daß sich das Kugelbild eines Haufens von n Punkten aus den Bildern der Richtungen der $n(n-1)/2$ Verbindungslinien je zweier Punkte des Haufens aufbaut und daß die Bilder von je drei solchen Verbindungslinien, die im Punkthaufen ein Dreieck bilden, auf der Bildkugel auf einem Großkreis liegen. Sind $a\ b$ und $a'\ b'$ die Kugelbilder zweier Punkte des Geländes, wie sie von den beiden Standpunkten des ersten Paares aufgenommen sind, so braucht man nur den Schnittpunkt der beiden Großkreise durch aa' und bb' aufzusuchen, um das Kugelbild der räumlichen Verbindungslinie der beiden Geländepunkte zu erhalten. Sind $\alpha\ \beta$ und $\alpha'\ \beta'$ die Einheitspfeile nach den Kugelbildern, so berechnet sich ein Pfeil nach dem Schnittpunkt von $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$ zu: $(\alpha \times \alpha') \times (\beta \times \beta') = \sin(\alpha\alpha') \sin(\beta\beta') \sin \vartheta t$, wobei t den Einheitspfeil nach dem Schnittpunkt und ϑ den Winkel bedeutet, unter dem sich die Großkreise $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$ schneiden.¹ Es werden nun für eine passende Anzahl (mindestens zwei) von Verbindungslinien zwischen Geländepunkten die Einheitspfeile ermittelt, und zwar sowohl aus dem ersten wie auch aus dem zweiten Paar von Aufnahmen. Für die Stellortung sind nun die Unterschiede beiderlei Einheitspfeile möglichst klein zu machen,

¹ Das Produkt der drei Sinus könnte ganz gut als Maß für die Sicherheit aufgefaßt werden, mit der die Richtung der Verbindungslinie der Geländepunkte aus dem Zusammenschluß der Aufnahmen hervorgeht. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes ließe sich die nachfolgende Ausgleichung mit Gewichten durchführen, wobei in den Formeln statt der Richtungskosinus $\alpha\ \beta\ \gamma$ die Koordinatenunterschiede der Punkte des Haufens einzusetzen wären, deren Verbindungslinie obige Richtungskosinus hat. Dabei tritt noch die Rechenvereinfachung ein, daß man die Richtungskosinus nicht erst aus den Koordinatenunterschieden zu ermitteln braucht.

und zwar dadurch, daß man das Kugelbild des ersten Aufnahme-paares in passender Weise gegen jenes des zweiten Aufnahme-paares dreht. Da wie immer angenommen wird, daß eine genäherte Ortung der Aufnahmen bereits vorliegt, wird die dabei zur Anwendung kommende Drehung nur klein sein; wir wollen den zugehörigen Drehpfeil mit $d\omega$ bezeichnen. Die den Verbindungslinien entsprechenden Punkte beider Punkthaufen zugehörigen Einheitspfeile werden mit t_i und t'_i bezeichnet, ihre Anteile mit $\alpha_i \beta_i \gamma_i$, so daß:

$$t_i = \alpha_i i + \beta_i \gamma + \gamma_i k \text{ und } t'_i = \alpha'_i i + \beta'_i \gamma + \gamma'_i k \text{ ist.}$$

Der durch die Drehung veränderte Pfeil t_i wird: $t_i + d\omega \times t_i$ und sein Unterschied gegenüber t'_i gleich:

$$\Delta v_i = t'_i - t_i - d\omega \times t_i = \Delta t_i - d\omega \times t_i.$$

Diese Pfeilgleichung zerlegt man in die drei Zahlengleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha'_i - \alpha_i + dw_2 \gamma_i - dw_3 \beta_i &= \Delta v_{1i} \\ \beta'_i - \beta_i - dw_1 \gamma_i + dw_3 \alpha_i &= \Delta v_{2i} \\ \gamma'_i - \gamma_i + dw_1 \beta_i - dw_2 \alpha_i &= \Delta v_{3i}. \end{aligned}$$

Verlangt man nun, daß die Summe der Quadrate der nach der Drehung $d\omega$ verbleibenden Richtungsunterschiede

$$\Delta v_i^2 = \Delta v_{1i}^2 + \Delta v_{2i}^2 + \Delta v_{3i}^2$$

möglichst klein wird, so können obige drei Gleichungen bereits als Fehlergleichungen für $dw_1 dw_2 dw_3$ angesehen werden, aus denen man die folgenden Normalgleichungen bildet, wobei zur Abkürzung $\alpha'_i - \alpha_i = \Delta \alpha_i$ usf. gesetzt ist:

$$\begin{aligned} &\Sigma (1 - \alpha_i^2) dw_1 - \Sigma \alpha_i \beta_i dw_2 - \Sigma \beta_i \gamma_i dw_3 \\ &+ \Sigma (\beta_i \Delta \gamma_i - \gamma_i \Delta \beta_i) = 0 \\ &- \Sigma \alpha_i \beta_i dw_1 + \Sigma (1 - \beta_i^2) dw_2 - \Sigma \alpha_i \gamma_i dw_3 \\ &+ \Sigma (\gamma_i \Delta \alpha_i - \alpha_i \Delta \beta_i) = 0 \\ &- \Sigma \beta_i \gamma_i dw_1 - \Sigma \alpha_i \gamma_i dw_2 + \Sigma (1 - \gamma_i^2) dw_3 \\ &+ \Sigma (\alpha_i \Delta \beta_i - \beta_i \Delta \gamma_i) = 0. \end{aligned}$$

Zu diesen Normalgleichungen tritt aber noch eine astronomische Bedingungsgleichung, die aussagt, daß die mit den beiden Punkthaufen verbundenen Sonnenrichtungen nach der Drehung den aus den Aufnahmezeiten errechneten Winkel miteinander einschließen. Nun liegen für das erste Paar von Aufnahmen und für das zweite Paar je zwei wenig verschiedene Sonnenrichtungen bei wenig verschiedenen Aufnahmezeiten vor, die man beide mittelt. Es sei $\mathfrak{s}$ der Einheitspfeil der gemittelten Sonnenrichtung des ersten Paares vor der Drehung und $\mathfrak{s}'$ jene des zweiten Paares. Nach der Drehung geht erstere in $\mathfrak{s} + d\mathfrak{w} \times \mathfrak{s}$ über. Der Kosinus des Winkels beider wird dann durch $\mathfrak{s}' \cdot (\mathfrak{s} + d\mathfrak{w} \times \mathfrak{s})$ ausgedrückt, der gleich dem Kosinus des aus den gemittelten Aufnahmezeiten gerechneten Winkels s der beiden Sonnenrichtungen gesetzt wird, woraus die streng zu erfüllende astronomische Bedingungsgleichung hervorgeht:

$$d\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{s} \times \mathfrak{s}' = \cos s - \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}'.$$

In den Anteilen der Pfeile geschrieben lautet sie:

$$\begin{aligned} dw_1 (s_2 s'_3 - s'_2 s_3) + dw_2 (s_3 s'_1 - s'_3 s_1) + dw_3 (s_1 s'_2 - s'_1 s_2) \\ = \cos s - (s_1 s'_1 + s_2 s'_2 + s_3 s'_3) = \Delta. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der $d\mathfrak{w}$ unter Einhaltung der Bedingung kann man so verfahren, daß man die Normalgleichungen ohne Rücksicht auf die Bedingung auflöst und die Werte mit $\overline{d\mathfrak{w}}$ bezeichnet. Dann löst man sie nochmals auf, wobei aber die konstanten Glieder durch die Beiwerte $s_2 s'_3 - s'_2 s_3$ usf. der $d\mathfrak{w}$ in der Bedingungsgleichung ersetzt werden. Das Ergebnis dieser Auflösung sei mit $d'\mathfrak{w}$ bezeichnet. Die endgültige Auflösung ist dann: $d\mathfrak{w} = \overline{d\mathfrak{w}} + k d'\mathfrak{w}$, wobei k so bestimmt wird, daß die Bedingungsgleichung erfüllt wird. Mit den endgültigen $d\mathfrak{w}$ werden nun die Punkte des ersten Haufens und die zugehörigen Sonnenrichtungen umgerechnet. Damit sind beide Haufen gegeneinander geortet.

Kennt man nun in irgendeinem Punkte des Geländes, der von einem Paar Standpunkten aus bestimmt ist, die geographischen Koordinaten, also Länge und Breite, so läßt sich das Gelände auch geographisch orten, und zwar nach dem Meridian dieses

Punktes. Zu diesem Behufe muß man nur die beiden gemittelten Sonnenrichtungen in diesem geographischen System rechnen; sie seien $\mathfrak{s}_a$ und $\mathfrak{s}'_a$. Dann richtet man unser bisheriges System (bestehend aus Punkthaufen, Zielstrahlenbündeln und Sonnenrichtungen) so auf, daß die aufgerichteten Sonnenrichtungen mit den astronomischen des bekannten Geländepunktes übereinstimmen. Nach unserem Rechengange ist $\mathfrak{s}$ übergegangen in $\bar{\mathfrak{s}} = \mathfrak{s} + d\mathfrak{w} \times \mathfrak{s}$, während $\mathfrak{s}'$ ungeändert geblieben ist. Die Aufrichtung wird durch eine gemeinsame Drehung mit dem Pfeil du bewirkt, wodurch $\bar{\mathfrak{s}}$ in $\mathfrak{s}_a$ und $\mathfrak{s}'$ in $\mathfrak{s}'_a$ übergeführt wird. Dazu muß du zwei Bedingungen genügen, nämlich: $\bar{\mathfrak{s}} + du \times \bar{\mathfrak{s}} = \mathfrak{s}_a$ und $\mathfrak{s}' + du \times \mathfrak{s}' = \mathfrak{s}'_a$. Diese zwei Pfeilgleichungen lassen sich durch zwei Paare je voneinander unabhängiger Zahlengleichungen ersetzen,¹ nämlich:

$$du \cdot (\mathfrak{s}_a - \bar{\mathfrak{s}}) = 0, \quad du \cdot \mathfrak{s} \times (\mathfrak{s}_a - \bar{\mathfrak{s}}) = (\mathfrak{s}_a - \bar{\mathfrak{s}})^2$$

$$\text{und: } du \cdot (\mathfrak{s}'_a - \mathfrak{s}') = 0, \quad du \cdot \mathfrak{s}' \times (\mathfrak{s}'_a - \mathfrak{s}') = (\mathfrak{s}'_a - \mathfrak{s}')^2$$

Es sind das vier Gleichungen für die drei Anteile $du_1 du_2 du_3$ von $du = du_1 \mathfrak{i} + du_2 \mathfrak{j} + du_3 \mathfrak{k}$, welche aber verträglich miteinander sind, da $d\mathfrak{w}$ so gewählt wurde, daß $\bar{\mathfrak{s}}$ und $\mathfrak{s}'$ den astronomisch gerechneten Winkel s von $\mathfrak{s}_a$ und $\mathfrak{s}'_a$ miteinander einschließen.

Mit der Berechnung des Drehpfeiles du und seiner Anwendung auf die Einheitspfeile des gegenseitig georteten Systems ist die Stellortung vollendet. Es möge noch darauf hingewiesen werden, daß die Pfeile des ersten Teilsystems vor der Drehung durch den Drehpfeil $du + d\mathfrak{w}$ in die endgültige Stellung übergeführt werden, während jene des zweiten Teilsystems dazu einer Drehung um du bedürfen.

Wir kommen nunmehr zur Standortung. Bei der Stellortung konnte man von der Berechnung der Koordinaten der Zielpunkte absehen und sich auf die gnomonischen Bilder beschränken. Bei der Standortung wird man jedoch die Koordinaten jener Zielpunkte, die zum Zusammenschluß der aus den beiden Standpunktpaaren hervorgegangenen Punkthaufen dienen sollen, berechnen. Da die Stellortung beibehalten werden soll, kommt für

¹ Vgl. S. 153 unten.

die Standortung nur eine Parallelverschiebung der beiden Punkthaufen gegeneinander in Frage, und diese wählt man so, daß die Schwerpunkte dieser Punkthaufen zur Deckung kommen. Daran anschließend kann man noch eine Angleichung des Maßstabes beider Punkthaufen vornehmen, indem man die Entfernungen der Punkte von ihrem Schwerpunkt in beiden Haufen miteinander vergleicht. Sind l und l' entsprechende Längen in beiden Punkthaufen, so wählt man als mittleres Vergrößerungsverhältnis V , mit dem die Längen l zu multiplizieren sind, um sie den Längen l' anzugleichen: $V = \frac{\sum l'^2}{\sum l^2}$. Nachdem man mit diesem V die Koordinaten der auf den gemeinsamen Schwerpunkt bezogenen Punkte des ersten Haufens vergrößert hat, mittelt man sie mit jenen des zweiten Haufens und erhält damit die endgültigen Koordinaten dieser Punkte und auch jene der Standpunkte, die zum ersten Haufen gehören. Der endgültige Maßstab des ganzen Gebildes kann natürlich nur durch Vergleich mit Messungen im Gelände festgelegt werden.

Das hier vorgeschlagene Ortungsverfahren beweist, daß die rechnerische Ortung von zwei Paaren sonnengeorteter Luftaufnahmen keinesfalls auf größere Schwierigkeiten stößt. Es sind mancherlei Abänderungen im einzelnen möglich, die eine erhebliche Einsparung an Rechenarbeit bringen können. Ihre Ausprobung wird jedoch besser der Ausübung des Verfahrens überlassen.