

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

Jahrgang 1943

München 1944

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung



Differentialinvarianten bei Flächenabbildungen.

Von Frank Löbell in München.

Herrn Prof. Dr. Wilhelm Kutta, Stuttgart,
in Verehrung gewidmet.

Vorgelegt von Herrn G. Faber am 14. Mai 1943.

Die Theorie der allgemeinen regulären Abbildungen einer gegebenen Fläche auf eine andere gegebene Fläche im reellen euklidischen Raum läßt sich bekanntlich auf einfache Weise und unter geringen Voraussetzungen aufbauen.¹ Dabei treten in den analytischen Entwicklungen, die für die Bestimmung der Hauptelemente einer Abbildung in einem Paar entsprechender Berührebenen nötig sind, bei geeigneter Parameterwahl im wesentlichen nur die Fundamentalgrößen 1. O. der beiden Flächen auf.

Unter gewissen Umständen kann es jedoch wertvoll sein, außerdem noch die „gemischten Fundamentalgrößen“ 1. O. des Flächenpaares heranzuziehen;² wenn Fragen behandelt werden sollen, die die gegenseitige Lage einander zugewiesener Berührungsvektoren betreffen, ist das sogar unbedingt geboten.

Es besteht aber auch die Möglichkeit, die Abbildung mit Hilfe von gemeinsamen Differentialvarianten beider Flächen, die teils skalare, teils vektorielle Funktionen der Parameter sind, zu untersuchen. Wie zu erwarten, gelingt es, nicht nur die Werte der Hauptmaßstäbe, sondern auch die Lagen der Hauptrichtungen im Raum durch solche Invarianten unmittelbar auszudrücken. Dies möge im folgenden für die einander zugeordneten Umgebungen eines einzelnen Punktes und seines Bildpunktes gezeigt werden. Dabei wird sich wie von selbst eine natürliche Einteilung aller denkbaren Fälle ergeben.

¹ Vgl. Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst, Jahrgang 1942, S. 299 ff.

² Dies geschieht in einer demnächst in der Mathematischen Zeitschrift erscheinenden Arbeit zur Theorie der Flächenabbildungen.

1. Voraussetzungen

Gegeben seien zwei reelle Flächen im euklidischen Raum, von denen nur solche Stücke betrachtet werden sollen, die keine singulären Stellen enthalten. Sie seien durch eine reelle, reguläre Abbildung³ aufeinander bezogen. Man kann dann, wie als bekannt vorausgesetzt werde,⁴ beide Flächenstücke mittels derselben, überall regulären Parameter u, v darstellen derart, daß entsprechende Punkte auf beiden Flächen durch identische Parameterpaare festgelegt werden; für ihre vom Nullpunkt O aus abgetragenen Ortsvektoren

$$r(u, v), \quad \eta(u, v),$$

folgt aus der oben ausgesprochenen Voraussetzung der Regularität die Existenz von stetigen partiellen Ableitungen r_u, r_v, η_u, η_v , die den Ungleichungen genügen:

$$r_u \times r_v \neq 0, \quad \eta_u \times \eta_v \neq 0.$$

Abgesehen von dieser Einschränkung sind die Vektoren r_u, r_v, η_u, η_v im einzelnen Punktepaar (u, v) untereinander ganz unabhängig.

2. Aufstellung von Invarianten

Schon in der Theorie der einzelnen Fläche r bzw. η spielt die Tatsache eine wichtige Rolle, daß die Vektoren

$$(1) \quad \underline{j_1} = r_u \times r_v, \quad \underline{j_2} = \eta_u \times \eta_v$$

relative Differentialinvarianten vom Gewicht 1 gegenüber der Gruppe Γ der gemeinsamen Parameterformationen auf beiden Flächen

$$u = u(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = v(\bar{u}, \bar{v}), \quad \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \neq 0 \right)$$

sind.

Man erkennt, daß es sich in j_1 und j_2 im wesentlichen um Sonderfälle des Vektors

$$(2) \quad \underline{j} = r_u \times \eta_v - r_v \times \eta_u$$

³ Vgl. die in Fußnote 1 genannte Arbeit, S. 299.

⁴ A. a. O. S. 300.

handelt: ersetzt man η durch ξ , so wird $j = 2 j_1$; ersetzt man ξ durch η , so wird $j = 2 j_2$.

Mit Hilfe der Beziehungen

$$\begin{aligned} \xi_{\bar{u}} &= \xi_u u_{\bar{u}} + \xi_v v_{\bar{u}}, & \xi_v &= \xi_u u_v + \xi_v v_v, \\ \eta_{\bar{u}} &= \eta_u u_{\bar{u}} + \eta_v v_{\bar{u}}, & \eta_v &= \eta_u u_v + \eta_v v_v, \end{aligned}$$

ergibt sich nun

$$\xi_{\bar{u}} \times \eta_v - \xi_v \times \eta_{\bar{u}} = (\xi_u \times \eta_v - \xi_v \times \eta_u) (u_{\bar{u}} v_v - u_v v_{\bar{u}}),$$

d. h. j ist eine Differentialinvariante vom Gewicht 1 gegenüber Γ .

Neben diesen vektoriellen Invarianten gibt es aber auch noch eine skalare vom Gewicht 1, für die es bei der Einzelfläche kein Gegenstück gibt, das nicht trivial wäre, nämlich

$$(3) \quad \underline{j = \xi_u \eta_v - \xi_v \eta_u};$$

in der Tat findet man

$$\xi_{\bar{u}} \eta_v - \xi_v \eta_{\bar{u}} = (\xi_u \eta_v - \xi_v \eta_u) (u_{\bar{u}} v_v - u_v v_{\bar{u}}).$$

Wenn soeben gesagt wurde, daß es zu j in der Flächentheorie kein Analogon gebe, so war das nicht so gemeint, als ob es dort überhaupt keine skalare Differentialvariante vom Gewicht 1 gäbe; als solche braucht man bekanntlich die erst durch die Orientierung der Flächen eindeutig werdenden Irrationalitäten

$$(4) \quad W = c \xi_u \xi_v, \quad W' = c' \eta_u \eta_v,$$

wo c bzw. c' die Normalenvektoren der orientierten Flächen ξ bzw. η , d. h. je einen bestimmten der Einheitsvektoren von j_1 bzw. j_2 , bedeuten. Es gilt

$$(4') \quad W^2 = j_1^2, \quad W'^2 = j_2^2.$$

Aus den Funktionen j_1, j_2, j, j , von denen wir die beiden letzten als „gemischte Differentialinvarianten“ des Paares durch gleiche Parameter aufeinander bezogener Flächen ξ und η bezeichnen wollen, können wir absolute Differentialinvarianten des Flächenpaares dadurch bilden, daß wir sie durch eine skalare Invariante vom Gewicht 1 dividieren. Zunächst würde es nahe liegen, j als Divisor zu benutzen, weil dadurch Invarianten entstehen würden, die bez. beider Flächen symmetrisch gebildet wären; jedoch müßte dann der später zu diskutierende

Fall $j = 0$ ausgeschlossen oder gesondert behandelt werden. Wir nehmen deshalb lieber eine Unsymmetrie in Kauf und dividieren durch W ; denn nach den anfangs gemachten Annahmen kann weder j_1 noch j_2 , folglich auch weder W noch W' an irgendeiner Stelle (u, v) , die wir in Betracht ziehen, verschwinden. Wir setzen

$$(5) \quad \mathfrak{S}_1 = j_1 : W, \quad \mathfrak{S}_2 = j_2 : W, \quad \mathfrak{S} = j : W, \quad J = j : W$$

und stellen fest, daß $\mathfrak{S}_1 = c$ und $\mathfrak{S}_2 = c'W' : W$ ist, wobei bekanntlich $W' : W = M$ der „Flächenmaßstab“ der Abbildung $x \rightarrow y$ an der Stelle (u, v) ist, der sich durch die linearen „Hauptmaßstäbe“ m_1 und m_2 folgendermaßen ausdrückt:⁵ $M = m_1 m_2$.

Die zu der Abbildung $x \rightarrow y$ inverse Abbildung $y \rightarrow x$ besitzt die relativen Invarianten $j_2, j_1, j, -j$ und die absoluten Invarianten $\mathfrak{S}_2 : M, \mathfrak{S}_1 : M, \mathfrak{S} : M, -J : M$.

3. Die Frage der Vollständigkeit

Es soll nun untersucht werden, ob die vier aufgestellten Invarianten j_1, j_2, j, j ausreichen, um die durch die Flächenabbildung „induzierte“ Affinität⁶ zwischen den Berührebenen ε und ε' der Flächen x und y in den Punkten (u, v) räumlich festzulegen, oder ob sie zum Teil vielleicht überzählig sind.

Zu dem Zweck denken wir uns eine Parametertransformation $u = u(p, q), v = v(p, q)$ ausgeführt, durch die die Vektoren x_p, x_q, y_p, y_q geeignete spezielle Lagen gegenüber den invarianten Vektoren $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}$ annehmen, die sich selbst bei dieser Transformation ebenso wenig ändern wie die skalare Funktion J .

Dabei müssen die verschiedenen Fälle besonders behandelt werden, die sich je nach der Dimension r des von den Vektoren j_1, j_2, j aufgespannten linearen Vektorgebildes ergeben.

Wir beginnen mit dem Fall

a) $r = 3$.

Wenn $j_1 j_2 j \neq 0$, so gibt es ein eindeutig bestimmtes gemeinsames Lot $j_1 \times j_2 \neq 0$ der beiden Normalenvektoren j_1 und j_2 der beiden Flächen; anschaulicher stellt man es sich als die Richtung vor, die den Berührebenen ε und ε' gemeinsam ist.

⁵ A. a. O. S. 302 f. und S. 305.

⁶ A. a. O. S. 300 f. – Zur Vollständigkeitsfrage soll in den Math. Ann. eine Arbeit über Flächenpaare mit übereinstimmenden Invarianten erscheinen.

Wir nehmen nun zunächst an, daß vermöge der Affinität $\varepsilon \rightleftharpoons \varepsilon'$ diese Richtung nicht sich selbst oder ihrer entgegengesetzten entspreche. Wir wählen dann die Parameter p, q — was für diesen einen Punkt sogar durch eine lineare Transformation erreichbar ist — so, daß die Vektoren r_p und v_p in die Richtung $j_1 \times j_2$ fallen; dies ist nach unserer soeben gemachten Annahme möglich, weil der Vektor r_p , dem v_p entspricht, nicht zu $j_1 \times j_2$ parallel ist, so daß wir r_q noch in diese Richtung legen dürfen. Wir können sogar $r_q = v_p$ annehmen. Dann wird, da $r_q \times v_p = 0$, mit einem skalaren Faktor $D \neq 0$, der auch negativ sein kann, weil möglicherweise die Richtung von $r_p \times r_q$ der von $r_u \times r_v$ entgegengesetzt ist:

$$D j_1 = r_p \times r_q, \quad D j_2 = r_q \times v_q, \quad D j = r_p \times v_q, \\ D j = r_p v_q - r_q^2.$$

Man sieht hieraus, daß r_p, r_q, v_q den zu j_1, j_2, j reziproken Vektoren parallel sind und sich daher durch j_1, j_2, j ausdrücken lassen werden; in der Tat muß, da z. B. ersichtlich r_p zu j_1 und zu j senkrecht ist, gelten:

$$r_p = \alpha j \times j_1, \quad r_q = v_p = \beta j_1 \times j_2, \quad v_q = \gamma j_2 \times j.$$

α, β, γ bestimmen sich aus den Gleichungen

$r_p r_q v_q = \alpha D j j_1 j_2, \quad r_q r_p v_q = \beta D j_1 j_2 j, \quad v_q r_p r_q = \gamma D j_2 j j_1,$
deren erste z. B. dadurch erhalten wird, daß man $r_p = \alpha j \times j_1$ mit $r_q \times v_q = D j_2$ skalar multipliziert; es wird also

$$\alpha = -\beta = \gamma = r_p r_q v_q : D j_1 j_2 j.$$

Weiter ergibt sich

$$D^3 j_1 j_2 j = (r_p \times r_q) \times (r_q \times v_q) (r_p \times v_q) \\ = (r_q \cdot r_p r_q v_q - r_p \cdot r_q r_q v_q) (r_p \times v_q),$$

d. h.

$$(6) \quad D^3 j_1 j_2 j = -(r_p r_q v_q)^2 \neq 0;$$

folglich werden die erwarteten Beziehungen:

$$(7) \quad r_p = \frac{D^2}{\varepsilon_p \varepsilon_q v_q} j_1 \times j, \quad r_q = v_p = \frac{D^2}{\varepsilon_p \varepsilon_q v_q} j_1 \times j_2, \\ v_q = \frac{D^2}{\varepsilon_p \varepsilon_q v_q} j \times j_2,$$

wo die Nenner auch durch $j_1 j_2 j$ ausgedrückt werden könnten.

Da den Vektoren $\xi \mathfrak{r}_p$ bzw. $\eta \mathfrak{r}_q$ in der Affinität $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ die Vektoren $\xi \mathfrak{y}_p$ bzw. $\eta \mathfrak{y}_q$ entsprechen, so erkennen wir (mit $\xi = \eta = \mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_q \mathfrak{y}_q : D^2$):

Die Affinität zwischen den Berührebenen in den Punkten $\mathfrak{x} (u, v)$ und $\mathfrak{y} (u, v)$ ist dadurch festgelegt, daß

(8a) den Vektoren $\underline{j_1 \times j \text{ bzw. } j_1 \times j_2}$

(8b) die Vektoren $\underline{j_1 \times j_2 \text{ bzw. } j \times j_2}$

zugeordnet sind; diese Aussage bleibt richtig, wenn alle relativen Invarianten durch absolute ersetzt werden.

Es ist nun folgendes zu beachten: Die Vektoren $\mathfrak{r}_u, \mathfrak{r}_v, \mathfrak{y}_u, \mathfrak{y}_v$, die wir allein zur Bildung unserer Invarianten benützten, legen die Affinität $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$, und zwar auch räumlich, vollkommen fest; mehr leisten sie aber nicht. Da sich j_1, j_2, j, j nur aus $\mathfrak{r}_u, \mathfrak{r}_v, \mathfrak{y}_u, \mathfrak{y}_v$ ausdrücken, so kann auch von den Invarianten nicht mehr erwartet werden als die räumliche Festlegung dieser Affinität. Nun hat sich aber gezeigt (durch (8 a, b)), daß dazu schon $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}$ ausreichen; diese drei Vektoren bilden daher schon ein vollständiges System von Invarianten.

Da aber J durch die Affinität $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ bestimmt ist, können wir also vermuten, daß J eine Funktion der drei Vektorinvarianten ist. In der Tat brauchen wir ja nur unsere für $\mathfrak{r}_p, \mathfrak{r}_q = \mathfrak{y}_p, \mathfrak{y}_q$ gefundenen Ausdrücke (7) in $Dj = \mathfrak{r}_p \mathfrak{y}_q - \mathfrak{r}_q \mathfrak{y}_p$ einzusetzen; wir finden so, wenn wir noch gemäß (6) $(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_q \mathfrak{y}_q)^2$ durch $-D^3 j_1 j_2 j$ ersetzen:

$$(9) \quad \underline{j \cdot j_1 j_2 j + (j \times j_1) (j_2 \times j) - (j_1 \times j_2)^2 = 0;}$$

vermöge dieser Beziehung, die infolge ihrer Homogenität richtig bleibt, wenn sämtliche kleinen Buchstaben durch große ersetzt werden, hängt j wegen $j_2 j_1 j \neq 0$ eindeutig von j_2, j_1, j ab. Mittels (1), (2) und (3) könnte (9) nachträglich als Identität verifiziert werden.

Aus der bis jetzt zugrunde gelegten Annahme, daß es in dem betrachteten Punkt (u, v) keinen (reellen oder imaginären) Tangentenvektor an die Fläche $\mathfrak{x}$ gibt, dem ein Berührvektor gleicher oder entgegengesetzter Richtung an $\mathfrak{y}$ entspräche, folgt allein schon, daß $j_1 j_2 j \neq 0$ sein muß. Zunächst können nämlich die beiden einander entsprechenden Normalvektoren nicht zuein-

ander parallel sein, da sonst immer mindestens eine reelle oder imaginäre Tangente existiert, die zu ihrer Bildtangente parallel ist. Weil folglich j_1 und j_2 linear unabhängig sind, so müßte, wenn $j_1 j_2 j = 0$ sein sollte, j von j_1 und j_2 linear abhängen. Das ist aber nicht möglich; denn sonst müßten r_p und η_q und die den beiden Berührebenen ε und ε' gemeinsame Richtung $r_q = \eta_p$ wegen $j = r_p \times \eta_q$ komplanar sein, mithin müßte, da ja $j_1 \times j_2 \neq 0$ ist, wenigstens einer der beiden Vektoren r_p oder η_q zu $r_q = \eta_p$ parallel sein, was von vornherein durch die Regularitätsforderung $r_p \times r_q \neq 0$ und $\eta_p \times \eta_q \neq 0$ ausgeschlossen ist.

Wir müssen also jetzt die andere Möglichkeit in Betracht ziehen, daß es mindestens einen Vektor η_p gibt, der dem Vektor r_p , dem er entspricht, parallel ist:

$$\eta_p = \lambda r_p;$$

hierin kann weder λ noch $1 : \lambda$ null sein, da ja keiner der notwendig endlichen Vektoren r_p, r_q, η_p, η_q verschwinden darf. Es ist dann aber

$$j = r_p \times \eta_q - r_q \times \eta_p = \frac{1}{\lambda} \eta_p \times \eta_q - \lambda r_q \times r_p$$

oder

$$(10) \quad j = \lambda j_1 + \frac{1}{\lambda} j_2;$$

hieraus folgt $j_1 j_2 j = 0$.

Wie wir erkennen, ist das Bestehen der Ungleichung $j_1 j_2 j \neq 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß es keine (reelle oder imaginäre) Berührende in ε gibt, der eine parallele Tangente in ε' entspräche.

Damit bietet sich uns als nächster natürlicher Schritt der Übergang zu dem Fall

b) $r = 2$.

Zunächst machen wir die Annahme:

$$j_1 \times j_2 \neq 0,$$

woraus wegen der Realität von j_1 und j_2 folgt: $(j_1 \times j_2)^2 \neq 0$. Es muß dann wegen $j_1 j_2 j = 0$, wie wir oben sahen, die einzige, beiden Berührebenen ε und ε' gemeinsame Richtung, die vorhanden ist, nämlich $j_1 \times j_2$, in sich oder ihre entgegengesetzte

übergehen; wählen wir $r_p = j_1 \times j_2$, so kann also nur $v_p = \lambda j_1 \times j_2$ sein, mit $\lambda \neq 0$, und es gilt (10). Weiter wollen wir den Vektor r_q in der zu r_p senkrechten Richtung in ε annehmen:

$$r_q = \mu j_1 \times j_2 \times j_1;$$

v_q müssen wir dann als ganz allgemeinen Vektor in ε' ansetzen:

$$v_q = \nu j_2 \times j_1 \times j_2 + \rho j_1 \times j_2.$$

μ ist so zu bestimmen, daß $j_1 = r_p \times r_q$ wird:

$$j_1 = (j_1 \times j_2) \times \mu (j_1 \times j_2 \times j_1) = -\mu j_1 (j_1 \times j_2)^2,$$

also

$$\mu = -1 : (j_1 \times j_2)^2.$$

Ferner muß sein $j_2 = v_p \times v_q$, somit

$$j_2 = \lambda (j_1 \times j_2) \times \nu (j_2 \times j_1 \times j_2) = \lambda \nu j_2 (j_1 \times j_2)^2,$$

also

$$\lambda \nu = 1 : (j_1 \times j_2)^2.$$

Weiter wird $j = r_p \times v_q - r_q \times v_p = (j_1 \times j_2) \times \nu (j_2 \times j_1 \times j_2) - \mu (j_1 \times j_2 \times j_1) \times \lambda (j_1 \times j_2) = \nu j_2 (j_1 \times j_2)^2 - \lambda \mu j_1 (j_1 \times j_2)^2$.

Durch skalare Multiplikation von $j = \lambda j_1 + j_2 : \lambda$ mit $j_1 \times j_2 \times j_1$ und mit $j_2 \times j_1 \times j_2$ finden wir

$$\lambda = j (j_2 \times j_1 \times j_2) : (j_1 \times j_2)^2 = (j_1 \times j_2)^2 : j (j_1 \times j_2 \times j_1),$$

n Übereinstimmung mit den weiter oben schon gefundenen Werten für μ und $\lambda \nu$. Wie wir aber sehen, reichen hier zur Festlegung der Affinität $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$, nämlich zur Bestimmung von λ , μ , ν , ρ — im Gegensatz zu Fall a) — die drei vektoriellen Invarianten nicht aus; wir brauchen, um noch ρ berechnen zu können, auch die skalare Invariante: es wird

$$j = r_p v_q - r_q v_p = (j_1 \times j_2) \rho (j_1 \times j_2),$$

mithin

$$\rho = j : (j_1 \times j_2)^2.$$

Um nun die Affinität $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ auf eine in sich symmetrische Weise durch Angabe eines Vektorenpaares und des ihm entsprechenden im Raume festzulegen, benützen wir neben dem Vektorenpaar $-r_q (j_1 \times j_2)^2 \rightarrow -v_q (j_1 \times j_2)^2$ das Paar

$$-j r_p + j (j_2 \times j_1 \times j_2) \cdot r_q \rightarrow -j v_p + j (j_2 \times j_1 \times j_2) \cdot v_q;$$

wir finden dann, daß

den Vektoren

$$(11a) \quad \underline{\dot{j}_1 \times \dot{j}_2 \times \dot{j}_1 \text{ bzw. } -\dot{j} \cdot \dot{j}_1 \times \dot{j}_2 - (\dot{j}_1 \times \dot{j}_2 \times \dot{j}_1) \cdot \dot{j} (\dot{j}_2 \times \dot{j}_1 \times \dot{j}_2) : (\dot{j}_1 \times \dot{j}_2)^2}$$

die Vektoren

$$(11b) \quad \underline{-\dot{j} \cdot \dot{j}_1 \times \dot{j}_2 - (\dot{j}_2 \times \dot{j}_1 \times \dot{j}_2) \cdot \dot{j} (\dot{j}_1 \times \dot{j}_2 \times \dot{j}_1) : (\dot{j}_1 \times \dot{j}_2)^2 \text{ bzw. } \dot{j}_2 \times \dot{j}_1 \times \dot{j}_2}$$

entsprechen. Zu diesen müssen wir für den Fall des Verschwindens von $\dot{j}$ zur völligen räumlichen Festlegung der Affinität noch das Vektorenpaar $\mathfrak{x}_p \rightarrow \mathfrak{y}_p$ hinzufügen; wegen (10) ist damit gleichbedeutend die Hinzunahme eines der Vektorenpaare (8a, b):

$$(11c) \quad \dot{j}_1 \times \dot{j} \rightarrow \dot{j}_1 \times \dot{j}_2 \quad \text{oder} \quad \dot{j}_1 \times \dot{j}_2 \rightarrow \dot{j} \times \dot{j}_2.$$

Daß hier die Invariante J notwendig gebraucht wird, $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}$ also noch kein vollständiges Invariantensystem bilden, kommt auch darin zum Ausdruck, daß J wegen des Verschwindens von $\dot{j}_1 \dot{j}_2 \dot{j}$ nicht nach (9) aus $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}$ berechnet werden kann. Dennoch gilt diese Gleichung auch jetzt noch, wie durch eine Überlegung algebraischer Natur bewiesen werden könnte; einfacher ist es jedoch, sie direkt abzuleiten: Da wegen (10) $\dot{j} \times \dot{j}_1 = (\dot{j}_2 \times \dot{j}_1) : \lambda$, $\dot{j}_2 \times \dot{j} = \lambda (\dot{j}_2 \times \dot{j}_1)$ ist, so gilt in der Tat:

$$(\dot{j} \times \dot{j}_1) (\dot{j}_2 \times \dot{j}) - (\dot{j}_1 \times \dot{j}_2)^2 = 0.$$

Die beiden vorausgehenden Beziehungen, deren Bestehen früher schon aus $\dot{j}_1 \times \dot{j}_2 \neq 0$ und $\dot{j}_1 \dot{j}_2 \dot{j} = 0$ gefolgert wurde, setzen in Evidenz, daß die Ungleichungen

$$\dot{j} \times \dot{j}_1 \neq 0 \text{ und } \dot{j}_2 \times \dot{j} \neq 0 \text{ aus } \dot{j}_1 \times \dot{j}_2 \neq 0$$

folgen, weil ja sowohl λ als auch $1 : \lambda$ von null verschieden sein muß.

Da somit alle Möglichkeiten, die der Rang $r = 2$ bietet, erschöpft sind, so kommen wir zur Behandlung des Falles

$$c) \quad r = 1.$$

Schon aus der Annahme

$$\dot{j}_1 \times \dot{j}_2 = 0$$

folgt, daß $r = 1$ ist; denn, wenn $\dot{j}_1$ und $\dot{j}_2$ parallel sind, so liegen die Vektoren $\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{y}_u, \mathfrak{y}_v$ alle in einer Ebene, folglich ist auch $\dot{j}$ zu $\dot{j}_1$ und $\dot{j}_2$ parallel, und es gilt daher auch

$$\dot{j} \times \dot{j}_1 = \dot{j}_2 \times \dot{j} = 0.$$

Auch jetzt ist (9) erfüllt, wie man unmittelbar sieht.

Die Invarianten $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}, J$ können hier zur räumlichen Festlegung der Affinität $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ nur ausreichen, wenn diese durch jede beliebige Drehung um die einzige, durch die Invarianten bestimmte Richtung $\mathfrak{j}_1$ in sich übergeht; das ist aber genau dann der Fall, wenn die Affinität eine direkte Ähnlichkeit ist.

Bevor wir dieses spezielle Vorkommnis untersuchen, stellen wir folgende, bei parallelen Normalen $\mathfrak{j}_1$ und $\mathfrak{j}_2$ in entsprechenden Flächenpunkten allgemein gültige Überlegung an: Es seien $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ zwei Einheitsvektoren, welche in die, wie bekannt,⁷ stets reellen, aufeinander senkrechten „Hauptrichtungen“ der Fläche $\mathfrak{x}$ im Punkte (u, v) weisen (für die bekanntlich der lineare Abbildungsmaßstab m Extremwerte m_1 und m_2 unter allen Maßstabsgrößen annimmt, die für die vom Punkt (u, v) ausgehenden Linienelemente der Fläche $\mathfrak{x}$ gelten); $\mathfrak{t}'_1$ und $\mathfrak{t}'_2$ in $\varepsilon' = \varepsilon$ seien Einheitsvektoren der entsprechenden Hauptrichtungen von $\mathfrak{y}$ im Punkt (u, v) , die aus $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ durch eine und dieselbe Drehung um die gemeinsame Normale hervorgebracht werden können. Es entsprechen dann den Vektoren $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ die Vektoren $m_1 \mathfrak{t}'_1, m_2 \mathfrak{t}'_2$ (wobei jeder der „Hauptmaßstäbe“ m_i ($i = 1, 2$) grundsätzlich auch negativ sein kann). Es sei $\mathfrak{t}_1 \times \mathfrak{t}_2 = \mathfrak{c}$. Der Winkel δ , um den $\mathfrak{t}_1$ um die gerichtete Normale $\mathfrak{c}$ gedreht werden muß, um mit $\mathfrak{t}'_1$ zusammenzufallen, heiße der Verdrehungswinkel der Abbildung $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{y}$ an der betrachteten Stelle (der nur im Fall der indirekten Winkeltreue seinen eindeutigen Sinn verliert, vgl. S. 228); es gilt

$$(12) \quad \mathfrak{t}'_1 = \mathfrak{t}_1 \cos \delta + \mathfrak{t}_2 \sin \delta, \quad \mathfrak{t}'_2 = -\mathfrak{t}_1 \sin \delta + \mathfrak{t}_2 \cos \delta.$$

Wir denken uns nun solche Parameter p, q eingeführt, daß

$$(13) \quad \mathfrak{x}_p = \mathfrak{t}_1, \quad \mathfrak{x}_q = \mathfrak{t}_2, \quad \mathfrak{y}_p = m_1 \mathfrak{t}'_1, \quad \mathfrak{y}_q = m_2 \mathfrak{t}'_2$$

wird; dann wird

$$(14) \quad \begin{cases} \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{t}_1 \times \mathfrak{t}_2 = \mathfrak{c}, & \mathfrak{S}_2 = m_1 m_2 \mathfrak{t}'_1 \times \mathfrak{t}'_2 = m_1 m_2 \mathfrak{c}, \\ \mathfrak{S} = \mathfrak{t}_1 \times m_2 \mathfrak{t}_2 \cos \delta - \mathfrak{t}_2 \times m_1 \mathfrak{t}_1 \cos \delta = (m_1 + m_2) \cos \delta \cdot \mathfrak{c} \\ J = -m_2 \sin \delta - m_1 \sin \delta = -(m_1 + m_2) \sin \delta \end{cases}$$

oder, nach Multiplikation mit W :

$$(15a) \quad m_1 m_2 \mathfrak{j}_1 = \mathfrak{j}_2,$$

⁷ A. a. O. S. 302 f.

$$(15b) \quad (m_1 + m_2) \cos \delta \cdot j_1 = j,$$

$$(15c) \quad (m_1 + m_2) \sin \delta \cdot W = -j.$$

Hieraus finden wir das sog. „Maß der Verdrehung“

$$(16) \quad \underline{\operatorname{tg} \delta = -j : j \cdot c = -J : \mathfrak{S} \mathfrak{S}_1};$$

weiter ergibt sich

$$\begin{aligned} m_1 m_2 &= j_1 j_2 : j_1^2 = \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2, \\ (m_1 + m_2)^2 &= (j^2 + j^2) : j_1^2 = \mathfrak{S}^2 + J^2. \end{aligned}$$

Dafür nun, daß die Abbildung $x \rightarrow y$ für das betrachtete Punktepaar (u, v) speziell winkeltreu mit Erhaltung des Drehsinnes sei, ist notwendig und hinreichend, daß gilt:

$$m_1 = m_2 = m \text{ oder } (m_1 + m_2)^2 - 4 m_1 m_2 = 0,$$

folglich

$$(17) \quad j^2 + j^2 - 4 j_1 j_2 = 0.$$

Unter dieser Bedingung allein ist im Falle $r = 1$ die Affinität $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ restlos durch die Invarianten j_1, j_2, j und J festgelegt; denn die Abbildung ist dann durch die Werte von m und δ bestimmt, die sich aus den Gleichungen

$$m \cos \delta = 1/2 \mathfrak{S} \mathfrak{S}_1, \quad m \sin \delta = -1/2 J$$

berechnen lassen, wobei es für die Ähnlichkeit $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ gleichgültig ist, für welchen der beiden aus der Gleichung

$$m^2 = 1/4 (\mathfrak{S}^2 + J^2) = \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2$$

hervorgehenden Werte von m man sich entscheidet, weil der Übergang von m zu $-m$ für den durch m eindeutig bestimmten Winkel δ den Übergang von δ zu $\delta + 180^\circ$ bedeutet. Wie wir sehen, ist die Abbildung, falls die Bedingungen $r = 1$ und (17) erfüllt sind, sogar schon durch die Werte von $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}$ und J räumlich festgelegt, wobei es, da $\mathfrak{S}_1$ einer der beiden Einheitsvektoren $\perp \varepsilon$ ist, nur auf die Richtung von $\mathfrak{S}_1$, d. h. auf das Vorzeichen von $\mathfrak{S} \mathfrak{S}_1$ ankommt; die Abbildung ist eine Drehstreckung mit dem Drehwinkel δ und dem Streckungsverhältnis m .

Ist aber (17) nicht erfüllt, so können, wie oben schon hervorgehoben, die Invarianten $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}, J$ die Abbildung $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ nicht festlegen, wenigstens nicht räumlich. Wir müssen also noch weitere Invarianten bilden.

Da dies besonders einfach durchzuführen ist, wenn indirekte Winkeltreue vorliegt, so mag dieser Sonderfall zuerst erledigt werden:

Hier muß unter den für den Fall c) $r = 1$ gemachten, allgemeinen Voraussetzungen sein:

$$m_1 = -m_2,$$

wobei die Bezeichnung so gewählt sei, daß $m_1 > 0$ ist; wegen (15b) und (15c) gilt also

$$(18) \quad \mathfrak{J} = 0 \quad \text{und} \quad J = 0,$$

ferner

$$m_1 = \left| \sqrt{-\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2} \right|.$$

Dieses Ergebnis steht im Einklang mit der Tatsache, daß im Falle der Ähnlichkeit mit Umkehrung des Drehsinnes, und nur in diesem Fall, der Begriff des Verdrehungswinkels und damit der des Verdrehungsmaßes (vgl. (16)) seinen Sinn verliert, wie geometrisch unmittelbar einleuchtet, da hier jedes Paar senkrechter Tangentenrichtungen als Paar von Hauptrichtungen angesehen werden kann, diese Richtungen aber mit den ihnen entsprechenden jeden Winkel bilden können. Die Abbildung ist auffaßbar als Spiegelung an einer Achse verbunden mit einer Streckung im Maßstab m_1 ; die Richtung der Spiegelachse, die also die Halbierende des Winkels zweier beliebiger, einander entsprechender Berührvektoren $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{y}_u$ sein muß, kann aber leicht aus diesen Vektoren hergeleitet werden: Da $m_1 \mathfrak{x}_u$ die gleiche Länge wie $\mathfrak{y}_u$ hat, so muß der Vektor $m_1 \mathfrak{x}_u + \mathfrak{y}_u$ in die Richtung der Symmetrieachse weisen. Man kann dies noch etwas genauer weiter verfolgen: weil hier dem Vektor $\mathfrak{y}_u$ der Vektor $m_1^2 \mathfrak{x}_u$ entsprechen muß, so entspricht dem Vektor $m_1 \mathfrak{x}_u + \mathfrak{y}_u$ der Vektor $m_1 \mathfrak{y}_u + m_1^2 \mathfrak{x}_u = m_1 (m_1 \mathfrak{x}_u + \mathfrak{y}_u)$; ebenso findet man, daß dem Vektor $m_2 \mathfrak{x}_u + \mathfrak{y}_u$ der Bildvektor $m_2 \mathfrak{y}_u + m_2^2 \mathfrak{x}_u = m_2 (m_2 \mathfrak{x}_u + \mathfrak{y}_u)$ zugehört, der wegen $m_2 < 0$ zu $m_2 \mathfrak{x}_u + \mathfrak{y}_u$ entgegengesetzt gerichtet, mithin zur Spiegelachse senkrecht ist. $m_1 \mathfrak{x}_u + \mathfrak{y}_u$ und $m_2 \mathfrak{x}_u + \mathfrak{y}_u$ sind also die beiden, im vorliegenden Fall orthogonalen Fixrichtungen, und zwar die erste die mit Erhaltung des Richtungsinnes, die zweite die mit Umkehrung des Sinnes; die Fixrichtungen fallen hier mit Hauptrichtungen

zusammen. Es muß beachtet werden, daß sowohl $m_1 \mathbf{r}_u + \mathbf{y}_u$ als auch $m_2 \mathbf{r}_u + \mathbf{y}_u$ der Nullvektor sein kann, wenn nämlich $\mathbf{r}_u$ schon in eine Fixrichtung zeigt; jedoch können nie beide Vektoren zugleich verschwinden, weil sonst $(m_1 - m_2) \cdot \mathbf{r}_u = 0$ sein müßte, was wegen $m_1 - m_2 \neq 0$ und $\mathbf{r}_u \neq 0$ unmöglich ist.

Übrigens muß noch betont werden, daß im allgemeinen nur die Richtung des Vektors $m_1 \mathbf{r}_u + \mathbf{y}_u$, nicht aber seine Länge invariant gegenüber Γ ist; der Einheitsvektor

(19) $(\sqrt{-\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2} \cdot \mathbf{r}_u + \mathbf{y}_u) : \sqrt{\mathbf{y}_u^2 + 2 \sqrt{-\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2} \cdot \mathbf{r}_u \mathbf{y}_u - \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \cdot \mathbf{r}_u^2}$
ist jedoch in unserem Sonderfall (18) eine Invariante.

Nun bleibt nur noch der „allgemeine Fall“ zu untersuchen, in dem gilt:

$\mathbf{j}_1 \times \mathbf{j}_2 = 0$ u. zugleich sowohl $\mathbf{j}^2 + \mathbf{j}^2 - 4 \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_2 \neq 0$ als auch $\mathbf{j}^2 + \mathbf{j}^2 \neq 0$.

Wir könnten uns auch hier die Aufgabe stellen, die Fixrichtungen zu bestimmen; jedoch sind diese nicht immer reell. Deshalb wollen wir lieber die Hauptrichtungen suchen; dies soll auf eine Weise geschehen, die auch in dem Falle $\mathbf{j}_1 \mathbf{j}_2 \neq 0$ gültig ist: Der Abbildungsmaßstab m für die Richtung $\mathbf{r}_u + \mathbf{z} \mathbf{r}_v$ ergibt sich aus der Beziehung

$$m^2 = (\mathbf{y}_u + \mathbf{z} \mathbf{y}_v)^2 : (\mathbf{r}_u + \mathbf{z} \mathbf{r}_v)^2 = \\ (E' + 2 F' \mathbf{z} + G' \mathbf{z}^2) : (E + 2 F \mathbf{z} + G \mathbf{z}^2)$$

oder

$$m^2 E - E' + 2 (m^2 F - F') \mathbf{z} + (m^2 G - G') \mathbf{z}^2 = 0,$$

wo E, F, G, E', F', G' , die Fundamentalgrößen 1. O. der Flächen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ sind. Aus der hieraus fließenden Gleichung

$$m \frac{\partial m}{\partial \mathbf{z}} (E + 2 F \mathbf{z} + G \mathbf{z}^2) + (m^2 F - F') + (m^2 G - G') \mathbf{z} = 0$$

ergibt sich für die Werte $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1$ und $\mathbf{z} = \mathbf{z}_2$, die die Hauptrichtungen liefern, und für die „Hauptmaßstäbe“ m_1 und m_2 , die Extremwerte von m bei konstantem u und v und variablem $\mathbf{z}$, wegen $\frac{\partial m}{\partial \mathbf{z}} = 0$ folgender Zusammenhang:⁸

$$m_i^2 F - F' + (m_i^2 G - G') \mathbf{z}_i = 0 \quad (i = 1, 2).$$

⁸ A. a. O. S. 305, Gleichung (13).

Daher stellt

$$r_u (m_i^2 G - G') - r_v (m_i^2 F - F')$$

die Hauptrichtungen in ε und

$$\eta_u (m_i^2 G - G') - \eta_v (m_i^2 F - F')$$

die entsprechenden Hauptrichtungen in ε' dar. Zunächst formen wir diese Vektoren um: Der erste ist

$$\begin{aligned} &= m_i^2 (r_u \cdot r_v^2 - r_v \cdot r_u r_v) - (r_u \cdot \eta_v^2 - r_v \cdot \eta_u \eta_v) \\ &= m_i^2 (r_v \times r_u \times r_v) - (\eta_v \times r_u \times \eta_v - \eta_u \times (r_v \times \eta_v) + \eta_v \cdot (r_u \eta_v - r_v \eta_u)) \\ &= m_i^2 (r_v \times j_1) - \eta_v \times (r_u \times \eta_v) - r_v \times (\eta_v \times \eta_u) - \eta_v \times (\eta_u \times r_v) - \eta_v \cdot j^9 \\ (20) \quad &= r_v \times (m_i^2 j_1 + j_2) - \eta_v \times j - \eta_v \cdot j. \end{aligned}$$

Ebenso finden wir den zugeordneten Vektor

$$- \eta_v \times (m_i^2 j_1 + j_2) + m_i^2 r_v \times j - m_i^2 r_v \cdot j.$$

Man kann auch noch andere Ausdrücke für die Hauptvektoren aufstellen, etwa dadurch, daß man von der Beziehung

$$m_i^2 E - E' + (m_i^2 F - F') x_i = 0$$

ausgeht;¹⁰ man findet so den Vektor, der aus (20) formal dadurch hervorgeht, daß in den drei Indizes v durch u ersetzt wird. Dies muß man wissen, um leicht den direkten Invarianzbeweis für die Richtung des Vektors (20) führen zu können.

d) Daß r mindestens den Wert 1 haben muß, ergibt sich aus der Voraussetzung der Regularität der Koordinatensysteme auf den beiden Flächen r und η , die wir durchweg zugrunde gelegt haben, gemäß der $j_1 \neq 0$ und $j_2 \neq 0$ sein muß.

4. Bestimmung der Hauptelemente

Wir möchten nun aber auch m_1 und m_2 aus den Invarianten berechnen; dazu wenden wir, wenn die Berührebenen ε und ε' nicht schon von vornherein parallel sind, einen Kunstgriff an: Wir bringen durch eine Bewegung im Raum die zweite Fläche in eine Lage η' , in der die ε entsprechende Berührebene mit ε

⁹ Nach der auf die Vektoren η_u, η_v, η_v angewandten „Vertauschungsformel“.

¹⁰ A. a. O. S. 305, Gleichungen (14a) und (13).

zusammenfällt. Für die Invarianten der Flächen in ihrer neuen, speziellen Lage, die wir mit Querstrichen bezeichnen wollen, gelten dann die Gleichungen (15) oder

$$m_1 m_2 = \bar{j}_1 \bar{j}_2 : \bar{j}_1^2, \\ m_1^2 + m_2^2 = (\bar{j}^2 + \bar{j}^2 - 2 \bar{j}_1 \bar{j}_2) : \bar{j}_1^2.$$

Den letzten Ausdruck können wir auf die Form bringen:

$$\begin{aligned} & ((x_u \times y'_v - x_v \times y'_u)^2 + (x_u y'_v - x_v y'_u)^2 - 2 (x_u \times x_v) (y'_u \times y'_v)) : (x_u \times x_v)^2 \\ &= (x_u^2 y_v'^2 - (x_u y'_v)^2 - 2 x_u x_v \cdot y'_u y'_v + 2 x_u y'_u \cdot x_v y'_v + x_v^2 y_u'^2 - (x_v y'_u)^2 \\ &+ (x_u y'_v)^2 - 2 x_u y'_v \cdot x_v y'_u + (x_v y'_u)^2 - 2 x_u y'_u \cdot x_v y'_v + 2 x_u y'_v \cdot x_v y'_u) : \\ & \quad : (x_u^2 x_v^2 - (x_u x_v)^2), \end{aligned}$$

also schließlich

$$m_1^2 + m_2^2 = (EG' - 2FF' + GE') : (EG - F^2);$$

denn die Fundamentalgrößen einer Fläche sind invariant gegenüber der Gruppe der Bewegungen des Raumes, so daß die Fläche y' dieselben Fundamentalgrößen 1. O. E', F', G' hat wie die ursprüngliche y .

Nun bemerken wir aber, daß wir bei der Umformung des Ausdrucks für $m_1^2 + m_2^2$, d. h. bei der Umrechnung des zunächst aus den Invarianten $\bar{j}_1, \bar{j}_2, \bar{j}, \bar{j}$ gebildeten Ausdrucks in den nur die Fundamentalgrößen enthaltenden, die gegenseitige Lage der beiden Flächen gar nicht zu berücksichtigen brauchten; diese Rechnung hätte, wenn wir von derselben Funktion der für die ursprüngliche, beliebige Lage der Flächen geltenden Invarianten, d. h. von $(j^2 + j^2 - 2 j_1 j_2) : j_1^2$, ausgegangen wären, zu demselben Ausdruck für $m_1^2 + m_2^2$ in den Fundamentalgrößen 1. O. geführt. Folglich gilt allgemein:

$$(21a) \quad m_1^2 + m_2^2 = (j^2 + j^2 - 2 j_1 j_2) : j_1^2 = \mathfrak{J}^2 + J^2 - 2 \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2.$$

Diese invariante Funktion ist also sogar von der absoluten und von der relativen Lage der beiden Flächen x und y unabhängig.

Analog finden wir durch Quadrieren der Beziehung (15a):

$$\begin{aligned} m_1^2 m_2^2 &= \bar{j}_2^2 : \bar{j}_1^2 = (y'_u \times y'_v)^2 : (x_u \times x_v)^2 = (y_u'^2 y_v'^2 - (y'_u y'_v)^2) : (x_u^2 x_v^2 - (x_u x_v)^2) \\ &= (E' G' - F'^2) : (E G - F^2), \end{aligned}$$

mithin

$$(21\text{ b}) \quad m_1^2 m_2^2 = j_2^2 : j_1^2 = \mathfrak{S}_2^2.$$

m_1^2 und m_2^2 sind also die Wurzeln der unter allen Umständen gültigen Gleichung

$$(22) \quad j_1^2 \cdot m^4 - (j^2 + j^2 - 2 j_1 j_2) \cdot m^2 + j_2^2 = 0.$$

Setzen wir die hieraus berechneten Werte von m_i^2 in (20) ein, so erhalten wir Vektoren, deren Richtungen im weiteren Sinn gegenüber Γ invariant sind.

In den Fällen a) $r = 3$ und b) $r = 2$ aber muß es möglich sein, die Hauptrichtungen nur durch die vier Invarianten j_1, j_2, j, j auszudrücken, wobei allerdings das Auftreten von Irrationalitäten zu erwarten ist. In der Tat erhalten wir diese Vektoren sofort, wenn wir die Vektoren (8) bzw. (11) statt r_u, r_v, y_u, y_v in (20) einsetzen.

5. Verzerrungsmaße

Das durch den Ausdruck $V = \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{2 m_1 m_2} \right)^2$ definierte „Verzerrungsmaß“ wird nach (22)

$$= (j^2 + j^2 - 2 j_1 j_2)^2 : 4 j_1^2 j_2^2 - 1,$$

also

$$(23) \quad V = ((j^2 + j^2)^2 - 4 j_1 j_2 \cdot (j^2 + j^2) - 4 (j_1 \times j_2)^2) : 4 j_1^2 j_2^2.$$

Der Dividend auf der rechten Seite ist im wesentlichen die Diskriminante der Gleichung (22). Im reellen Bezirk ist das Verschwinden von V notwendig und hinreichend für das Vorliegen von Winkeltreue; diese Bedingung ist gleichbedeutend mit der in der üblichen Weise aus (8) herzuleitenden:

$$(j \times j_1)^2 : (j_1 \times j_2)(j \times j_1) : (j_1 \times j_2)^2 = (j_1 \times j_2)^2 : (j_1 \times j_2)(j_2 \times j) : (j_2 \times j)^2,$$

die freilich in Sonderfällen versagen kann, während (23) allgemein gilt.

Für das im Falle $j_1 \times j_2 = 0$ wertvollere¹¹ „modifizierte Verzerrungsmaß“ $V' = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} \right)$ finden wir aus (22) und (15a)

¹¹ Vgl. Nr. 16 der Arbeit, auf die in Fußnote 2 hingewiesen wurde.

$$(23') \quad V' = (j^2 + j'^2 - 2j_1 j_2) : 2j_1 j_2;$$

natürlich ist V' auch sinnvoll, wenn ε und ε' nicht parallel sind, jedoch ist dann der an die Stelle von $2j_1 j_2$ tretende Nenner $2WW' = 2\sqrt{j_1^2 j_2^2}$ nicht rational.

6. Deutung von j

Es möge noch einiges über die geometrische Bedeutung des Vektors j und seines Verschwindens gesagt werden.

Wenn $j \neq 0$ und $j_1 \times j_2 \neq 0$ ist, so schneidet eine zu j senkrechte Ebene aus ε und ε' Richtungen aus, denen vermöge der Abbildung $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ bzw. $\varepsilon' \rightarrow \varepsilon$ die Schnittrichtung der Ebenen ε und ε' entspricht; dies geht im Falle $r = 3$ aus der ersten und letzten der Gleichungen (7) hervor (noch unmittelbarer aus der einige Zeilen weiter oben stehenden Beziehung $Dj = r_p \times v_q$), gilt aber in trivialer Weise auch im Falle $r = 2$ (s. S. 223 f.).

Wenn $j = 0$ ist, muß zunächst (wie auch schon aus den Betrachtungen gegen Schluß von 3 a, S. 223 zu schließen wäre) $j_1 \times j_2 = 0$ sein. Denn aus $r_u \times v_v = r_v \times v_u$ folgt, wenn diese vektoriellen Produkte verschwinden, daß $r_u \parallel v_v$ und $r_v \parallel v_u$ ist, wenn aber die Vektorprodukte $\neq 0$ sind, daß sowohl r_u und v_v (wegen $r_u \times v_v = 0$) als auch r_v und v_u (wegen $r_v \times v_u = 0$) senkrecht zu v sind. Sooft nun r_p ein Vektor ist, der seinem entsprechenden Vektor v_p nicht parallel ist, kann $v_q = r_p$ gewählt werden; dann aber ist aus $r_p \times v_q = 0 = r_q \times v_p$ zu schließen, daß auch $v_p \parallel r_q$ ist, daß also der r_p entsprechenden Richtung $v_p \parallel r_q$ vermöge $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ wieder die ursprüngliche Richtung $\pm v_q = \pm r_p$ entspricht, und umgekehrt ist, wenn dies der Fall ist, $j = 0$. Gibt es aber keinen Vektor r_p , der zu seinem entsprechenden v_p nicht parallel wäre, so ist die Affinität $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ eine reine Streckung, und man leitet aus $v_p = \lambda r_p$, $v_q = \lambda r_q$ ab: $j = 2j_1 \neq 0$. Hieraus folgt der Satz:

Das Verschwinden von j ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Berührebenen ε und ε' zueinander parallel sind und zudem die Projektivität zwischen den Berührenden in ε und denen in ε' involutorisch ist; dabei wird, wie üblich, die Identität nicht zu den Involutionen gerechnet.

Es braucht kaum betont zu werden, daß die Affinität $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ selbst nicht involutorisch zu sein braucht.

Mit Hilfe der Gleichung (15b) kann man noch folgende Deutung der Beziehung $j = 0$ finden: es muß $(m_1 + m_2) \cos \delta = 0$ sein, d. h. die Abbildung hat entweder unendliches Verdrehungsmaß, so daß die Hauptrichtungen untereinander ausgetauscht werden, oder sie ist indirekt winkeltreu.

Ist $j \equiv 0$, so sind ε und ε' — in der Sprechweise der „relativen Differentialgeometrie“ — relative Minimalflächen.¹²

7. Deutung von $j = 0$

Es werde der Skalar j als verschwindend angenommen: Dann sei zunächst $\mathbf{r}_p$ ein beliebiger Vektor in ε , dessen entsprechender Vektor $\mathbf{y}_p$ nicht senkrecht zu $\mathbf{r}_p$ ist, so daß einer der sicher existierenden, zu $\mathbf{r}_p$ orthogonalen Vektoren in ε' als Vektor $\mathbf{y}_q$ gewählt werden kann. Dann folgt aus $\mathbf{r}_p \mathbf{y}_q = 0 = \mathbf{r}_q \mathbf{y}_p$, daß auch der $\mathbf{y}_q$ vermöge $\varepsilon' \rightarrow \varepsilon$ entsprechende Vektor $\mathbf{r}_q$ senkrecht zu dem durch $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ dem Vektor $\mathbf{r}_p$ zugeordneten Vektor $\mathbf{y}_p$ ist. Entspricht aber jedem Vektor $\mathbf{r}_p$ ein lotrechter Vektor $\mathbf{y}_p$, so ist, wie wir bald (in der folgenden Nr. 8) sehen werden, stets $j \neq 0$. Hiernach gilt der Satz:

Das Verschwinden von j ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jedem Paar senkrechter Vektoren, von denen der eine in ε , der andere in ε' angehört, vermöge der Affinität $\varepsilon \rightleftharpoons \varepsilon'$ ein Paar von ebenfalls senkrechten Vektoren entspricht, von denen der eine in ε' , der andere in ε liegt; dabei ist der Fall auszunehmen, daß jeder Richtung in ε eine zu ihr orthogonale in ε' zugeordnet ist.

Es ist interessant, dieses allgemeine Ergebnis noch in verschiedenen Sonderfällen im einzelnen zu betrachten:

¹² Siehe E. Müller, Relative Minimalflächen, Mon. hefte f. Math. u. Phys., Bd. 31 (1921), S. 3 ff., und A. Duschek, Über relative Flächentheorie, Sitz.ber. d. Ak. d. Wiss. in Wien, Math.-nat. Kl., Abt. IIa, Bd. 135 (1926), S. 6, Gleichung (14).

Ist $j_1 \times j_2 \neq 0$, jedoch $j_1 j_2 j = 0$, so entspricht, wie wir früher (vgl. S. 222 ff.) sahen, die den beiden Berührebenen gemeinsame Gerade sich selbst; daher muß, wenn $j = 0$, der zur Schnittrichtung $j_1 \times j_2$ senkrechten Tangente in ε die zu $j_1 \times j_2$ lotrechte Tangente in ε' entsprechen, oder mit anderen Worten: Die Schnittrichtung von ε und ε' ist nicht nur Fixrichtung, sondern auch Hauptrichtung. (Vgl. (11a) und (11b).)

Sind ε und ε' aufeinander senkrecht, ist also $j_1 j_2 = 0$, so genügt es, damit $j = 0$ wird, daß die zu ε senkrechte Tangente in ε' der zu ε' senkrechten Tangente in ε entspricht.

Sind ε und ε' parallel, ist also $j_1 \times j_2 = 0$, so schließen wir aus (15c) und $j = 0$, daß entweder die Verdrehung verschwindet oder die Abbildung eine indirekte Ähnlichkeit ist; auf jeden Fall gilt dann: Die Fixrichtungen sind Hauptrichtungen, oder, anders ausgedrückt, der Affinor $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ ist symmetrisch.

8. Entsprechen durch Orthogonalität der Linienelemente

Wie verhält es sich aber mit der soeben ausgeschlossenen Möglichkeit, daß jedem Vektor x_p ein zu ihm senkrechter Vektor y_p entspricht?

Untersuchen wir zunächst den Fall $r = 3$: Es wird dann speziell die Schnittrichtung von ε und ε' der zu ihr senkrechten Richtung von ε , ferner die zur Schnittrichtung senkrechte Richtung von ε' dieser zugeordnet, oder, kürzer ausgedrückt: Die Schnittrichtung ist eine Hauptrichtung. Nach dem am Anfang von Abschnitt 6 Gesagten muß j auf den der Schnittrichtung entsprechenden Richtungen senkrecht stehen, hier also in die Schnittrichtung fallen; die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist aber:

$$j_1 j = j j_2 = 0.$$

Da nach (8) dem Vektor $\xi j_1 \times j + \eta j_1 \times j_2$ der Vektor $\xi j_1 \times j_2 + \eta j \times j_2$ entsprechen muß, und zwar für alle Werte von ξ und η , so ist notwendig und hinreichend dafür, daß sich die

Flächen r und y in dem Punkt (u, v) , wie man sagt, „durch Orthogonalität der Linienelemente“ entsprechen, daß gilt:

$$(\xi j_1 \times j + \eta j_1 \times j_2) (\xi j_1 \times j_2 + \eta j \times j_2) = 0$$

oder

$$\xi^2 \cdot j(j_1 \times j_2 \times j_1) + \xi \eta \cdot ((j_1 \times j)(j \times j_2) + (j_1 \times j_2)^2) + \eta^2 \cdot j(j_2 \times j_1 \times j_2) \equiv 0.$$

Da, wie man leicht sieht, die Koeffizienten von ξ^2 und η^2 schon infolge des Verschwindens von $j_1 j$ und $j j_2$ null werden, so tritt zu diesen Bedingungen nur noch die folgende:

$$j_1(j \times j_2 \times j) = (j_1 \times j_2)^2.$$

Wir erhalten also für das Entsprechen durch orthogonale Linienelemente im Falle $r = 3$ die drei charakteristischen Bedingungsgleichungen:

$$(24) \quad j_1 j = 0, \quad j j_2 = 0, \quad j^2 \cdot j_1 j_2 = (j_1 \times j_2)^2.$$

Da wegen (9) hier $j \cdot j_1 j_2 j = 2 (j_1 \times j_2)^2$ ist, so kann j nicht verschwinden.

Wenn $r = 2$, so entspricht gewiß nicht jeder Richtung von ε eine zu ihr lotrechte von ε' , da ja dann die Schnittrichtung von ε und ε' Fixrichtung ist, wie wir am Anfang von 3, b) (S. 223) sahen.

Ist aber $r = 1$, so muß eine Drehstreckung mit dem Drehwinkel $\delta = \pm 90^\circ$ vorliegen; die notwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür sind nach (15) und (17):

$$(24') \quad j = 0 \text{ und } j^2 = 4 j_1 j_2,$$

woraus mit Rücksicht auf $j_1 j_2 = m_1 m_2 j_1^2 \neq 0$ wiederum folgt: $j \neq 0$. Übrigens fließt (24) rein rechnerisch aus (24'), nicht aber umgekehrt etwa auch (24') aus (24) im Verein mit $j_1 \times j_2 = 0$.

Zur Vervollständigung des zu Beginn dieser Nr. Gesagten kann man sich noch folgendes überlegen: Sind nur die beiden ersten der Gleichungen (24) erfüllt, die dritte nicht, so bedeutet das, daß die Ebenen ε und ε' nicht parallel sind und ihre Schnittrichtung für jede dieser Ebenen eine Hauptrichtung ist, ohne Fixrichtung zu sein.

Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß es auch dyadische Invarianten gibt; von diesen sei hier nur der durch die Gleichung

$$j_1^2 \cdot A = \eta_u \cdot r_v \times j_1 + \eta_v \cdot j_1 \times r_u$$

definierte Affinor A genannt. A ist nicht der einfachste Affinor seiner Art; er stellt aber, da

$$A r_u = \eta_u, \quad A r_v = \eta_v$$

ist, die Affinität $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ am unmittelbarsten dar. A führt, weil $A c = 0$ ist, jeden aus ε herausragenden Vektor v in einen zu ε' parallelen Vektor v' über, und zwar in den, der dem Riß von v in ε , $c \times v \times c$, entspricht. Die Invarianten j_1, j_2, j, j' können auch im Zusammenhang mit A studiert werden.