Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1919. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1919
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgetragen in der Sitzung am 8. Februar 1919.

In der letzten Arbeit[1]) war darauf verwiesen worden, daß die Untersuchung von Frobenius „Über den gemischten Flächeninhalt zweier Ovale" (Berl. Ber. 28 (1915), S. 387—404) trotz des geometrischen Ausgangspunktes vom Verfasser nicht zu einem einfachen *geometrischen* Beweis für die isoperimetrische Haupteigenschaft des Kreises ausgebaut worden ist. Diese auffallende Lücke soll hier noch ausgefüllt werden.

Es ist zu zeigen, daß zwischen Umfang (L) und Inhalt (F) eines Ovals die Beziehung besteht

$$1)\quad L^2 - 4\pi F \geqq 0,$$

und daß das Gleichheitszeichen nur für den Kreis besteht.

Zu diesem Zweck hat man die *Parallelkurven* heranzuziehen. Trägt man auf den Normalen eines Ovals die Strecke t ab, so erhält man die Parallelkurven, für positives t die *äußeren*, für negatives die *inneren*. Inhalt und Umfang werden bekanntlich

$$L(t) = L + 2t\pi$$
$$F(t) = F + tL + t^2\pi.$$

Man sieht, daß $F(t)$ — selbstverständlich nur für innere Parallelkurven, also negative Werte von t — auch negativ werden kann, sobald die Ungleichheit (1) gilt.

Demnach ist, um die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises zu erweisen, nur zu entscheiden, ob jedes vom Kreis verschiedene Oval unter seinen (inneren) Parallelkurven auch solche mit

[1]) Integralinvarianten und isoperimetrische Probleme. Diese Berichte 1918, S. 489—505. Man vgl. besonders die Anmerkung S. 492/93.

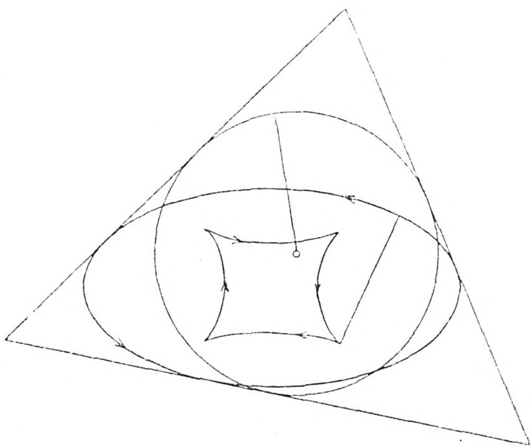
negativem Inhalt besitzt. Diese Frage findet nun ihre Antwort in dem folgenden Satz:

Zieht man zu einer Eilinie die (innere) Parallelkurve, indem man auf den Normalen die Strecke

$$t = -\varrho^*$$

abträgt, wobei ϱ^* der Radius des Inkreises irgend eines Kappendreiecks, d. h. eines die Kurve umschließenden Tangentendreiecks ist, so ist $F(-\varrho^*) \leqq 0$.

Das Gleichheitszeichen gilt nur in dem trivialen Fall, wenn nämlich die Eilinie ein Kreis ist.



(Vgl. die Figur, die den Satz für das Beispiel der Ellipse erläutert.)

Man kann diesen Satz unter Verwendung des Grundgedankens von Frobenius leicht beweisen, und zwar rein geometrisch.

In zwei parallelen Horizontalebenen sollen zwei Eilinien E und E' gegeben sein. Um E beschreiben wir ein Kappendreieck LMN, um E' das Kappendreieck $L'M'N'$, dessen Seiten den entsprechenden des ersten parallel sind. Die Pyramide, die man erhält, wenn man die Kanten LL', MM', NN' bis zu ihrem Schnittpunkt S verlängert, möge „Kappenpyramide" heißen.

Wir betrachten jetzt jedes Oval als *Kernfigur*, die übrig bleibt, wenn man vom Kappendreieck eine unbegrenzte Folge von *Restdreiecken* nach bestimmtem Gesetz abschneidet. Diese

Restdreiecke sind sämtlich den Ovalen anbeschrieben; man erhält k_1 (und k_1'), wenn man an E und E' die Tangente legt, die auf der inneren Halbierungslinie des Winkels NLM (und $N'L'M'$) senkrecht steht; entsprechend an den Ecken M (und M'), N (und N') die Restdreiecke k_2 (und k_2') bzw. k_3 (und k_3'). Schneidet man diese drei Paare von Restdreiecken ab, so bleiben als Kerne zwei Tangentensechsecke von E und E' mit entsprechend parallelen Seiten. Nach demselben Gesetz, also mit Benützung von Tangenten, die den Halbierungslinien der Außenwinkel der übrig gebliebenen Kernsechsecke parallel sind, schneidet man dann sechs Restdreiecke $k_3 \ldots k_9$, $k_3' \ldots k_9'$ ab, dann weitere zwölf usw.

Auf diese Weise erhält man die beiden Ovale als Kerne, die übrig bleiben, wenn von den Kappendreiecken eine unbegrenzte Folge von Restdreiecken

$$\begin{array}{l} k_1,\ k_2,\ k_3\ \ldots\ k_r\ \ldots \\ k_1',\ k_2',\ k_3'\ \ldots\ k_r'\ \ldots \end{array}$$

abgeschnitten ist. Dabei haben zufolge der Konstruktion selbst die Dreieckspaare $k_r\, k_r'$ entsprechend gleichsinnig parallele Seiten, liegen also paarweise perspektivisch.

Nunmehr betrachten wir die Hüllfläche der gemeinsamen Tangentialebenen beider Ovale, wobei die Tangentialebenen selbstverständlich so zu legen sind, daß E und E' beide auf derselben Seite liegen. Diese Hüllfläche ist eine abwickelbare Fläche, deren zwischen E und E' gelegener Teil wohl als „Huf“ bezeichnet werden kann. Unter den Tangentialebenen wollen wir die Folge der bei der Konstruktion der Restdreiecke auftretenden besonders hervorheben.

Man sieht unmittelbar, daß jeder Horizontalschnitt der Hüllfläche wieder aufzufassen ist als Differenz eines Kappendreiecks $L(h)$, $M(h)$, $N(h)$, das zu LMN und $L'M'N'$ perspektivisch liegt und einer Reihe von Restdreiecken $k_1(h)$, $k_2(h) \ldots$, $k_r(h) \ldots$, die zu $k_1 k_1'$, $k_2 k_2' \ldots k_r k_r'$ perspektivisch liegen; h soll dabei die Höhe des Horizontalschnittes etwa über der Ebene des Ovals E bedeuten.

Wir betrachten jetzt den Horizontalschnitt durch die Spitze S der Kappenpyramide.

Sein Inhalt ist die Differenz des Kappendreiecks $L^* M^* N^*$, das aber in einen Punkt zusammenschrumpft, eben den Punkt S und einer Folge von Dreiecken k_1^*, $k_2^* \ldots$, $k_r^* \ldots$, also *negativ*, wenn nicht *alle* k_r^* den Inhalt Null haben, also auch in Punkte zusammenschrumpfen. Das tritt für k_1^*, k_2^*, k_3^* nur ein, wenn S auch das Perspektivitätszentrum der Paare $k_1 k_1'$, $k_2 k_2'$, $k_3 k_3'$ ist. Damit dann auch k_4^*, $k_5^* \ldots$, k_9^* sämtlich Null sind, muß S auch das Perspektivitätszentrum der Paare $k_4 k_4' \ldots$, $k_9 k_9'$ sein.

Die unbeschränkte Fortsetzung dieses Schlußverfahrens zeigt, daß folgende Alternative besteht: *Entweder hat unsere abwickelbare Fläche auch Querschnitte mit negativem Inhalt* (nämlich z. B. den Horizontalschnitt, dessen Ebene durch die Spitze einer Kappenpyramide geht) *oder die beiden Ovale liegen perspektivisch.*

Dies ist jetzt auf einen besonderen Fall anzuwenden. E sei das gegebene Oval, E' in einer Horizontalebene, die unterhalb der von E liegt, der Schnitt einer durch E gelegten Böschungsfläche von 45^0 Neigung. Wenden wir hier die Konstruktion an, so erhalten wir eben die Böschungsfläche wieder, und ihre Horizontalschnitte ergeben, senkrecht auf die Ebene von E projiziert, die Parallelkurven von E. Den oberen Schnitten entsprechen *innere*, den unteren *äußere* Parallelkurven. Demgemäß hat E entweder innere Parallelkurven mit negativem Inhalt, und dann ist
$$L^2 - 4\pi F > 0$$
oder die innere Parallelkurve, deren Abstand gleich der Höhe der Kappenpyramide ist, reduziert sich auf einen Punkt, und dann ist E ein Kreis. Die Höhe der Kappenpyramide ist, weil ihre Seitenflächen unter 45^0 gegen die Grundebene geneigt sind, gleich dem Radius ϱ^* des Inkreises des Kappendreiecks LMN.

Entweder also ist E ein Kreis, oder aber die innere Parallelkurve im Abstand ϱ^* hat negativen Inhalt. Damit ist der Beweis des vorangestellten Satzes und also auch der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises auf diesem Weg erbracht.