Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXIII. Jahrgang 1903.

München.
Verlag der K. Akademie.
1904.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Einige Sätze über die Potentiale von Doppelbelegungen.

Von **Arthur Korn.**

(*Eingelaufen 7. Februar.*)

Vor einiger Zeit habe ich die folgenden Sätze über die Potentiale von Doppelbelegungen aufgestellt:

I. Die Werte des über ein stetig gekrümmtes Flächenstück ω zu erstreckenden Integrales:

$$1) \qquad W = \int_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega,$$

in dem $\varkappa$ eine abteilungsweise stetige Funktion der Stelle $(\xi\,\eta\,\zeta)$ auf ω, r die Entfernung und Richtung von $d\omega\,(\xi\,\eta\,\zeta)$ nach einem variabeln Punkte $(x\,y\,z)$, ν die positive[1]) Normale von $d\omega$ vorstellt, auf der Fläche selbst:

$$2) \qquad W_\omega = \tfrac{1}{2}(W_+ + W_-)$$

haben die Eigenschaft, dass für zwei Punkte $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$3) \quad \text{abs.}\,[W_\omega(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - W_\omega(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)] < a \cdot \text{abs. Max.}\,(\varkappa) \cdot \sqrt{r_{12}},$$

wo a eine endliche Konstante vorstellt und abs. Max. $(\varkappa)$ den absolut grössten Wert, den $\varkappa$ auf ω annimmt.

---

[1]) Nach willkürlicher, aber ein für allemal bestimmter Festsetzung der positiven Seite von ω.

II. Die Werte des Flächenintegrales

$$W = \int_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

auf der Fläche selbst:

$$W_\omega = \tfrac{1}{2}(W_+ + W_-)$$

haben eindeutige und stetige, erste tangentiale Ableitungen, falls $\varkappa$ die Eigenschaft hat, dass für zwei Punkte $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ der Fläche ω in genügend kleiner Entfernung r_{12}

4) $$\text{abs.}\{\varkappa(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - \varkappa(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\} < a \cdot r_{12}^{1-\lambda},$$

wo a eine endliche Konstante, λ einen echten Bruch vorstellt.

III. Die Werte des Flächenintegrales:

$$W = \int_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

auf der Fläche selbst:

$$W_\omega = \tfrac{1}{2}(W_a + W_i)$$

haben, falls die ersten Abteilungen von $\varkappa$ auf ω abteilungsweise eindeutig und stetig sind, erste tangentiale Ableitungen, denen die folgende Eigenschaft zukommt:

Es ist für zwei Punkte $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}, wenn h eine in $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ oder $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ tangentiale Richtung vorstellt und die Fläche ω geschlossen ist:

5) $$\text{abs.}\left\{\left|\frac{\partial W_\omega}{\partial h}\right|_{(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)} - \left|\frac{\partial W_\omega}{\partial h}\right|_{(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)}\right\} < b \cdot \sqrt{r_{12}},$$

wo b eine endliche Konstante bedeutet.

Mit Hilfe dieser 3 Sätze[1]) und des aus einem bekannten Theoreme folgenden Resultates, dass die Ungleichungen 5) die Stetigkeit der ersten Abteilungen des Integrales

---

[1]) In der obigen Form habe ich die Sätze in meinen „Abhandlungen zur Potentialtheorie, Nr. 1 (Ferd. Dümmlers Verlag, Berlin 1901) ausgesprochen; der wesentliche Inhalt findet sich auch bereits in einer Note in den Comptes rendus, 130, p. 1238, 1900.

$$\int_{\omega} W_{\omega} \frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\, d\,\omega$$

in ganzer Erstreckung des Aussen- (Innen-)raumes von ω zur Folge haben,[1]) gelang es, die auf der Methode des arithmetischen Mittels beruhenden Existenzbeweise auf den allgemeinen Fall auszudehnen, dass die gegebenen Randwerte f in dem Dirichlet'schen Probleme lediglich als (abteilungsweise) eindeutige und stetige Funktionen der Stelle an der Fläche ω vorausgesetzt werden.

Es folgt nemlich successive, wenn man auf die Integrale:

$$\mathfrak{W}_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_{\omega} f \frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\, d\,\omega,$$

$$\mathfrak{W}_j = +\frac{1}{4\pi}\int_{\omega} (\mathfrak{W}_{j-1,a} + \mathfrak{W}_{j-1,i}) \frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\, d\,\omega \quad (j = 2, 3\,..)$$

die Sätze I—III anwendet, dass

$$\mathfrak{W}_{1\omega} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{W}_{1,a} + \mathfrak{W}_{1,i})$$

bei lediglich (abteilungsweise) eindeutig und stetig vorausgesetztem f bereits die Eigenschaft 3) besitzt, d. h. dass für 2 Punkte $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.}\,[\mathfrak{W}_{1\omega}(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - \mathfrak{W}_{1\omega}(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)] \leqq a \cdot \text{abs. Max.}\,(f) \cdot \sqrt{r_{12}},$$

hierauf, dass

$$\mathfrak{W}_{2\omega} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{W}_{2,a} + \mathfrak{W}_{2,i})$$

bereits eindeutige und stetige erste Abteilungen besitzt, hierauf, dass:

$$\mathfrak{W}_{3\omega} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{W}_{3,a} + \mathfrak{W}_{3,i})$$

bereits die Eigenschaft 5) haben wird, d. h. dass für 2 Punkte $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}, wenn h eine in $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ oder $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ tangentiale Richtung vorstellt:

$$\text{abs.}\left[\frac{\partial\,\mathfrak{W}_{3\omega}}{\partial\,h}(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - \frac{\partial\,\mathfrak{W}_{3\omega}}{\partial\,h}(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\right] \leqq b \cdot \sqrt{r_{12}}.$$

[1]) z. B. A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie I, p. 394.

Infolge hiervon hat

$$\mathfrak{W}_4 = \frac{1}{2\pi} \int_\omega \mathfrak{W}_{3\omega} \frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\, d\omega$$

in ganzer Erstreckung des Aussen- (Innen-)raumes eindeutige und stetige erste Abteilungen; dasselbe gilt dann natürlich auch für $\mathfrak{W}_5\,\mathfrak{W}_6 \ldots$.

Da es nun durch die Ausgestaltung von Methoden, deren Grundgedanken sich in zwei Abhandlungen Poincaré's[1]) finden, möglich geworden ist, das Dirichlet'sche Problem im Raume für geschlossene, stetig gekrümmte Flächen ω zu lösen,[2]) wenn die Randwerte f nur die Bedingung erfüllen, dass

$$\int_\omega f \frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\, d\omega$$

mit seinen ersten Ableitungen in ganzer Erstreckung des Innen- (Aussen-)raumes eindeutig und stetig ist, so war nach dem Obigen jedenfalls die Lösung des Problemes bei den Randwerten:

$$-\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{W}_{3\omega} = f - \mathfrak{W}_{1a} - \mathfrak{W}_{2a} - \mathfrak{W}_{3a}$$

resp.

$$+\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{W}_{3\omega} = f + \mathfrak{W}_{1i} - \mathfrak{W}_{2i} + \mathfrak{W}_{i3}$$

und somit auch bei den Randwerten f selbst gegeben, wenn man über f auch blos voraussetzt, dass es eine (abteilungsweise) eindeutige und stetige Funktion der Stelle von ω ist.

Durch die an die Spitze gestellten drei Sätze ist es überhaupt zum ersten Male möglich gewesen, den Existenzbeweis

---

[1]) H. Poincaré, la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet, Acta mathematica 1895 und Sur les équations de la physique mathématique, Rendiconti del Circolo Matematico, Palermo 1894.

[2]) In zweierlei Weise: 1) durch Lösung des Problemes für Flächen, die in bezug auf einen inneren Punkt konvex sind, und Hinzunahme der Schwarz'schen Methode des alternierenden Verfahrens (A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie I, p. 248 ff., Math. Ann. 1900, Abh. zur Potentialtheorie 1, und 2) durch einen direkten, allgemeinen Beweis der Neumann'schen Methode (Abh. zur Potentialtheorie 5, man vgl. auch W. Stekloff, Ann. de l'Ec. Norm. 1902), der sich auf einen Satz von Zaremba gründet. (S. Zaremba, Krak. Anz. 1901.)

für die Lösungen des Dirichlet'schen Problemes in dieser allgemeinen Form einwandsfrei zu geben.

In allerneuester Zeit hat nun Liapounoff in den Communications de la Société Mathématique de Kharkow (1902) eine Arbeit: Sur le principe fondamental de la méthode de Neumann dans le problème de Dirichlet veröffentlicht, in der er zeigt, dass man die Formel 3) des Satzes I durch die folgende ersetzen kann:

$$\text{abs.}\,[W_\omega(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - W_\omega(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)] < a \cdot \text{abs. Max.}\,(\varkappa) \cdot r_{12}^{a},$$

wo man für a irgend einen echten Bruch wählen kann, und dass bereits die Funktion:

$$\mathfrak{W}_3 = \frac{1}{2\pi}\int_\omega \mathfrak{W}_{2\omega}\frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\,d\,\omega$$

die (von mir erst für $\mathfrak{W}_4$ bewiesene) Eigenschaft hat, im Innen-(Aussen-)raum mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig zu sein, wenn f an ω lediglich (abteilungsweise) eindeutig und stetig ist.

Eine dieser Untersuchung hinzugefügte kritische Bemerkung über die von mir gegebenen Sätze I—III veranlasst mich, noch einmal auf die Beweise dieser Sätze einzugehen. Da dieselben eine grosse Analogie zu einer Anzahl ähnlicher Untersuchungen (in meinem Lehrbuch der Potentialtheorie) zeigen, hatte ich in diesen Beweisen (Abhandl. zur Potentialtheorie, 1, p. 5—8) eingehend nur die wirklich wesentlichen, neuen Schlussfolgerungen hervorgehoben, und es ist mir bisher kein Bedenken gegen die Strenge derselben bekannt geworden. Irgend welche Zweifel über den Sinn, in dem die Begriffe:

$$W_\omega, \quad W_+, \quad W_-,$$

die tangentialen Ableitungen von W_ω, W_+, W_- gebraucht werden, möchte ich durch die folgenden, etwas ausführlicheren Untersuchungen zerstreuen; diese Zweifel sind dadurch vielleicht möglich, dass diese Begriffe nicht von allen Autoren von vornherein in derselben Weise eingeführt werden, wenn sie in den Anwendungen schliesslich auch in demselben Sinne gebraucht werden.

Ich lege auf die Sätze I—III deshalb einen besonderen Wert, weil ihre Ableitung ziemlich elementar ist, während die Liapounoffschen Untersuchungen ausser den Anfangsgründen der Potentialtheorie noch manche Vorstudien voraussetzen, und für die Erreichung des Endzweckes ist es ziemlich gleichgültig, ob $\mathfrak{W}_3$ oder erst $\mathfrak{W}_4$ die erste Potentialfunktion[1]) der Neumannschen Reihe ist.

§ 1.

Beweis des Satzes I.

Bevor ich zu dem Beweise übergehe, will ich einige Festsetzungen über den Sinn, in welchem ich die in dem Satze vorkommenden Begriffe gebrauche, vorausschicken.

Was zunächst den Begriff des „stetig gekrümmten Flächenstückes" anlangt, so weicht die von mir stets zugrunde gelegte Definition von der anderer Autoren nur in dem einen Punkte ab, dass ich von den Richtungskosinussen der Normalen ν

$$\cos(\nu x),\ \cos(\nu y),\ \cos(\nu z)$$

neben der Eindeutigkeit und Stetigkeit verlange, dass ihre ersten Ableitungen im allgemeinen eindeutig und stetig (also endlich und integrabel) sein sollen.[2])

Eine zweite Bemerkung ist über den Gebrauch des Begriffes: „Werte des Integrales

$$\int_\omega \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

auf der Fläche" zu machen. Die Werte der Integrale von der Form:

$$I = \int_\omega \frac{f\{\cos(rx),\ \cos(ry),\ \cos(rz)\}}{r^j}\, d\omega$$

---

[1]) d. h. die erste Funktion, die mit ihren ersten Abteilungen in ganzer Erstreckung des Innen- (Aussen-)raumes eindeutig und stetig ist.

[2]) Man könnte die Definition für die Sätze I—III zwar noch etwas weiter fassen, doch ist die obige Definition für die ganze Potentialtheorie so bequem, dass ich auch hier nicht von ihr abgehen möchte.

haben für $j > 0$ auf der Fläche ohne eine besondere Festsetzung ebensowenig einen Sinn, wie das bestimmte Integral:

$$J = \int_{-a^2}^{+a^2} \frac{dx}{x^j}, \quad (j > 0).$$

Durch besondere Festsetzungen erhalten sie erst den gewöhnlich mit ihnen verbundenen Sinn. Durch die fundamentale Festsetzung:

6) $$\lim_{\varepsilon = 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{dx}{x^j} = 0, \quad (j < 1),$$

durch welche das Integral J für $j < 1$ den bestimmten Sinn eines „uneigentlichen Integrales“:

$$J = \lim_{\varepsilon = 0} \left[\int_{-a^2}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^j} + \int_{+\varepsilon}^{+a^2} \frac{dx}{x^j} \right]$$

erhält, wird auch den Flächenintegralen:

$$\int_{\omega} \frac{d\omega}{r^j}$$

für $j < 2$ der bestimmte Sinn von uneigentlichen Integralen:

$$\lim_{R = 0} \int_{\omega - \omega_0} \frac{d\omega}{r^j}$$

zuerteilt, wo ω_0 ein Flächenstück vorstellt, dessen Punkte von dem zu betrachtenden Punkte der Fläche Abstände $< R$ besitzen.

Die Formel:

7) $$\lim_{R = 0} \int_{\omega_0} \frac{d\omega}{r^j} = 0, \quad (j < 2)$$

lässt sich ja in der Tat — worauf wir hier wohl nicht mehr besonders einzugehen brauchen — als eine Folgerung der Festsetzung 6) beweisen.

Wir werden nun ganz allgemein den Wert jedes Integrales I auf der Fläche durch die Formel:

$$8) \qquad I = \lim_{R=0} \int_{\omega-\omega_0} \frac{f\{\cos(r\,x),\ \cos(r\,y),\ \cos(r\,z)\}}{r^j}\, d\,\omega$$

definieren können, sobald uns der Beweis der Formel:

$$9) \qquad \lim_{R=0} \int_{\omega_0} \frac{f\{\cos(r\,x),\ \cos(r\,y),\ \cos(r\,z)\}}{r^j}\, d\,\omega = 0$$

infolge von 7) möglich ist. Wir werden dann sagen, wir können das Integral I auf der Fläche als ein uneigentliches Integral betrachten.

Für das Integral:

$$W_\omega = \int_\omega \varkappa \frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\, d\,\omega$$

ergibt sich diese Möglichkeit leicht, weil wir in dem Gebiete ω_1 bei genügend kleinem R auf der Fläche:

$$10) \qquad \cos(r\,\nu) = r \cdot F$$

setzen können, wo F eine im allgemeinen eindeutige und stetige Funktion der Stelle auf ω_0 vorstellt.

Die Formel 2) dürfen wir wohl als bekannt voraussetzen, und es möge nun der Beweis des Satzes I folgen:

Es seien $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ zwei Punkte der Fläche und man schlage um den Mittelpunkt 0 der diese Punkte verbindenden Graden eine Kugel von dem Radius:

$$P = \sqrt{r_{12}},$$

(r_{12} die Entfernung der beiden gewählten Punkte). Bei genügend kleinem r_{12} zerlegt die Schnittkurve ς dieser Kugelfläche mit ω dieses Flächenstück in einen Teil ω_1, der $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ enthält, und einen Teil $\omega-\omega_1$, und man kann sowohl für $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ als auch für $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$

$$\int_{\omega_1} \varkappa \frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\, d\,\omega = \int_{\omega_1} \varkappa \cdot F \cdot \frac{d\,\omega}{r}$$

setzen, wo F endlich und integrabel ist; dieses Flächenpotential ist für jeden Punkt des Raumes

$$\leqq \text{endl. Konst. abs. Max.}(\varkappa) \cdot \varrho,$$

wenn ϱ die grösste mögliche Entfernung zwischen zwei Punkten von ω_1 ist, also

$$< \tfrac{1}{2}\, a \cdot \text{abs. Max.}\,(\varkappa) \cdot P^{1}),$$
$$< \tfrac{1}{2}\, a \cdot \text{abs. Max.}\,(\varkappa) \cdot \sqrt{r_{12}},$$

wenn wir unter a eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende Konstante verstehen. Daraus folgt zunächst:

Der von ω_1 zu der Differenz:

$$| W_\omega(\xi_2\, \eta_2\, \zeta_2) - W_\omega(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1) |$$

gelieferte Beitrag ist kleiner als

$$a \cdot \text{abs. Max.}\,(\varkappa) \cdot \sqrt{r_{12}},$$

wo a eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende Konstante ist.

Wir schlagen jetzt um 0 eine zweite Kugel mit dem Radius β; wir können denselben so wählen, dass derselbe grösser ist als eine bestimmte, endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende Länge, aber dennoch genügend klein so, dass die Schnittkurve σ dieser Kugel mit ω das Flächenstück $\omega - \omega_1$ in zwei Teile ω_2 und $\omega - \omega_1 - \omega_2$ zerlegt und dass für je zwei Punkte $(\xi\, \eta\, \zeta)$ und $(x\, y\, z)$ der Fläche $\omega_1 + \omega_2$:

$$11) \qquad \begin{cases} \cos(r\, h) = r \cdot f, \\ \cos(r\, \nu) = r \cdot F \end{cases}$$

ist, wenn

r die Entfernung $(\xi\, \eta\, \zeta) - (x\, y\, z)$,
ν die positive Normale in $(\xi\, \eta\, \zeta)$,
h eine tangentiale Richtung in $(x\, y\, z)$

ist und f, F endliche und integrable Funktionen von $(\xi\, \eta\, \zeta)$ vorstellen.

---

[1]) Durch genügende Verkleinerung von r_{12} können wir stets z. B.:

$$\varrho < 3\, P$$

machen.

Es ist nun der Beitrag, welchen ω_2 zu der Differenz

$$W_\omega(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - W_\omega(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$$

liefert

$$= \int_h \frac{\partial W_2}{\partial h}\, d\,h,$$

wenn wir:

$$W_2 = \int_{\omega_2} \varkappa \frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\, d\,\omega$$

setzen und die Integration $\int_h$ über ein Kurvenstück h erstrecken, welches in ω_1 zwischen $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ beliebig verläuft. Dieser Beitrag ist somit:

$$= \int_h \int_{\omega_2} \varkappa \frac{\cos(r\,h) - 3\cos(r\,h)\cos(r\,\nu)}{r^3}\, d\,\omega\ d\,h$$

und nach 11):

$$= \int_h \int_{\omega_2} \varkappa \frac{\Psi}{r^2}\, d\,\omega\ d\,h,$$

wo Ψ auf ω_2 endlich und integrabel ist, somit

$$< \int_h \frac{\text{endl. Konst. abs. Max. } (\varkappa)^{1})}{\varrho}\, d\,h,$$

wenn ϱ die kleinste Entfernung der Kurve h von einem Punkte des Flächenstückes ω_2 vorstellt.

Wir können nun[2]) die Kurve h so wählen, dass jedenfalls

$$\varrho > \frac{P}{2}$$

$$\int_h d\,h < 2\,r_{12}$$

wird, indem wir z. B. die Schnittkurve der durch die Grade $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1) - (\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ und die Normale in $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ gelegten Ebene mit ω_1 zur Kurve h nehmen, dann ist:

---

[1]) Denn es ist:

$$\int_{\omega_2} \varkappa \frac{\Psi}{r^2}\, d\,\omega < \frac{1}{\varrho} \int_{\omega_2} \frac{\varkappa\,\Psi}{r}\, d\,\omega.$$

[2]) Bei genügend kleinem r_{12}.

$$\frac{1}{\varrho}\int_h d\,h < 4\,\frac{r_{12}}{P}\,(= 4\sqrt{r_{12}}),$$

und es folgt:

Der von ω_2 zu der Differenz:

$$|\,W_\omega(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - W_\omega(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\,|$$

gelieferte Beitrag ist kleiner als

$$A \cdot \text{abs. Max.}\,(\varkappa) \cdot \sqrt{r_{12}},$$

wo A eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende Konstante vorstellt.

Bedenkt man schliesslich, dass der von $\omega - \omega_1 - \omega_2$ gelieferte Beitrag kleiner als

$$\text{endl. Konst. abs. Max.}\,(\varkappa) \cdot r_{12}$$

ist, so sieht man, dass der Satz I nunmehr vollständig bewiesen ist.

§ 2.

Beweis des Satzes II.

Dem Beweise des Satzes II schicken wir die genaue Begriffsbestimmung für die tangentialen Ableitungen der Funktion W_ω voraus.

Es seien $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ zwei Punkte der Fläche; nähern wir den Punkt $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ dem Punkte $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ unendlich, wobei die Quotienten

$$\frac{\xi_2 - \xi_1}{r_{12}}, \quad \frac{\eta_2 - \eta_1}{r_{12}}, \quad \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{r_{12}}$$

die Richtungskosinusse:

$$\cos(h\,x), \quad \cos(h\,y), \quad \cos(h\,z)$$

zu Grenzwerten haben mögen; konvergiert bei dieser Annäherung der Quotient:

$$\frac{W_\omega(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - W_\omega(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)}{r_{12}}$$

gegen einen bestimmten Grenzwert, so wollen wir denselben als die Ableitung von W_ω in der tangentialen Richtung h und als den Wert von

$$\frac{\partial W_\omega}{\partial h}$$

im Punkte $(\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1)$ bezeichnen.

Für den Beweis des Satzes II ist zunächst wichtig, zu zeigen, dass das Integral

$$\int_\omega (\varkappa - \varkappa_1)\ \frac{\cos(\nu\, h) - 3\cos(r\, h)\cos(r\, \nu)}{r^3}\, d\,\omega,$$

in dem $\varkappa_1$ den Wert von $\varkappa$ in $(\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1)$ vorstellt, auf der Fläche als „uneigentliches Integral" betrachtet werden kann und in $(\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1)$ den Wert von $\frac{\partial W_\omega}{\partial h}$ repräsentiert, falls dieses uneigentliche Integral einen bestimmten endlichen Wert hat.

Setzen wir:

11) $$\overline{W}_\omega = \int_\omega (\varkappa - \varkappa_1)\ \frac{\cos(r\, \nu)}{r^2}\, d\,\omega = W_\omega - 2\,\pi\,\varkappa_1,$$

nehmen r_{12} vorläufig noch endlich an und schlagen um $(\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1)$ eine Kugel mit dem Radius:

12) $$P = r_{12}^{\mu},\ (0 < \mu < 1),$$

[wobei es zweckmässig sein wird:

13) $$\mu = \frac{1+\nu}{2-\lambda},\ (0 < \nu < 1 - \lambda)$$

zu setzen], deren Schnittkurve ς das Flächenstück ω in einen Teil ω_1 und einen Teil $\omega - \omega_1$ zerlegen möge, so ist der von dem $(\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1)$ und $(\xi_2\ \eta_2\ \zeta_2)$ enthaltenden Flächenstücke ω_1 herrührende Beitrag zu dem Integrale $\overline{W}_\omega$

$$< \text{endl. Konst. } P^{1-\lambda} \cdot P,$$

da nach der Voraussetzung 4) S. 4 der absolut grösste Wert von $\varkappa - \varkappa_1$ auf ω_1 jedenfalls kleiner als $a\ (2\,P)^{1-\lambda}$ sein wird, wenn man r_{12} genügend klein annimmt. Dieser Beitrag ist somit nach 12) und 13)

$$\leqq \text{endl. Konst. } r_{12}^{1+\nu};$$

der Beitrag, welchen die Fläche ω_1 zu dem Ausdruck

$$\frac{W_\omega(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - W_\omega(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)}{r_{12}} = \frac{\overline{W}_\omega(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - \overline{W}_\omega(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)}{r_{12}}$$

liefert, ist demgemäss:

$$\leqq \text{endl. Konst. } r_1^{\nu}, \quad (0 < \nu < 1 - \lambda).$$

Wir schlagen jetzt um $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ eine zweite Kugel mit dem Radius R, von dem wir nur voraussetzen wollen, dass er $> P$ und genügend klein ist so, dass die Schnittkurve σ dieser Kugel mit ω das Flächenstück $\omega - \omega_1$ in zwei Teile ω_2 und $\omega - \omega_1 - \omega_2$ zerlegt und dass für je zwei Punkte $(\xi\,\eta\,\zeta)$ und $(x\,y\,z)$ der Fläche $\omega_1 + \omega_2$:

$$14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(\nu\,s) = r \cdot f, \\ \cos(r\,\nu) = r \cdot F, \end{array} \right. \quad \varkappa(\xi\,\eta\,\zeta) - \varkappa(x\,y\,z) \leqq a\,r^{1-\lambda}$$

ist, wenn

r die Entfernung $(\xi\,\eta\,\zeta) - (x\,y\,z)$,

ν die positive Normale in $(\xi\,\eta\,\zeta)$,

s eine tangentiale Richtung in $(x\,y\,z)$

ist und f, F endliche und integrable Funktionen von $(\xi\,\eta\,\zeta)$ vorstellen.

Es ist nun der Beitrag, welchen ω_2 zu der Differenz

$$W_\omega(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - W_\omega(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$$

liefert

$$= \int_s \frac{\partial \overline{W}_2}{\partial s}\,ds,$$

wenn wir:

$$\overline{W}_2 = \int_{\omega_2} \{\varkappa(\xi\,\eta\,\zeta) - \varkappa(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\}\,\frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\,d\omega,$$

$$= \int_{\omega_2} \{\varkappa(\xi\,\eta\,\zeta) - \varkappa(x\,y\,z)\}\,\frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\,d\omega$$

$$+ \int_{\omega_2} \{\varkappa(x\,y\,z) - \varkappa(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\}\,\frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\,d\omega$$

setzen und die Integration $\int_s$ über ein Kurvenstück s erstrecken, welches in ω_1 zwischen $(\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1)$ und $(\xi_2\ \eta_2\ \zeta_2)$ beliebig verläuft.

Dieser Beitrag ist somit

$$= \int_s \int_{\omega_2} \{\varkappa(\xi\ \eta\ \zeta) - \varkappa(x\ y\ z)\} \frac{\cos(r\,s) - 3\cos(r\,s)\cos(r\,r)}{r^3} d\omega\, ds$$

$$+ \int_s \int_{\omega_2} \{\varkappa(x\ y\ z) - \varkappa(\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1)\} \frac{\cos(r\,s) - 3\cos(r\,s)\cos(r\,r)}{r^3} d\omega\, ds$$

und nach 14)

$$< \int_s \int_{\omega_2} \frac{\text{endl. Konst.}}{r^{1+\lambda}} d\omega\, ds$$

$$+ \text{endl. Konst.}\ r_{12}^{1-\lambda} \int_s \int_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^2} ds,$$

$$< a \cdot r_{12} \cdot \text{Max.} \left[\int_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^{1+\lambda}}\right]^{1)},$$

wo a eine endliche Konstante, Max. [—] den grössten Wert darstellt, den dieses Integral überhaupt im Raume annehmen kann. Es folgt so:

Der Beitrag, welchen die Fläche ω_2 zu dem Ausdruck

$$\frac{W_\omega(\xi_2\ \eta_2\ \zeta_2) - W_\omega(\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1)}{r_{12}}$$

liefert, ist

$$< \text{endl. Konst. Max.} \left[\int_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^{1+\lambda}}\right].$$

Setzen wir jetzt:

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2,$$

so folgt:

---

[1]) Da

$$r_{12}^{1-\lambda} \int_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^2} < \int_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^{1+\lambda}},$$

$$\int_s ds < 2\, r_{12}$$

bei geeigneter Wahl der Kurve s (vgl. S. 12).

$$15)\quad \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{W_\omega(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - W_\omega(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)}{r_{12}} \\ = \left| \int\limits_{\omega-\omega_0} (\varkappa - \varkappa_1) \dfrac{\cos(\nu\,h) - 3\cos(r\,\nu)\cos(r\,h)}{r^3}\, d\,\omega \right|_P \\ + \varepsilon \end{array} \right.$$

wenn P einen Punkt auf der Graden $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1) - (\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ vorstellt[1]) und

$$16)\quad |\varepsilon| < \text{endl. Konst. } r_{12}^{\nu} + \text{endl. Konst. Max.} \left[\int\limits_{\omega_2} \frac{d\,\omega}{r^{1+\lambda}} \right].$$

Durch den Uebergang zur Grenze $r_{12} = 0$ folgt in $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$:

$$17)\quad \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial W_\omega}{\partial h} = \int\limits_{\omega-\omega_0} (\varkappa - \varkappa_1) \dfrac{\cos(\nu\,h) - 3\cos(r\,\nu)\cos(r\,h)}{r^3}\, d\,\omega \\ + E, \end{array} \right.$$

wo E kleiner ist als

$$\text{endl. Konst. Max.} \left[\int\limits_{\omega_0} \frac{d\,\omega}{r^{1+\lambda}} \right].$$

Da nun:

$$\lim_{R=0} \int\limits_{\omega_0} \frac{d\,\omega}{r^{1+\lambda}} = 0, \quad \text{(vgl. 7), S. 9)}$$

und infolge:

$$\left. \begin{array}{l} |\varkappa - \varkappa_1| < a\, r^{1-\lambda}, \\ \cos(\nu\,h) = r \cdot f, \\ \cos(r\,\nu) = r \cdot F, \end{array} \right\} \quad f, F \text{ endlich auf } \omega_0,$$

auch:

$$\lim_{R=0} \int\limits_{\omega_0} (\varkappa - \varkappa_1) \frac{\cos(\nu\,h) - 3\cos(r\,\nu)\cos(r\,h)}{r^3}\, d\,\omega = 0$$

---

[1]) Unter Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung auf die Differenz der Werte von

$$\int\limits_{\omega-\omega_0} \varkappa \frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\, d\,\omega$$

in $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$.

ist, so beweist die Formel 17) in der Tat unsere erste Behauptung, dass das Integral:

$$\int_{\omega} (\varkappa - \varkappa_1) \frac{\cos(\nu\, h) - 3\cos(r\, \nu)\cos(r\, h)}{r^3}\, d\omega,$$

in dem $\varkappa_1$ den Wert von $\varkappa$ in $(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)$ vorstellt, auf der Fläche als „uneigentliches Integral" betrachtet werden kann und in $(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)$ den Wert von $\frac{\partial\, W_\omega}{\partial\, h}$ repräsentiert, falls dieses uneigentliche Integral einen bestimmten endlichen Wert besitzt.

Hierauf beweisen wir erst die eigentliche Behauptung, dass dieses uneigentliche Integral eine stetige Funktion der Stelle auf ω bei unserer Voraussetzung 4) darstellt.[1]) Wir teilen durch eine geschlossene Kurve Σ die Fläche ω in einen Teil Ω_1, der $(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)$ enthält, und auf dem

$$18) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\varkappa - \varkappa_1| < a \cdot r^{1-\lambda}, \\ \cos(\nu\, h) = r \cdot f, \\ \cos(r\, \nu) = r \cdot F, \end{array} \right\} \quad f, F \text{ endlich auf } \Omega_1,$$

und einen Teil $\omega - \Omega_1$, dessen Punkte von $(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)$ Entfernungen $> \varrho$ haben, wo ϱ eine beliebig gewählte Länge vorstellt, die nur kleiner ist als eine bestimmte endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche abhängende Länge. Es folgt dann die Formel:

$$19) \quad \begin{aligned} \frac{\partial\, W_\omega}{\partial\, h} &= \int_{\Omega_1} a\, \{f - 3\, F \cos(r\, h)\} \frac{d\omega}{r^{1+\lambda}} \\ &+ \int_{\omega - \Omega_1} (\varkappa - \varkappa_1) \frac{\cos(\nu\, h) - 3\cos(r\, \nu)\cos(r\, h)}{r^3}\, d\omega, \end{aligned}$$

aus der zunächst die Endlichkeit des $\frac{\partial\, W_\omega}{\partial\, h}$ vorstellenden uneigentlichen Integrales hervorgeht, da

$$\int_{\Omega_1} \frac{d\omega}{r^{1+\lambda}}$$

[1]) Wenn wir natürlich unter $\cos(h\, x)$, $\cos(h\, y)$, $\cos(h\, z)$ stetige Funktionen der Stelle auf ω verstehen.

endlich ist, und ebenso das zweite Integral rechts in 19), wenn nur $\frac{1}{\varrho}$ endlich ist. Sind schliesslich $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$, $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ zwei Punkte der Fläche, h_1 eine tangentiale Richtung in $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$, h_2 eine tangentiale Richtung in $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$, ε eine beliebig klein vorgeschriebene Grösse, so können wir Ω_1 so wählen, dass das erste Integral rechts in 19) sowohl in $(\xi_1\,\eta_1,\,\zeta_1)$, als auch in $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ ist und dass die Punkte von $\omega - \Omega_1$ von $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ Abstände $> \varrho$ haben, wo ϱ eine von null verschiedene, genügend kleine (von ε abhängende) Länge vorstellt, wenn wir nur den Abstand von $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ genügend klein annehmen. Nach nunmehriger Festlegung von Ω_1 können wir die Differenz der Werte des Integrales

$$\int_{\omega-\Omega_1} (\varkappa - \varkappa_1)\,\frac{\cos(\nu\,h_1) - 3\cos(r\,\nu)\cos(r\,h_1)}{r^3}\,d\,\omega \text{ in } (\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$$

und des Integrales

$$\int_{\omega-\Omega_1} (\varkappa - \varkappa_2)\,\frac{\cos(\nu\,h_2) - 3\cos(r\,\nu)\cos(r\,h_2)}{r^3}\,d\,\omega \text{ in } (\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$$

kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ machen, indem wir $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ genügend nahe an $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ heranrücken und

$$\begin{array}{lll} \cos(h_1\,x), & \cos(h_1\,y), & \cos(h_1\,z); \\ \cos(h_2\,x), & \cos(\varkappa_2\,y), & \cos(h_2\,z) \end{array}$$

als die Werte von stetigen Funktionen

$$\cos(h\,x), \quad \cos(h\,y), \quad \cos(h\,z)$$

in $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ resp. $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ voraussetzen. Dann folgt:

$$20) \qquad \frac{\partial\,W_\omega}{\partial\,h_2}(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - \frac{\partial\,W_\omega}{\partial\,h_1}(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1) < \varepsilon,$$

der Beweis des Satzes II. ist erledigt.

§ 3.

Beweis des Satzes III.

Dem Beweise des Satzes III. schicke ich wieder zunächst einige Festsetzungen voraus.

Es sei $\varkappa$ eine mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktion der Stelle $(\xi\,\eta\,\zeta)$ der Fläche ω, wir verstehen unter der Ableitung $\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}$ in $(\xi\,\eta\,\zeta)$ die Ableitung von $\varkappa$ nach der tangentialen Richtung, welche durch die Schnittgrade der Tangentialebene mit der die Normale und die Parallele der x Axe in $(\xi\,\eta\,\zeta)$ enthaltenden Ebene eindeutig festgelegt ist, wenn wir noch bestimmen, dass wir die Richtung der Schnittgeraden wählen, die mit der x Axe einen Winkel $< \frac{\pi}{2}$ bildet, und in dem unbestimmten Falle, in dem die Normale der x Axe parallel ist, $\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi} = 0$ gesetzt werden soll. Die analogen Definitionen mögen für $\frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}$ und $\frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}$ gelten; ist dann h irgend eine tangentiale Richtung in $(\xi\,\eta\,\zeta)$, so ist:

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial h} = \frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\cos(h\,x) + \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\cos(h\,y) + \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}\cos(h\,z).$$

Nach diesen Festsetzungen kann man in bekannter Weise für die ersten Ableitungen des Integrales

$$W = \int_\omega \varkappa \frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\,d\omega$$

an irgend einer von ω getrennten Stelle $(x\,y\,z)$ des Raumes die Formel:

$$21)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial s} = \displaystyle\int_\omega \left\{\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\cos(s\,x) + \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\cos(s\,y) + \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}\cos(s\,z)\right\}\frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\,d\omega \\ \qquad - \displaystyle\int_\omega \cos(\nu\,s)\left\{\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\frac{\cos(r\,x)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\frac{\cos(r\,y)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}\frac{\cos(r\,z)}{r^2}\right\}d\omega \end{cases}$$

beweisen,[1]) in der s irgend eine Richtung vorstellt, bei der vereinfachenden Voraussetzung, dass die Fläche ω geschlossen ist.

Ist s einer in $(\xi\,\eta\,\zeta)$ tangentialen Richtung h parallel, so bleibt die Formel auch giltig, wenn man den variabeln Punkt $(x\,y\,z)$ auf der inneren (äusseren) Normalen dem Punkte $(\xi\,\eta\,\zeta)$ unendlich nähert, und sie zeigt, dass die Randwerte von W an ω bestimmte endliche erste tangentiale Ableitungen haben.[2]) Dasselbe gilt somit auch für

$$W_\omega = \tfrac{1}{2}(W_a + W_i),$$

und es ergiebt sich nach 21):

$$22)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W_\omega}{\partial h} = \displaystyle\int_\omega \frac{\partial \varkappa}{\partial h}\frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\,d\omega \\ \qquad - \displaystyle\int_\omega \cos(\nu h)\left\{\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\frac{\cos(r\,x)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\frac{\cos(r\,y)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}\frac{\cos(r\,z)}{r^2}\right\} d\omega, \end{cases}$$

wobei wir die Werte der Integrale rechts auf der Fläche zu wählen haben; denn diese Werte auf der Fläche sind dem arithmetischen Mittel der beiden Randwerte gleich, weil in einem endlichen Gebiete ω_1 um $(\xi\,\eta\,\zeta)$

$$23)\qquad \cos(\nu\,h) = r\cdot f, \quad (f \text{ endlich auf } \omega_1)$$

gesetzt werden kann.

Auf diese Formel 22) gründet sich nun der Beweis des Satzes III., dass bei Voraussetzung stetiger erster Ableitungen von $\varkappa$ für zwei Punkte $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$24)\qquad \left|\frac{\partial W_\omega}{\partial h}(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - \frac{\partial W_\omega}{\partial h}(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\right| < b\cdot\sqrt{r_{12}},$$

wo b eine endliche Konstante vorstellt, h eine in $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ oder $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ tangentiale Richtung; der einzige Zweifel, der bei dieser Ausdrucksweise noch bleiben könnte, ist der: Wenn

---

[1]) Man vgl. z. B. mein Lehrbuch der Potentialtheorie I, S. 46.

[2]) Man vgl. z. B. mein Lehrbuch der Potentialtheorie I, S. 197, Hilfssatz.

eine bestimmte Richtung h z. B. in $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ tangential ist, so wird h im allgemeinen nicht in $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ tangential sein und umgekehrt, und es könnte dieser Zweifel nicht entstehen, wenn wir die Behauptung 24) in der Form schrieben:

$$24^a) \qquad \left| \frac{\partial W_\omega}{\partial h_2}(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - \frac{\partial W_\omega}{\partial h_1}(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1) \right| < b\sqrt{r_{12}}$$

und unter

$$\begin{matrix} \cos(h_1 x), & \cos(h_1 y), & \cos(h_1 z); \\ \cos(h_2 x), & \cos(h_2 y), & \cos(h_2 z) \end{matrix}$$

die Werte der drei mit stetigen ersten Ableitungen begabten Funktionen:

$$\cos(h\,x), \quad \cos(h\,y), \quad \cos(h\,z)$$

verstehen.

Das ist nun in der Tat der Sinn, in dem die Formel 24) verstanden werden soll, deren Beweis aus 22) nun ganz analog dem Beweise des Satzes I folgt:

Zunächst ist nach Satz I der Beitrag, den

$$\int_\omega \frac{\partial \varkappa}{\partial h} \frac{\cos(r\,r)}{r^2}\, d\,\omega$$

zu der linken Seite von 24) liefert

$$< \text{endl. Konst.}\ \sqrt{r_{12}},$$

wir haben also nur noch den analogen Beweis für das Integral:

$$25) \qquad I = \int_\omega \cos(r h) \left\{ \frac{\partial \varkappa}{\partial \xi} \frac{\cos(r x)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta} \frac{\cos(r y)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta} \frac{\cos(r z)}{r^2} \right\} d\,\omega$$

zu liefern, dass:

$$26) \qquad |\, I(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - I(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\,| < \text{endl. Konst.}\ \sqrt{r_{12}}$$

bei genügend kleinem r_{12}.

Wir schlagen um den Mittelpunkt 0 der diese beiden Punkte $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ verbindenden Graden eine Kugel von dem Radius

$$P = \sqrt{r_{12}};$$

bei genügend kleinem r_{12} zerlegt die Schnittkurve ς dieser Kugelfläche mit ω diese Fläche ω in einen Teil ω_1, der $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$

und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ enthält und einen Teil $\omega - \omega_1$, und man kann sowohl für $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$, als auch für $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$

$$\int_{\omega_1} \cos(\nu h)\left\{\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\frac{\cos(rx)}{r^2}+\frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\frac{\cos(ry)}{r^2}+\frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}\frac{\cos(rz)}{r^2}\right\} d\omega = \int_{\omega_1} \varphi \frac{d\omega}{r}$$

setzen, wo φ endlich ist, dieses Integral ist für jeden Punkt des Raumes

$$\leqq \text{endl. Konst. } \varrho,$$

wenn ϱ die grösste mögliche Entfernung zwischen zwei Punkten von ω_1 ist, also

$$\leqq \text{endl. Konst.}^{1})\ P,$$

$$\leqq \text{endl. Konst. } \sqrt{r_{12}}.$$

Der von ω_1 zu der Differenz:

$$|\,I(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - I(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\,|$$

gelieferte Beitrag ist kleiner als

$$\text{endl. Konst. } \sqrt{r_{12}}.$$

Wir schlagen jetzt um 0 eine zweite Kugel mit dem Radius β; wir können denselben so wählen, dass derselbe grösser ist, als eine bestimmte, endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende Länge, aber dennoch genügend klein so, dass die Schnittkurve σ dieser Kugel mit ω die Fläche $\omega - \omega_1$ in zwei Teile ω_2 und $\omega - \omega_1 - \omega_2$ zerlegt, und dass für je zwei Punkte $(\xi\,\eta\,\zeta)$ und $(x\,y\,z)$ der Fläche $\omega_1 + \omega_2$:

27) $$\cos(\nu h) = r \cdot f,$$

wenn

r die Entfernung $(\xi\,\eta\,\zeta) - (x\,y\,z)$,

ν die innere Normale in $(\xi\,\eta\,\zeta)$,

h eine tangentiale Richtung in $(x\,y\,z)$

---

[1]) Die hier benützten endlichen Konstanten sind nicht stets dieselben; es kommt uns hier nicht auf ihre Werte, sondern nur auf ihre Eigenschaft der Endlichkeit an.

ist und f eine endliche und integrable Funktion von $(\xi\ \eta\ \zeta)$ vorstellt.

Es ist nun der Beitrag, welchen ω_2 zu der Differenz

$$I(\xi_2\ \eta_2\ \zeta_2) - I(\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1)$$

liefert,

$$= \int_s \frac{\partial I_2}{\partial s}\, d\,s,$$

wenn wir:

$$I_2 = \int_{\omega_2} \cos(\nu\, h) \left\{ \frac{\partial \varkappa}{\partial \xi} \frac{\cos(r\,x)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta} \frac{\cos(r\,y)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta} \frac{\cos(r\,z)}{r^2} \right\} d\,\omega$$

setzen und die Integration $\int_s$ über ein Kurvenstück s erstrecken, welches in ω_1 zwischen $(\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1)$ und $(\xi_2\ \eta_2\ \zeta_2)$ beliebig verläuft. Dieser Beitrag ist somit mit Rücksicht auf 27)

$$= \int_s \int_{\omega_2} \frac{\Psi}{r^2}\, d\,\omega\, d\,s,$$

wo Ψ auf ω_2 endlich und integrabel ist, somit

$$< \int_s \frac{\text{endl. Konst.}^{1})}{\varrho}\, d\,s,$$

wenn ϱ die kleinste Entfernung der Kurve s von einem Punkte des Flächenstückes ω_2 vorstellt. Wir können wieder die Kurve s so wählen,[2]) dass jedenfalls:

$$\varrho > \frac{P}{2},$$

$$\int_s d\,s < 2\,r_{12}$$

wird, dann folgt:

Der von ω_2 zu der Differenz:

$$|\, I(\xi_2\ \eta_2\ \zeta_2) - I(\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1)\,|$$

---

[1]) Man vgl. Anm. 1, S. 12.

[2]) Bei genügend kleinem r_{12}.

gelieferte Beitrag ist kleiner als

$$\text{endl. Konst.} \sqrt{r_{12}}.$$

Bedenkt man schliesslich, dass der von $\omega - \omega_1 - \omega_2$ gelieferte Beitrag

$$< \text{endl. Konst.} \, r_{12}$$

ist, so sieht man, dass der Satz III nunmehr vollständig bewiesen ist. —

Im besonderen werden bei den Voraussetzungen des Satzes III die Ableitungen:

$$\frac{\partial W_\omega}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial W_\omega}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial W_\omega}{\partial \zeta},$$

die Ungleichungen 5) erfüllen.

Setzen wir:

$$28) \qquad w = \int_\omega W_\omega \frac{\cos(r\,\nu)}{r^2} d\omega,$$

so werden die Ableitungen von w an irgend einer Stelle $(x\,y\,z)$ des Innen- (Aussen-)raumes (vgl. Formel 21) durch die Gleichung:

$$29) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial s} = \displaystyle\int_\omega \left\{ \frac{\partial W_\omega}{\partial \xi} \cos(sx) + \frac{\partial W_\omega}{\partial \eta} \cos(sy) + \frac{\partial W_\omega}{\partial \zeta} \cos(sz) \right\} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \\ \quad - \displaystyle\int_\omega \cos(s\nu) \left\{ \frac{\partial W_\omega}{\partial \xi} \frac{\cos(rx)}{r^2} + \frac{\partial W_\omega}{\partial \eta} \frac{\cos(ry)}{r^2} + \frac{\partial W_\omega}{\partial \zeta} \frac{\cos(rz)}{r^2} \right\} d\omega \end{cases}$$

gegeben sein; bei den soeben bewiesenen Eigenschaften von

$$\frac{\partial W_\omega}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial W_\omega}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial W_\omega}{\partial \zeta}$$

sind diese Werte $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ im ganzen Innen- (Aussen-)raume eindeutig und stetig, auch wenn man den variabeln Punkt $(x\,y\,z)$ unendlich nahe von innen (aussen) an die Fläche ω heranrücken lässt; für den ersten Ausdruck rechts als Potential einer Doppelbelegung von der Dichte:

$$\frac{\partial W_\omega}{\partial \xi} \cos(s\,x) + \frac{\partial W_\omega}{\partial \eta} \cos(s\,y) + \frac{\partial W_\omega}{\partial \zeta} \cos(s\,z)$$

ist dies bekannt, für den zweiten Ausdruck rechts folgt dasselbe nach einem bekannten Satze von Hölder.[1])

[1]) Hölder, Beiträge zur Potentialtheorie. (Inaug.-Diss. Stuttgart 1882), man vgl. mein Lehrbuch der Potentialtheorie I, S. 392, 394.