

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1979

MÜNCHEN 1980

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

1420

Konstruktion komplexer Räume mit vorgegebenen globalen Eigenschaften

Camilla Horst

Nach Grauert [3] ist ein komplexer Raum Steinsch (holomorph vollständig), wenn seine Reduktion es ist. Analoge Aussagen für schwächere Eigenschaften, die die Reichhaltigkeit der Menge globaler holomorpher Funktionen charakterisieren, sind hingegen i. a. falsch: Wie aus der Theorie der infinitesimalen Erweiterungen (Schuster [6]) folgt, braucht ein komplexer Raum nicht holomorph separabel bzw. holomorph konvex zu sein, wenn seine Reduktion es ist. Da zu den in [6] ausgeführten Konstruktionen umfangreichere Überlegungen erforderlich sind, scheint weiterhin ein Bedarf an unmittelbar zugänglichen konkreten Beispielen dieser Art zu bestehen. Wir zeigen in Abschnitt 1, wie man solche aus einem einfachen Spezialfall eines Satzes aus [6] ableitet.

In Verallgemeinerung obiger Problemstellung untersucht man, welche globalen Eigenschaften sich unter holomorphen Abbildungen vom Urbild- auf den Bildraum übertragen. So gilt in der Kategorie der reduzierten komplexen Räume: Das Bild eines Steinschen Raumes unter einer eigentlichen holomorphen Abbildung ist Steinsch (Narasimhan [5]). Entsprechende Sätze für schwächere Eigenschaften sind jedoch selbst dann falsch, wenn die betrachtete Abbildung ein holomorpher Homöomorphismus ist: Wie B. Kaup [3] gezeigt hat, gibt es einen lokal irreduziblen komplexen Raum mit holomorph konvexer Normalisierung, der nicht holomorph konvex ist. Ergänzend hierzu geben wir in Abschnitt 2 einen lokal irreduziblen reduzierten komplexen Raum mit holomorph separabler Normalisierung an, der nicht holomorph separabel ist.

0. Definitionen und Vorbemerkungen

Im folgenden werden nur komplexe Räume mit abzählbarer Topologie betrachtet.

Sei $X = (|X|, O_X)$ ein komplexer Raum, und sei $x \in |X|$. Das maximale Ideal in $O_{X,x}$ sei mit $\mathfrak{m}_{X,x}$ bezeichnet, und für $f \in O_{X,x}$ sei $f(x)$ die Restklasse von f in $O_{X,x} / \mathfrak{m}_{X,x} = \mathbb{C}$. $t_x: H^0(X, O_X) \rightarrow \mathfrak{m}_{X,x} / \mathfrak{m}_{X,x}^2$ ordne φ die Restklasse von $\varphi_x - \varphi_x(x)$ zu.

Weiter sei $S_x := \{y \in |X| : \varphi_y(y) = \varphi_x(x) \text{ für alle } \varphi \in H^0(X, O_X)\}$.

Definition (vgl. [1]): X heißt *holomorph-*

- (i) *ausbreitbar*, falls S_x für alle $x \in |X|$ diskret ist
- (ii) *separabel*, falls $S_x = \{x\}$ für alle $x \in |X|$
- (iii) *regulär*, falls t_x für alle $x \in |X|$ surjektiv ist
- (iv) *konvex*, falls es zu jeder Folge (x_n) in $|X|$ ohne Häufungspunkt ein $\varphi \in H^0(X, O_X)$ gibt mit $\limsup |\varphi_{x_n}(x_n)| = \infty$.

X heißt *Steinsch* (oder *holomorph vollständig*), wenn X holomorph ausbreitbar und holomorph konvex ist.

Trivialerweise ist X holomorph ausbreitbar, wenn X holomorph separabel oder holomorph regulär ist. Da jeder Steinsche Raum holomorph separabel und holomorph regulär ist, sind die Eigenschaften (i)–(iii) für holomorph konvexes X äquivalent. Für beliebiges X ist dies nicht der Fall: Wie Beispiele von Stein [7] und Wiegmann [8] zeigen, sind die Eigenschaften (ii) und (iii) voneinander unabhängig. Durch Verallgemeinerung der Konstruktion aus [8] erhält man folgendes

Beispiel eines holomorph ausbreitbaren reduzierten komplexen Raumes, der weder holomorph separabel noch holomorph regulär ist*):

Sei $|X| := \mathbb{C}^2 - \{(z, 0) : |z| \in \mathbb{N}\}$. Für $x \in |X|$ sei

$$O_{X,x} := \begin{cases} \mathbb{C}\langle z - x_1, w^2, w^{2n+3} \rangle, & \text{falls } x_2 = 0 \text{ und } n < |x_1| < n+1 \\ O_{\mathbb{C}^2, x} & \text{sonst} \end{cases}$$

$X := (|X|, O_X)$ ist ein komplexer Raum mit den geforderten Eigenschaften:

X ist ein lokal geringter Raum.

*) Weitere Beispiele hierfür sind Vereinigung und Produkt der in [7, S. 78] und [8] angeführten Räume (nach K. Wolffhardt). Das oben konstruierte X ist jedoch zusätzlich irreduzibel und von minimaler Dimension.

Sei $V := |X| - \{(z, w) : w = 0\}$; weiter sei für $n \in \mathbb{N}$
 $R_n := \{z \in \mathbb{C} : n < |z| < n+1\}$, $U_n := R_n \times \mathbb{C}$, und Y_n der
 durch $z^{2n+3} = w^2$ definierte Unterraum des $\mathbb{C}^2$.

Dann sind $(U_n, O_X|_{U_n})$ und $(R_n \times Y_n, O_{R_n \times Y_n})$ vermöge
 $(z, w) \mapsto (z, w^2, w^{2n+3})$ als lokal geringte Räume isomorph.

Daraus und aus $(V, O_X|_V) = (V, O_{\mathbb{C}^2}|_V)$ folgt wegen $|X| =$
 $= V \cup \bigcup U_n$: X ist ein komplexer Raum. Wegen $O_X \subset O_{\mathbb{C}^2}|_{|X|}$
 $|X|$ ist X reduziert.

Für $x = (x_1, x_2) \in |X|$ ist $S_x \subset \{(x_1, x_2), (x_1, -x_2)\}$, d. h. X ist
 holomorph ausbreitbar.

Jedes $\varphi \in H^0(X, O_X) \subset H^0(|X|, O_{\mathbb{C}^2}|_{|X|})$ läßt sich holo-
 morph auf $\mathbb{C}^2$ fortsetzen und hängt daher nach Konstruktion von
 O_X nur von z und w^2 ab. X ist also nicht holomorph separabel;
 außerdem ist für $n \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, 0)$, $n < |x_1| < n+1$, die Rest-
 klasse von w_x^{2n+3} nicht im Bild von t_x , d. h. X ist nicht holo-
 morph regulär.

1. Konstruktion spezieller komplexer Räume mit vorgegebener Reduktion

Sei $X = (|X|, O_X)$ ein komplexer Raum und sei $\mathfrak{F}$ ein kohä-
 renter O_X -Modul. Dann wird $O_X \oplus \mathfrak{F}$ mit der Multiplikation
 $(f, \sigma) \cdot (g, \tau) := (f \cdot g, f \cdot \tau + g \cdot \sigma)$ eine lokale O_X -Algebra $O_X \oplus \mathfrak{F}$,
 und die Projektion $O_X \oplus \mathfrak{F} \rightarrow O_X$ induziert eine Einbettung
 $j = (|j|, *j) : X \rightarrow \text{Specan } O_X \oplus \mathfrak{F} = (|X|, O_X \oplus \mathfrak{F})$ mit $|j| =$
 $= \text{id}_{|X|}$, $*j(f, \sigma) = f$. Ist X reduziert, so ist j der Reduktions-
 morphismus von $\text{Specan } O_X \oplus \mathfrak{F}$ (vgl. [2]).

Satz: Sei Y ein reduzierter komplexer Raum, $X = (|X|, O_X)$
 ein offener Unterraum von $\mathbb{C} \times Y$, und seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \subset O_X$ ko-
 härente Ideale mit disjunkten Nullstellengebilden. Die erste Ko-
 ordinate in X sei mit z bezeichnet. Dann gilt:

- Durch $\bar{O}_{X,x} := \{(f, \sigma, \tau) \in (O_X \oplus (\mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2))_x : \partial_z f = \sigma + \tau\}$, $x \in |X|$, wird eine Garbe von lokalen $\mathbb{C}$ -Algebren auf $|X|$ definiert.
- $\bar{X} := (|X|, \bar{O}_X)$ ist ein komplexer Raum, und die Reduktion
 von $\bar{X}$ ist gegeben durch $\text{red} : X \rightarrow \bar{X}$, $|\text{red}| = \text{id}_{|X|}$,
 $*\text{red}(f, \sigma, \tau) = f$.

- c) Ist $H^0(X, \mathfrak{U}_1 \oplus \mathfrak{U}_2) = 0$, so gilt für alle $y \in Y$ und alle $\varphi \in H^0(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) = H^0(X, \bar{\mathcal{O}}_X)$: Die Abbildung $x \mapsto \varphi_x(x)$ ist auf jeder Zusammenhangskomponente von $(\mathbf{C} \times \{y\}) \cap |X|$ konstant. Insbesondere ist $\bar{X}$ dann weder holomorph ausbreitbar noch holomorph konvex.

Beweis: Zu zeigen ist nur (b).

Sei $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{U}_1 \oplus \mathfrak{U}_2$ der Kern von $\mathfrak{U}_1 \oplus \mathfrak{U}_2 \ni (\sigma, \tau) \mapsto \sigma + \tau \in \mathcal{O}_X$, und sei $U_v := |X| - \text{supp } \mathcal{O}_X/\mathfrak{U}_v$, $v = 1, 2$. Die Zuordnungen $\beta_1: \bar{\mathcal{O}}_X|_{U_1} \ni (f, \sigma, \tau) \mapsto (f, \sigma - \partial_z f, \tau) \in (\mathcal{O}_X \oplus \mathfrak{K})|_{U_1}$ und $\beta_2: \bar{\mathcal{O}}_X|_{U_2} \ni (f, \sigma, \tau) \mapsto (f, \sigma, \tau - \partial_z f) \in (\mathcal{O}_X \oplus \mathfrak{K})|_{U_2}$ sind wegen $\mathfrak{U}_v|_{U_v} = \mathcal{O}_X|_{U_v}$, $v = 1, 2$, wohldefinierte Isomorphismen von $\mathbf{C}$ -Algebren, d. h. Specan $((\mathcal{O}_X \oplus \mathfrak{K})|_{U_v})$ und $(U_v, \bar{\mathcal{O}}_X|_{U_v})$, $v = 1, 2$, sind als lokal geringte Räume isomorph. Deshalb und wegen $|X| = U_1 \cup U_2$ ist $\bar{X}$ ein komplexer Raum. Das Nilradikal $\mathfrak{N}_{\bar{X}}$ von $\mathcal{O}_{\bar{X}} = \bar{\mathcal{O}}_X$ ist gegeben durch $\mathfrak{N}_{\bar{X}} = (0 \oplus (\mathfrak{U}_1 \oplus \mathfrak{U}_2)) \cap \bar{\mathcal{O}}_X$. Damit folgt der Rest der Behauptung.

A. Beispiel eines komplexen Raumes mit holomorph separabler und holomorph regulärer Reduktion, der nicht holomorph ausbreitbar ist.

Sei X der durch $|X| := \mathbf{C}^2 - \{(z, w) : zw = 0 \text{ und } |z|, |w| \in \mathbf{N}\}$ definierte offene Unterraum des $\mathbf{C}^2$. Für $x = (x_1, x_2) \in |X|$ sei

$$\mathfrak{U}_{1,x} := \begin{cases} w^{n+1} \cdot \mathcal{O}_{X,x}, & \text{falls } x_2 = 0, n < |x_1| < n+1 \\ \mathcal{O}_{X,x} & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\mathfrak{U}_{2,x} := \begin{cases} z^{n+1} \cdot \mathcal{O}_{X,x}, & \text{falls } x_1 = 0, n < |x_2| < n+1 \\ \mathcal{O}_{X,x} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ sind kohärente Ideale mit disjunkten Nullstellengebilden, und es ist $H^0(X, \mathfrak{U}_1 \oplus \mathfrak{U}_2) = 0$. Nach obigem Satz folgt: Ist $\bar{\mathcal{O}}_X$ definiert durch $\bar{\mathcal{O}}_{X,x} := \{(f, \sigma, \tau) \in (\mathcal{O}_X \oplus (\mathfrak{U}_1 \oplus \mathfrak{U}_2))_x : \partial_z f = \sigma + \tau\}$, so ist $\bar{X} := (|X|, \bar{\mathcal{O}}_X)$ ein komplexer Raum mit der holomorph separablen und holomorph regulären Reduktion X , und für jedes $\varphi \in H^0(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$ hängt die Auswertungsabbildung $x \mapsto \varphi_x(x)$ nur von der zweiten Koordinate ab. $\bar{X}$ ist daher nicht holomorph ausbreitbar.

B. Beispiel eines komplexen Raumes mit holomorph konvexer Reduktion, der nicht holomorph konvex ist [6]:

Sei $X := \mathbf{C} \times \mathbf{P}_1$, $\mathfrak{U}_1$ das Ideal von $\mathbf{C} \times \{(0:1)\}$, $\mathfrak{U}_2$ das von $\mathbf{C} \times \{(1:0)\}$.

$\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ sind kohärente Ideale mit disjunkten Nullstellengebilden und $H^0(X, \mathfrak{U}_1 \oplus \mathfrak{U}_2) = 0$. Für $\bar{X}$ gemäß obigem Satz gilt daher: $\bar{X}$ hat die holomorph konvexe Reduktion X , und für jedes $\varphi \in H^0(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$ hängt die Auswertungsabbildung $x \mapsto \varphi_x(x)$ nicht von der ersten Koordinate ab, ist also konstant. Somit ist $\bar{X}$ nicht holomorph konvex.

2. Beispiel eines lokal irreduziblen reduzierten komplexen Raumes mit holomorph separabler und holomorph regulärer Normalisierung, der nicht holomorph ausbreitbar ist:

Sei $|X| := \mathbf{C}^2 - \{(z, 0) : |z| \in \mathbf{N}\}$, und seien V , R_n und U_n für alle $n \in \mathbf{N}$ wie in Abschnitt 0 definiert. Für $x = (x_1, x_2) \in |X|$

sei $\mathcal{O}_{X,x} := \begin{cases} \mathbf{C} \langle z - x_1, w^{2n+1}, w^{2n+2} \rangle, & \text{falls } x_2 = 0, n < |x_1| < \\ \mathcal{O}_{\mathbf{C}^2, x} & \text{sonst} \end{cases} < n+1$

Für $n \in \mathbf{N}$ sei Y_n der durch $z^{2n+2} = w^{2n+1}$ definierte Unterraum des $\mathbf{C}^2$. Dann sind $(U_n, \mathcal{O}_X|_{U_n})$ und $R_n \times Y_n$ vermöge $(z, w) \mapsto (z, w^{2n+1}, w^{2n+2})$ als lokal geringste Räume isomorph. Daraus und aus $(V, \mathcal{O}_X|_V) = (V, \mathcal{O}_{\mathbf{C}^2}|_V)$ folgt: $X := (|X|, \mathcal{O}_X)$ ist ein komplexer Raum, der wegen $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_{\mathbf{C}^2}|_{|X|}$ reduziert ist.

Die identische Abbildung $|X| \rightarrow |X|$ induziert einen holomorphen Homöomorphismus $(|X|, \mathcal{O}_{\mathbf{C}^2}|_{|X|}) \rightarrow X$; die Normalisierung von X ist also holomorph separabel und holomorph regulär.

Andererseits folgt mit der gleichen Argumentation wie in Abschnitt 0, daß jedes $\varphi \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ nicht von der zweiten Koordinate abhängt, d. h. X ist nicht holomorph ausbreitbar.

Literatur:

- [1] Behnke, H./Thullen, P.: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 51, 2. erw. Aufl. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1970.

- [2] Fischer G.: Complex analytic geometry. Lecture Notes in Mathematics, vol. 538. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976.
- [3] Grauert, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. Publ. IHES 5, Paris 1960.
- [4] Kaup, B.: Relationen auf komplexen Räumen. Comment. Math. Helv. 46 (1971), 48–64.
- [5] Narasimhan, R.: A note on Stein spaces and their normalizations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 16 (1962), 327–333.
- [6] Schuster, H. W.: Infinitesimale Erweiterungen komplexer Räume. Comment. Math. Helv. 45 (1970), 265–286.
- [7] Stein, K.: Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. Vorlesungsausarbeitung. München 1961/62.
- [8] Wiegmann, K.-W.: Ein holomorph-separabler komplexer Raum muß nicht holomorph regulär sein. Enseignement math. 14 (1968), 283–284.