

Erläuterung
der lambertischen
M e t h o d e

Sonnenfinsternisse

zu verzeichnen.

Von

Anton Dätzl.



Der bis in das Innere der Mathematik gedrungen hat, wird es mir gestehen müssen, daß es ungemein schwer sey, in mathematischen Wissenschaften überhaupt, und insbesondere in der Astronomie, durch neue Erfindungen Zusätze zu machen: so sehr ist durch die vielen Erfindungen der größten Männer schon alles erschöpft worden, daß wir kaum noch etwas sagen, was diese nicht längst schon vor uns gesagt haben; und was wirklich noch für uns übrig ist, ist so in Dunkelheit eingehüllet, daß sich nur Männer, die bey dem mathematischen Studium grau geworden, daran wagen dürfen. Man wird es mir also zu Gute halten, daß ich anders nichts zum Stoffe meiner Abhandlung gewählt habe, als die Erläuterung einer fremden Erfindung.

Lambert



Lambert ein würdiges Mitglied dieser Akademie machte schon vor mehreren Jahren eine neue Methode Sonnenfinsternisse zu verzeichnen bekannt, blieb aber den Beweis davon für allezeit schuldig, der um so weniger hätte wegbleiben sollen, als er sich nicht jedem von sich so leicht darbietet. Ich versuchte es also, den Beweis aufzusuchen; und da ich alles auseinander setzte, ist nachfolgende Theorie von der stereographischen Projektion der Kugeln entstanden.

Ich übergebe diese Schrift der erlauchten Akademie zur Prüfung und wünsche, daß sie des Beyfalls nicht ganz unwürdig erkannt werden möchte.

Anton Dätzl.



§. 1.

Aus den gegebenen Linien BD, BG, AD, EG, die BC zu finden.
Man ziehe durch den als bekannt angenommenen Punkt C der BC, die αF mit DG parallel; so wird seyn

$$A\alpha : \alpha C = EF : FC; \text{ folglich}$$

$$A\alpha = \frac{\alpha C \times EF}{FC} = \frac{BD \times BC - EG}{BG} \quad \text{Also}$$

$$BC = AD - A\alpha = \frac{AD \times BG \times EG \cdot BD}{GD}$$

§. 2.

Wenn nebst der AD und EG die Entfernungen der Punkte D, G von der durch B gelegten Linie XZ bekannt sind, die Linie BC zu finden.

Weil die Dreyecke BDp und BGP ähnlich sind: so ist

$$BD : BG = Dp : GP; \text{ also auch}$$

$$BD : BD + BG = Dp : Dp + GP, \text{ und}$$

$$BD + BG : BG = Dp + GP : GP. \text{ Folglich}$$

$$\frac{BD}{GD} = \frac{Dp}{Dp + GP}; \text{ und } \frac{BG}{GD} = \frac{GP}{GP + DP}$$

weil $BD + BG = GD$ ist. Setzt man nun diese beyden Werthe in die oben für BC gefundene Gleichung: so erhält man

$$BC = \frac{AD \cdot GP + EG \cdot Dp}{GP + Dp}$$

§. 3.

§. 3.

Auf diese beyden geometrischen Sätze gründet sich die Theorie der stereographischen Projektionen der Kugeln, wovon ich das, was man, um eine Sonnenfinsterniß nach der lambertischen Methode zu verzeichnen, zu wissen nöthig hat, herleiten werde.

§. 4.

Es bezeichne DG die Durchschnittslinie der vertikalen Ebene mit der fundamentalen; EG den Abstand des Auges E von der Vertikalebene, und AD die Entfernung eines zu projektirenden Punktes A von eben derselben Ebene; BC die Fundamentallinie; BG und DB die Abstände des Auges und des sogenannten Punktes von der Tafel. Man soll die Lage des Punktes A auf der Tafel gegen die Vertikalebene finden.

Es sey $BG = \delta$; $DB = d$, $AD = f$, $EG = 1$; so ist die Entfernung des projektirten Punktes A auf der Tafel von der Vertikalebene

$$= BC = \frac{f\delta + 1d}{\delta + d}; \text{ zufolge des 1. S. oder wenn das Aug in der Vertikalebene gesetzt wird. } = \frac{f}{\delta + d}$$

§. 5.

Es bezeichne DE die Ebene des Auges, die durch das Aug E und den Punkt A gelegt, auf der Fundamentalebene senkrecht steht; BC die Durchschnittslinie der Tafel mit der Ebene des Auges; DG die Durchschnittslinie der Fundamentalebene mit eben derselben; XZ
die

die Fundamentallinie. Man soll die Lage des Punkts A auf der Tafel gegen die Fundamentalebene finden.

Es sey der Abstand des Auges E von der Tafel $= GP = \delta$, der des zuprojectirenden Punkts $= Dp = d$, die Höhe des Auges über der Fundamentalebene $= EG = a$, die des Punkts $= AD = \alpha$; so wird zufolge des 2 S. die Höhe des projectirten Punkts auf der Tafel über der Fundamentalebene

$$= BC = \frac{\alpha \delta + a d}{\delta + d}$$

§. 6.

Die perspektivische Höhe des Punkts A zu finden, oder was eines ist, die Linie Cc.

Man setze in obiger Gleichung $\alpha = 0$; so erhält man die Höhe des projectirten Punkts D über der Fundamentalebene

$$= Bc = \frac{a d}{\delta + d}$$

und folglich auch $Cc = BC - Bc = \frac{\alpha \delta + a d}{\delta + d} - \frac{a d}{\delta + d} = \frac{\alpha \delta}{\delta + d}$

§. 7.

Wenn OTH die Fundamentalebene vorstellt, TH die Fundamentallinie, OH die Durchschnittslinie der fundamentalen Ebene mit der vertikalen, und die krumme Linie KLR in der Ebene LFH liegt, welche die Fundamentalebene in FH schneidet, und gegen dieselbe unter dem Winkel LFM geneigt ist: die Projektion jedes Punkts derselben z. B. L zu finden.

Man

Man nehme die Linien ML, MN, NT, welche die Lage des Punktes L gegen die Tafel, die vertikale und fundamentale Ebene bestimmen, indeß als bekannt an: so wird, wenn $TN = f$, $MN = d$, $OT = \delta$ und der Abstand des Auges O von der Vertikalebene $= l = o$ gesetzt werden, die Entfernung des projectirten Punktes L von der Vertikalebene seyn

$$= \frac{f \delta}{\delta + d} \quad (4 \text{ S.})$$

Setzt man nun auch die Höhe des Punktes L über der Fundamentalebene $= \alpha$, die Höhe des Auges über eben derselben Ebene $= a$, wird die Entfernung des projectirten Punktes von der Fundamentalebene

$$= \frac{\alpha \delta + a d}{\delta + d}$$

seyn, und also die La-

ge des projectirten Punktes auf der Tafel ihre volle Bestimmung haben. Wären nun für jeden einzelnen Punkt die Werthe der Linien f , d , α , bestimmt; so würden auch beyde gefundenen Formeln die Projection jedes andern Punktes der krummen Linie allgemein ausdrücken. Allein wenn die Natur der krummen Linie KLR durch eine Gleichung zwischen rechtwinklichten Ordinaten ausgedrückt, bekannt ist, und die Werthe für f , d , α daraus hergeleitet worden; so werden sie in die gefundenen Formeln versetzt dieselben eben so allgemein machen, als sie es selber sind. Die Werthe für f , d , α werden aus den Koordinaten der krummen Linie KLR also hergeleitet. Es sey der Winkel, welchen die Durchschnittslinien FH, TH in H ausmachen $= m$; der Neigungswinkel LFM der Ebene LFH gegen die Fundamentalebene $= n$. Aus T werde ein Perpendikel auf FH in E gefällt, und E für den Anfang der Abscissen angenommen; so werden $EF = x$ und $FL = y$ die Koordinaten der krummen Linie bezeichnen. Weil in dem Dreyecke FML die Seite FL, und die Winkel F, und M, deren letzter ein rechter ist, bekannt sind; so ist

K

I: y

$$I: y = \sin. n: ML,$$

$$I: y = \cos. n: MF; \text{ also } ML = x = y \sin. n,$$

$$MF = y \cos. n.$$

Es ist ferner in dem bey F rechtwinklichten Dreyecke MFG, worinn die Seite MF und die beyden Winkel M und G bekannt sind,

$$MG: FM = 1: \cos. m.$$

$$FG: MG = \sin. m. 1. \quad \text{Also } MG = \frac{FM}{\cos. m} = \frac{y \cos. n}{\cos. m}$$

$$FG = \sin. m. MG. = \frac{y \sin. m. \cos. n}{\cos. m}; \quad NG = MN -$$

$$MG = d - \frac{y \cos. n}{\cos. m}.$$

In dem rechtwinklichten Dreyecke GNH ist

$$NG: NH = \sin. m: \cos. m; \text{ folglich, weil } TH = b, \text{ und } NH = b - f \text{ ist, } NG = \frac{(b-f) \sin. m.}{\cos. m} = \frac{d \cos. m - y \cos. n}{\cos. m}$$

$$\text{Also } d = \frac{(b-f) \sin. m + y \cos. n}{\cos. m}.$$

In dem rechtwinklichten Dreyecke ETH ist

$$EH: b = \cos. m: 1; \text{ folglich } EH = b \cos. m,$$

$$FH = b \cos. m - n \quad \text{und} \quad HG = b \cos. m - n - \frac{y \sin. m. \cos. n}{\cos. m}.$$

$$\text{Ferner ist in dem rechtwinklichten NGH, } NH: HG = \cos. m: 1. \text{ Also } NH = HG \cos. m = b \cos. m - n \cos. m - y \sin. m. \cos. n = b - f.$$

Hieraus

Hieraus ergibt sich $f = -b \cdot \cos^2 m + b + x \cos m + y \cdot \sin m \cdot \cos n$; und wenn man den für $b-f$ gefundenen Werth in obige für d gefundene Gleichung versetzt, auch $d = \frac{(b \cdot \cos^2 m - x \cos m - y \cdot \sin m \cdot \cos n) \sin m + y \cdot \cos n}{\cos m}$

$$\frac{\sin m \cdot \cos n + y \cdot \cos n}{\cos m}$$

$$b \cdot \cos m \cdot \sin m - x \sin m + y \cos n (1 - \sin^2 m) + \frac{y \cos n (1 - \sin^2 m)}{\cos m}$$

Beide Ausdrücke lassen sich noch geschmeidiger machen, wenn man betrachtet, daß $1 - \cos^2 m = \sin^2 m$, und $1 - \sin^2 m = \cos^2 m$ ist. Solchemnach wird

$f = +b \sin^2 m + x \cos m + y \cdot \sin m \cdot \cos n$, und $d = b \cos m \cdot \sin m - x \sin m + y \cdot \cos m \cdot \cos n$. Läge TN auf der entgegengesetzten Seite, so wäre $NH = b + f$, und hiemit $b + f = b \cos^2 m - x \cos m - y \sin m \cdot \cos n$; und hieraus ergäbe sich $f = -b \sin^2 m + x \cos m + y \cdot \sin m \cdot \cos n$. Eben so fände man $d = b \cos m \cdot \sin m + x \sin m - y \cos m \cdot \cos n$, wenn die Linien EF und FL auf den entgegengesetzten Seiten lägen. Demnach kann man allgemein setzen

$$f = \pm b \cdot \sin^2 m + x \cos m + y \sin m \cdot \cos n, \quad d = b \cos m \cdot \sin m \mp \sin m \cdot \cos m \cdot \cos n, \quad \text{wo die oben stehenden Zeichen für die Fälle gelten, welche in der Zeichnung ausgedrückt worden. Setzt man nun die bisher gefundenen Werthe in den beyden Gleichungen } \frac{f}{\delta + d} \text{ und } \frac{\alpha \delta + a d}{\delta + p}$$

an die Stelle der α , f , und d ; so erhält man

$$\frac{f \delta}{\delta + d} = \frac{\delta (\pm b \sin^2 m + x \cos m + y \sin m \cdot \cos n)}{\delta + b \cos m \cdot \sin m \mp x \sin m \pm y \cos m \cdot \cos n} = x';$$

$$\frac{x\delta + ad}{\delta + d} = \frac{\delta y \cdot \sin. n + a(b \cos m \cdot \sin m \mp \sin m \pm \cos m \cdot \cos. n)}{\delta + b \cos. m \cdot \sin. m \mp x \sin m \pm y \cos. m \cdot \cos. n} = y$$

wo x und y Koordinaten der projectirten krummen Linie bezeichnen, deren erstere auf der Fundamentallinie TH von T an gerechnet wird, die zweite aber auf der ersten an ihrer äußersten Gränze senkrecht steht: daß also beyde die Lage jedes einzelnen Punkts der projectirten krummen Linie auf der Tafel bestimmen, wenn die Natur derselben als bekannt vor ausgesetzt wird.

§. 8.

Bis hieher haben wir aus den zween ersten geometrischen Sätzen einen allgemeinen für die gesammte Perspektiv hergeleitet; nun wollen wir denselben insbesondere auf die stereographische Projektion der Kugeln anwenden. Die stereographische Projektion unterscheidet sich von der orthographischen durch anders nichts, als daß man voraussetzt, daß das Aug nicht unendlich weit, wie bey dieser, sondern nur um den Halbmesser der Kugel von der Tafel entfernt sey; daher hier δ allemal $= r$ angenommen werden muß.

§. 9.

Es stelle OKR die Fundamentalebene, KR die Fundamentallinie vor, und zugleich die Durchschnittslinie der halben Kreisfläche EKLK mit der Tafel und der Fundamentalebene, zu welcher letztern sie unter einem spitzigen Winkel n sich neiget, da indessen die andere Hälfte sich unter die Fundamentalebene hinunter versenket, und einen gleichen Winkel mit derselben gestaltet, aber auf der entgegengesetzten

Seite

Seite der gleichfalls hinunter verlängerten Tafel. Man soll die Projektion des vertikalen Durchmessers des Kreises finden.

Weil in diesem Falle die Durchschnittslinie $F. 2$ und $3. KR$ in die Fundamentallinie fällt; so wird $m = 0$, $TH = EH$: daß also E mit T , und weil F und T Mittelpunkte größter Kreise einer Kugel sind, auch mit F , und folglich auch mit N in einem Punkt zusammen fällt. Weil nun $NH = b - f = 0$, und $f = 0$ ist, so wird auch $b = 0$: daß also auch H mit den andern vier Punkten in dem Mittelpunkte der Kugel zusammen fällt. Nach diesen Voraussetzungen findet man aus der allgemeinen Formel $\frac{r \sin. n}{r \pm \cos. n} = \frac{\sin. n}{1 \pm \cos. n}$ wenn $r = 1$. gesetzt wird.

Man findet hier einen doppelten Werth für $\frac{1}{2}$. Weil nun die eine Hälfte des Durchmessers, der projicirt werden soll, vor der Tafel, die andere hinter derselben liegt; so sind hier beyde Werthe brauchbar; denn eben diese zween verschiedenen Fälle drückt die Formel aus. Demnach wird die Projektion des vertikalen Durchmessers

$$= \frac{\sin. n}{1 + \cos. n} + \frac{\sin. n}{1 - \cos. n} \text{ seyn. Diese Formel läßt sich leicht so geschmeidig machen, als es zum verzeichnen erfordert wird, wenn man}$$

für n das Komplement zu 90 annimmt, oder den Winkel, welchen die halbe Kreisfläche mit der Tafel macht. Es sey dieser Winkel $= \pi$; so ist die Projektion des Durchmessers

$$= \frac{\cos. \pi}{1 + \sin \pi} + \frac{\cos. \pi}{1 - \sin \pi} = \frac{\cos. \pi (1 + \sin. \pi + 1 - \sin \pi)}{1 - \sin^2 \pi} =$$

$$\frac{2. \cos. \pi}{\cos.^2 \pi} = \frac{2}{\cos. \pi} = 2. \sec. \pi.$$

§. 10.

Wenn (Fig. 4.) LO den Vertikalkreis bezeichnet, LI die Durchschnittslinie des Kreises, der gegen die Fundamentalebene unter dem Winkel n sich neiget, und unter dem Winkel π gegen die Tafel, wovon PF die Durchschnittslinie mit dem Vertikalkreise anzeigt, und überhaupt alle Buchstaben die Bedeutung behalten, die sie in der dritten Figur hatten; wird die Projektion des Durchmessers LI seyn $= Pp = 2 \sec. \pi$, und $Pc \frac{1}{2} Pp = \sec \pi$.

§. 11.

Wenn HI den Horizont eines Ortes Z bezeichnet, LH die Polhöhe: die Projektion des nördlichen Pols L auf dem Horizonte zu finden.

Weil der Halbmesser FL über der Fundamentalebene erhaben liegt, so ist seine Projektion

$$FP = \frac{\sin. n}{1 + \cos n} = \frac{\sin. n}{\frac{\sin. n}{\operatorname{tng.} \frac{1}{2} n}} = \operatorname{tng.} \frac{1}{2} n = \operatorname{tng} \frac{(90 - \pi)}{2} = \operatorname{tang}(45 - \frac{1}{2} \pi)$$

folglich ist auch die Lage des projecirten Pols L auf der Durchschnittslinie FH bestimmt.

§. 12.

Die Projektion des horizontalen Durchmessers KR zu finden. (Fig. 3.)

Weil

Weil KR in der Fundamentallinie liegt, so wird $d=0$. Also ergibt sich aus der allgemeinen Grundformel $KR=2 \dot{y}=2x=2r$.

§. 13.

Die Projektion des Kreises LR1O ist ein Kreis. (Fig. 3.)

Denn da die Projektion des horizontalen Halbmessers FR ist = $r=1$, des vertikalen Durchmessers L1 seine = $2 \sec. \pi = Pp$, und des über der Fundamentalebene erhabenen Halbmessers FL seine = $\text{tng. } \frac{1}{2} n$; (Fig. 4.5.) so ist $Fp=2 \sec. \pi - \text{tng. } \frac{1}{2} n$

$$= \frac{2}{\cos. \pi} - \text{tng. } \frac{1}{2} n =$$

$$\frac{2}{\sin. n} - \text{tng. } \frac{1}{2} n = \frac{2}{\sin. n} - \frac{1 - \cos. n}{\sin. n}.$$

Soll nun die Projektion ein Kreis seyn: so muß $PF \times Fp = FR^2$ seyn: (Fig. 5.) also

$$\left(\frac{2}{\sin. n} - \frac{1 - \cos. n}{\sin. n} \right) \times \frac{1 - \cos. n}{\sin. n} = rr = 1. \quad \text{Dieses zu be-}$$

weisen multiplicire ich die beyden Faktorn durcheinander; so wird

$$\left(\frac{2}{\sin. n} - \frac{1 - \cos. n}{\sin. n} \right) \times \frac{1 - \cos. n}{\sin. n} = \frac{1 + \cos. n}{\sin. n} \times$$

$$\frac{1 - \cos. n}{\sin. n} = \frac{1 - \cos.^2 n}{\sin.^2 n} = \frac{\sin^2 n}{\sin^2 n} = 1.$$

Folglich ist die Projektion ein Kreis, dessen Halbmesser = $\sec. \pi$ ist.

§. 14.

§. 14.

Wenn die Ebene eines Meridians die Tafel vorstellt, und der Aequator die Fundamentalebene, und überdem der Winkel eines zweyten Meridians mit dem ersten gegeben ist, die Projektion des horizontalen Durchmessers des letztern zu finden.

Es sey A E P Q der erste Meridian, A E Q die durch das Aug O gelegte Fläche des Aequators, P O die Durchschnittslinie der Vertikalebene mit der Tafel, und ψ, λ bezeichnen die Winkel, welche der Meridian I P p mit der Tafel und der Vertikalfläche macht. Weil für den gegebenen Fall wieder die Punkte E, F, H, T in einen zusammenfallen, $n = 90^\circ$, $m = \psi$, $b = 0 = y$ ist; so erhält man aus der allgemeinen Formel $x' = \frac{\cos. \psi}{1 + \sin. \psi} = \frac{\sin. \lambda}{1 + \cos. \lambda}$ weil $\psi + \lambda = 90^\circ$.

Demnach ist die Projektion des ganzen Durchmessers

$$= \frac{\sin. \lambda}{1 - \cos. \lambda} + \frac{\sin. \lambda}{1 + \cos. \lambda} = \frac{2 \sin. \lambda}{\sin^2 \lambda} = \frac{2}{\sin. \lambda} = \frac{2}{\cos. \psi} = 2 \sec. \psi.$$

§. 15.

Den Abstand des Mittelpunkts r des projecirten Durchmessers vom Augpunkte O zu finden.

Man ziehe von dem projecirten Halbmesser $= \frac{1}{\cos. \psi}$ die Projektion des dießseits der Tafel liegenden Halbmessers $= \frac{\cos. \psi}{1 + \sin. \psi}$;

so

$$\begin{aligned}
 \text{so wird } Ir - Ol = Or &= \frac{1 \cdot \cos. \psi}{\cos. \psi + 1 + \sin. \psi} = \\
 \frac{\sin. \psi + 1 - \cos.^2 \psi}{\cos. \psi (1 + \sin. \psi)} &= \frac{\sin. \psi + \sin.^2 \psi}{\cos. \psi + \cos. \psi \sin. \psi} = \\
 \frac{\sin. \psi + 1}{\cos. \psi} &= \frac{\sin. \psi + 1}{\cot. \psi + \cos. \psi} = \frac{\sin. \psi + 1}{\cot. \psi + \cos. \psi} = \\
 \frac{\sin. \psi}{\cot. \psi} + \cos. \psi &= \frac{\sin. \psi + 1}{\cot. \psi} = \text{tng. } \psi. \\
 \frac{\sin. \psi + 1}{\cot. \psi + \sin. \psi \cdot \cot. \psi} &= \frac{1}{\cot. \psi} = \text{tng. } \psi.
 \end{aligned}$$

§. 16.

Die Projektion des Kreises IP p ist ein Kreis, dessen Halbmesser = sec. ψ ist.

Der Beweis wird, wie (§. 13.) auf eben dieselbe Weise geführt, daher es unnöthig ist, denselben hier zu wiederholen.

§. 17

Da man nun den Halbmesser der Projektion, und zugleich den Ort seines Mittelpunktes kennt, so kann es nicht mehr schwer seyn, denselben merklich zu verzeichnen.

§. 18.

Stellt man sich vor, daß über O eine gerade Linie $= r$ senkrecht aufgerichtet sey, an deren Ende das Aug sich befindet: und daß ferner der Kreis A P Q sammt dem I P p sich um die auf ihm senkrecht stehende Linie herumdrehe; so werden die beyden Kreise in Ansehung des Auges ihre Lage nicht verändern, und also die Projektion des letztern immer die nämliche bleiben; mit dem Unterschiede, daß der Bogen des projicirten Kreises, der auf der Tafel zu liegen kommt, für jede verschiedene Lage der Durchschnittslinie P O, gleichfalls eine verschiedene Lage enthält. Ist demnach die Lage der Durchschnittslinie bestimmt; so ist die des projicirten Bogens seine gleichfalls bestimmt.

§. 19.

Aus dem 14 §. folgt noch dieß, daß für $\psi = 90^\circ$, der Halbmesser der Projektion $= \sec. \psi = 8$ werde; welches anzeigt, daß die Projektion eines Kreises, der durch das Aug gelegt ist, und auf der Tafel senkrecht steht, eine gerade Linie ist.

§. 20.

Es sey Fig. 7. H i r H der äußerste Rand der von der Sonne beleuchteten halben Erdkugel, der zugleich die Stelle der Tafel vertreten soll, und in Z der Ort der Sonne H² R O H der Meridian, der durch den Ort der Sonne Z und des Pols P gelegt worden, und zugleich die Vertikalebene; durch P, den Ort des nördlichen Pols, und den Mittelpunkt C sey ein anderer Meridian P i p r gelegt, der mit der Vertikalebene einen gegebenen Winkel H P i $= \phi$ einschließt; man soll die

Pro.

Projektion dieses letztern Meridians finden : vorausgesetzt , daß auch die Abweichung der Sonne Z, die HP bekannt sey.

Weil die Kreise $H i R r$, $P i p r$ sich irgend in i schneiden müssen, und $C i$ die Durchschnittslinie ihrer beyden Ebenen bezeichnet : so erhält man des Durchmessers $P p$ Projection

$$\frac{2}{\cos. \pi} = 2 \sec. \pi =$$

$P' p$ (§. 9), wenn π wie daselbst , den Neigungswinkel $H C P$ bezeichnet ; und des Durchmessers $i r$ seine , weil er in der Tafel liegt , $= r = 1$ (§. 12.) Man verzeichne die Projektionen der beyden Durchmesser $P p$, $i r$ besonders , und setze sie unter dem Winkel $H C i$, dessen Sinus $= \sin. HP$, $\sin HP i$ ist, zusammen ; so erhält man vier Punkte , welche in der Projection des Kreises $P p r m$ liegen , nämlich i , P' , r und p' , und , da dieselbe ein Kreis ist (§. 16.) desselben Halbmesser und Mittelpunkt bestimmen. Denn da $i r$ die Durchschnittslinie des Meridians mit dem Horizonte anzeigt ; so muß der Mittelpunkt des projecirten Kreises irgend in der Linie liegen , die auf $i r$ senkrecht steht , und in der Tafel liegend ist ; und da eben derselbe auch irgend auf der Linie $c f$ zu liegen kömmt , die aus dem Mittelpunkt c der Sehne $P' p$ senkrecht aufgerichtet worden : so ist f der Mittelpunkt des projecirten Kreises , und $P f$ der Halbmesser derselben.

§. 21.

Bey eben denselben Voraussetzungen den Halbmesser $P' f$ zu finden.

Weil $P' C = \frac{\cos \pi}{1 + \sin. \pi}$ (§. 11.), $P' c = \frac{1}{2} P' p = \frac{1}{\cos. \pi}$ (§. 20.)

L 2 so

$$\begin{aligned}
 \text{so wird } Cc &= P'c - P'C = \frac{1}{\cos. \pi} - \frac{\cos. \pi}{1 + \sin. \pi} = \\
 &= \frac{1 - \cos. \pi + \sin. \pi}{\cos. \pi + \cos. \pi \sin. \pi} = \frac{\sin. \pi + 1}{\cos. \pi + \cos. \pi} = \frac{\sin. \pi + 1}{\cot. \pi + \cos. \pi} = \\
 &= \frac{\sin. \pi + 1}{\cot. \pi + \cot. \pi \sin. \pi} = \frac{\sin. \pi + 1}{\cot. \pi (1 + \sin. \pi)} = \frac{1}{\cot. \pi} = \text{tng. } \pi.
 \end{aligned}$$

Da nun $\text{tang. } \pi = \sin. \pi \sec. \pi$; so ist auch $Cc = \sin. \pi \sec. \pi$.

In dem bey c rechtwinklichten Dreyecke, wenn man cf zum Radius annimmt, ist $Cc : cf = \text{tng. } f : 1$; also $Cc = cf. \text{tng. } f = cf. \text{tng. } HCi$. Nun ist in dem sphärischen Dreyecke HiP , das bey H rechtwinklicht ist: $1 : \sin. PH = \text{tang. } HPi : \text{tng. } Hi$, folglich $\text{tng. } Hi = \text{tng. } HCi = \sin. PH. \text{tng. } HPi$. Dieser Werth von $\text{tng. } HCi$ in obige Gleichung gesetzt, giebt $Cc = cf \sin. PH. \text{tng. } HPi = cf. \sin. \pi. \text{tng. } \phi$, wenn man PH allgemein mit π und HPi mit ϕ benennt.

Diese beyden für Cc gefundenen Werthe einander gleichgesetzt, geben $\sin. \pi. \sec. \pi = cf. \sin. \pi. \text{tng. } \phi$, woraus $cf = \frac{\sec. \pi}{\text{tng. } \phi}$ gefunden wird.

Da nun $P'C = \frac{\cos. \pi}{1 + \sin. \pi}$ und $PZ = 90^\circ - \pi$ (S. 7.); so wird Fig. 8. $\cos. \pi = \sin. (90^\circ - \pi)$ und $\sin. \pi = \cos. (90^\circ - \pi)$; also $P'C =$

$$= \frac{\sin (90^\circ - \pi)}{1 + \cos (90^\circ - \pi)} = \frac{\sin (90^\circ - \pi)}{\sin (90^\circ - \pi)} \frac{\operatorname{tng} (90^\circ - \pi)}{2};$$

$$= \frac{\operatorname{tng} (45^\circ - 12\pi)}{1 + \operatorname{tng} \frac{1}{2} \pi} = \frac{\cos \frac{1}{2} \pi - \sin \frac{1}{2} \pi}{\cos \frac{1}{2} \pi + \sin \frac{1}{2} \pi}$$

$$\left(\text{weil } 1 - \frac{\sin \frac{1}{2} \pi}{\cos \frac{1}{2} \pi} = 1 - \operatorname{tng} \frac{1}{2} \pi \text{ und } 1 + \frac{\sin \frac{1}{2} \pi}{\cos \frac{1}{2} \pi} \right.$$

$$\left. = 1 + \operatorname{tng} \frac{1}{2} \pi. \right) = \sec \pi - \operatorname{tng} \pi.$$

Da ferner $Cp' = \frac{\cos \pi}{-\sin \pi}$; so ist aus gleichen Gründen auch

$$Cp' = \frac{\sin (90^\circ - \pi)}{1 - \cos (90^\circ - \pi)} = \frac{\sin (90^\circ - \pi)}{\sin (90^\circ - \pi) \operatorname{tng} (90^\circ + \pi)}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tng} (90^\circ - \pi)} = \frac{1}{\cot (90^\circ + \pi)} = \frac{\operatorname{tng} (90^\circ + \pi)}{2}$$

$$= \frac{\operatorname{tng} (45^\circ + \frac{1}{2} \pi)}{1 + \operatorname{tng} \frac{1}{2} \pi} = \frac{\cos \frac{1}{2} \pi + \sin \frac{1}{2} \pi}{1 - \operatorname{tng} \frac{1}{2} \pi} = \frac{\cos \frac{1}{2} \pi - \sin \frac{1}{2} \pi}{\cos \frac{1}{2} \pi + \sin \frac{1}{2} \pi}$$

$= \sec \pi + \operatorname{tng} \pi$. Daher ergibt sich $Pp' = \sec \pi - \operatorname{tng} \pi + \sec \pi + \operatorname{tng} \pi = 2 \sec \pi$; welches (S.S. 9, 21.) auch durch andere Wege gefunden worden.

86 Erläuterung der Lambertischen Methode

Weil nun $c f = \frac{\sec. \pi}{\text{tng. } \phi} = \sec. \pi \cot. \phi$: so wird $P^1 f^2 = c f^2 +$
 $P^1 c^2 = \sec^2 \pi \cot^2 \phi + \sec^2 \pi = \sec^2 \pi (\cot^2 \phi + 1) = \text{cosec}^2 \phi$.
 $\sec^2 \pi$; also $P^1 f = \text{cosec. } \phi \cdot \sec. \pi$. Demnach ist $P^1 f : P^1 c = \text{cosec. } \phi : \sec. \pi$: $\sec. \pi = 1$: $\sin P^1 f c$: daß also $\sin P^1 f c = \text{cosec. } \phi$.
 Da nun überhaupt $\sin. A = \text{cosec. } A$: so folgt, daß $c P^1 f = 90^\circ - \phi$ und $c f = \text{tang. } (90^\circ - \phi)$.

§. 22.

Bey eben denselben Voraussetzungen, die Projektionen so vieler Meridiane durch Zeichnung zu finden, als man verlangt. Z. B. von 15 zu 15 Graden.

Es stelle $H N R$, wie in voriger Figur, die Ebene, welche durch die Gränze der beleuchteten und unbeleuchteten Halbkugel gelegt worden, und zugleich die Tafel vor, und $N T$. $H R$ zweien aufeinander senkrecht stehende Durchmesser: so ist C der Ausgangspunkt, $N T$ die Fundamentallinie, $H R$ die Projektion des durch das Aug und die beyden Pole gelegten Vertikalkreises, der zugleich der Meridian des Ortes ist.

Es sey nun die Abweichung der Sonne für eine bestimmte Zeit = 22° , so mache $H G = 22^\circ$, und ziehe durch N und G eine gerade Linie, welche $C H$ in P^1 schneidet, so ist $P^1 C = \text{tang. } \left(\frac{90^\circ - 22^\circ}{2} \right)$

die Projektion der halben Erdaxe, und P^1 der Ort des nördlichen Pols auf der Tafel (§. 11.) Man mache $T E = 2 H G$, und ziehe durch N und E die Linie $N E$, welche $C R$ in c schneidet, so ist $C c = \text{tang. } 22^\circ$ (§. 21); und wenn aus c eine gerade Linie $c X$ mit $C T$ parallel

parallel gezogen wird, werden alle Mittelpunkte der projectirten Meridiane auf derselben zu liegen kommen. Legt man noch an $P^1 c$ die Winkel $c P^1 i = 15^\circ$, $c P^2 = 30^\circ$, $c P^3 = 45^\circ$, $c P^4 = 60^\circ$, $c P^5 = 75^\circ$, und bemerket die Durchschnittspunkte 1 2 3 4 5 in der Linie $c X$, und beschreibt aus denselben mit den Halbmessern P^1 , P^2 , P^3 , P^4 , P^5 nach der Ordnung so viele Kreise; so erhält man die Projektionen der Meridiane, welche den Meridian des Ortes unter den Winkeln 75° , 60° , 45° , 30° , 15° schneiden. Denn es ist $c i = \text{tang } 15^\circ = \text{tng. } (90^\circ - 75^\circ)$, $c 2 = \text{tang. } 30^\circ = \text{tng. } (90^\circ - 60^\circ)$ u. s. f.

Weil $P^1 c = \sec \pi = N c$ (§. 10); so findet man auch die Projektion des Meridians, der die Fundamentalebene in $N T$ durchschneidet, und gegen die Tafel unter dem Winkel π sich neiget, wenn man aus c mit $P^1 c$ einen Bogen wie $N P^1 T$ beschreibt.

§. 23.

Es sey $H Z R N$ eine Kreisfläche, die durch den Ort der Sonne S und die beyden Pole gelegt worden; $H R$ sey die Durchschnittsline des Horizonts mit dieser Ebene; $K L$ die Durchschnittsline des Kreises, welcher die beleuchtete Halbkugel von der unbeleuchteten absondert. Man soll auf diesen letztern den Ort der Sonne und des nördlichen Pols, und den Parallelkreis $Z c$ für einen gegebenen Ort Z projectiren.

Man setze das Aug der Sonne gegenüber in O : so wird die Projektion des Bogens $S Z = \text{tng. } \frac{1}{2} S C Z = C \zeta$, die des Bogens $S P$, $= \text{tng. } \frac{1}{2} S C P = C \pi$, die des Bogens $A c$, $= \text{tang } \frac{1}{2} A C c = C \gamma$ (§. 10).

Nun

Nun ist $SZ = SP - HA$: also $CZ = \text{tang. } \frac{SP - HA}{2}$. Und
 weil $ZP = Pc$; so ist $Zc = 2 ZP = 2 HA$: also $Sc = SZ + 2 HA = SP - HA + 2 HA = SP + HA$, und $\text{tang. } \frac{1}{2} SCc = \text{tang. } \frac{SP + HA}{2} = C\gamma$: daß also die ganze Linie $C\gamma$ bekannt ist = tang.
 $\frac{SP + AH}{2} - \text{tang. } \frac{SP - AH}{2}$. Nimmt man also das Mittel, und
 beschreibt daraus mit $C\gamma$ einen Kreis; so ist derselbe die Projektion

des Parallelkreises für den Ort Z. Denn daß die Projektion eines Parallelkreises wieder ein Kreis sey, erhellet daraus, daß $ZL.Lc = ZL.L\gamma$ ist, und die auf ZL oder $C\gamma$ senkrecht stehende Semiordinate in L dem Parallelkreis und seiner Projektion gemein ist.

§. 24.

Ich suchte die Projektion eines Parallelkreises auch unmittelbar durch die Grundformel auf; die Rechnung fiel aber so weitsäufig aus, daß ich alle Lust dabey verlor, sie nochmal zu wiederholen, und ordentlich auseinander gesetzt zu Papier zu bringen; übrigens fand ich das nämliche.

§. 25.

Um die eben gefundenen beyden Ausdrücke $\text{tang. } \frac{SP + AH}{2}$,
 $\text{tang. } \frac{SP - AH}{2}$

tang. $\frac{SP - AH}{2}$ noch bequemer einzurichten, muß ich anmerken, daß

$$SP = 90^\circ - PL$$

$$AH = 90^\circ - AZ; \text{ also}$$

$$SP + AH = 180^\circ - PL - AZ; \text{ folglich}$$

$$\text{tang. } \frac{SP + AH}{2} = \text{tang. } (90^\circ - \frac{PL - AZ}{2}) =$$

$$\text{cot. } \frac{PL + AZ}{2}; \text{ und}$$

$$SP = SZ + PZ, \quad AZ = SZ + AS$$

$$AH = PZ \quad PL = AS; \text{ also}$$

$$SP - AH = SZ + PZ - PZ = SZ,$$

$$AZ - PL = SZ + AS - AS = SZ; \text{ folglich}$$

$$SP - AH = AZ - PL, \text{ und } \text{tang. } \frac{SP - AH}{2} = \text{tang. } \frac{AZ - PL}{2}.$$

§. 26.

Bei den Voraussetzungen des 23. §. so viele Parallellkreise zu projectiren, als man verlangt, z. B. von 10 zu 10 Graden.

Es sey fig. 11. $PL = AS = OQ$ die Declination der Sonne $= 22^\circ$. Man ziehe OA, OQ ; so wird erstere den Durchmesser LK in α durchschneiden, letztere in M , wenn beyde OQ, CL , so viel es nöthig ist, verlängert werden, und αM wird der Durchmesser der Projektion des Aequators AQ seyn: daß also mehr nicht nöthig ist, als den Mittelpunkt α zu suchen, um daraus mit der gehörigen Oeffnung des Zirkels den

M

pro

projicirten Kreis beschreiben zu können. Denn wenn der Aequator der zu projicirende Parallelfreis selbst ist, wird $AZ = 0$ (Fig. 10.) folglich

$$\cot. \frac{PL + AZ}{2} = \cot. : \frac{1}{2} PL = \tan. \frac{180 - PL}{2} \text{ und } \frac{AZ - PL}{2} = \tan. \frac{PL}{2} \text{ daß also } O\alpha = \frac{PL}{2} \text{ und } CM = \frac{PL}{2}$$

Da nun ALQ ein halber Kreis ist; so theile man selben beyderseits von A und Q bis P von 10° zu 10° ein, wie die Zeichnung anzeigt, und ziehe die geraden Linien $O10^\circ$, $O10^\circ$, die, wenn es nöthig ist, verlängert die Linie αM irgend in zweenen Punkten m n schneiden werden, welche den Durchmesser des projicirten Parallelfreises bestimmen, dessen Abstand vom Aequator $= 10^\circ$ ist. Denn es ist $Cn = \tan. \frac{A10 - PL}{2} = \tan. \frac{10^\circ - 22^\circ}{2}$, und $Cm = \tan. \frac{180 - 10^\circ - 22^\circ}{2}$

Auf solche Weise wird die Projektion jedes andern Parallelfreises gefunden.

§. 27.

Es sey MN die Durchschnittslinie der Ecliptik mit dem Breitenkreise $M\pi N\pi$, der zugleich die Stelle der Tafel vertritt, $\pi\pi$ die Durchschnittslinie des Weichungskreises $P\pi p\pi$ mit eben demselben, und zugleich die Aye der Ecliptik; Pp die Aye des Aequators: Man soll die Projektion derselben auf der Tafel finden, vorausgesetzt daß in S der Ort der Sonne auf der Tafel sey, und der Winkel $M\pi P$ nebst dem Bogen $P\pi$ gegeben worden.

Weil

Weil hier $\delta = 1$, $a = 0$, $b = 0$, $n = 90^\circ$ ist; so wird sich

$$y = \frac{x \cdot \cos. m}{1 + x \cdot \sin. m}, \quad x' = \frac{x \cdot \cos. m}{1 + x \cdot \sin. m}, \quad \text{woraus}$$

$$y = \frac{y' \cdot \cos. m}{\cos. m - x' \cdot \sin. m}, \quad n = \frac{x'}{\cos. m - x' \cdot \sin. m} \text{ ergibt.}$$

Da auch der Bogen $P\pi = e$ bekannt ist; so ist ferner $SF : FP = x$:
 $y = 1 : \cot. e$: Also $x' : \mu$, $\cos. m = 1 : \cot. e$; oder $x' : y = \cos. m$:
 $\cot. e$. Setzt man demnach $x' = \cos. m$; so wird $y = \cot. e$, und als
 so die Lage der Axe PC auf der Tafel bestimmt. Setzt man die Pro-
 jektion des Bogens $P\pi = e$; so ist $x' : y = 1 : \cot. e = \cos. m : \cot.$
 e ; folglich $\cot. e = \frac{\cot. e}{\cos. m}$, oder $\text{tang. } e = \frac{\cos. m}{\cot. e}$. Dann (§.

11.) die Projektion der halben Axe $PS = \text{tang. } (45 - \frac{1}{2} e)$; so ist
 die Grösse und die Lage der projectirten Axe des Aequators auf der
 Tafel bestimmt.

§. 28.

Der Bogen, welcher den Winkel misst, ist allemal der Länge
 der Sonne gleich, wie man es an einer künstlichen Erdkugel selbst
 leicht gewahr werden kann, wenn man derselben nur die Lage zu ge-
 ben weiß, welche obige Aufgabe voraussetzt.

§. 29.

Die Gründe, welche bisher vorgetragen worden, sind zur Kenntniß
 der lambertischen Methode, Sonnenfinsternisse zu verzeichnen, aller-

dinge nöthig, wenn man auch die Ursache der praktischen Regeln einzusehen verlangt. Aber dennoch laßen sie allein nicht ganz hin, wenn man nicht noch auf folgende mit Rücksicht nimmt, die ich noch kürzlich anführen werde.

§. 30.

1) Wenn die Sonne, und das Aug des Beobachters in Ansehung des Mondes scheinbar ruhen; fällt bey dem Monde die Parallaxe weg. 2) Wenn das Aug sammt der Projektion der Sonne in den Mittelpunkt der Tafel versetzt wird, werden die Ecliptik und die Mondbahn dem Auge daselbst gerade Linien zu seyn scheinen, die gegeneinander unter einem gewissen Winkel sich neigen; gerade, so wie sie aus der Sonne gesehen würden, oder aus dem Nadir auf der Erdoberfläche, wenn beyde, Sonne und Mond, unendlich weit von dem Auge entfernt wären: daß also die Projektionen beyder Bahnen orthographisch seyn müssen, wenn das Aug im Mittelpunkte der Tafel liegt. 3) Wenn O S. L1 zween gleiche Bögen zweener größter Kreise auf der Erdoberfläche sind; und die Erdpunkte der letztern von den Durchschnittspunkten der letztern beyderseits gleichweit abstehen; und in O das Aug, in S die Sonne, in L der Mond sich befinden; so wird L in I fassen, wenn der Ort des Auges mit dem der Sonne in S zusammenfällt. 4) Weil der Ort des Mondes orthographisch, jener der Sonne und des Auges aber stereographisch entworfen sind; muß man, um den Ort des Auges auf der Tafel in den Mittelpunkt derselben zu übertragen, mit der Tangente des halben Bogens OS den Sinus des Bogens $L1 = OS$ parallel ziehen, wo sodenn der äußerste Punkt des Sinus den Ort des Mondes bestimmen wird, in Ansehung des Auges, das in den Mittelpunkt der Tafel versetzt worden.

Don

Von der Weise für einen gegebenen Ort eine Sonnenfinsterniß zu verzeichnen.

§. 31.

1) Mit dem Halbmesser der Erde beschreibe man einen Kreis $A\pi Qp$, welcher die gemeinschaftliche Gränze der beleuchteten und unbeleuchteten halben Erdkugel anzeigt.

2) Man verzeichne darein, nach der sonst gewöhnlichen Art, die Ecliptik MN , und die respektive Mondbahn KR , und trage auf der letztern die Stunden des Tages da auf, wo sich der Mond um selbe Zeit auf seiner Bahn befindet. Die so verzeichneten beyden Linien werden zugleich die Durchschnittslinien ihrer Ebenen mit der Tafel, und die orthographischen Projektionen derselben seyn. (S. 31.)

3) Aus C errichte man die Perpendikel $C\pi$; so wird π der Pol der Ecliptik seyn. (S. 23.)

$$4) \text{ Vermittelt der Formel } \tan g. \epsilon = \frac{\cos. m.}{\cot. e.} \quad (\S. 27.)$$

suche man den Winkel $\gamma C\pi$, welchen die Projektion der Axe des Aequators mit der Axe der Ecliptik einschließt.

5) Um den Parallelkreis des gegebenen Ortes zu entwerfen, mache man $C\gamma$ = der Tangente der halben Summe aus der Aequatorshöhe, und dem Abstände der Sonne vom Pol, und $C\zeta$ = der Tangente der halben Differenz derselben Bögen (S. 23); und beschreibe aus

aus dem Mittelpunkte der $\zeta\gamma$ mit $\frac{1}{2} \zeta\gamma$ einen Kreis, der der Parallelkreis des gegebenen Ortes seyn wird.

6) Die Tangente des halben Bogens, welcher den Abstand der Sonne vom Pol mißt, trage man auf der Linie $C\gamma$ aus C in P (S. 11); und die Tangente der Declination der Sonne aus C in c (S. 21.) und beschreibe aus c mit CP den Kreisbogen APQ , welcher die Projektion des Mittagkreises der sechsten Stunde Morgens und Abends vorstellen wird.

7) Man verzeichne für den Theil des Tages, auf welchen die Sonnenfinsterniß fällt, z. B. für den Abend, so viele Meridiane als man nöthig hat, wenigstens von 15 zu 15 Graden (S. 22.) mit blinden Linien, und bemerke die Durchschnittspunkte in dem Parallelkreise $\gamma\beta\zeta$ so wird derselbe in die Abendstunden stereographisch getheilt seyn.

8) Für die vierte Stunde z. B. welche dem Anfange der Finsterniß vorgeht, ziehe man die Linie Cb , welche die Tangente des halben Bogens seyn wird, um welchen der gegebene Ort um 4 Uhr Abends von der Sonne entfernt ist; aus m aber ziehe man die Linie mn = dem Sinus desselben Bogens parallel mit Cb : so wird n der Ort des Mondes seyn, wenn das Aug aus b in C übertragen wird. (S. 30. 4).

9) Eben so verfähre man mit jeder andern Stunde; so wird nq die scheinbare Mondsbahn seyn, wie sie an dem gegebenen Orte gesehen wird, und in Stunden eingetheilt ist.

10) Aus C beschreibe man mit dem Halbmesser der Sonne den Kreis rt , welcher die Sonne vorstellt.

11) Mit der Summe der Halbmesser der Sonne und des Mondes durchschneide man die scheinbare Mondsbahn in I und F, und fälle aus C eine Perpendikel auf IF, so erhält man den Anfang, das Mittel, und das Ende der Finsterniß.

§. 32.

Diese Vorschrift gilt für jeden Fall; nur muß man C c aufwärts tragen, wenn die Declination der Sonne südlich ist. Die Ursache ergibt sich aus §. 1, wo man sich die 8. Fig. verkehrt vorstellen muß.

V e r b e s s e r u n g.

§. 21.

Wird der Halbmesser $P^i f = Mf$ kürzer also gefunden. Es sey §. 7. MC der Halbmesser des Kreises pM Pm auf ri senkrecht gezogen worden; so wird, wenn $H i P = \psi$, die Projektion desselben

$$= \frac{1}{\cos \psi} \quad (\S. 9.) = P^i f \quad (\S. 8.) \quad \text{Nun ist in dem bey H rechtwink-$$

lichten Dreyecke $H i P$, wenn $HP = \pi$, $HP i = \phi$ gesetzt wird, $\cos \psi = \cos \pi \cdot \sin \phi$, und also $P^i f$

$$= \frac{1}{\cos \psi} = \frac{1}{\cos \pi \sin \phi} = \sec \pi \cdot \cos \phi.$$

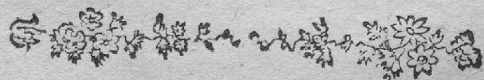


Fig. 1

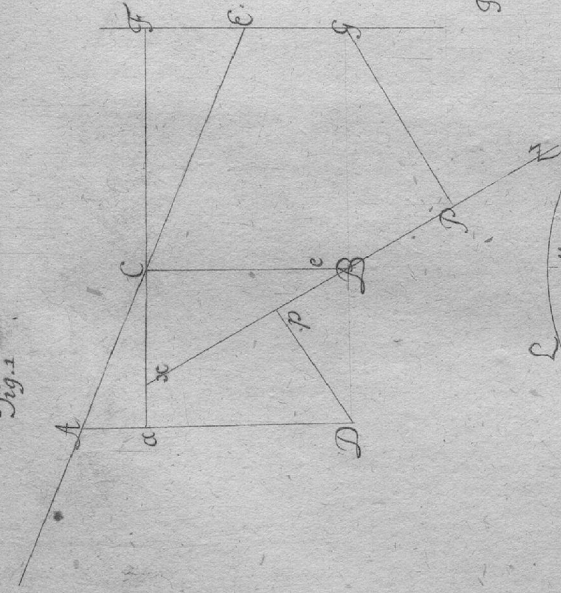


Fig. 2

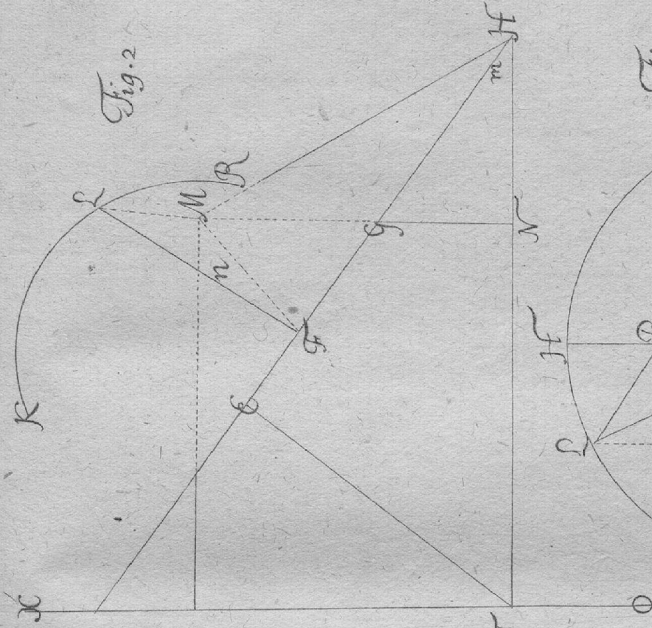


Fig. 3

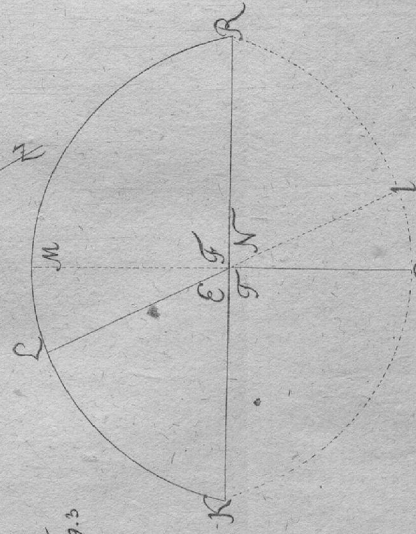


Fig. 4

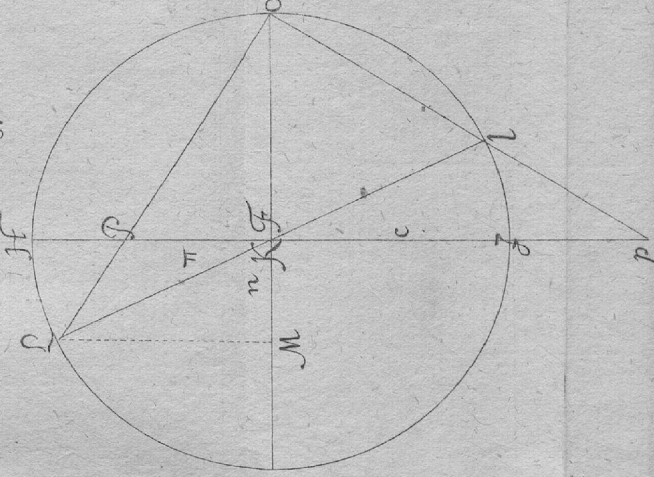


Fig. 5

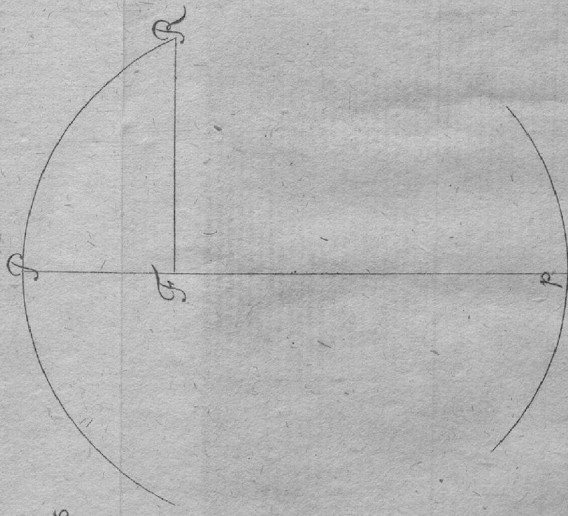
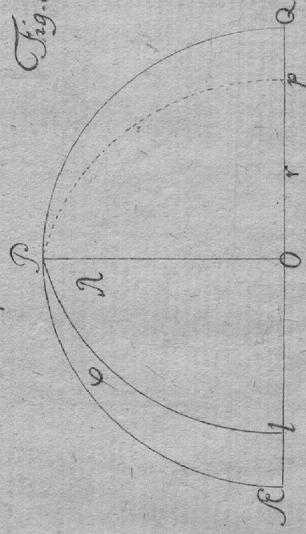


Fig. 6



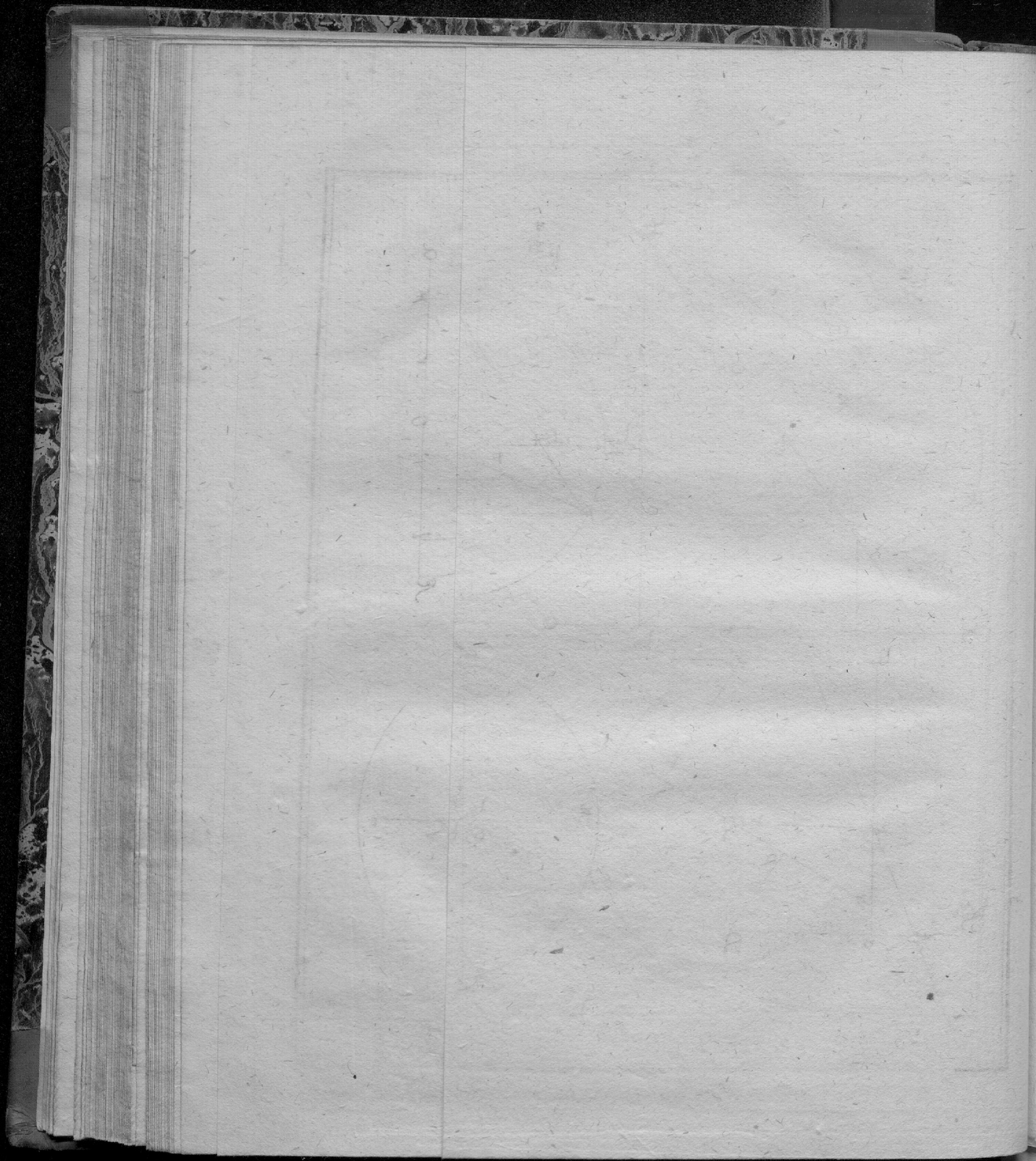


Fig. 7

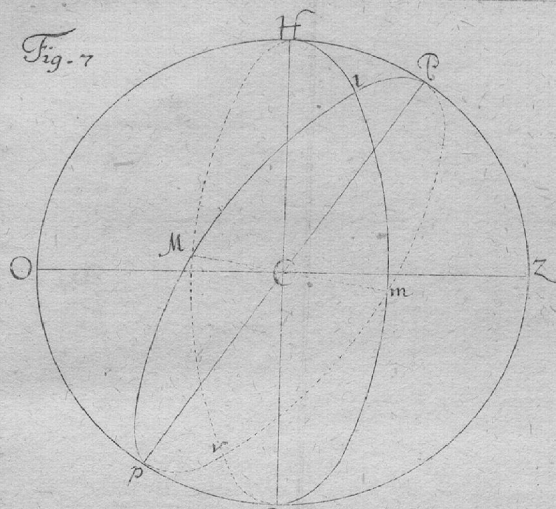


Fig. 8

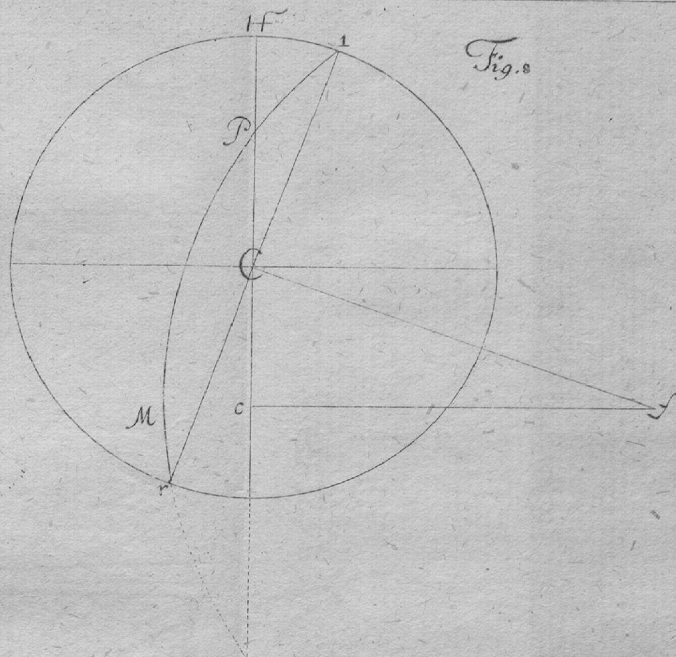
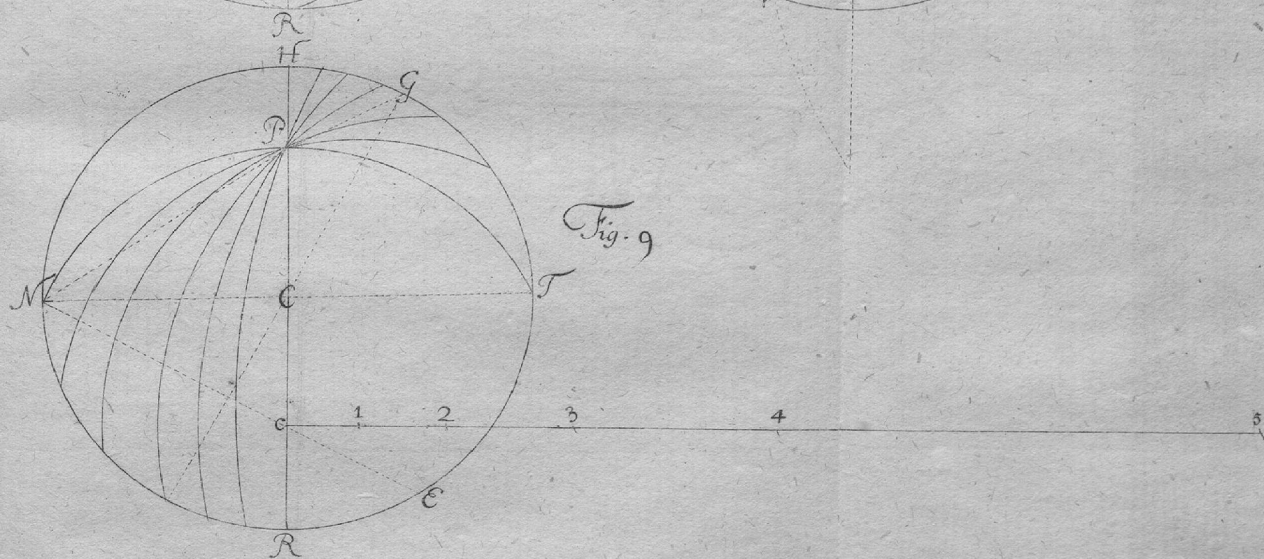


Fig. 9



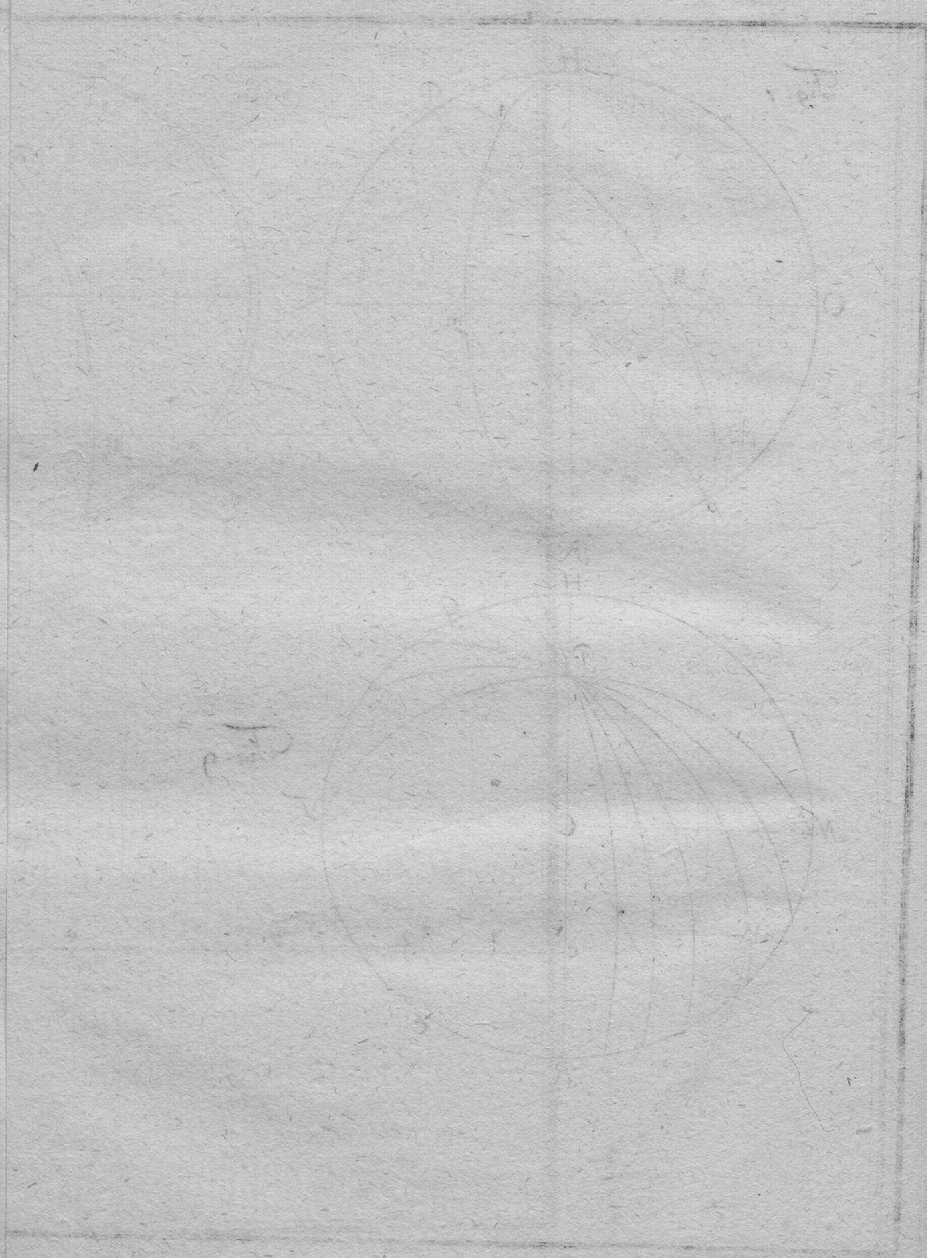


Fig. 10.

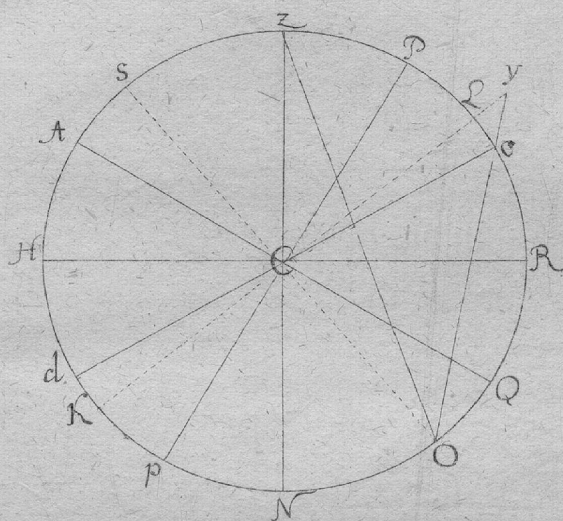


Fig. 11

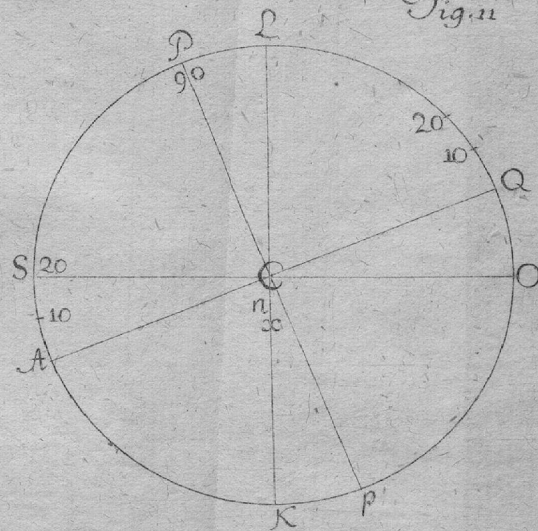


Fig. 12.

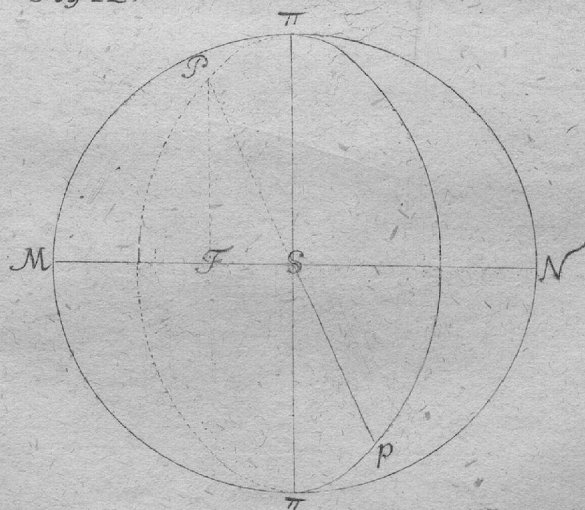


Fig. 13.



