

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XVIII. Jahrgang 1888.



München

Verlag der K. Akademie
1889.

In Commission bei G. Franz.

Ueber allgemeinere Invarianten-Systeme.

Von Dr. Ludwig Maurer in Strassburg.

(Eingelaufen 3 März.)

Bei der Begründung der Invariantentheorie kann man entweder von der Eigenschaft der Invarianten einer algebraischen Form ausgehen, dass sie durch ein gewisses System linearer Substitutionen in sich selbst transformirt werden; aus dieser Eigenschaft derselben ergibt sich sofort ihre Definition durch ein System partieller, linearer und homogener Differentialgleichungen, deren Coefficienten lineare und homogene Functionen der Coefficienten der algebraischen Form sind.

Oder man kann, wie dies zuerst Herr Aronhold getan hat,¹⁾ davon ausgehen, dass sich die Bedingungen, unter denen zwei algebraische Formen äquivalent sind, durch Gleichsetzung ihrer absoluten Invarianten ausdrücken lassen.

Wie man von der letzteren Definition ausgehend die Differentialgleichungen, denen die Invarianten genügen, ableiten kann, hat Herr Aronhold gezeigt. Dagegen ist noch nicht untersucht worden, ob beziehungsweise unter welchen Bedingungen umgekehrt ein System von partiellen Differentialgleichungen der Form

$$(\gamma) \sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu=1}^n c_{\lambda\mu}^i \frac{\partial f}{\partial x_{\lambda}} x_{\mu} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

das Invariantensystem einer algebraischen Form definiert.

1) Crelle B. 62.

Diese Frage steht im engsten Zusammenhang mit der allgemeineren Auffassung des Invariantenbegriffes, welche Herr Christoffel im 19. Bande der mathematischen Annalen (S. 280) dargelegt hat. In dieser Abhandlung gibt Herr Christoffel einen strengen Beweis des Satzes, dass für die Aequivalenz zweier algebraischen Formen die Gleichheit ihrer absoluten Invarianten sowohl erforderlich als auch hinreichend ist. Die Gültigkeit dieses Beweises ist nun keineswegs an die Voraussetzung gebunden, dass die Substitution, welche auf die Variabeln der zu transformirenden Form anzuwenden ist, eine lineare ist; es zeigt sich vielmehr, dass die linearen Substitutionen nur eine specielle Classe der invariantiven Substitutionen bilden, denen Transformationsrelationen entsprechen, welche sich durch Gleichsetzung absoluter Invarianten ausdrücken lassen.

Um den Zusammenhang der Theorie der invariantiven Substitutionen mit dem oben erörterten Problem ersichtlich zu machen, betrachten wir eine Function $F(x|\xi)$ von $x_1, x_2, \dots, x_n$ und $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, welche linear und homogen in den „Coefficienten“ x und wenigstens rational in den „Variabeln“ ξ ist. An Stelle der Variabeln ξ führen wir neue Variable ein, welche durch die Gleichungen $\xi_\lambda = \varphi_\lambda(\eta|p)$ ($\lambda = 1, 2, \dots, m$) definirt sind, wo φ_λ eine rationale Function von $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ und den m' verfügbaren Paramenten $p_1, p_2, \dots, p_{m'}$ bedeutet. Die durch die Functionen φ definirte Substitution sei der Art, dass durch sie die Function $F(x|\xi)$ in die Function $F(y|\eta)$ transformirt werde. Die Coefficienten der transformirten Function sind lineare und homogene Functionen der Coefficienten der ursprünglichen Function und rationale Functionen der Parameter p , also von der Form

$$(A) \quad y_\lambda = \sum_{\mu=1}^n a_{\lambda\mu} x_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

wo die $a_{\lambda\mu}$ rationale Functionen der p sind.

Betrachten wir nun die Coefficienten x und die Coefficienten y als gegeben, dann müssen, wenn es möglich sein soll die Function $F(x|\xi)$ durch die Substitutionen $\xi_\lambda = \varphi_\lambda(\eta|p)$ ($\lambda = 1, 2, \dots m$) in die Function $F(y|\eta)$ zu transformiren, — allgemein zu reden — zwischen den Coefficienten x und y Bedingungsgleichungen stattfinden. Nehmen wir an, diese Aequivalenzbedingungen lassen sich durch eine Anzahl Gleichungen der Form $f((y)) = f((x))$ ausdrücken, wo f eine rationale und homogene Function der angezeigten Argumente bedeutet. Dann haben die Functionen f die Eigenschaft durch die lineare Substitution (A), deren Coefficienten Functionen der variablen Parameter p sind, in sich selbst transformirt zu werden, und daraus folgt, wie unten gezeigt wird, dass die Functionen f einem System partieller Differentialgleichungen der Form (γ) genügen. —

Sollen die Differentialgleichungen (γ) ein Invariantensystem in dem eben erläuterten Sinn definiren, so muss sich ihr Integralsystem durch eine Anzahl rationaler Functionen von $x_1, x_2, \dots x_n$ darstellen lassen. Die Bedingungen hiefür werden im Folgenden angegeben werden. Sind dieselben erfüllt, so lässt sich ein System invariantiver Substitutionen nachweisen, denen gegenüber die Integrale der Differentialgleichungen (γ) als Invarianten zu betrachten sind.

Das Problem, welches den Gegenstand der folgenden Untersuchung bildet, lässt sich als speciellen Fall des allgemeinen Problems betrachten, das Herr Lie in seinen Abhandlungen über partielle Differentialgleichungen und Berührungstransformationen¹⁾ behandelt hat. Infolge der Verschiedenheit der maassgebenden Gesichtspuncte sind jedoch die Methoden, die im Folgenden zur Verwendung kommen, wesentlich verschieden von denen, deren sich Herr Lie bedient.

1) Mathemat. Annalen B. 8, 9, 11, 16, 25.

I.

Ueber rationale homogene Functionen mit unendlich vielen linearen Transformationen in sich selbst.

Es wird im Folgenden nachgewiesen werden, dass eine rationale und homogene Function $f((x))$ der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$, welche einem System partieller Differentialgleichungen (γ) genügt, unendlich viele lineare Transformationen in sich selbst zulässt. Vorerst aber werde ich den umgekehrten Weg einschlagen und untersuchen: Welche Bedingungen ergeben sich aus der Annahme, $f((x))$ wurde durch unendlich viele lineare Substitutionen in sich selbst transformirt, einerseits für die Function $f((x))$ und andererseits für die Substitutionscoefficienten?

Nehmen wir also an, $f((x))$ wurde durch die umkehrbare lineare Substitution

$$(A) \quad y_\lambda = \sum_{\mu=1}^n a_{\lambda\mu} x_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

in sich selbst transformirt, d. h. es bestehe für alle Werte der x und alle den Gleichungen (A) genügenden Werte der y die Gleichung $f((y)) = f((x))$.

Diese Gleichung muss also, wenn man die y durch ihre Werte in Function der x ersetzt, in den x identisch werden; sie führt daher zu einem System algebraischer Gleichungen (S), denen die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ genügen müssen. Ausserdem unterliegen die letzteren der Zusatzbedingung, dass ihre Determinante nicht verschwindet.

Das Gleichungssystem (S) ist entweder selbst irreductibel oder es lässt sich durch eine Anzahl irreductibler Gleichungs-

systeme ersetzen.¹⁾ Von diesen irreductiblen Gleichungssystemen sind zunächst diejenigen auszuschliessen, denen nur solche Wertsysteme $a_{11} a_{12} \dots a_{nn}$ genügen, deren Determinante verschwindet. Die Gesammtheit der übrig bleibenden Gleichungssysteme bezeichne ich mit (S'). Durch diese Gleichungssysteme seien eine Anzahl irreductibler algebraischer Gebilde der Mannigfaltigkeit n , aber keines von höherer Mannigfaltigkeit bestimmt. Unter diesen irreductiblen Gebilden gibt es mindestens eines, dem das Wertsystem

$$a_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu} (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)^2$$

angehört.

Dies lässt sich auf folgende Art beweisen: Durch irgend eines der irreductiblen Gebilde der Mannigfaltigkeit n seien die n^2 Grössen $a_{\lambda\mu}((p))$ als algebraische Functionen von n variablen Parametern $p_1 p_2 \dots p_m$ definit. Dann wird f durch die Substitution

$$y_\lambda = \sum_{\mu} a_{\lambda\mu}((p)) x_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

in sich selbst transformirt, wie auch die Werte der p gewählt werden mögen. f wird also auch durch die Substitution

$$y_\lambda = \sum_{\mu} a_{\lambda\mu}((p')) x_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

in sich selbst transformirt, wo $p'_1 p'_2 \dots p'_m$ ein festes Wertsystem von $p_1 p_2 \dots p_m$ bedeutet, und folglich auch durch die Substitution

$$z_\lambda = \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}((p)) x_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

1) Vergl. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen § 10.

2) Das Symbol $\binom{\lambda}{\mu}$ bedeutet 1 oder 0, je nachdem λ und μ gleich oder ungleich sind.

deren Coefficienten durch die Gleichungen

$$\sum_{\mu} a_{\lambda\mu}((p')) z_{\mu} = \sum_{\mu} a_{\lambda\mu}((p)) x_{\mu} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

bestimmt sind.

Auch die $b_{\lambda\mu}((p))$ constituiren ein algebraisches Gebilde der Mannigfaltigkeit m , denn da man über m von den Functionen $a_{\lambda\mu}((p))$ verfügen kann, kann man bewirken, dass m von den Functionen $b_{\lambda\mu}((p))$ vorgeschriebene Werte annehmen. Dieses Gebilde ist irreductibel, da die $b_{\lambda\mu}((p))$ rationale Functionen der $a_{\lambda\mu}((p))$ sind. Endlich entsprechen dem Wertsystem

$$p_1 = p'_1 \quad p_2 = p'_2 \dots p_m = p'_m$$

die Werte $b_{\lambda\mu}((p')) = \binom{\lambda}{\mu} (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n)$.

Es gibt somit mindestens ein algebraisches Gebilde der verlangten Art; es wird sich zeigen, dass es auch nur ein solches gibt.

Die durch dieses irreductible Gebilde bestimmten Substitutionen bilden den Gegenstand der folgenden Untersuchung.

II.

Partielle Differentialgleichungen, denen die Function f und die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ genügen.

Im Folgenden betrachte ich die Substitutionscoefficienten als Functionen von m unabhängig variablen Parametern $p_1 p_2 \dots p_m$.

Die Wahl dieser Parameter bleibt vorbehalten; vorerst wird nur vorausgesetzt:

1) man kann den Parametern solche Werte erteilen, dass m von den Substitutionscoefficienten vorgeschriebene Werte erhalten;

2) man kann von jedem beliebigen Wertsystem der $a_{\lambda\mu}$ zu jedem anderen gelangen, indem man die Parameter geeignete Wege beschreiben lässt;

3) es gibt ein Wertsystem p' der Parameter, das den n^2 Gleichungen

$$a_{\lambda\mu}((p')) = \binom{\lambda}{\mu} (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$$

genügt.

Unser Problem fordert:

Wenn die Grössen $y_1 y_2 \dots y_n$ durch die Gleichungen

$$(A) \quad y_\lambda = \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} x_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

als Functionen der x und der p definirt werden, so muss die Gleichung

$$f((y)) = f((x))$$

bestehen für alle Werte der unabhängig Variabeln x und für alle Werte der unabhängig Variabeln p . Infolge der über die $a_{\lambda\mu}$ gemachten Voraussetzungen lässt sich diese Forderung durch die beiden folgenden ersetzen:

1) Es soll

$$\frac{\partial f((y))}{\partial p_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots m)$$

sein für alle Werte der x und alle Werte der p , und

2) es soll

$$f((y)) = f((x))$$

sein für alle Werte der x und ein bestimmtes, im übrigen beliebig zu wählendes, Wertsystem der $a_{\lambda\mu}$.

Die zweite Forderung ist jedenfalls erfüllt, wenn wir für das feste Wertsystem der $a_{\lambda\mu}$ das Wertsystem $a_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu}$ wählen.

Die Gleichung $f((y)) = f((x))$ wird somit vollständig vertreten durch die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial f((y))}{\partial p_i} = \sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial f((y))}{\partial y_\lambda} \frac{\partial y_\lambda}{\partial p_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots m)$$

Nun ist, weil f homogene Function ist

$$\frac{\partial f((x))}{\partial x_\lambda} = \sum_{\mu=1}^n a_{\mu\lambda} \frac{\partial f((y))}{\partial y_\mu}$$

und ferner

$$\frac{\partial y_\lambda}{\partial p_i} = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_i} x_\mu$$

Führt man die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werte der Differentialquotienten $\frac{\partial f((y))}{\partial y_\lambda}$ und $\frac{\partial y_\lambda}{\partial p_i}$ in die obigen Gleichungen ein, so erhalten dieselben die Form

$$(\gamma') \sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu=1}^n C_{\lambda\mu}^i \frac{\partial f((x))}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0 \quad (i = 1, 2, \dots m)$$

wo die Grössen $C_{\lambda\mu}^i$ durch die Gleichungen

$$(\alpha) \sum_{\nu=1}^n a_{\lambda\nu} C_{\nu\mu}^i = \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_i} \quad \left(\begin{matrix} \lambda, \mu = 1, 2, \dots n \\ i = 1, 2, \dots m \end{matrix} \right)$$

als Functionen der p bestimmt sind. Es genügt somit einerseits $f((x))$ einem System von m partiellen Differentialgleichungen, und andererseits genügen die Substitutionscoefficienten als Functionen der Parameter p betrachtet einem

System von $n^2 m$ partiellen Differentialgleichungen. Das letztere System hat eine bemerkenswerte Eigenschaft. Gibt man dem Index μ der Reihe nach die Werte $1, 2, \dots n$ und dem Index i der Reihe nach die Werte $1, 2, \dots m$, hält dagegen den Index λ fest, so erkennt man, dass die Substitutionscoefficienten einer Zeile

$$a_{\lambda 1} \quad a_{\lambda 2} \quad . \quad . \quad a_{\lambda n}$$

ein System particularärer Lösungen der Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial p_i} = \sum_{\nu=1}^n u_\nu C_{\nu\mu}^i \quad (\mu = 1, 2, \dots n; i = 1, 2, \dots m)$$

bilden.

Die Grössen $C_{\lambda\mu}^i$ sind Functionen der p . Bildet das Wertsystem $p_i = q_i$ weder eine Verzweigungs- noch eine Unstetigkeitsstelle dieser Functionen, so lassen sich dieselben für hinreichend kleine Werte von $\text{Mod}(p_i - q_i)$ nach Potenzen von $p_i - q_i$ ($i = 1, 2, \dots m$) entwickeln. Da die Gleichungen (γ') für alle Werte der p gelten, so müssen in dieser Entwicklung die Coefficienten der einzelnen Potenzen und Producte der $p_i - q_i$ verschwinden. Die Function $f((x))$ genügt daher einer Anzahl von Differentialgleichungen der Form

$$\sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu=1}^n c_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0$$

wo die $c_{\lambda\mu}$ von den x und den p unabhängige Constante bedeuten.

Die Anzahl der Differentialgleichungen dieser Art, welche von einander unabhängig sind, muss jedenfalls kleiner als n sein. Für die vorliegende Untersuchung ist aber nicht sowohl die Anzahl der in diesem Sinne unabhängigen Diffe-

rentialgleichungen von Wichtigkeit, als vielmehr die Anzahl der „linear unabhängigen“ d. h. die Anzahl der Differentialgleichungen, zwischen deren Coefficienten keine Relation der Form

$$\alpha_1 c_{\lambda\mu}^1 + \alpha_2 c_{\lambda\mu}^2 + \alpha_3 c_{\lambda\mu}^3 + \dots = 0 \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$$

besteht.

Die Anzahl der linear unabhängigen Differentialgleichungen, denen eine Function genügt, muss offenbar kleiner sein als n^2 , sie kann aber grösser sein als n . So genügt z. B. die quadratische Form

$$f((x)) = x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2$$

den $\frac{1}{2} n (n - 1)$ Differentialgleichungen

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots i - 1; i = 2, 3, \dots n)$$

Diese Differentialgleichungen sind allerdings nur den $n - 1$ unabhängigen Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2} : \frac{\partial f}{\partial x_3} : \dots : \frac{\partial f}{\partial x_n} = x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_n$$

äquivalent, aber in dem eben erläuterten Sinn, sind sie als linear unabhängig zu bezeichnen.

Die Differentialgleichungen (γ') lassen sich durch eine gewisse — vorläufig nicht näher zu bestimmende — Anzahl von linear unabhängigen Differentialgleichungen

$$(\gamma) \sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu=1}^n c_{\lambda\mu}^i \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0 \quad (i = 1, 2, \dots m')$$

ersetzen, wo die $c_{\lambda\mu}^i$ Constante bedeuten.

Jede Function, welche diesen m' Differentialgleichungen genügt, genügt auch den Differentialgleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n (c_{\lambda\nu}^i c_{\nu\mu}^k - c_{\lambda\nu}^k c_{\nu\mu}^i) \frac{\partial f}{\partial x_{\lambda}} x_{\mu} = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots m')$$

welche sich aus den Differentialgleichungen (γ) durch Differentiation und Elimination der höheren Derivierten ergeben. Wir dürfen voraussetzen, dass jede dieser letzteren Differentialgleichungen von den Gleichungen (γ) linear abhängig ist, dass also

$$(\varepsilon) \sum_{\nu=1}^n (c_{\lambda\nu}^i c_{\nu\mu}^k - c_{\lambda\nu}^k c_{\nu\mu}^i) = \sum_{j=1}^{m'} \varepsilon_j^{ik} c_{\lambda\mu}^j \quad \left(\begin{matrix} \lambda, \mu = 1, 2, \dots n \\ i, k = 1, 2, \dots m' \end{matrix} \right)$$

ist. Unter dieser Voraussetzung bilden die Differentialgleichungen (γ) ein „vollständiges System linear unabhängiger Differentialgleichungen“ oder nach der kürzeren Bezeichnungsweise des Herrn Lie eine „Gruppe“.1)

Aus dem Verfahren, mittelst dessen wir zu den Differentialgleichungen (γ) gelangt sind, folgt unmittelbar, dass sich die Grössen $C_{\lambda\mu}^i$ darstellen lassen in der Form

$$(\pi) C_{\lambda\mu}^i = \sum_{j=1}^{m'} P_j^i c_{\lambda\mu}^j \quad \left(\begin{matrix} \lambda, \mu = 1, 2, \dots n \\ i = 1, 2, \dots m \end{matrix} \right)$$

wo die P_j^i Functionen der p sind.

Aus der ersten unserer Voraussetzungen über die Grössen $a_{\lambda\mu}$ ergeben sich gewisse Beschränkungen, denen die Functionen P_j^i unterliegen. Danach sollten in von den Grössen $a_{\lambda\mu}$ bei geeigneter Wahl der p vorgeschriebene Werte erhalten können. Man muss demnach durch geeignete Wahl der Differentiale $dp_1, dp_2, \dots dp_m$ über m von den vollständigen Differentialen $da_{\lambda\mu}$ verfügen können.

1) Mathem. Annalen B. 25. S. 71.

Nun ergeben die Gleichungen (α) und (π) für diese Differentiale die Werte

$$da_{\lambda\mu} = \sum_{\nu=1}^n \sum_{j=1}^{m'} \left\{ \sum_{i=1}^m p_j^i dp_i \right\} a_{\lambda\nu} c_{\nu\mu}^j (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$$

Es darf daher erstens m' nicht kleiner sein als m und zweitens dürfen nicht alle aus m Verticalreihen des Systems

$$\begin{array}{ccccccc} p_1^1 & p_1^2 & p_1^3 & \dots & p_1^m \\ p_2^1 & p_2^2 & p_2^3 & \dots & p_2^m \\ p_3^1 & p_3^2 & p_3^3 & \dots & p_3^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_m^1 & p_m^2 & p_m^3 & \dots & p_m^m \end{array}$$

gebildeten Determinanten identisch, d. h. für alle Werte der p verschwinden. Wie man sich leicht überzeugt, sind diese Bedingungen nicht nur notwendig sondern auch hinreichend, damit m von den Differentialen $da_{\lambda\mu}$ vorgeschriebene Werte erhalten können.

Die Gleichungen (γ) , (α) und (π) ersetzen die Gleichungen

$$\frac{\partial f(y)}{\partial p_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots m)$$

vollständig. Diese Gleichungen, zusammen mit den für die $a_{\lambda\mu}$ geltenden Anfangsbedingungen

$$a_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu} \text{ für } p_i = p_i' \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n; i = 1, 2, \dots m)$$

drücken daher vollständig die Bedingungen aus, damit f durch die Substitution (A) in sich selbst transformirt wird

Insbesondere gilt der Satz:

Genügt f der Differentialgleichung

$$\sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu=1}^n c_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0$$

genügen ferner die Grössen $b_{\lambda\mu}$ den Differentialgleichungen

$$\frac{d b_{\lambda\mu}}{d p} = \sum_{\nu=1}^n b_{\lambda\nu} c_{\nu\mu} (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$$

und den Anfangsbedingungen

$$b_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu} \text{ für } p = p' (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$$

so wird f durch die Substitution

$$(B) y_{\lambda} = \sum_{\mu} b_{\lambda\mu} x_{\mu} (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

in sich selbst transformirt.

Eine derartige Substitution B , deren Coefficienten nur von einem Parameter abhängen, nenne ich eine elementare.

Es wird sich zeigen, dass die Substitution A aus m elementaren Substitutionen zusammengesetzt werden kann.

III.

Integrabilitätsbedingungen für die Differentialgleichungen (α) .

Die Functionen P_j^i sind der Natur der Sache nach nicht vollständig bestimmt, da sie von der Wahl des Parametersystems abhängen. Die Bedingungsgleichungen, denen sie genügen müssen, ergeben sich aus den Integrabilitätsbedingungen für die Gleichungen (α) .

Durch Differentiation nach p_k ergibt sich aus (α) :

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial a_{\lambda\nu}}{\partial p_k} c_{\nu\mu}^i + \sum_{\nu=1}^n a_{\lambda\nu} \frac{\partial c_{\nu\mu}^i}{\partial p_k} = \frac{\partial^2 a_{\lambda\mu}}{\partial p_i \partial p_k} (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$$

oder da

$$\frac{\partial a_{\lambda\nu}}{\partial p_k} = \sum_{\varrho=1}^n a_{\lambda\varrho} C_{\varrho\nu}^k \text{ ist}$$

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\lambda\nu} \left\{ \sum_{\varrho=1}^n C_{\varrho\mu}^i C_{\nu\varrho}^k + \frac{\partial C_{\nu\mu}^i}{\partial p_k} \right\} = \frac{\partial^2 a_{\lambda\mu}}{\partial p_i \partial p_k}$$

Subtrahirt man von dieser Gleichung diejenige, welche sich aus ihr durch Vertauschung der Indices i und k ergibt, so folgt

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\lambda\nu} \left\{ \sum_{\varrho=1}^n (C_{\nu\varrho}^k C_{\varrho\mu}^i - C_{\nu\varrho}^i C_{\varrho\mu}^k) + \frac{\partial C_{\nu\mu}^i}{\partial p_k} - \frac{\partial C_{\nu\mu}^k}{\partial p_i} \right\} = 0$$

Die Determinante der $a_{\lambda\mu}$ verschwindet nicht, also muss

$$\sum_{\varrho=1}^n (C_{\nu\varrho}^k C_{\varrho\mu}^i - C_{\nu\varrho}^i C_{\varrho\mu}^k) + \frac{\partial C_{\nu\mu}^i}{\partial p_k} - \frac{\partial C_{\nu\mu}^k}{\partial p_i} = 0$$

sein für $\nu, \mu = 1, 2, \dots, n$; $i, k = 1, 2, \dots, m$.

Nun ist nach (7)

$$C_{\nu\varrho}^i = \sum_{j=1}^{m'} p_j^i c_{\nu\varrho}^j$$

also

$$\begin{aligned} \sum_{\varrho=1}^n (C_{\nu\varrho}^k C_{\varrho\mu}^i - C_{\nu\varrho}^i C_{\varrho\mu}^k) &= \sum_{\varrho=1}^n \left[\sum_{h=1}^{m'} p_h^k c_{\nu\varrho}^h \sum_{j=1}^{m'} p_j^i c_{\varrho\mu}^j - \sum_{h=1}^{m'} p_h^i c_{\nu\varrho}^h \sum_{j=1}^{m'} p_j^k c_{\varrho\mu}^j \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^n \sum_{h=1}^{m'} \sum_{j=1}^{m'} (p_h^k p_j^i - p_j^k p_h^i) (c_{\nu\varrho}^h c_{\varrho\mu}^j - c_{\nu\varrho}^j c_{\varrho\mu}^h) \end{aligned}$$

Ersetzt man in dieser Gleichung $\sum_{\varrho=1}^n (c_{\nu\varrho}^h c_{\varrho\mu}^j - c_{\nu\varrho}^j c_{\varrho\mu}^h)$

durch den aus (ε) folgenden Wert und beachtet, dass $\varepsilon_r^{hj} = -\varepsilon_r^{jh}$ ist, so folgt:

$$\sum_{\varrho=1}^n (C_{r\varrho}^k C_{\varrho\mu}^i - C_{r\varrho}^i C_{\varrho\mu}^k) = \sum_{h=1}^{m'} \sum_{j=1}^{m'} \sum_{r=1}^{m'} P_h^k P_j^i \varepsilon_r^{hj} c_{r\mu}^r$$

Diesen Wert führen wir in die oben gefundene Gleichung ein und ersetzen zugleich

$$\frac{\partial C_{r\mu}^i}{\partial p_k} - \frac{\partial C_{r\mu}^k}{\partial p_i} \text{ durch } \sum_{r=1}^{m'} \left(\frac{\partial P_r^i}{\partial p_k} - \frac{\partial P_r^k}{\partial p_i} \right) c_{r\mu}^r$$

Wir erhalten eine Gleichung der Form

$$\alpha_1 c_{r\mu}^1 + \alpha_2 c_{r\mu}^2 + \dots + \alpha_{m'} c_{r\mu}^{m'} = 0 \quad (r, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

Da die m' Differentialgleichungen (γ) der Voraussetzung nach linear unabhängig sind, so folgt hieraus $\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = 0$ $\dots$ $\alpha_{m'} = 0$.

Wir erhalten somit das System von partiellen Differentialgleichungen

$$(J) \quad \frac{\partial P_r^i}{\partial p_k} - \frac{\partial P_r^k}{\partial p_i} + \sum_{h=1}^{m'} \sum_{j=1}^{m'} \varepsilon_r^{hj} P_h^k P_j^i = 0$$

für $i, k = 1, 2, \dots, m$; $r = 1, 2, \dots, m'$.

Diese Gleichungen geben die notwendigen Bedingungen, damit das System der Differentialgleichungen (α) überhaupt ein Lösungssystem $a_{i\mu}$ mit nicht verschwindender Determinante zulässt. Aber diese Bedingungen sind, wie Herr Bouquet nachgewiesen hat, auch hinreichend.¹⁾

Die Functionen P_j^i sind daher nur an die beiden Bedingungen gebunden, dass sie erstens den Gleichungen (J) genügen, und dass zweitens das durch sie bestimmte Deter-

1) Bulletin des Sciences mathématiques t. III. p. 265.

minantensystem nicht identisch verschwindet. Im übrigen können sie beliebig gewählt werden.

In den Gleichungen (J) kommen nur die Constanten ϵ_j^{ik} , aber nicht die Größen $c_{\lambda\mu}^i$ selbst vor. Alle „gleichzusammengesetzten“ Systeme von Differentialgleichungen der Form (γ), für welche die Constanten ϵ_j^{ik} dieselben Werte haben, führen daher zu demselben System von Differentialgleichungen (J), also zu denselben Functionen P_j^i .

Im Folgenden wird nachgewiesen werden, dass $m' = m$ ist, wenn die Function $f((x))$ durch keine Substitution mit mehr als m verfügbaren Coefficienten in sich selbst transformirt werden kann.

Setzen wir dies einstweilen voraus, so kann man die Gleichungen (J) in bemerkenswerter Weise umformen.

Da die Determinante der P_j^i nicht identisch verschwindet, so kann man m^2 Functionen der p durch die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^m P_j^i Q_i^k = \binom{k}{j} \quad (j, k = 1, 2, \dots, m)$$

bestimmen. Multiplicirt man die Gleichung (J) mit $Q_i^s Q_k^t$ und addirt nach i, k , so folgt, da

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \frac{\partial P_r^i}{\partial p_k} Q_i^s &= - \sum_{i=1}^m P_r^i \frac{\partial Q_i^s}{\partial p_k} \quad \text{und} \\ \sum_{k=1}^m \frac{\partial P_r^k}{\partial p_i} Q_k^t &= - \sum_{k=1}^m P_r^k \frac{\partial Q_k^t}{\partial p_i} \quad \text{ist,} \\ - \sum_{i=1}^m P_r^i \left\{ \sum_{k=1}^m \left(Q_k^t \frac{\partial Q_i^s}{\partial p_k} - Q_k^s \frac{\partial Q_i^t}{\partial p_k} \right) \right\} + \epsilon_r^{st} &= 0 \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich:

$$(J') \quad \sum_{k=1}^m \left(Q_k^t \frac{\partial Q_r^s}{\partial p_k} - Q_k^s \frac{\partial Q_r^t}{\partial p_k} \right) = \sum_{j=1}^m \epsilon_j^{st} Q_r^j$$

für $r, s, t = 1, 2, \dots, m$.

Diese Gleichungen geben zusammen mit den Gleichungen (ϵ) die notwendigen und ausreichenden Bedingungen, damit die Differentialgleichungen

$$(\Gamma) \sum_{k=1}^m Q_k \frac{\partial F}{\partial p_k} - \sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu=1}^n c_{\lambda\mu}^i \frac{\partial F}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

ein „vollständiges System“ bilden, also n von einander unabhängige Lösungen zulassen.¹⁾

Diesen Gleichungen (Γ) genügen die n Functionen der x und p

$$y_\nu = \sum_{\mu} a_{\nu\mu} x_\mu \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

Ersetzt man nämlich in den Gleichungen (Γ) F durch y_ν und beachtet, dass die so entstehenden Gleichungen in den x identisch sein müssen, so folgt aus denselben

$$(\alpha') \sum_{k=1}^m Q_k \frac{\partial a_{\nu\mu}}{\partial p_k} = \sum_{\lambda=1}^n a_{\lambda\mu} c_{\lambda\mu}^i \quad \left(\begin{matrix} \nu, \mu = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots, m \end{matrix} \right)$$

Aber diese Gleichungen sind nur eine Umformung der Gleichungen (α).

Die Gleichungen (Γ) bringen zum Ausdruck, dass jede Lösung der $m' = m$ Differentialgleichungen (γ) eine Function von $y_1, y_2, \dots, y_n$ sein muss, welche nur von den Werten der x aber nicht von den Werten der p abhängt.

IV.

Ueber die Coefficienten der Differentialgleichungen (γ).

Bei der Ableitung der Gleichungen (γ) haben wir nicht zum Ausdruck gebracht, dass $f((x))$ rationale Function

1) Den Beweis dieses Satzes hat Clebsch gegeben. (Crelles Journal B. 65.)

der Argumente ist. Es ist daher noch zu untersuchen, welche Bedingungen für die Coefficienten $c_{\lambda\mu}^i$ sich aus dieser Eigenschaft von f ergeben. Zu diesem Zweck gehen wir von dem am Schlusse des zweiten Abschnittes bewiesenen Satz aus:

Genügt $f((x))$ der partiellen Differentialgleichung

$$(1) \quad \sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu=1}^n c_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_{\lambda}} x_{\mu} = 0$$

und werden die Substitutionscoefficienten $b_{\lambda\mu}$ durch die Differentialgleichungen

$$(2) \quad \frac{db_{\lambda\mu}}{dp} = \sum_{\nu=1}^n b_{\lambda\nu} c_{\nu\mu} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

und die Anfangsbedingungen

$$b_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu} \text{ für } p = 0$$

bestimmt, so wird f durch die elementare Substitution

$$y_{\lambda} = \sum_{\mu} b_{\lambda\mu} x_{\mu} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

in sich selbst transformirt.

Die Integration der Differentialgleichungen (2) lässt sich mit Hülfe eines Satzes, den ich in meiner Inauguraldissertation bewiesen habe, leicht ausführen.

Dieser Satz lautet:

Hat die „Fundamentaldeterminante“ der $c_{\lambda\mu}$

$$\begin{vmatrix} c_{11} - r & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - r & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - r & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} - r \end{vmatrix}$$

die Elementarteiler¹⁾

$$(r_x - r)^{e_0^x} (r_x - r)^{e_1^x} \dots (r_x - r)^{e_{l_x}^x} \quad (x = 1, 2, \dots, n')$$

so lassen sich n^2 Grössen $[g \ h \ \lambda]_x$ mit nicht verschwindender Determinante der Art bestimmen, dass

$$(3) \quad r_x [g \ h \ \lambda]_x + [g - 1 \ h \ \lambda]_x = \sum_{\mu=1}^n c_{\lambda\mu} [g \ h \ \mu]_x$$

$$r_x [1 \ h \ \lambda]_x = \sum_{\mu=1}^n c_{\lambda\mu} [1 \ h \ \mu]_x \text{ ist}$$

für $\lambda = 1, 2, \dots, n$; $g = 2, 3, \dots, e_h^x$; $h = 0, 1, 2, \dots, l_x$;
 $x = 1, 2, \dots, n'$.

Die Substitutionscoefficienten $b_{\lambda\mu}$ lassen sich in zwei Fällen als rationale Functionen eines Parameters darstellen; nämlich dann, wenn entweder die Fundamentaldeterminante der $c_{\lambda\mu}$ gleich r^n ist, oder wenn sie nur Elementarteiler erster Ordnung hat und wenn ausserdem die Werte $r_1, r_2, \dots, r_{n'}$, für welche sie verschwindet, ganze Zahlen sind.

Je nachdem der erste oder der zweite von diesen Fällen, oder keiner von beiden eintritt, nenne ich das Coefficientensystem der $c_{\lambda\mu}$ ein System erster, zweiter oder dritter Art. Diese Bezeichnung übertrage ich auch auf die entsprechenden Differentialgleichungen und elementaren Substitutionen.

Nehmen wir zunächst an, das System der $c_{\lambda\mu}$ sei von der ersten Art.

In diesem Fall ist in den Gleichungen (3) $n' = 1$ und $r_1 = 0$ zu setzen. Diese Gleichungen erhalten also die Form

1) Den Begriff der Elementarteiler hat H. Weierstrass eingeführt (Monatsberichte der Berliner Akademie 1868).

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} c_{\lambda\mu} [1 \ h \ \mu] &= 0 & \lambda &= 1, 2, \dots n \\ \sum_{\mu} c_{\lambda\mu} [g \ h \ \mu] &= [g - 1 \ h \ \lambda] & g &= 1, 2, \dots e_h \\ & & h &= 0, 1, 2, \dots l \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen (2) lassen sich nun durch die folgenden ersetzen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \sum_{\mu} b_{\lambda\mu} [1 \ h \ \mu] &= 0 \\ \frac{d}{dp} \sum_{\mu} b_{\lambda\mu} [g \ h \ \mu] &= \sum_{\mu} b_{\lambda\mu} [g - 1 \ h \ \mu] \end{aligned}$$

wo die Indices g, h, λ die eben angegebenen Wertsysteme zu durchlaufen haben.

Mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen $b_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu}$ für $p = 0$ folgt aus diesen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} b_{\lambda\mu} [1 \ h \ \mu] &= [1 \ h \ \lambda] \\ \sum_{\mu} b_{\lambda\mu} [g \ h \ \mu] &= [g \ h \ \lambda] + \frac{p}{1} [g - 1 \ h \ \lambda] + \frac{p^2}{1 \cdot 2} [g - 2 \ h \ \lambda] \\ &+ \frac{p^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} [g - 3 \ h \ \lambda] + \dots + \frac{p^{g-1}}{1 \cdot 2 \dots (g-1)} [1 \ h \ \lambda] \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die $b_{\lambda\mu}$ als ganze Functionen von p . Die Determinante der $b_{\lambda\mu}$ ist gleich 1.

Nehmen wir nun an, das System der $c_{\lambda\mu}$ sei von der zweiten Art. In diesem Fall ist in den Gleichungen (3) für den Index g nur der Wert $g = 1$ zulässig. Dieselben erhalten, wenn man $[h \ \lambda]_x$ statt $[1 \ h \ \lambda]_x$ schreibt, die Form

$$\sum_{\mu} c_{\lambda\mu} [h \ \mu]_x = [h \ \lambda]_x \quad \left(\begin{array}{l} \lambda = 1, 2, \dots n \\ h = 0, 1, 2, \dots l_x; \ x = 1, 2, \dots n' \end{array} \right)$$

und die Differentialgleichungen (2) lassen sich durch folgende ersetzen :

$$\frac{d}{dp} \sum_{\mu} b_{\lambda\mu} [h \mu]_x = r_x \sum_{\mu} b_{\lambda\mu} [h \mu]_x$$

Die Integration dieser Gleichungen gibt mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen

$$\sum_{\mu} b_{\lambda\mu} [h \mu]_x = e^{r_x p} [h \lambda]_x$$

Führt man an Stelle des Parameters p den Parameter $q = e^p$ ein, so werden auch in diesem Fall die Substitutionscoefficienten rationale Functionen des Parameters, da ja der Voraussetzung nach die Grössen r_x ganze Zahlen sind. Die Substitutionsdeterminante ist gleich 1 oder gleich einer ganzen Potenz von q .

Von dem eben behandelten nicht wesentlich verschieden ist der Fall, dass die Fundamentaldeterminante der $c_{\lambda\mu}$ nur Elementarteiler erster Ordnung hat, und dass zwar nicht die Grössen $r_1 r_2 \dots$ selbst ganze Zahlen sind, aber wenigstens ihre Verhältnisse sich durch ganze Zahlen ausdrücken lassen. Ist nämlich $r_x = q r'_x$ ($x = 1, 2, \dots, n$), wo r'_x eine ganze Zahl bedeutet, so hat man nur an Stelle des Parameters p den Parameter $q' = e^{q p} = q^p$ einzuführen, um die $b_{\lambda\mu}$ als rationale Functionen eines Parameters darzustellen.

Auf die beiden eben erledigten Fälle lässt sich die Integration der Differentialgleichungen (2) auch in dem Fall zurückführen, dass das Coefficientensystem der $c_{\lambda\mu}$ ein System dritter Art ist. Zu diesem Zwecke zeige ich zunächst, dass sich stets ein System erster Art $c_{\lambda\mu}^0$ und eine gewisse Anzahl β von Systemen zweiter Art $c_{\lambda\mu}^1 c_{\lambda\mu}^2 \dots$ so bestimmen

lassen, dass $c_{\lambda\mu} = c_{\lambda\mu}^0 + e_1 c_{\lambda\mu}^1 + e_2 c_{\lambda\mu}^2 + \dots e_\beta c_{\lambda\mu}^\beta$ ist, für $\lambda, \mu = 1, 2, \dots n$.

Bestimmt man nämlich die Grössen $c_{\lambda\mu}^0$ und $k_{\lambda\mu}$ durch die beiden Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} c_{\lambda\mu}^0 [1 \text{ h } \mu]_{\kappa} &= 0 \\ (4) \quad \sum_{\mu} c_{\lambda\mu}^0 [g \text{ h } \mu]_{\kappa} &= [g - 1 \text{ h } \lambda]_{\kappa} \\ \text{und} \quad \sum_{\mu} k_{\lambda\mu} [g \text{ h } \mu]_{\kappa} &= r_{\kappa} [g \text{ h } \lambda]_{\kappa} \end{aligned}$$

wo die Indices λ, g, h, κ die unter (3) angegebenen Werte z durchlaufen haben, so ist offenbar

$$c_{\lambda\mu} = c_{\lambda\mu}^0 + k_{\lambda\mu} (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n).$$

Die $c_{\lambda\mu}^0$ bilden ein System erster Art. Sind die Grössen $r_1 r_2 \dots r_{n'}$ alle ganze Zahlen, so bilden die $k_{\lambda\mu}$ ein System zweiter Art und die Aufgabe ist gelöst. Ist dies nicht der Fall, so lassen sich die Grössen $r_1 r_2 \dots r_{n'}$ als lineare homogene Functionen einer Anzahl Grössen $e_1 e_2 \dots e_\beta$, von denen höchstens eine eine rationale Zahl ist, mit ganzzahligen Coefficienten darstellen.

Man kann also

$$r_{\kappa} = r_{\kappa}^1 e_1 + r_{\kappa}^2 e_2 \dots + r_{\kappa}^\beta e_\beta \quad (\kappa = 1, 2, \dots n')$$

setzen und hier bedeuten die r_{κ}^i ganze Zahlen, die e_i Grössen, zwischen denen keine Relation der Form

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \dots + \alpha_\beta e_\beta = 0$$

mit ganzzahligen Coefficienten α_i stattfindet.

Ich bestimme nun die Grössen $c_{\lambda\mu}^i$ durch die Gleichungen

$$\sum_{\mu} c_{\lambda\mu}^i [g \ h \ \mu]_{\kappa} = r_{\kappa}^i [g \ h \ \lambda]_{\kappa}$$

wo für die Indices λ, g, h, κ die unter (3) angegebenen Werte und für i die Zahlen $1, 2, \dots, \beta$ zu setzen sind.

Die Coefficientensysteme $c_{\lambda\mu}^i$ sind offenbar Systeme zweiter Art und sie genügen den Gleichungen

$$e_1 c_{\lambda\mu}^1 + e_2 c_{\lambda\mu}^2 \dots + e_{\beta} c_{\lambda\mu}^{\beta} = k_{\lambda\mu} = c_{\lambda\mu} - c_{\lambda\mu}^0 (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

Die Differentialgleichungen (2) lassen sich nun durch ein System von Differentialgleichungen derselben Form ersetzen, in denen an Stelle der Grössen $c_{\lambda\mu}$ die Grössen $c_{\lambda\mu}^0, c_{\lambda\mu}^1, \dots, c_{\lambda\mu}^{\beta}$ treten.

Ersetzt man in (2) $c_{\lambda\mu}$ durch $c_{\lambda\mu}^0 + k_{\lambda\mu}$ und gleichzeitig $b_{\lambda\mu}$ durch $\sum_{\nu=1}^n b_{\lambda\nu}^0 t_{\nu\mu}$, wo $b_{\lambda\mu}^0$ und $t_{\lambda\mu}$ noch näher zu bestimmende Functionen von p bedeuten, so gehen diese Gleichungen über in:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \left\{ \frac{db_{\lambda\nu}^0}{dp} - \sum_{\kappa=1}^n b_{\lambda\kappa}^0 c_{\kappa\nu}^0 \right\} t_{\nu\mu} + \sum_{\nu=1}^n \left\{ \frac{dt_{\nu\mu}}{dp} - \sum_{\kappa=1}^n t_{\nu\kappa} k_{\kappa\mu} \right\} b_{\lambda\nu}^0 \\ + \sum_{\kappa=1}^n b_{\lambda\kappa}^0 \left\{ \sum_{\nu=1}^n (c_{\kappa\nu}^0 t_{\nu\mu} - t_{\kappa\nu} c_{\nu\mu}^0) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Ich behaupte, dieses Gleichungssystem lässt sich durch die beiden folgenden ersetzen:

$$\frac{db_{\lambda\mu}^0}{dp} = \sum_{\kappa} b_{\lambda\kappa}^0 c_{\kappa\mu}^0 \quad \text{und} \quad \frac{dt_{\lambda\mu}}{dp} = \sum_{\kappa} t_{\lambda\kappa} k_{\kappa\mu}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$b_{\lambda\mu}^0 = \binom{\lambda}{\mu} t_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu} \text{ für } p = 0 \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$$

Zum Beweise hat man nur zu zeigen, dass, wenn man die $t_{\lambda\mu}$ durch das zweite dieser Gleichungssysteme bestimmt,

$$s_{\lambda\mu} = \sum_r (c_{\lambda r}^0 t_{r\mu} - t_{\lambda r} c_{r\mu}^0) = 0 \text{ ist für } \lambda, \mu = 1, 2, \dots n$$

Nun ergeben aber diese Differentialgleichungen mit Rücksicht auf (4)

$$\sum_{\mu} t_{\lambda\mu} [g h \mu]_{\kappa} = e^{r_{\kappa} p} [g h \lambda]_{\kappa}$$

Aus dieser Gleichung und aus (4) folgt

$$\sum_{\mu} s_{\lambda\mu} [g h \mu]_{\kappa} = 0$$

für alle unter (3) angegebenen Werte der Indices λ, g, h, κ .

Da die Determinante der $[g h \mu]_{\kappa}$ nicht verschwindet, hat dies zur Folge, dass $s_{\lambda\mu} = 0$ ist, für $\lambda, \mu = 1, 2, \dots n$.

Indem man der Reihe nach

$$t_{\lambda\mu} = \sum_r b_{\lambda r}^1 t_{r\mu}^1 \quad t_{\lambda\mu}^1 = \sum_r b_{\lambda r}^2 t_{r\mu}^2 \text{ u. s. w. } (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$$

setzt, überzeugt man sich, dass sich die Differentialgleichungen (2) mit den Anfangsbedingungen $b_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu}$ für $p = 0$ ersetzen lassen durch die folgenden:

$$\frac{db_{\lambda\mu}^0}{dp} = \sum_{\nu} b_{\lambda\nu}^0 c_{\nu\mu}^0$$

$$\frac{db_{\lambda\mu}^1}{dp} = \sum_{\nu} b_{\lambda\nu}^1 c_{\nu\mu}^1$$

$$\frac{db_{\lambda\mu}^2}{dp} = \sum_{\nu} b_{\lambda\nu}^2 c_{\nu\mu}^2 \quad \lambda, \mu = 1, 2, \dots, n$$

.

$$\frac{db_{\lambda\mu}^{\beta}}{dp} = \sum_{\nu} b_{\lambda\nu}^{\beta} c_{\nu\mu}^{\beta}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$b_{\lambda\mu}^i = \binom{i}{\mu} \text{ für } p = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, \beta)$$

Durch Integration dieser Differentialgleichungen erhält man die $b_{\lambda\mu}^0$ als ganze Functionen von p , und die $b_{\lambda\mu}^i$ als rationale Functionen von $q_1 = e^{\varrho_1 p}$ ($i = 1, 2, \dots, \beta$).

Die Substitutionscoefficienten $b_{\lambda\mu}^i$ sind ganze Functionen der $b_{\lambda\mu}^0, b_{\lambda\mu}^1, \dots, b_{\lambda\mu}^{\beta}$ also rationale Functionen von $p, q_1, q_2, \dots, q_{\beta}$. Nun sollte die Gleichung $f((y)) = f((x))$, wenn man in derselben $y_{\lambda} = \sum_{\mu} b_{\lambda\mu} x_{\mu}$ setzt, für alle Werte der x und für alle Werte von p bestehen. Da aber infolge der über die Grössen ϱ_i gemachten Voraussetzung zwischen p und den transcendenten Functionen $q_1, q_2, \dots, q_{\beta}$ von p keine algebraische Beziehung bestehen kann, so muss die Gleichung $f((y)) = f((x))$ auch dann noch erfüllt sein, wenn man die Grössen $q_1, q_2, \dots, q_{\beta}$ als unabhängig variabel betrachtet. f wird also durch jede der Substitutionen

$$y_{\lambda} = \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^i x_{\mu} \quad (i = 0, 1, 2, \dots \beta)$$

in sich selbst transformirt und genügt folglich den $\beta + 1$ Differentialgleichungen

$$\sum_{\lambda} \sum_{\mu} c_{\lambda\mu}^i \frac{\partial f}{\partial x_{\lambda}} x_{\mu} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots \beta)$$

Wir haben also den Satz:

Genügt eine rationale und homogene Function $f((x))$ den m partiellen Differentialgleichungen

$$\sum_{\lambda} \sum_{\mu} c_{\lambda\mu}^i \frac{\partial f}{\partial x_{\lambda}} x_{\mu} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots m)$$

aber keiner weiteren, von diesen linear unabhängigen derselben Form, so kann man, indem man nötigen Falls diese Gleichungen durch lineare Combinationen derselben ersetzt, stets bewirken, dass die Fundamentaldeterminante jedes der Coefficientensysteme $c_{\lambda\mu}^i$ entweder durch r^n teilbar ist, oder nur Elementarteiler erster Ordnung besitzt und nur für ganzzahlige Werte von r verschwindet.

V.

Integration der Differentialgleichungen (α).

Der bisherigen Untersuchung lag die Annahme zu Grund, dass die Function f durch eine lineare Substitution mit m verfügbaren Coefficienten in sich selbst transformirt werde. Es ergab sich, dass f einer gewissen Anzahl von linear unabhängigen Differentialgleichungen der Form

$$\sum_{\lambda} \sum_{\mu} c_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_{\lambda}} x_{\mu} = 0$$

genügen muss. Von der Zahl m' dieser Differentialgleichungen konnten wir nur nachweisen, dass sie nicht kleiner als m sein kann.

Wir nehmen nunmehr an, die homogene Function f genüge den m linear unabhängigen Differentialgleichungen

$$(\gamma) \sum_{\lambda} \sum_{\mu} c_{\lambda\mu}^i \frac{\partial f}{\partial x_{\lambda}} x_{\mu} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

aber keiner weiteren von diesen linear unabhängigen derselben Form. Die Annahme, diese Differentialgleichungen seien linear unabhängig, schliesst nicht aus, dass eine Anzahl dieser Differentialgleichungen eine Folge der übrigen sein kann.

Wir setzen ausserdem voraus, jedes der Coefficientensysteme $c_{\lambda\mu}^i$ sei von der ersten oder von der zweiten Art.

Diese Coefficienten $c_{\lambda\mu}^i$ genügen einem Gleichungssystem der Form:

$$(\varepsilon) \sum_{\nu=1}^n (c_{\lambda\nu}^i c_{\nu\mu}^k - c_{\nu\mu}^i c_{\lambda\nu}^k) = \sum_{\gamma=1}^m \varepsilon_{\gamma}^{ik} c_{\lambda\mu}^{\gamma}$$

$$(\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n; i, k = 1, 2, \dots, m)$$

Es lassen sich nun sofort m elementare Substitutionen B_i angeben, welche f in sich selbst transformiren.

Bilden die $c_{\lambda\mu}^i$ ein System erster Art, so bestimme ich die Substitutionscoefficienten $b_{\lambda\mu}^i$ durch die Differentialgleichungen

$$\frac{db_{\lambda\mu}^i}{dp_i} = \sum_{\nu=1}^n b_{\lambda\nu}^i c_{\nu\mu}^i \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

und die Anfangswerte $b_{\lambda\mu}^i = \binom{\lambda}{\mu}$ für $p_i = 0$. Bilden die $c_{\lambda\mu}^i$ ein System der zweiten Art, so ist in den vorstehenden Gleichungen p_i durch $\log p_i$ zu ersetzen.

Je nachdem der eine oder der andere Fall eintritt nenne ich p_1 einen Parameter erster oder zweiter Art und den Wert $p_1 = 0$ beziehungsweise $p_1 = 1$ seinen Anfangswert.

Die Function f wird nun durch jede der Substitutionen

$$\begin{aligned} B_1 \quad y_\lambda &= \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^1 y_\mu^1 \\ B_2 \quad y_\lambda^1 &= \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^2 y_\mu^2 \\ B_3 \quad y_\lambda^2 &= \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^3 y_\mu^3 \\ &\dots \dots \dots \\ B_{m-1} \quad y_\lambda^{m-2} &= \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^{m-1} y_\mu^{m-1} \\ B_m \quad y_\lambda^{m-1} &= \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^m x_\mu \end{aligned} \quad \lambda = 1, 2, \dots n$$

folglich auch durch die aus diesen Substitutionen zusammengesetzte Substitution

$$(A) \quad y_\lambda = \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} x_\mu$$

in sich selbst transformirt.

Die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ sind ganze Functionen der Parameter erster Art und wenigstens rationale Functionen der Parameter zweiter Art. Unstetig können sie nur werden, wenn einer der Parameter zweiter Art verschwindet oder für unendlich grosse Werte der Parameter. Den Anfangswerten der Parameter entsprechen die Werte $a_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu}$.

Die Determinante der $a_{\lambda\mu}$ ist gleich dem Producte der Determinanten der elementaren Substitutionen B_i , also gleich einem Producte aus ganzen Potenzen der Parameter zweiter Art, da die Determinante einer elementaren Substitution erster

Art gleich 1 und die Determinante einer elementaren Substitution zweiter Art gleich einer ganzen Potenz des entsprechenden Parameters ist.

Man kann auf dem im zweiten Abschnitt eingeschlagenen Wege beweisen, dass die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ einem System von Differentialgleichungen der Form

$$(a) \quad \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_i} = \sum_{\nu} a_{\lambda\nu} c_{\nu\mu}^i (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n; i = 1, 2, \dots m)$$

genügen, wo

$$(\pi) \quad C_{\lambda\mu}^i = \sum_{j=1}^m P_j^i c_{\lambda\mu}^j$$

ist und die Grössen P_j^i rationale Functionen der Parameter p sind. Ich will jedoch im folgenden für diese Gleichungen einen Beweis erbringen, der sich nur auf die Definition der Substitution A durch die elementaren Substitutionen B_i und auf die durch die Gleichungen (ϵ) ausgedrückten Eigenschaften der Coefficienten $c_{\lambda\mu}^i$ stützt.

Dieser Beweis beruht auf folgendem Hilfssatz:

Die n^2 durch die Gleichungen

$$\sum_{\nu} c_{\lambda\nu}^h b_{\nu\mu}^i = \sum_{\nu} b_{\lambda\nu}^i q_{\nu\mu} (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$$

definirten rationalen Functionen $q_{\lambda\mu}$ von p_i lassen sich darstellen in der Form

$$q_{\lambda\mu} = s_1 c_{\lambda\mu}^1 + s_2 c_{\lambda\mu}^2 \dots + s_m c_{\lambda\mu}^m (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$$

wo $s_1 s_2 \dots s_m$ rationale Functionen von p_i sind.

Beim Beweise ist zu unterscheiden, ob die elementare Substitution B_i erster oder zweiter Art ist. Im ersteren Fall lässt sich $q_{\lambda\mu}$ nach dem Maclaurin'schen Satze entwickeln.

$$\text{Für } p_i = 0 \text{ ist } b_{\lambda\mu}^i = \binom{\lambda}{\mu} \text{ also } q_{\lambda\mu} = c_{\lambda\mu}^h.$$

Zur Berechnung der Differentialquotienten von $q_{\lambda\mu}$ erhält man zunächst die Gleichung

$$\sum_{\nu} \left(c_{\lambda\nu}^h \frac{db_{\nu\mu}^i}{dp_i} - \frac{db_{\lambda\nu}^i}{dp_i} q_{\nu\mu} \right) - \sum_{\nu} b_{\lambda\nu}^i \frac{dq_{\nu\mu}}{dp_i} = 0 \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

Nun ist $\frac{db_{\nu\mu}^i}{dp_i} = \sum_{\kappa} b_{\nu\kappa}^i c_{\kappa\mu}^i$ folglich

$$\sum_{\nu} c_{\lambda\nu}^h \frac{db_{\nu\mu}^i}{dp_i} = \sum_{\kappa} \left\{ \sum_{\nu} c_{\lambda\nu}^h b_{\nu\kappa}^i \right\} c_{\kappa\mu}^i = \sum_{\kappa} \left\{ \sum_{\nu} b_{\lambda\nu}^i q_{\nu\kappa} \right\} c_{\kappa\mu}^i$$

Nach Substitution dieser Werte erhalten die obigen Gleichungen die Form

$$\sum_{\nu} b_{\lambda\nu}^i \left\{ \sum_{\kappa} (q_{\nu\kappa} c_{\kappa\mu}^i - c_{\nu\kappa}^i q_{\kappa\mu}) - \frac{dq_{\nu\mu}}{dp_i} \right\} = 0 \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

Da die Determinante der $b_{\lambda\mu}^i$ nicht verschwindet, so folgt aus diesen Gleichungen

$$\frac{dq_{\nu\mu}}{dp_i} = \sum_{\kappa} (q_{\nu\kappa} c_{\kappa\mu}^i - c_{\nu\kappa}^i q_{\kappa\mu}) \quad (\nu, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

Für $p_i = 0$ wird

$$\left(\frac{dq_{\nu\mu}}{dp_i} \right)_{p_i=0} = \sum_{\kappa} (c_{\nu\kappa}^h c_{\kappa\mu}^i - c_{\nu\kappa}^i c_{\kappa\mu}^h) = \sum_{j=1}^m \epsilon_j^{hi} c_{\nu\mu}^j$$

Die Gleichung

$$\frac{d^2 q_{\nu\mu}}{dp_i^2} = \sum_{\kappa} \left(\frac{dq_{\nu\kappa}}{dp_i} c_{\kappa\mu}^i - c_{\nu\kappa}^i \frac{dq_{\kappa\mu}}{dp_i} \right)$$

zeigt, dass sich auch $\left(\frac{d^2 q_{\nu\mu}}{dp_i^2} \right)_{p_i=0}$ als lineare und homo-

gene Function von $c_{\nu\mu}^1 c_{\nu\mu}^2 \dots c_{\nu\mu}^m$ darstellen lässt, und dasselbe gilt für alle höheren Differentialquotienten. Daraus folgt, dass sich $q_{\nu\mu}$ in der Form

$$q_{\nu\mu} = s_1 c_{\nu\mu}^1 + s_2 c_{\nu\mu}^2 \dots + s_m c_{\nu\mu}^m \quad (\nu, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

darstellen lässt, wo $s_1, s_2, \dots, s_m$ Functionen von p_i sind.

Da die Coefficientensysteme $c_{\lambda\mu}^1 c_{\lambda\mu}^2 \dots c_{\lambda\mu}^m$ linear unabhängig sind, so sind die Functionen s vollkommen bestimmt; sie sind rationale Functionen der $q_{\lambda\mu}$, also auch rationale Functionen von p_i .

Ist die elementare Substitution B_i von der zweiten Art, so hat man $q_{\lambda\mu}$ nicht nach Potenzen von p_i , sondern nach Potenzen von $p_i - 1$ zu entwickeln; im übrigen ist der Beweis ganz analog zu führen.

Durch wiederholte Anwendung des eben bewiesenen Satzes gelangt man leicht zu der folgenden Verallgemeinerung:

Bestimmt man n^2 Grössen $q_{\lambda\mu}$ durch die Gleichungen

$$\sum_{\nu} c_{\lambda\nu}^h b_{\nu\mu}^i = \sum_{\nu} b_{\lambda\nu}^i q_{\nu\mu}$$

hierauf n^2 Grössen $q'_{\lambda\mu}$ durch die Gleichungen

$$\sum_{\nu} q_{\lambda\nu} b_{\nu\mu}^j = \sum_{\nu} b_{\lambda\nu}^j q'_{\nu\mu}$$

hierauf n^2 Grössen $q''_{\lambda\mu}$ durch die Gleichungen

$$\sum_{\nu} q'_{\lambda\nu} b_{\nu\mu}^k = \sum_{\nu} b_{\lambda\nu}^k q''_{\nu\mu}$$

u. s. w.

so lassen sich die Grössen $q_{\lambda\mu}, q'_{\lambda\mu}, q''_{\lambda\mu}, \dots$ darstellen in der Form

$$q_{\lambda\mu} = s_1 c_{\lambda\mu}^1 + s_2 c_{\lambda\mu}^2 \dots + s_m c_{\lambda\mu}^m$$

$$q'_{\lambda\mu} = s'_1 c_{\lambda\mu}^1 + s'_2 c_{\lambda\mu}^2 \dots + s'_m c_{\lambda\mu}^m \quad \lambda, \mu = 1, 2, \dots, n$$

$$q''_{\lambda\mu} = s''_1 c_{\lambda\mu}^1 + s''_2 c_{\lambda\mu}^2 \dots + s''_m c_{\lambda\mu}^m$$

u. s. w.

und hier sind die Grössen $s_1 s_2 \dots$ rationale Functionen von p_i

die Grössen $s'_1 s'_2 \dots$ rationale Functionen von p_i

und p_j

die Grössen $s''_1 s''_2 \dots$ rationale Functionen von p_i

p_j und p_k u. s. w.

Dieser Satz führt zu einem einfachen Beweis der Gleichungen (α) und (π).

Die Gleichungssysteme B_i und A definiren die Grössen $y_\lambda y_\lambda^1 y_\lambda^2 \dots y_\lambda^{m-1}$ als Functionen der Grössen $x_1 x_2 \dots x_n$ und der Parameter $p_1 p_2 \dots p_m$, und zwar ist, da der Parameter p_i nur in die Coefficienten der Substitution B_i aber nicht in die Coefficienten der übrigen Substitutionen B_j eingeht

y_λ Function von $x_1 x_2 \dots x_n$ und $p_1 p_2 p_3 \dots p_m$

y_λ^1 Function von $x_1 x_2 \dots x_n$ und $p_2 p_3 \dots p_m$

y_λ^2 Function von $x_1 x_2 \dots x_n$ und $p_3 \dots p_m \quad \lambda = 1, 2, \dots, n$

.....

y_λ^{m-1} Function von $x_1 x_2 \dots x_n$ und p_m

Durch partielle Differentiation nach p_i ergibt sich daher:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial y_\lambda}{\partial p_i} &= \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^1 \frac{\partial y_\mu^1}{\partial p_i} \\
 \frac{\partial y_\lambda^1}{\partial p_i} &= \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^2 \frac{\partial y_\mu^2}{\partial p_i} \\
 \frac{\partial y_\lambda^2}{\partial p_i} &= \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^3 \frac{\partial y_\mu^3}{\partial p_i} \\
 &\dots \dots \dots \\
 (d) \quad \frac{\partial y_\lambda^{i-2}}{\partial p_i} &= \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^{i-1} \frac{\partial y_\mu^{i-1}}{\partial p_i} \quad \lambda = 1, 2, \dots n \\
 \frac{\partial y_\lambda^{i-1}}{\partial p_i} &= \sum_{\mu} \frac{db_{\lambda\mu}^i}{dp_i} y_\mu^i \\
 y_\lambda^i &= \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^{i+1} y_\mu^{i+1} \\
 &\dots \dots \dots \\
 y_\lambda^{m-1} &= \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^m x_\mu
 \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{db_{\lambda\mu}^i}{dp_i} = \sum_{\nu} b_{\lambda\nu}^i c_{\nu\mu}^i \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{p_i} \sum_{\nu} b_{\lambda\nu}^i c_{\nu\mu}^i$$

je nachdem die elementare Substitution B_i von der ersten oder der zweiten Art ist.

Angenommen, es finde der erste Fall statt — der zweite ist ganz analog zu behandeln — dann ist

$$\frac{\partial y_\lambda^{i-1}}{\partial p_i} = \sum_{\mu} \sum_{\nu} b_{\lambda\nu}^i c_{\nu\mu}^i y_\mu^i \quad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich durch die beiden folgenden ersetzen:

$$\frac{\partial y_{\lambda}^{i-1}}{\partial p_i} = \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^i z_{\mu}^i \quad z_{\lambda}^i = \sum_{\mu} c_{\lambda\mu}^i y_{\mu}^i \quad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

In dem zweiten Gleichungssystem führe ich für y_{μ}^i seinen aus dem $i + 1^{\text{ten}}$ der Gleichungssysteme (d) folgenden Wert und an Stelle der Grössen $c_{\lambda\mu}^i$ die Grössen $q_{\lambda\mu}$ ein, welche aus den Gleichungen

$$\sum_{\mu} c_{\lambda\mu}^i b_{\mu\nu}^{i+1} = \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^{i+1} q_{\mu\nu} \quad (\lambda, \nu = 1, 2, \dots n)$$

zu berechnen sind. Wir erhalten

$$z_{\lambda}^i = \sum_{\mu} \sum_{\nu} c_{\lambda\mu}^i b_{\mu\nu}^{i+1} y_{\nu}^{i+1} = \sum_{\mu} \sum_{\nu} b_{\lambda\mu}^{i+1} q_{\mu\nu} y_{\nu}^{i+1} \quad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

Dieses Gleichungssystem ersetzen wir durch die beiden folgenden:

$$z_{\lambda}^i = \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^{i+1} z_{\mu}^{i+1} \quad z_{\lambda}^{i+1} = \sum_{\mu} q_{\lambda\mu} y_{\mu}^{i+1} \quad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

Das zweite von diesen Gleichungssystemen und das $i + 2^{\text{te}}$ der Gleichungssysteme (d) ersetzen wir nun durch

$$z_{\lambda}^{i+1} = \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^{i+2} z_{\mu}^{i+2} \quad \text{und} \quad z_{\lambda}^{i+2} = \sum_{\mu} q'_{\lambda\mu} y_{\mu}^{i+2} \quad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

wo die Grössen $q'_{\lambda\mu}$ durch die Gleichungen

$$\sum_{\mu} q_{\lambda\mu} b_{\mu\nu}^{i+2} = \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^{i+2} q'_{\mu\nu} \quad (\lambda, \nu = 1, 2, \dots n)$$

bestimmt sind.

In dieser Weise fortfahrend erkennt man leicht, dass sich die letzten $m - i + 1$ der Gleichungssysteme (d) ersetzen lassen durch die folgenden:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial y_{\lambda}^{i-1}}{\partial p_i} &= \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^i z_{\mu}^i \\
 z_{\lambda}^i &= \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^{i+1} z_{\mu}^{i+1} \\
 z_{\lambda}^{i+1} &= \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^{i+2} z_{\mu}^{i+2} \quad \lambda = 1, 2, \dots, n \\
 &\dots \dots \dots \\
 z_{\lambda}^{m-1} &= \sum_{\mu} b_{\lambda\mu}^m z_{\mu}^m \\
 z_{\lambda}^m &= \sum_{\mu} C_{\lambda\mu}^i x_{\mu}
 \end{aligned}$$

und nach dem eben bewiesenen Hilfssatz lassen sich die Grössen $C_{\lambda\mu}^i$ darstellen in der Form

$$C_{\lambda\mu}^i = P_1^i c_{\lambda\mu}^1 + P_2^i c_{\lambda\mu}^2 \dots + P_m^i c_{\lambda\mu}^m \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

wo $P_1^i P_2^i \dots P_m^i$ rationale Functionen von $p_1 p_2 \dots p_m$ sind.

Nun ergibt sich aus der Definition der Substitution A, dass

$$\frac{\partial y_{\lambda}}{\partial p_i} = \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} z_{\mu}^m = \sum_{\mu} \sum_{\nu} a_{\lambda\nu} C_{\nu\mu}^i x_{\mu} \text{ ist,}$$

und da diese Gleichungen für beliebige Werte der x gelten, folgt hieraus

$$\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_i} = \sum_{\nu} a_{\lambda\nu} C_{\nu\mu}^i \text{ w. z. b. w.}$$

Für die Anfangswerte der Parameter wird

$$b_{\lambda\mu}^i = \binom{\lambda}{\mu} \text{ und } \frac{db_{\lambda\mu}^i}{dp_i} = c_{\lambda\mu}^i \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, m).$$

Für diese Werte ergeben daher die Gleichungen (d)

$$\frac{\partial y_\lambda}{\partial p_i} = \sum_{\mu} c_{\lambda\mu}^i x_{\mu} \text{ woraus}$$

$$\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_i} = c_{\lambda\mu}^i \text{ folgt.}$$

Für die Anfangswerte der Parameter ist somit $P_j^i = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$, also die Determinante der P_j^i gleich 1. Diese Determinante verschwindet also nicht identisch und hieraus folgt, wie im II. Abschnitt gezeigt wurde, dass m von den Substitutions-Coefficienten $a_{\lambda\mu}$ vorgeschriebene Werte erhalten können.

Damit ist der Satz bewiesen:

Wird eine homogene und rationale Function der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ $f((x))$ durch eine lineare Substitution, von deren Coefficienten m verfügbar bleiben, in sich selbst transformirt, so genügt sie m linear unabhängigen partiellen Differentialgleichungen (γ) , deren Coefficientensysteme von der ersten oder von der zweiten Art sind.

Und umgekehrt, genügt die homogene Function $f((x))$ m , aber nicht mehr, Differentialgleichungen der angegebenen Art, so wird sie durch eine lineare Substitution, deren Coefficienten sich als rationale Functionen von m unabhängig variablen Parametern darstellen lassen, in sich selbst transformirt.

Diese Darstellung gibt aber nicht notwendig alle Substitutionen, durch die $f((x))$ in sich selbst transformirt wird; sie gibt nur diejenigen, welche durch ein irreducibles System algebraischer Gleichungen definirt sind, denen auch die Coefficienten der identischen Substitutionen genügen.

VI.

$$\text{Ueber das Gleichungssystem } a_{\lambda\mu}((\eta)) \\ = \sum_{\nu} a_{\lambda\nu}((\xi)) a_{\nu\mu}((p)).$$

Wird eine Function durch die Substitutionen

$$y_{\lambda} = \sum_{\mu} a_{\lambda\mu}((\xi)) y'_{\mu} \text{ und } y'_{\lambda} = \sum_{\mu} a_{\lambda\mu}((p)) x_{\mu} \quad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

in sich selbst transformirt, so wird sie auch durch die aus diesen beiden Substitutionen zusammengesetzte Substitution

$$y_{\lambda} = \sum_{\mu} \left\{ \sum_{\nu} a_{\lambda\nu}((\xi)) a_{\nu\mu}((p)) \right\} x_{\mu}$$

in sich selbst transformirt. Aber es ist nicht von vornherein klar, dass diese Substitution einer Substitution der Form

$$y_{\lambda} = \sum_{\mu} a_{\lambda\mu}((\eta)) x_{\mu}$$

äquivalent ist. Es soll daher im Folgenden bewiesen werden, dass es eine endliche Anzahl von Wertsystemen $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_m$ gibt, welche den n^2 Gleichungen

$$(1) \quad a_{\lambda\mu}((\eta)) = \sum_{\nu} a_{\lambda\nu}((\xi)) a_{\nu\mu}((p)) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$$

genügen. Dieser Beweis lässt sich auf den Beweis des folgenden einfacheren Satzes zurückführen:

Es gibt eine endliche Anzahl von Wertsystemen, welche den n^2 Gleichungen

$$(2) \quad a_{\lambda\mu}((\eta)) = \sum_{\nu} a_{\lambda\nu}((\xi)) b_{\nu\mu}^i(p) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$$

genügen.

Setzt man nämlich in den letzteren Gleichungen der Reihe nach

Mit Rücksicht auf (2) folgt somit

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\lambda\nu}((\eta)) \left\{ \sum_{j=1}^m C_{\nu\mu}^j((\eta)) \frac{d\eta_j}{dp} - c_{\nu\mu}^i \right\} = 0 \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$$

Soll die Determinante der $a_{\lambda\mu}((\eta))$ nicht verschwinden, so muss somit

$$\sum_{j=1}^m C_{\nu\mu}^j((\eta)) \frac{d\eta_j}{dp} - c_{\nu\mu}^i = 0 \quad \text{sein für } \nu, \mu = 1, 2, \dots n$$

Hieraus folgt, wenn man $C_{\nu\mu}^j((\eta))$ durch $\sum_{k=1}^m P_k^j((\eta)) c_{\nu\mu}^k$ ersetzt und beachtet, dass die $c_{\nu\mu}^k$ linear unabhängig sind:

$$(3) \quad \sum_{j=1}^m P_k^j((\eta)) \frac{d\eta_j}{dp} = \binom{k}{i} \quad (k = 1, 2, \dots m)$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$(4) \quad \frac{d\eta_j}{dp} = Q_j^i((\eta)) \quad (j = 1, 2, \dots m)$$

wo die Functionen Q_j^i durch die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^m P_k^j Q_h^k = \binom{h}{j} \quad (h, j = 1, 2, \dots m)$$

bestimmt sind.

Gibt es also Werte $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$, welche den Gleichungen (2) genügen, so genügen dieselben als Functionen von p betrachtet, den vorstehenden Differentialgleichungen. Ausserdem müssen die dem Wert $p = 0$ entsprechenden Anfangswerte der η die Gleichungen

$$a_{\lambda\mu}((\eta)) = a_{\lambda\mu}((\xi)) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$$

befriedigen.

Ich beweise nun, dass auch umgekehrt die Functionen $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_m$ von p , welche durch die Differentialgleichungen (3) oder (4) und die Anfangswerte $\eta_k = \xi_k$ für $p = 0$ bestimmt sind, den Gleichungen (2) genügen.

Ersetzt man in den Ausdrücken

$$q_{\lambda\mu} = a_{\lambda\mu}((\eta)) - \sum_{\nu=1}^n a_{\lambda\nu}((\xi)) b_{\nu\mu}^i(p) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

die Grössen $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_m$ durch ihre Werte in Function von p , so werden die n^2 Grössen $q_{\lambda\mu}$ Functionen von p . Durch Differentiation nach p ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{dq_{\lambda\mu}}{dp} &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_{\lambda\mu}((\eta))}{\partial \eta_j} \frac{d\eta_j}{dp} - \sum_{\nu=1}^n a_{\lambda\nu}((\xi)) \frac{db_{\nu\mu}^i(p)}{dp} \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{\nu=1}^n a_{\lambda\nu}((\eta)) C_{\nu\mu}^j((\eta)) \frac{d\eta_j}{dp} - \sum_{\nu=1}^n \sum_{\kappa=1}^n a_{\lambda\nu}((\xi)) b_{\nu\kappa}^i(p) c_{\kappa\mu}^i \end{aligned}$$

Da aber $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_m$ den Differentialgleichungen (2) genügen, so ist

$$\sum_{j=1}^m C_{\nu\mu}^j((\eta)) \frac{d\eta_j}{dp} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m P_k^j((\eta)) \frac{d\eta_j}{dp} c_{\nu\mu}^k = c_{\nu\mu}^i$$

Folglich ist

$$\frac{dq_{\lambda\mu}}{dp} = \sum_{\nu=1}^n \left\{ a_{\lambda\nu}((\eta)) - \sum_{\kappa=1}^n a_{\lambda\kappa}((\xi)) b_{\kappa\nu}^i(p) \right\} c_{\nu\mu}^i$$

$$\text{Oder} \quad \frac{dq_{\lambda\mu}}{dp} = \sum_{\nu=1}^n q_{\lambda\nu} c_{\nu\mu}^i \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

Nun ist für $p = 0$ $q_{\lambda\mu} = 0$ ($\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n$), daher verschwinden für $p = 0$ auch alle Differentialquotienten $\frac{dq_{\lambda\mu}}{dp}$ und ebenso alle höheren Differentialquotienten. Die

n^2 Functionen $q_{\lambda\mu}$ sind daher identisch Null, was zu beweisen war.

Damit ist, wie bereits oben ausgeführt wurde, bewiesen, dass es bei beliebig gegebenen Werten von $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_m$ und $p_1 p_2 \dots p_m$ eine endliche Anzahl von Wertsystemen gibt, welche den Gleichungen (1) genügen. Durch diese Gleichungen sind also m algebraische Functionen der ξ und der p

$$r_i = q_i(\xi|p) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

definiert.

In ganz analoger Weise kann man beweisen, dass es bei beliebig gegebenen Werten von $r_1 r_2 \dots r_m$ und $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_m$ eine endliche Anzahl von Wertsystemen $p_1 p_2 \dots p_m$ gibt, welche den Gleichungen (1) genügen.

Es gibt also insbesondere Werte von $p_1 p_2 \dots p_m$, welche den Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\lambda\nu}((\xi)) a_{\nu\mu}((p)) = \binom{\lambda}{\mu} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

genügen. —

Wir haben den Nachweis für die Existenz der Functionen q erbracht, indem wir dieselben durch eine Reihe von Systemen von Differentialgleichungen definirten, in denen immer nur eine unabhängige Variable vorkommt. Wir können die Functionen q aber auch durch ein einziges simultanes System von Differentialgleichungen bestimmen.

Betrachten wir in den Gleichungen (1) die Grössen ξ als constant, die Grössen p und η als variabel und bilden unter dieser Voraussetzung von beiden Seiten der Gleichung (1) die vollständigen Differentiale.

Wir erhalten, da wegen (a)

$$da_{\lambda\mu}((\eta)) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial a_{\lambda\mu}((\eta))}{\partial \eta_i} d\eta_i = \sum_{i=1}^m \sum_{\nu=1}^n a_{\lambda\nu}((\eta)) C_{\nu\mu}^i((\eta)) d\eta_i$$

$$\text{und } da_{\lambda\mu}((p)) = \sum_{i=1}^m \sum_{\nu=1}^n a_{\lambda\nu}((p)) C_{\nu\mu}^i((p)) dp_i \text{ ist,}$$

mit Rücksicht auf (1)

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n a_{\lambda\nu}((\eta)) \left\{ \sum_{i=1}^m (C_{\nu\mu}^i((\eta)) d\eta_i - C_{\nu\mu}^i((p)) dp_i) \right\} \\ = 0 \quad (\lambda, \mu = 1, 2 \dots n) \end{aligned}$$

und hieraus folgt, da die Determinante der $a_{\lambda\mu}((\eta))$ nicht verschwindet

$$\sum_{i=1}^m (C_{\nu\mu}^i((\eta)) d\eta_i - C_{\nu\mu}^i((p)) dp_i) = 0 \quad (\nu, \mu = 1, 2, \dots n)$$

Führen wir hier für die Functionen $C_{\nu\mu}^i$ ihre durch die Gleichungen (π) gegebenen Werte ein, so folgt, weil die Coefficientensysteme $c_{\lambda\mu}^1, c_{\lambda\mu}^2 \dots c_{\lambda\mu}^m$ linear unabhängig sind.

$$(5) \quad \sum_{i=1}^m P_j^i((\eta)) d\eta_i = \sum_{i=1}^m P_j^i((p)) dp_i \quad (j = 1, 2, \dots m)$$

Diese Gleichungen bringen eine merkwürdige Eigenschaft der Functionen φ zum Ausdruck. Stellt man nämlich für die vorstehenden Differentialgleichungen die Integrabilitätsbedingungen auf, so kommt man zu einem System partieller Differentialgleichungen von der Form der im III. Abschnitt mit (J) und (J') bezeichneten Systeme.

Durch die Differentialgleichungen (5) sind die Grössen η als Functionen der p vollkommen bestimmt, sobald noch die den Anfangswerten der p entsprechenden Werte der η gegeben sind.

Wie vielwerthig die algebraischen Functionen φ sind, hängt wesentlich von der Wahl des Parametersystems, welches zur Darstellung der Grössen $a_{\lambda\mu}$ verwendet wird, oder was dasselbe sagen will, von der Wahl der Functionen P_j^i ab.

Es lässt sich beweisen, dass bei geeigneter Wahl dieses Parametersystems die Functionen φ einwertig, also rational sind. Dieser Beweis lässt sich nur auf Grund einer eingehenden Untersuchung der zwischen den Coefficienten $c_{\lambda\mu}^i$ bestehenden Beziehungen erbringen, auf welche hier nicht eingegangen werden soll.

VI.

Ueber die Functionen φ .

Betrachtet man die Grössen $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_m$ als die ursprünglichen, die Grössen $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_m$ als neue Variable und die Grössen $p_1 p_2 \dots p_m$ als verfügbare Parameter, so ist durch die Gleichungen

$$\eta_i = \varphi_i(\xi|p) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

ein System von Substitutionen defnirt. Es lässt sich zeigen, dass dieses Substitutionensystem ein invariantives ist.

Der Beweis stützt sich auf die beiden folgenden Eigenschaften der Functionen φ :

$$\begin{aligned} 1) \text{ Ist } \eta_i &= \varphi_i(\xi|p) & i = 1, 2, \dots, m \\ \text{so ist auch } \xi_i &= \varphi_i(\eta|q) \end{aligned}$$

und hier sind $q_1 q_2 \dots q_m$ Functionen von $p_1 p_2 \dots p_m$ aber unabhängig von $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_m$.

$$\begin{aligned} 2) \text{ Ist } \eta_i &= \varphi_i(\xi|p) & i = 1, 2, \dots, m \\ \text{und } \zeta_i &= \varphi_i(\eta|q) \\ \text{so ist auch } \zeta_i &= \varphi_i(\xi|r) \end{aligned}$$

und hier sind $r_1 r_2 \dots r_m$ Functionen von $p_1 p_2 \dots p_m$ und $q_1 q_2 \dots q_m$ aber unabhängig von $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_m$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den im vorigen Abschnitt bewiesenen Sätzen.

Ist $\eta_i = q_i (\xi|p)$, so ist nach der Definition der Functionen q

$$a_{\lambda\mu} ((\eta)) = \sum_{\nu=1}^n a_{\lambda\nu} ((\xi)) a_{\nu\mu} ((p)) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$$

Bestimmt man also die Grössen q durch die Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^n a_{\nu\mu} ((p)) a_{\mu\kappa} ((q)) = \binom{\nu}{\kappa} \quad (\nu, \kappa = 1, 2, \dots n)$$

so wird

$$\sum_{\mu=1}^n a_{\lambda\mu} ((\eta)) a_{\mu\kappa} ((q)) = a_{\lambda\kappa} ((\xi)) \quad (\lambda, \kappa = 1, 2, \dots n)$$

w. z. b. w.

Ist zweitens

$$\zeta_i = q_i (\eta|q) \text{ und } \eta_i = q_i (\xi|p) \quad (i = 1, 2, \dots m)$$

so bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{\lambda\mu} ((\zeta)) &= \sum_{\nu=1}^n a_{\lambda\nu} ((\eta)) a_{\nu\mu} ((q)) \\ &\quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n) \\ a_{\lambda\mu} ((\eta)) &= \sum_{\nu=1}^n a_{\lambda\nu} ((\xi)) a_{\nu\mu} ((p)) \end{aligned}$$

aus denen folgt

$$a_{\lambda\mu} ((\zeta)) = \sum_{\nu=1}^n \sum_{\kappa=1}^n a_{\lambda\nu} ((\xi)) a_{\nu\kappa} ((p)) a_{\kappa\mu} ((q))$$

Bestimmt man nun die Grössen r durch die Gleichungen

$$a_{\nu\mu} ((r)) = \sum_{\kappa=1}^n a_{\nu\kappa} ((p)) a_{\kappa\mu} ((q)) \quad (\nu, \mu = 1, 2, \dots n)$$

so ist $\zeta_i = q_i (\xi|r)$ ($i = 1, 2, \dots m$) w. z. b. w.

Aus den beiden eben bewiesenen Sätzen geht hervor,

dass die Gesamtheit der Substitutionen φ eine „continuirliche Gruppe“ bildet.

Man kann auf diese Substitutionen φ ganz ebenso wie auf die linearen Substitutionen eine Definition der Aequivalenz gründen, indem man eine rationale Function von $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_m$ und eine rationale Function von $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_m$ als äquivalent bezeichnet, wenn die erstere durch eine Substitution $\xi_i = \varphi_i(\eta|p)$ ($i = 1, 2, \dots m$) in die letztere transformirt werden kann. Auch für die auf die Substitutionen φ gegründete Aequivalenz gilt der Satz, dass zwei Functionen dann und nur dann äquivalent sind, wenn sie zur selben dritten äquivalent sind.

VIII.

Ueber die Integrale der Differentialgleichungen (γ).

Nunmehr kann der Beweis erbracht werden, dass die Differentialgleichungen (γ) ein Invariantensystem definiren: sie definiren das Invariantensystem der Formen

$$F_\lambda(x|\xi) = \sum_{\mu=1}^n a_{\lambda\mu}((\xi)) x_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

mit den „Coefficienten“ $x_1 x_2 \dots x_n$ und den „Variabeln“ $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_m$.

Führen wir an Stelle der Variabeln ξ neue Variable ein mittelst der Substitutionen

$$\xi_i = \varphi_i(\eta|p) \quad (i = 1, 2, \dots m)$$

so geht die Form $F_\lambda(x|\xi)$ in die äquivalente Form $F'_\lambda(y|\eta)$ über, wo

$$y_\lambda = \sum_{\mu=1}^n a_{\lambda\mu}((p)) x_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \dots n) \text{ ist.}$$

Denn nach der Definition der Function φ ist

$$a_{\lambda\mu}((\xi)) = \sum_{\nu=1}^n a_{\lambda\nu}((\eta)) a_{\nu\mu}((p)) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

Betrachten wir nun die Coefficienten $x_1 x_2 \dots x_n$ und die Coefficienten $y_1 y_2 \dots y_n$ als gegeben, so lauten die notwendigen und ausreichenden Bedingungen, damit die Formen $F_\lambda(x|\xi)$ und $F_\lambda(y|\eta)$ äquivalent sind:

Es müssen sich Werte $p_1 p_2 \dots p_m$ angeben lassen, welche den Gleichungen

$$y_\lambda = \sum_{\mu=1}^n a_{\lambda\mu}((p)) x_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

genügen.

Da nun, wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, zwei Formen äquivalent sind, wenn sie zur selben dritten äquivalent sind, so lassen sich diese Bedingungen vollständig ersetzen durch die folgenden:

Es muss ein Wertsystem $z_1 z_2 \dots z_n$ und Wertsysteme $q_1 q_2 \dots q_m$; $r_1 r_2 \dots r_m$ geben, welche den beiden Gleichungssystemen

$$\begin{aligned} x_\lambda &= \sum_{\mu=1}^n a_{\lambda\mu}((q)) z_\mu \\ y_\lambda &= \sum_{\mu=1}^n a_{\lambda\mu}((r)) z_\mu \end{aligned} \quad \lambda = 1, 2, \dots, n$$

genügen.

Im vorliegenden Fall sind somit die Voraussetzungen erfüllt, auf welche Herr Christoffel seinen Eingangs besprochenen Beweis gestützt hat, dass sich die Aequivalenzbedingungen durch Gleichsetzung von Invarianten ausdrücken lassen. Es gelten demnach für den vorliegenden Fall die von Herrn Christoffel aufgestellten Sätze:

1) Die Aequivalenzbedingungen lassen sich vollständig ausdrücken durch eine Anzahl Gleichungen der Form

$$f_i((y)) = f_i((x)) \quad (i = 1, 2, \dots, n - \sigma + \varrho).$$

Hier bedeutet σ „die Ordnung der systematischen Elimination“ und ϱ eine positive Zahl, die unter Umständen gleich Null sein kann. Die Zahl σ ist gleich der Anzahl der Coefficienten der transformirten Form, welche bei geeigneter Wahl der verfügbaren Parameter p vorgeschriebene Werte erhalten können.

2) Alle Invarianten von F_λ , d. h. alle rationalen Functionen der y , welche von den Werten der Parameter p unabhängig sind und nur von den Werten der x abhängen, lassen sich als rationale Functionen der $n - \sigma + \varrho$ Invarianten f_i darstellen.

Die Invarianten f_i genügen offenbar den Differentialgleichungen (γ) . Da unter diesen Invarianten $n - \sigma$ von einander unabhängig sind, so haben die Differentialgleichungen (γ) $n - \sigma$ von einander unabhängige Integrale. Von den m linear unabhängigen Differentialgleichungen (γ) müssen daher $m - \sigma$ eine Folge der übrigen sein.

Das eben nachgewiesene Invariantensystem bildet ein Invariantensystem für jede der n Formen

$$F_1(x|\xi) \quad F_2(x|\xi) \quad \dots \quad F_n(x|\xi).$$

Dies findet sein vollständiges Analogon in der Invariantentheorie im engeren Sinne des Wortes. Das Invariantensystem einer algebraischen Form $F_1(x|\xi^1)$ mit den Coefficienten $x_1, x_2, \dots, x_n$ und den Variabeln $\xi_1^1, \xi_2^1, \dots, \xi_\mu^1$ kann nämlich als Invariantensystem jeder der n Formen betrachtet werden, welche durch wiederholte Anwendung der Operation

$$\sum_{\lambda=1}^{\mu} \xi_\lambda^i \frac{\partial F}{\partial \xi_\lambda^1} \quad (i = 1, 2, \dots, \mu)$$

aus F_1 hervorgehen, sofern man nur die μ Variabelnsysteme

$$\begin{array}{c} \xi_1^1 \quad \xi_2^1 \dots \xi_\mu^1 \\ \xi_1^2 \quad \xi_2^2 \dots \xi_\mu^2 \\ \dots \dots \dots \\ \xi_1^\mu \quad \xi_2^\mu \dots \xi_\mu^\mu \end{array}$$

als cogredient betrachtet.

Diese n Formen sind offenbar nichts anderes als die Coefficienten einer algebraischen Form, in welche F_1 durch die lineare Substitution

$$\xi_i = \eta_1 \xi_i^1 + \eta_2 \xi_i^2 + \eta_3 \xi_i^3 \dots + \eta_\mu \xi_i^\mu \quad (i = 1, 2, \dots, \mu)$$

transformirt wird. Auch dies steht in vollkommenem Einklang mit der im Vorangehenden entwickelten allgemeinen Theorie.