

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1925. Heft I

Januar- bis Junisitzung

München 1925

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Zur Juelschen Theorie der reellen, ebenen Kurven

4. Ordnung.

Von O. Haupt in Erlangen.

Vorgelegt von G. Faber in der Sitzung am 10. Januar 1925.

1. (*Vorbemerkungen*). Unter einer (einteiligen) reellen „Kurve $\mathfrak{C}$ “ (bzw. einem ebenen reellen „Bogen $\mathfrak{B}$ “) in der projektiven Ebene verstehen wir im folgenden das eindeutige, stetige Bild der abgeschlossenen Einheitsstrecke, wobei die Bilder der Streckenendpunkte zusammenfallen (bzw. nicht zusammenfallen). Ist die Abbildung umkehrbar eindeutig und ist das Bild ganz im Endlichen gelegen („beschränkt“), so sprechen wir speziell auch von „Jordankurven“ (bzw. „Jordanbogen“). Ein Punkt P von $\mathfrak{C}$ (bzw. $\mathfrak{B}$), in seiner Eigenschaft als Bild eines Punktes p der Strecke betrachtet, heißt eine (zu p gehörige) „Stelle“ von $\mathfrak{C}$ (bzw. $\mathfrak{B}$), das Bild der Umgebung von p heißt „Umgebung der Stelle“. Stellen, die zu verschiedenen p gehören, gelten als „verschieden“.

$\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{B}$ heißen „stückweise konvex“ (erfüllen die „Voraussetzung K “), wenn $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{B}$ sich als Vereinigung von endlich vielen Konvexbogen¹⁾ darstellen lassen; sie heißen „stückweise stetig differenzierbar“ (genügen der „Voraussetzung D “), falls $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{B}$ als Vereinigung von endlich vielen Bogen dargestellt werden kann, deren jeder überall eine eindeutig bestimmte Tangente besitzt, welche zugleich die Grenzlage aller Folgen von Nachbartangenten ist²⁾.

¹⁾ Ein nicht-beschränkter Bogen heißt „konvex“, falls er projektives Bild eines beschränkten Konvexbogens ist.

²⁾ Vgl. A. Rosenthal, Über die Singularitäten der reellen ebenen Kurven (Math. Ann. 73 (1913), S. 483). Eine der Voraussetzungen K (bzw. D)

Eine Kurve $\mathcal{C}_n$ (bzw. ein Bogen $\mathcal{B}_n$) heißt „von n -ter (Realitäts)-Ordnung“, wenn $\mathcal{C}_n$ (bzw. $\mathcal{B}_n$) mit jeder Geraden der (projektiven) Ebene höchstens n Stellen gemeinsam hat und mit mindestens einer Geraden auch genau n ; dabei wollen wir noch verabreden, daß jede Stelle, in welcher $\mathcal{C}_n$ (bzw. $\mathcal{B}_n$) von einer Geraden gestützt³⁾ wird, als gleich zu bewerten ist mit 2 verschiedenen gemeinsamen Stellen. Diese Festsetzung entspricht der üblichen Bewertung des Berührungspunktes einer Tangente.

2. (Fragestellung). Herr Juel hat unter anderem die Gesamtheit der einteiligen Kurven 3. und 4. Ordnung ($\mathcal{C}_3$ und $\mathcal{C}_4$) untersucht, welche den Voraussetzungen K und D genügen, und hat eine vollständige Klassifikation derselben gegeben⁴⁾.

Es fragt sich nun, einmal inwiefern die Voraussetzungen K und D eine wesentliche Einschränkung gegenüber den *allgemeinen* $\mathcal{C}_3$ und $\mathcal{C}_4$ bedeuten (bei welchen also Voraussetzung K oder D oder beide nicht notwendig erfüllt sind); sodann ob die Klassifikation von Herrn Juel auch für die *allgemeinen* $\mathcal{C}_3$ und $\mathcal{C}_4$ gilt.

In den folgenden Zeilen soll ein Weg zur Beantwortung dieser Fragen angedeutet werden, speziell soweit Voraussetzung K in Frage kommt⁵⁾. Wir werden dabei *zur Vereinfachung durchweg* die — übrigens keineswegs wesentliche — *Annahme machen, daß alle zu betrachtenden Bogen und Kurven keine Strecken als Teil-*

genügende Kurve heißt bei Herrn Juel eine „Elementarkurve“ (bzw. eine „völlig stetige“ Kurve), siehe C. Juel:

a) Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven 3. und 4. Ordnung (Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturv. Afd., 7. R., XI, 2 (1914).

b) Einige Sätze über ein- und mehrteilige Elementarkurven 4. Ordnung (Math. Ann. 76 (1915), S. 343 ff.).

³⁾ Ein Jordanbogen $\mathcal{B}$ mit den Endpunkten P und Q wird in einem (von P und Q verschiedenen, im Endlichen gelegenen) Punkte H von einer Geraden g „gestützt“, wenn die Umgebung $\mathfrak{U}(H; \mathcal{B})$ von H auf $\mathcal{B}$ ganz in einer der beiden, durch g bestimmten (abgeschlossenen) Halbebenen gelegen ist (vgl. Math. Zeitschr. 19 (1924), S. 284 ff.).

⁴⁾ Juel, l. c.²⁾. Gelegentlich treten dort auch noch die Voraussetzungen auf, daß die betrachteten Kurven keine Strecken enthalten bzw. daß sie nur endlich viele mehrfache Punkte besitzen sollen.

⁵⁾ Für die $\mathcal{C}_3$ ist die Beantwortung auf etwas anderem Wege gewonnen in Math. Ann. 92 (1924), S. 88 ff.

bogen enthalten und nur endlich viele mehrfache Punkte von endlichem Vielfachheitsgrade⁶⁾ besitzen. Eine vollständige Behandlung des allgemeinen Falles, ohne diese Einschränkungen und unter Berücksichtigung auch mehrteiliger⁷⁾ Kurven, wird an anderer Stelle gegeben werden.

3. (*Hilfssatz*). Die Bedeutung, welche die Voraussetzung K für die Theorie der $\mathcal{C}_3$ und $\mathcal{C}_4$ besitzt, werden wir im folgenden klarlegen unter Benutzung eines jetzt zu beweisenden Hilfssatzes:

Wir setzen voraus: Es sei $\mathfrak{B}$ ein (keine Strecken enthaltender) Jordanbogen und P sei Endpunkt von $\mathfrak{B}$. Keine noch so kleine Umgebung von P auf $\mathfrak{B}$ sei stückweise konvex; ferner habe jede Gerade durch P mit $\mathfrak{B}$ höchstens endlich viele (verschiedene) Punkte gemeinsam⁸⁾.

Wir behaupten: Für unbegrenzt viele, beliebig kleine Umgebungen $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(P; \mathfrak{B})$ von P auf $\mathfrak{B}$ besitzt die konvexe Hülle $K(\mathfrak{U})$ von $\mathfrak{U}$ (mindestens) eine Stützgerade $\mathfrak{S}$, welche $\mathfrak{U}$ in (mindestens) zwei verschiedenen Punkten stützt. Eine derartige Gerade $\mathfrak{S}$ wollen wir kurz eine „Doppelstützgerade von $\mathfrak{U}$ “ nennen. Die Behauptung lautet dann kürzer so: *Es gibt unbegrenzt viele, beliebig kleine Umgebungen $\mathfrak{U}(P; \mathfrak{B})$ von P , welche (mindestens) eine Doppelstützgerade besitzen⁹⁾.*

Zum Beweis betrachten wir eine, zunächst festzuhaltende Umgebung $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_1(P; \mathfrak{B})$ mit den Endpunkten P und T_1 . Wir können uns $\mathfrak{U}_1$ so gewählt denken, daß $\mathfrak{U}_1$ mit derjenigen Geraden g , welche P und T_1 verbindet, nur die Punkte P und T_1 gemeinsam hat. Denn wegen der Voraussetzung endlicher Relativordnung von $\mathfrak{B}$ bezüglich P gibt es unter den gemeinsamen Punkten von $\mathfrak{U}_1$ und g einen bestimmten T'_1 , so daß der

⁶⁾ Rosenthal, l. c.²⁾, S. 487.

⁷⁾ Juel, l. c.²⁾, besonders b).

⁸⁾ Wir sagen hierfür im folgenden kürzer „ $\mathfrak{B}$ sei bezüglich P von endlicher Relativordnung.“ Vgl. l. c.³⁾.

⁹⁾ Allgemein bezeichnen wir als „Doppelstützgerade einer $\mathcal{C}^*$ jede Gerade, welche die $\mathcal{C}$ in 2 verschiedenen Punkten stützt. Der Begriff der Doppelstützgeraden ist die Verallgemeinerung des Begriffes der Doppeltangente. Für den Fall, daß mehrfache Punkte auftreten, ist eine sinn-gemäße Erweiterung des Begriffes möglich und notwendig; doch wird diese in der vorliegenden Skizze nicht gebraucht.

Teilbogen $U'_1 = \widehat{PT'_1}$ von U_1 außer seinen Endpunkten P und T'_1 keine weiteren Punkte mit g gemeinsam hat; wir brauchen also nur T_1 durch T'_1 und U_1 durch U'_1 zu ersetzen, um der gemachten Annahme gerecht zu werden.

Wir bilden jetzt die konvexe Hülle $K(U_1)$ von U_1 . Die Begrenzung $\mathfrak{G}(U_1)$ von $K(U_1)$ ist die Vereinigungsmenge aus der (P und T_1 verbindenden) Strecke PT_1 und aus einem Konvexbogen $\mathfrak{R}_1$ (mit den Endpunkten P und T_1). Die Punkte von $\mathfrak{R}_1$ bilden, soweit sie nicht zu U_1 ($P; \mathfrak{B}$) gehören („Punkte 1. Art von $\mathfrak{R}_1$ “), eine (höchstens abzählbare) Menge von offenen Strecken σ („Punkte 2. Art von $\mathfrak{R}_1$ “); die Endpunkte jeder Strecke σ sind Punkte 1. Art von $\mathfrak{R}_1$.

Da nach Voraussetzung keine U_1 ($P; \mathfrak{B}$) konvex ist, also nicht mit einer Umgebung $U(P; \mathfrak{R}_1)$ von P auf $\mathfrak{R}_1$ identisch sein darf, so sind nur folgende zwei Fälle möglich:

1. *Fall*: Keine $U(P; \mathfrak{R}_1)$ ist mit einer σ identisch; $\mathfrak{R}_1$ enthält also unbegrenzt viele verschiedene Strecken $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots$ von Punkten 2. Art.

2. *Fall*: Eine (genügend kleine) $U(P; \mathfrak{R}_1)$ besteht aus einer einzigen Strecke σ_1 .

Im 1. *Falle* existieren (unbegrenzt viele) Doppelstützgeraden von U_1 . Denn sei σ'_n eine der zu $\mathfrak{R}_1$ gehörigen Strecken, R_n und Q_n die (zu U_1 ($P; \mathfrak{B}$) gehörigen) Endpunkte von σ'_n . Da unbegrenzt viele verschiedene Strecken σ'_r bzw. Paare von Endpunkten P_r, Q_r existieren sollen, so werden für beliebig viele Werte von n weder P_n noch Q_n mit den Endpunkten von U_1 ($P; \mathfrak{B}$) zusammenfallen. Sei ferner g_n diejenige Gerade, auf welcher σ'_n gelegen ist; dann muß g_n Stützgerade von $\mathfrak{R}_1$ und überdies Doppelstützgerade von U_1 sein. Die Behauptung des *Hilfssatzes* ist somit richtig, wenn der 1. *Fall* für U_1 vorliegt.

Liegt für die hier betrachtete U_1 der 2. *Fall* vor, so kann es doch sein, daß für eine kleinere U_1 ($P; \mathfrak{B}$) der 1. *Fall* eintritt¹⁰⁾; auch dann ist die Behauptung des *Hilfssatzes* richtig und es bleibt somit nur noch die Annahme zu diskutieren, daß der 2. *Fall* für jede (beliebig kleine) Umgebung U_1 ($P; \mathfrak{B}$) eintritt.

¹⁰⁾ Unter U_1 ($P; \mathfrak{B}$) verstehen wir dabei irgend eine Umgebung von P , die mit der Verbindungsgeraden ihrer Endpunkte keine weiteren Punkte gemeinsam hat.

Wir zeigen, daß diese Annahme *ausgeschlossen* wird durch die *Voraussetzung der endlichen Relativordnung von $\mathfrak{B}$ bezüglich P* . Und zwar verläuft der Beweis so:

Es sei T_2 der von P verschiedene, zu $\mathfrak{B}$ gehörige Endpunkt derjenigen Strecke σ_1 , welche die $\mathfrak{U}(P; \mathfrak{K}_1)$ bildet; übrigens ist $T_1 \neq T_2$. Es liegt $\mathfrak{U}_1$ ganz in einer der beiden abgeschlossenen Halbebenen, welche gebildet werden von der Verbindungsgeraden der Punkte P und T_2 . Wir betrachten jetzt $\mathfrak{U}_2(P; \mathfrak{B}) = \widehat{PT_2} = \mathfrak{U}_2$ und wenden auf diesen Teilbogen $\mathfrak{U}_2$ von $\mathfrak{U}_1$ die gleichen Überlegungen an, wie oben auf $\mathfrak{U}_1$; wobei zu beachten ist, daß nach der eben gemachten Annahme der 1. Fall auch für $\mathfrak{U}_2$ nicht eintritt. Wie früher von $\mathfrak{U}_1$ zu $\mathfrak{U}_2$, so gelangen wir jetzt von $\mathfrak{U}_2$ zu einem Teilbogen $\mathfrak{U}_3$ von $\mathfrak{U}_2$ mit den Endpunkten P und T_3 ($T_2 \neq T_3$); und durch Fortsetzung des Verfahrens erhalten wir eine nicht abbrechende Folge von ineinander geschachtelten Teilbogen $\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3, \dots, \mathfrak{U}_n, \dots$ von $\mathfrak{U}_1$ mit dem gemeinsamen Endpunkte P und den zweiten Endpunkten $T_2, T_3, \dots, T_n, \dots$. Bezeichnen wir mit s_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) die von P ausgehenden, T_ν enthaltenden Halbstrahlen, so verläuft $\mathfrak{U}_\nu$ ganz in einem, eindeutig bestimmten, von s_ν und $s_{\nu+1}$ gebildeten, abgeschlossenen Winkelraum $\mathfrak{w}_\nu$; denn es liegt $\mathfrak{U}_\nu$ ganz auf der einen Seite der Verbindungsgeraden einerseits von P und T_ν , andererseits von P und $T_{\nu+1}$. Der Teilbogen $\mathfrak{T}_\nu = \widehat{T_\nu T_{\nu+1}}$ verläuft, abgesehen von endlich vielen Punkten, ganz im Innern von $\mathfrak{w}_\nu$ und enthält P nicht. Da T_ν auf s_ν und $T_{\nu+1}$ auf $s_{\nu+1}$ gelegen ist, so hat jeder, bis auf P , im Innern von $\mathfrak{w}_\nu$ verlaufende Halbstrahl durch P mit $\mathfrak{T}_\nu$ mindestens einen, von P, T_ν und $T_{\nu+1}$ verschiedenen, zu keinem anderen $\mathfrak{T}_\mu$ ($\mu \neq \nu$) gehörigen Punkt gemein. Da überdies $\mathfrak{w}_{\nu-1}$ den Winkelraum $\mathfrak{w}_\nu$ völlig enthält ($0 = 1, 2, \dots, \nu - 1$), so hat jeder im Innern von $\mathfrak{w}_\nu$ verlaufende Halbstrahl durch P mit $\mathfrak{U}_1$ mindestens ν verschiedene Punkte gemeinsam. Damit sind wir bereits bei dem angekündigten Widerspruch angelangt. Denn zu der Folge der ineinander geschachtelten, abgeschlossenen $\mathfrak{w}_\nu$ gehört mindestens ein Halbstrahl mit dem Anfangspunkt P , welcher (von P abgesehen) ganz im Innern eines *jeden* $\mathfrak{w}_\nu$ verläuft, also mit $\mathfrak{U}_1$ *beliebig viele* verschiedene Punkte gemeinsam hat und nicht nur endlich viele, wie die Voraussetzung endlicher Relativordnung es verlangt.

Man sieht übrigens, daß wir etwas mehr bewiesen haben, als in die Behauptung des Hilfssatzes aufgenommen wurde, nämlich, daß eine genügend kleine $\Pi(P; \mathfrak{B})$ selbst schon unbegrenzt viele Doppelstützgeraden besitzt.

4. (*Bemerkungen zum Hilfssatz*). Auf einer Kurve mit nur endlich vielen mehrfachen Punkten von endlichem Vielfachheitsgrade ist die Umgebung einer jeden Stelle (ev. nach projektiver Transformation ins Endliche) ein *Jordanbogen*. Unter der in Nr. 2 gemachten Annahme ist also dann die *eine* Voraussetzung des Hilfssatzes für die Umgebung einer jeden Kurvenstelle erfüllt.

Ist solch ein Bogen oder eine Kurve *nicht* stückweise konvex, so existiert mindestens eine Stelle, deren (beliebig kleine) Umgebung nicht stückweise konvex ist, also eine Stelle, für welche die zweite Voraussetzung des Hilfssatzes erfüllt wird.

Jeder Bogen (bzw. jede Kurve) von endlicher Ordnung ist von endlicher Relativordnung bezüglich eines jeden seiner Punkte.

Bedenkt man jetzt, daß z. B. eine $\mathfrak{C}_3$ höchstens *einen* mehrfachen Punkt der Vielfachheit 2 besitzen kann, sowie, daß eine $\mathfrak{C}_3$ keine Doppelstützgeraden besitzt, so zeigt der Hilfssatz zusammen mit den eben gemachten Bemerkungen, daß eine $\mathfrak{C}_3$ stückweise konvex ist.

Eine Kurve *n-ter Ordnung* $\mathfrak{C}_n$ heißt „*vom Maximalindex*“¹¹⁾, wenn jede Gerade mit der $\mathfrak{C}_n$ nicht mehr als n und nicht weniger als $n - 2$ Stellen gemeinsam hat. Eine $\mathfrak{C}_n$ vom Maximalindex kann keine Doppelstützgeraden besitzen, weil es Nachbargeraden der Doppelstützgeraden gäbe, die 4 Stellen weniger mit der $\mathfrak{C}_n$ gemeinsam haben als die Doppelstützgerade. Der Hilfssatz zeigt, daß eine $\mathfrak{C}_n$ vom Maximalindex *die Voraussetzung K erfüllt*.

Allgemein *genügt eine $\mathfrak{C}_n$ mit nur endlich vielen Doppelstützgeraden* (unter den Annahmen der Nr. 2) *der Voraussetzung K*.

5. (*Anwendung auf die $\mathfrak{C}_4$*). Bei Betrachtung der $\mathfrak{C}_4$ können wir uns, zufolge der letzten Bemerkung in Nr. 4, auf *die $\mathfrak{C}_4$ mit*

¹¹⁾ Vgl. a) C. Juel, Die gewundenen Kurven vom Maximalindex (Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturv. Afd., 8. R., 11, 5 (1917), S. 280 ff.) und C. Juel, Über Flächen vom Maximalindex (Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Math.-fys. Medd. VI, 5 (1924)). b) H. Mohrmann, Reduzible Kurven vom Maximalindex (Math. Ann. 92 (1924), S. 58 ff.).

unbegrenzt vielen Doppelstützgeraden beschränken. Die Anwendung des Hilfssatzes auch auf diese $\mathcal{C}_4$ stützt sich auf die Bemerkung von Herrn Juel¹²⁾, wonach jede $\mathcal{C}_4$, die mindestens eine Doppelstützgerade g_0 besitzt, durch eine geeignete projektive Abbildung in eine beschränkte $\mathcal{C}_4$ sich transformieren läßt. In der Tat: g_0 darf mit der $\mathcal{C}_4$ außer den beiden Stützpunkten (welche für je 2 verschiedene Schnittpunkte von g_0 und $\mathcal{C}_4$ zählen) keine weiteren Punkte gemeinsam haben. Folglich existiert stets eine Gerade g'_0 in der Nachbarschaft von g_0 , welche mit der $\mathcal{C}_4$ überhaupt keine Punkte gemeinsam hat. Macht man g'_0 durch projektive Transformation zur unendlich fernen Geraden, so geht die $\mathcal{C}_4$ in eine beschränkte $\mathcal{C}_4$ über, w. z. b. w. Die gleiche Bemerkung gilt natürlich auch für jeden $\mathcal{B}_4$.

Alle noch zu betrachtenden $\mathcal{C}_4$ werden wir infolgedessen als beschränkt voraussetzen. Da ferner eine solche $\mathcal{C}_4$ nicht bloß von 2. Ordnung sein soll, da also die $\mathcal{C}_4$ nicht ganz in $\mathcal{G}$ ($\mathcal{C}_4$) enthalten sein darf¹³⁾, so gibt es Teilbogen der $\mathcal{C}_4$, die ganz im Innern von $K(\mathcal{C}_4)$ verlaufen. Und der Hilfssatz zeigt jetzt:

Jeder Teilbogen $\mathcal{B}$ einer beschränkten $\mathcal{C}_4$, welcher ganz im Innern der konvexen Hülle $K(\mathcal{C}_4)$ von $\mathcal{C}_4$ verläuft¹⁴⁾, ist stückweise konvex.

Denn andernfalls müßte (nach dem Hilfssatze) ein geeignet gewählter Teilbogen von $\mathcal{B}$ Doppelstützgerade besitzen. Aber jede Doppelstützgerade eines Teilbogens der $\mathcal{C}_4$ ist notwendig eine Stützgerade von $K(\mathcal{C}_4)$, wie aus der oben (beim Beweise der Juelschen Bemerkung) angestellten Überlegung folgt. Die Doppelstützgerade kann daher keine inneren Punkte von $K(\mathcal{C}_4)$ enthalten.

Bezeichnen wir einen Punkt II der $\mathcal{C}_4$ als „Ausnahmepunkt“, falls mindestens eine (einseitige) Umgebung $U(II; \mathcal{C}_4)$ nicht stückweise konvex ist, so läßt sich die eben gemachte Feststellung dahin zusammenfassen:

Satz: Ausnahmepunkte können nur bei solchen $\mathcal{C}_4$ auftreten, welche in beschränkte $\mathcal{C}_4$ projektiv transformierbar sind. Alle Ausnahmepunkte einer (beschränkten) $\mathcal{C}_4$ liegen auf der Begrenzung der konvexen Hülle der $\mathcal{C}_4$.

¹²⁾ l. c.²⁾, a), S. 141.

¹³⁾ $\mathcal{G}(\mathcal{C}_4)$ ist die Begrenzung der konvexen Hülle $K(\mathcal{C}_4)$ der $\mathcal{C}_4$.

¹⁴⁾ Oder doch nur endlich viele Punkte mit $\mathcal{G}(\mathcal{C}_4)$ gemeinsam hat.

Sehen wir wieder von der Voraussetzung D ab, so können wir auch sagen: Die allgemeinste (beschränkte) $\mathfrak{C}_4$ unterscheidet sich von der allgemeinsten Juelschen $\mathfrak{C}_4$ höchstens auf dem Rande der konvexen Hülle der $\mathfrak{C}_4$. Daß die Voraussetzung D nicht wesentlich sein wird, ersieht man aus der Tatsache, daß man einen beliebigen Konvexbogen stets durch einen stetig differenzierbaren Konvexbogen mit der jeweils erforderlichen Genauigkeit approximieren kann.

Damit erscheint die einschränkende Wirkung der Voraussetzungen K und D klargelegt. Auf die Frage nach der Übertragung der Juelschen Klassifikation auf die allgemeinen $\mathfrak{C}_4$ gehen wir, wie schon eingangs erwähnt, hier nicht mehr ein.
