BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1978

MÜNCHEN 1979

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über gefährliche Annahmen beim Clausenschen und Lambertschen Achtpunktproblem

Von Walter Wunderlich in Wien

Vorgelegt von Herrn Josef Lense am 28. April 1978

1. Einleitung

Den Ausgang zur vorliegenden Untersuchung bildet die folgende Fragestellung aus dem Vermessungswesen: Kann man durch Visuren aus einer gewissen Anzahl von Standpunkten unbekannter Situation zu einer hinreichenden Anzahl von ebenfalls unbekannten Zielpunkten die gegenseitige Lage sämtlicher Punkte ermitteln? Dabei ist von vornherein klar, daß der Maßstab unbestimmt bleiben muß, weil er durch bloße Winkelmessungen nicht zu erfassen ist. Sieht man überdies von den Höhenunterschieden ab, so kann man sich mit Rücksicht auf die gemessenen Horizontalwinkel grundsätzlich auf ein *ebenes Problem* beschränken.

Stehen also m *Standpunkte* $P_i(x_i, y_i)$ zur Verfügung und werden aus jedem n *Zielpunkte* $Q_j(X_j, Y_j)$ anvisiert, so treten $m(n-1)$ Winkeldifferenzen auf. Sollen diese Meßdaten ausreichen, um die $2(m+n)$ Relativkoordinaten festzustellen, wobei mit Hinblick auf die Maßstabsfreiheit $x_1 = y_1 = y_2 = 0$ und $x_2 = 1$ angenommen werden darf, so muß die Bilanz

$$(1.1) \quad m(n-1) = 2(m+n) - 4 \text{ oder } (m-2)(n-3) = 2$$

stimmen. Zerlegung des Produkts in die Faktoren $2 \cdot 1$ oder $1 \cdot 2$ liefert dann zwei Antworten auf die gestellte Frage:

(1) $m = n = 4$. Dies ist das 1765 aufgeworfene und gelöste „Achtpunktproblem von J. H. Lambert" [1], der an die Vermessung einer Küste aus vier Positionen eines Schiffes dachte, aus welchen vier markante Landpunkte angepeilt werden.

(2) $m = 3$, $n = 5$. Dies ist das 1843 behandelte „Achtpunktproblem von Th. Clausen" [2], bei welchem aus drei Standpunkten die Visuren nach fünf Zielpunkten erfolgen.

Die beiden *Achtpunktprobleme* erweisen sich zwar bloß als *quadratisch*, doch ist der Lösungsweg jedesmal äußerst verwikkelt und aufwendig. Man vergleiche hierzu neben den Originalschriften [1] und [2] die Beiträge von W. Láska [3], N. Herz [4] und M. Lagally [5]. Letzterer führte die Lösung des Clausenschen Problems durch synthetische Betrachtungen auf den Schnitt zweier zirkularer Kurven 3. Ordnung zurück, von deren neun Schnittpunkten sieben bereits bekannt sind; die restlichen zwei stellen die möglichen Lagen eines Standpunktes gegenüber zwei fixierten Zielpunkten dar, worauf alles übrige leicht zu ergänzen ist. – Im Bereich der Meeresgeodäsie haben die beiden fast vergessenen klassischen Aufgaben neuerdings wieder Interesse gefunden.

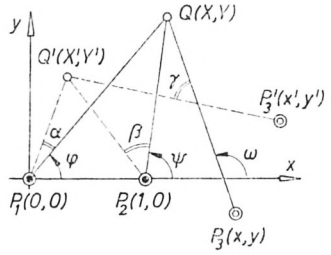
Eine *experimentelle Lösung*, die nützlichen Einblick in die bestehenden Verhältnisse gewährt, wäre in der Weise denkbar, daß man die drei bekannten Zielstrahlenquintupel P_1, P_2, P_3 auf je einem Blatt Transparentpapier aufzeichnet und die nach Q_j zielenden Visierstrahlen jeweils mit j beziffert. Die ersten beiden Blätter werden dann in den auf einem Zeichenblatt markierten Punkten P_1 bzw. P_2 mittels Reißzwecken drehbar befestigt; sie sind anschließend so zu verdrehen und gleichzeitig ist das dritte Blatt so aufzulegen, daß je drei gleichbezifferte Strahlen einen Punkt gemeinsam haben. Ist mit einiger Geduld eine solche Position gefunden, so repräsentiert sie (in unbekanntem Maßstab) eine Lösung des Clausenschen Problems.

Da die Aufgabe quadratisch ist, so wird es *zwei Lösungen* geben, zwischen welchen auf Grund zusätzlicher Informationen zu entscheiden wäre. Das Achtpunktproblem ist mithin in gewissem Sinne stets „gefährlich", allerdings praktisch nur dann, wenn die Schnittpunkte Q_j gleichbezifferter Strahlentripel in beiden Fällen auf der Zielrichtung entsprechenden *Halbstrahlen* liegen, was durchaus möglich ist (Figur 3). Existiert nun ausnahmsweise eine dritte Lösung, dann ist sie bloß eine aus einer ganzen *Lösungsschar*, denn in einem solchen Fall werden die beiden Lagallyschen Kubiken offenbar identisch und ihr Schnitt ist unbestimmt. Auf diesen merkwürdigen Sachverhalt, der eine *gefährliche Annahme* im eigentlichen Sinn kennzeichnet, wurde bereits in einer vorangegangenen Arbeit hingewiesen [6]. Dieselbe war

in erster Linie bloß dem Auftreten von „infinitesimal benachbarten" Lösungen gewidmet, so daß eine eingehendere Untersuchung des Fragenkreises unter allgemeinerem Ansatz angezeigt erscheint, welche jetzt erfolgen soll. Die Betrachtung „endlich benachbarter" Lösungen benötigt zwar nur elementar-algebraische Hilfsmittel, ist jedoch gegenüber der linearisierten Behandlung ungleich schwieriger, weil sie langwierige Entwicklungen erfordert. Die Mühe lohnt allerdings, denn sie führt zu Ergebnissen, die sowohl für den angewandten als auch für den reinen Geometer von Interesse sind.

2. Zusammenhang zwischen zwei Lösungen des Clausenschen Problems

Nach dem Gesagten kann der Übergang von einer Lösung des Clausenschen Problems zu einer anderen durch gewisse Lagenwechsel der drei einleitend erwähnten Transparentblätter erfolgen. Das erste wird sich um den Punkt $P_1(0,0)$ um einen bestimmten Winkel α drehen, ebenso das zweite um den Punkt $P_2(1,0)$ um einen Winkel β; das dritte Strahlbüschel wird hingegen nicht bloß eine Verdrehung um einen Winkel γ, sondern überdies eine Verlagerung seines Scheitels $P_3(x,y)$ in eine Neulage $P_3'(x',y')$ erfahren (Figur 1). Drei Zielstrahlen, die sich ursprünglich in einem Punkt Q schnitten, werden nach der Verlagerung im allgemeinen keinen Punkt mehr gemeinsam haben. Man kann also bei vorgegebenen Verlagerungsdaten $\alpha, \beta, \gamma, x, y, x', y'$ fragen: Gibt es ausgezeichnete („gefährliche") Zielpunkte $Q(X,Y)$, deren Zielstrahlen auch nach der Verlagerung wieder in einem Punkt $Q'(X',Y')$ zusammenlaufen?



Figur 1: Verlagerung der Zielstrahlbüschel

Bezeichnet man die von der positiven x-Achse aus gezählten Richtungswinkel der Zielstrahlen P_1Q, P_2Q und P_3Q der Reihe nach mit φ, ψ und ω (Figur 1), und deren Tangenten der Kürze halber mit u, v und w, so bestehen die Beziehungen

$$uX - Y = 0,\ vX - Y = v,\ wX - Y = wx - y. \tag{2.1}$$

Die durch Elimination von X und Y (mittels Nullsetzen der Koeffizientendeterminante) zu gewinnende Relation

$$w[x(u-v) + v] = y(u-v) + uv \tag{2.2}$$

stellt die Bedingung dafür dar, daß die drei primären Zielstrahlen einen Punkt gemeinsam haben. Nach der Verlagerung tritt an die Stelle von (2.2) für die sekundären Zielstrahlen die analoge Bedingung

$$w'[x'(u'-v') + v'] = y'(u'-v') + u'v', \tag{2.3}$$

wobei mit Benützung der Abkürzungen $\operatorname{tg}\alpha = a$, $\operatorname{tg}\beta = b$, $\operatorname{tg}\gamma = c$

$$\begin{aligned} u' &= \operatorname{tg}(\varphi + \alpha) = \frac{u+a}{1-au},\ v' = \operatorname{tg}(\psi + \beta) = \frac{v+b}{1-bv}, \\ w' &= \operatorname{tg}(\omega + \gamma) = \frac{w+c}{1-cw}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Setzt man diese Ausdrücke in (2.3) ein, so erhält man unter Verwendung von (2.2) die nachstehende Beziehung zwischen u und v:

$$\begin{aligned} &[uv + (cx + y)(u - v) + cv] \cdot [(ax' - bx' - a)uv + (x' + \\ &+ abx' - ab)u + (1 - x' - abx')v + (ax' - bx' + b)] + \\ &+ [(cuv - (x - cy)(u - v) - v] \cdot [(ay' - by' + 1)uv + \\ &+ (y' + aby' + b)u + (a - y' - aby')v + (ay' - by' + \\ &+ ab)] = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Jedes Wertepaar (u, v), das der Gleichung (2.5) genügt, legt mithin ein Paar von Zielstrahlen durch P_1 und P_2 fest, die sich in einem für die betrachtete Verlagerung *gefährlichen Zielpunkt* Q schneiden; dessen Koordinaten haben zufolge (2.1) die Werte

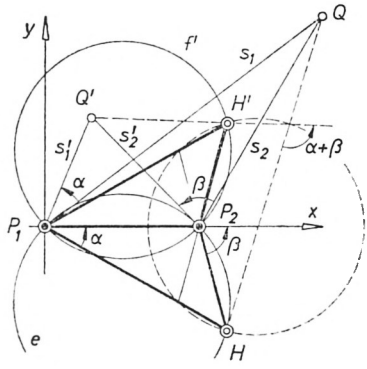
$$X = \frac{v}{v-u},\ Y = \frac{uv}{v-u}. \tag{2.6}$$

Ihm entspricht nach der Verlagerung der *neue Zielpunkt* Q' mit den Koordinaten

$$
\begin{aligned}
X' &= \frac{v'}{v'-u'} = \frac{(1-au)(v+b)}{(b-a)(1+uv)+(1+ab)(v-u)} = \\
&= \frac{(X-aY)(bX+Y-b)}{(b-a)(X^2+Y^2-X)+(1+ab)Y}, \\
Y' &= \frac{u'v'}{v'-u'} = \frac{(u+a)(v+b)}{(b-a)(1+uv)+(1+ab)(v-u)} = \\
&= \frac{(aX+Y)(bX+Y-b)}{(b-a)(X^2+Y^2-X)+(1+ab)Y}.
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Im allgemeinen – d. h. wenn (2.5) keine Identität in u und v ist, wovon noch die Rede sein soll – wird es für die durch a, b, c, x, y, x', y' bestimmte Verlagerung ∞^1 gefährliche Zielpunkte Q (2.6) geben, die eine gewisse Kurve k, den zugehörigen „gefährlichen Ort" erfüllen; hierüber wird der nächste Abschnitt genauere Auskunft geben.

Vorerst möge jedoch die durch (2.7) beschriebene *Abbildung* $\mathfrak{Q}: Q \to Q'$ näher betrachtet werden. Sie ist offensichtlich schon durch die angenommenen Drehungen der beiden Strahlbüschel P_1 und P_2 erklärt und daher nicht bloß für gefährliche Zielpunkte maßgebend, sondern auf die ganze Ebene ausdehnbar: Um zu einem beliebigen Punkt Q den Bildpunkt Q' zu finden, hat man lediglich die Strahlen $s_1 = P_1Q$ und $s_2 = P_2Q$ den Drehungen um die Winkel α bzw. β zu unterwerfen und nachher zu schneiden (Figur 2). Offenbar liegt hier ein metrischer Spezialfall einer *birationalen quadratischen Transformation* in der Auffassung nach F. Seydewitz vor [7, S. 2011 f.], insoferne als die dort vor-



Figur 2: Hauptdreiecke der Newtonschen Abbildung

ausgesetzten Projektivitäten zwischen entsprechenden Ordnerbüscheln durch gleichsinnige Kongruenzen verwirklicht sind. Diese quadratische Abbildung $\mathfrak{Q}$ liegt bereits der klassischen „descriptio organica" von I. Newton (1687) zugrunde [7, S. 2007f.], so daß es angängig erscheint, sie kurz als „Newtonsche Transformation" anzusprechen.

Quadratische Punktverwandtschaften der vorliegenden Art besitzen bekanntlich in jedem der beiden Felder *drei Hauptpunkte*, für welche die sonst herrschende Eindeutigkeit der Abbildung $Q \to Q'$ bzw. ihrer Umkehrung gestört ist. Zwei dieser Hauptpunkte liegen naturgemäß (für beide Felder) in P_1 und P_2. Der dritte Hauptpunkt des ersten Feldes sei mit H bezeichnet; er ergibt sich im Schnitt jener beiden Zielstrahlen, die nach den erfolgten Drehungen um α bzw. β in der Standlinie P_1P_2 zusammenfallen, so daß ihr Schnitt unbestimmt wird (Figur 2). Der analoge Hauptpunkt H' im zweiten Feld liegt spiegelbildlich zu H bezüglich P_1P_2.[1] Die bekanntermaßen auch zwischen den Ordnerbüscheln H und H' bestehende Projektivität ist hier ebenfalls eine gleichsinnige Kongruenz; dies beruht für den Kenner auf der Tatsache, daß die absoluten Kreispunkte selbstentsprechend sind.[2] Der Sachverhalt läßt sich jedoch auch elementar feststellen, indem man zeigt, daß die Ordnerstrahlen HQ und $H'Q'$ den festen Richtungsunterschied $\alpha + \beta$ aufweisen.[3]

---

[1] Seine Bezeichnung soll keineswegs bedeuten, daß er der Bildpunkt von H ist; dieser ist ja unbestimmt auf P_1P_2.

[2] Hierbei ist stillschweigend angenommen, daß H und H' eigentliche Punkte sind ($\alpha \neq \beta$), doch gilt die Aussage auch noch im Grenzfall $\alpha = \beta$ für die Parallelstrahlbüschel H und H'.

[3] Zum Nachweis beachte man folgendes: Wandert Q auf einem beliebigen, H nicht enthaltenden Hilfskreis h durch P_1 und P_2, dann variiert Q' auf einem gleichartigen Kreis h', wobei die Punktreihen $h(Q)$ und $h'(Q')$ durch eine gleichsinnige Ähnlichkeit $\mathfrak{H}$ zusammenhängen. Den auf P_1H bzw. P_2H liegenden Punkten $S \neq P_1$ bzw. $T \neq P_2$ von h entsprechen hierbei die Hauptpunkte $S' = P_2$ zbd $T' = P_1$ auf h'. Das Dreieck STH ist gegensinnig-ähnlich zu P_2P_1H, also gleichsinnig-ähnlich zu P_2P_1H'. In der auf die ganze Ebene ausgedehnten Ähnlichkeitstransformation $\mathfrak{H}$ wird mithin dem Punkt H der Punkt H' zugewiesen. Die entsprechenden Geraden HQ und $H'Q'$ weisen daher denselben Richtungsunterschied auf wie etwa $HS = HP_1$ und $H'S' = H'P_2$, nämlich $\alpha + \beta$.

Durchläuft ein Punkt Q im ersten Feld eine Gerade g, die keinen Hauptpunkt enthält, dann beschreibt sein Newton-Bild Q' im zweiten Feld einen Umkegelschnitt g' des Hauptdreiecks P_1P_2H'. Insbesondere entspricht der Ferngeraden f der Umkreis f' von P_1P_2H' („Fluchtkreis"). Analoge Aussagen gelten umgekehrt; so ist der Umkreis e des Hauptdreiecks P_1P_2H („Verschwindungskreis") das Urbild der Ferngeraden e' des zweiten Feldes (Figuren 2 und 3).

Fällt insonderheit P_3 mit H und P_3' mit H' zusammen, so sind *sämtliche Punkte der Ebene als gefährlich* anzusehen, weil nun jedes Zielstrahltripel durch einen Punkt Q auch nach der Verlagerung wieder einen Punkt Q' gemeinsam hat. Hier liegt offensichtlich der vorhin erwähnte Fall einer Identität (2.5) vor, bedingt durch die Beziehungen

$$x' = x = \frac{b}{b-a},\ y' = -y = \frac{ab}{b-a},\ c = \frac{a+b}{1-ab}. \tag{2.8}$$

Die letzte Formel ist gleichbedeutend zur Aussage $\gamma = \alpha + \beta$ und stützt sich auf die Tatsache, daß bei der vorliegenden Abbildung $\mathfrak{Q}$ den Strahlen P_3P_1 und P_3P_2 die Strahlen $P_3'P_2$ und $P_3'P_1$ entsprechen. – Die in Rede stehende Newton-Transformation vermittelt im übrigen den Zusammenhang zwischen den beiden Lösungen des (quadratischen) Achtpunktproblems von Clausen, weil ja hierbei den fünf Zielpunkten Q_j keinerlei Bedingungen auferlegt sind. Daß die Zweideutigkeit der Auswertung auch bei Beschränkung auf Halbstrahlen bestehen kann, zeigt Figur 3, in welcher der Deutlichkeit zuliebe die beiden Felder getrennt wurden. Widersprüche gegen die Halbstrahlenbedingung treten auf, wenn das Zielgebiet den Verschwindungskreis überschreitet.

Satz 1: Bei festgehaltenen Standpunkten P_1 und P_2 sind die beiden Lösungen des Clausenschen Achtpunktproblems durch eine Newtonsche quadratische Abbildung verknüpft, für welche die Standpunkte P_1, P_2 und P_3 Hauptpunkte sind; die zweite Lagemöglichkeit P_3' ist zu P_3 bezüglich P_1P_2 spiegelbildlich angeordnet. Die Drehwinkel der Zielstrahlquintupel in P_1 und P_2 sind durch $\alpha = \sphericalangle P_3P_1P_2$ und $\beta = \pi - \sphericalangle P_1P_2P_3$ bestimmt. Waren die Standpunkte kollinear, so ist die Lösung zwar eindeutig, jedoch infinitesimal unsicher.

Der Charakter dieser infinitesimalen Unsicherheit wurde in [6] ausführlich erörtert.

3. Gefährliche Kubiken

Um die Ortslinie k der im vorigen Abschnitt nachgewiesenen, zu einer angenommenen Verlagerung der drei Zielstrahlbüschel gehörigen gefährlichen Zielpunkte $Q(X, Y)$ zu ermitteln, hat man bloß in der entscheidenden Bedingung (2.5) die Größen u und v gemäß (2.6) durch

$$u = Y/X,\ v = Y/(X-1) \tag{3.1}$$

auszudrücken. Nach einiger Rechnung erhält man so als Gleichung des *gefährlichen Ortes* k:

$$\begin{aligned} K(X,Y) \equiv\ & (X^2+Y^2)(AX+BY) - (A+E)X^2 + \\ & + CXY + DY^2 + EX + FY = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

mit den Koeffizienten

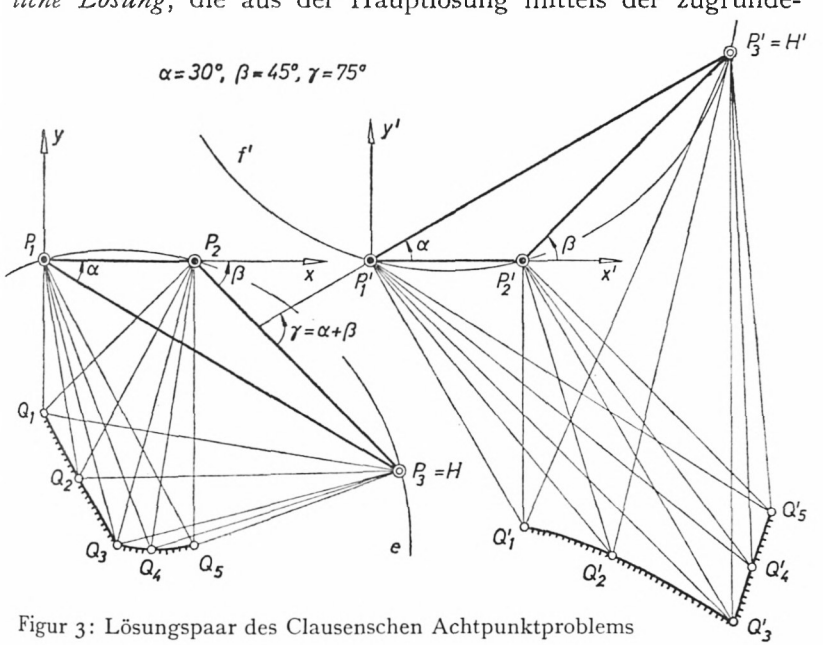
$$\begin{aligned} A &= (a-b)(cx'-y') + (c-a)b, \\ B &= (a-b)(x'+cy') + c - a, \\ C &= (b-a)(x'+cy') - (ab+1)(cx'-y') + \\ &\quad + (a+b)(x-cy) + (ab-1)(cx+y), \\ D &= (b-a)[x(cx'-y') + y(x'+cy')] - \\ &\quad - (ab+1)(x'+cy') + (ac+1)x + (a-c)(y+b), \\ E &= (a-b)[x(cx'-y') + y(x'+cy')] + (c-a)bx + \\ &\quad + (ac+1)by, \\ F &= (ab+1)[x(cx'-y') + y(x'+cy')] - (ac+1)bx + \\ &\quad + (c-a)by. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Auf Grund der Bauart der Gleichung (3.2) handelt es sich bei k um eine Kurve 3. Ordnung, welche die absoluten Kreispunkte enthält, also um eine *zirkulare Kubik*. Man überzeugt sich leicht, daß sie durch die drei Standpunkte $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$ und $P_3(x,y)$ geht; letzteres erkennt man unmittelbar, wenn man die zu P_3 gehörenden Richtungswerte $u = y/x$ und $v = y/(x-1)$ mit jenen von Q in (3.1) vergleicht. Ähnlich stellt man fest, daß auch der Hauptpunkt H (2.8) auf k liegt, weil die zugehörigen Werte $u = -a$ und $v = -b$ (bei beliebigem c) der Bedingung (2.5)

genügen. – Naturgemäß ist auch das Newton-Bild k' von k von gleichem Charakter, denn es umfaßt ja die für die inverse Verlagerung gefährlichen Punkte Q'; die Kubik k' enthält allerdings statt P_3 und H die Punkte P_3' und H'.

Wie zu erwarten war, ist die gefährliche Kubik k von genau der gleichen Art, wie sie unter der Annahme infinitesimaler Verlagerung der drei Zielstrahlbüschel in [6] festgestellt wurde, wo man auch ihre Konstruktion als Erzeugnis eines Kreisbüschels und eines projektiv darauf bezogenen Geradenbüschels finden mag. – Die Kubik ist im allgemeinen vom Geschlecht 1, kann aber auch rational sein und sogar *zerfallen*, nämlich für $A = B = 0$ in einen Kegelschnitt und die Ferngerade, ferner für $A = E = 0$ in einen Kreis und die Standlinie P_1P_2, und schließlich für $AF - BE - CE = BF - DE + E^2 = 0$ in einen Kreis durch P_1, P_2 und eine eigentliche Gerade.

Lagen also beim Clausenschen Achtpunktproblem die fünf Zielpunkte $Q_1, \ldots, Q_5$ zusammen mit den Standpunkten P_1, P_2, P_3 auf der gefährlichen Kubik k, so existiert außer der stets vorhandenen Nebenlösung gemäß Satz 1 (Figur 3) noch eine *zusätzliche Lösung*, die aus der Hauptlösung mittels der zugrunde-



Figur 3: Lösungspaar des Clausenschen Achtpunktproblems

gelegten Verlagerung der Zielstrahlbüschel abgeleitet werden kann. Daß es sich hierbei bloß um eine von unendlich vielen weiteren Zusatzlösungen handelt, wird sich gleich zeigen.

Greift man nämlich umgekehrt aus der Menge der ∞^5 durch P_1 und P_2 gehenden zirkularen Kubiken, die sämtlich durch den Ansatz (3.2) erfaßt werden, durch Vorgabe der sechs Koeffizieten $A, \ldots, F$ eine beliebige Kurve k heraus, und wählt man auf ihr willkürlich den dritten Standpunkt P_3 durch Festsetzung seiner Koordinaten x und y, so stehen zur Ermittlung der fünf Verlagerungsparameter a, b, c, x', y' die sechs Gleichungen (3.3) zur Verfügung. Sie führen keineswegs zu einem Widerspruch, da sie *linear abhängig* sind: Ihre dem Polynom $K(x,y)$ entsprechende Linearkombination reduziert sich wegen $P_3 \in k$ identisch zu Null. Die Auflösbarkeit des Gleichungssystems bedeutet nun einerseits, daß die gefährliche Kubik k im Rahmen des linearen Kurvensystems (3.2) keine Sonderstellung einnimmt, anderseits aber auch, daß die Lage des Standpunktes P_3 auf ihr nicht ausgezeichnet ist.

Nun kommt es bei den gewählten Koeffizienten $A, \ldots, F$ bloß auf die Verhältnisse an; man darf sie also mit einem gemeinsamen Faktor $\tau \neq 0$ multiplizieren, ohne daß sich dadurch die Kubik k ändert. Auf diese Weise ergeben sich die Verlagerungsparameter als (stetige) Funktionen von τ, womit die in [6] vorausgesagte Existenz einer *stetigen Schar von* ∞^1 *Lösungen* des Achtpunktproblems im Falle einer gefährlichen Annahme zu erkennen ist.

Satz 2: Liegen beim Clausenschen Achtpunktproblem die drei Standpunkte zusammen mit den fünf Zielpunkten auf einer (eventuell zerfallenden) zirkularen Kubik, so besitzt es eine einparametrige Schar von Lösungen. Die Anzahl der Zielpunkte dürfte dabei beliebig vermehrt werden, ohne daß die Gefährlichkeit der Annahme für das dann schon überbestimmte Problem aufhört, soferne die zusätzlichen Punkte gleichfalls der genannten Kubik angehören.

4. Analyse der Lösungsschar

Die tatsächliche Auflösung des Gleichungssystems (3.3) ist allerdings schwierig. Setzt man der Übersicht halber

$$x' + cy' = \xi,\ y' - cx' = \eta, \tag{4.1}$$

so geht es – unter Verzicht auf die letzte Gleichung – um das System

$$\begin{aligned}
\tau A &= (b - a)\eta + bc - ab,\\
\tau B &= (a - b)\xi + c - a,\\
\tau C &= (b - a)\xi + (ab + 1)\eta + [(ab - 1)x - (a + b)y]c +\\
&\quad + [(a + b)x + (ab - 1)y],\\
\tau D &= (b - a)(y\xi - x\eta) - (ab + 1)\xi + (ax - y - b)c +\\
&\quad + (x + ay + ab),\\
\tau E &= (a - b)(y\xi - x\eta) + (x + ay)bc - (ax - y)b.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Hierin sind $A, \ldots, E$ sowie x und y gegebene Größen, hingegen a, b, c, ξ, η und τ die Unbekannten. Die linear auftretenden Größen τ, ξ, η und c sind formal leicht zu eliminieren; das in Determinantenform angeschriebene Ergebnis lautet, mit Benützung der vorübergehenden Abkürzung

$$(ab + 1)/(a - b) = d, \tag{4.3}$$

$$\begin{vmatrix}
A & 0 & -1 & b & -ab\\
B & -1 & 0 & 1 & -a\\
C & 1 & d & (ab-1)x-(a+b)y & (a+b)x+(ab-1)y\\
D & y+d & x & ax-y-b & x+ay+ab\\
E & -y & -x & (x+ay)b & (y-ax)b
\end{vmatrix} = 0. \tag{4.4}$$

Die dadurch erklärte Abhängigkeit zwischen $a = \operatorname{tg}\alpha$ und $b = \operatorname{tg}\beta$ regelt die Koppelung der Drehungen für die Zielstrahlbüschel P_1 und P_2. – Nach geeigneter Kombination der letzten beiden Spalten läßt sich (4.4) durch $a^2 + 1$ kürzen. Weitere Kombinationen führen dann auf die vereinfachte Gestalt

$$\begin{vmatrix}
A & 0 & -1 & -b & 0\\
B & -1 & 0 & -1 & 0\\
C & 1 & d & x+by & bx-y\\
D+By & d & x & b & x\\
E-Ax & -y & 0 & 0 & by
\end{vmatrix} = 0. \tag{4.5}$$

Aus Gründen der Gleichberechtigung ist zu erwarten, daß auch noch die Kürzung durch $b^2 + 1$ möglich sein wird. Dies bestätigt

sich in der Tat, wenn man (4.5) nach der ersten Spalte entwickelt und d wieder durch den Ausdruck (4.3) ersetzt, worauf sich wirklich alle auftretenden Unterdeterminanten restlos durch b^2+1 teilen lassen. Nach längerer Rechnung gelangt man so, unter neuerlicher Beachtung von $K(x,y) = 0$, zu der wichtigen Relation

$$(4.6) \qquad \begin{aligned} &Ab(ab+1) - Bb^2(a^2+1) + (a-b)(Cb - Dab + E - \\ &- Fa + Fb) = 0. \end{aligned}$$

Ihre Bedeutung liegt darin, daß sie die *Auflösbarkeitsbedingung* für das Gleichungssystem (4.2) nach c, ξ, η und τ darstellt.

Für jedes der Bedingung (4.6) genügende Wertepaar (a, b) sind die fünf in c, ξ, η und τ linearen Gleichungen miteinander verträglich, so daß sich diese Größen eindeutig bestimmen lassen, wobei eine der Gleichungen entbehrlich ist. Mit ξ und η ist sodann zufolge (4.1) auch die Neulage $P_3'(x',y')$ des Standpunktes $P_3(x,y)$ bekannt:

$$(4.7) \qquad x' = (\xi - c\eta)/(c^2+1),\ y' = (\eta + c\xi)/(c^2+1).$$

Den ∞^1 zulässigen Wertepaaren (a, b) entsprechen die ∞^1 in Satz 2 angeführten Lösungen des Achtpunktproblems.

Jedes solche Zahlenpaar (a, b) kennzeichnet gemäß Abschnitt 2 eine Newton-Transformation $\mathfrak{Q}$ (2.7), welche mittels der simultanen Drehungen der Strahlbüschel P_1 und P_2 um die Winkel $\alpha = \operatorname{arctg} a$ bzw. $\beta = \operatorname{arctg} b$ die ursprünglichen Zielpunkte $Q(X, Y)$ in die Neulagen $Q'(X', Y')$ einer Nebenlösung überführt. Dies geschieht *unabhängig vom Standpunkt* $P_3(x,y)$, dessen Koordinaten ja in (4.6) nicht mehr aufscheinen, was eigentlich nicht zu erwarten war. Der Hauptpunkt $H(x^*, y^*)$ von $\mathfrak{Q}$, gemäß (2.8) durch

$$(4.8) \qquad x^* = b/(b-a),\ y^* = ab/(a-b)$$

festgelegt, gehört, wie in Abschnitt 3 festgestellt wurde, der Kubik k an. Durch Einsetzen der Koordinaten (4.8) in die Gleichung (3.2) von k ließe sich die grundlegende Bedingung (4.6) einfacher herleiten, was auch deren Unabhängigkeit von x und y erklärt.

Eine wichtige Konsequenz dieser Unabhängigkeit besteht darin, daß man neben $P_3(x,y)$ offenbar noch einen *vierten Standpunkt*

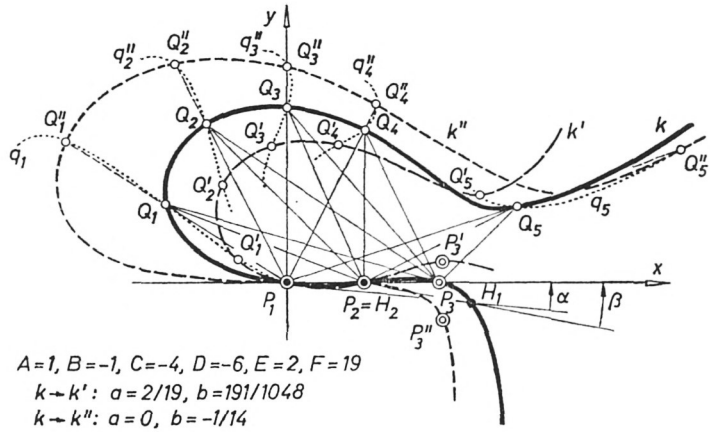
$P_4(\bar{x},\bar{y})$ auf der gefährlichen Kubik k hinzunehmen kann. Auch dessen Zielstrahlbüschel gestattet eine bestimmte gleichsinnig-kongruente Verlagerung, die mit denselben Büscheldrehungen um P_1 und P_2 verträglich ist. Die durchgeführten Entwicklungen erfassen mithin gleichzeitig mit dem Clausenschen auch das *Lambertsche Achtpunktproblem*. Die Anzahl der Standpunkte könnte darüber hinaus noch beliebig weiter vermehrt werden – wie dies für die Zielpunkte schon erkannt wurde –, ohne daß die Gefährlichkeit der Annahme für das dann bereits überbestimmte Vermessungsproblem aufhört, soferne nur sämtliche Punkte dem gefährlichen Ort k angehören.[4]

Unter der Einwirkung der ∞^1 durch die Bedingung (4.6) gesteuerten Newton-Transformationen $\mathfrak{Q}$ (2.7) verlagert sich jeder Zielpunkt Q längs einer wohlbestimmten „*Zielbahn*" q, die näher untersucht werden soll. Ihre Gleichung in laufenden Koordinaten X', Y' wäre grundsätzlich aus den Beziehungen (2.7) und (4.6) mit konstanten Werten X, Y durch Elimination der Parameter a, b zu gewinnen, doch liefert diese aufwendige Vorgangsweise nur schwer die gewünschten Aufschlüsse.

Eher einladend erscheint die *konstruktive Ermittlung* der Zielbahn q, indem man die in Betracht kommenden quadratischen Abbildungen $\mathfrak{Q} : Q \to Q'$ nach dem aus Figur 2 ersichtlichen Muster auf einen festen Zielpunkt Q anwendet. Dies ergibt die nachstehende Zeichenvorschrift: Man wähle an beliebiger Stelle der gefährlichen Kubik k den Hauptpunkt H und verdrehe sodann die zu dem ins Auge gefaßten (festen) Zielpunkt Q weisenden Strahlen $s_1 = P_1Q$ und $s_2 = P_2Q$ um die Winkel $\alpha = \sphericalangle HP_1P_2$ bzw. $\beta = \pi - \sphericalangle P_1P_2H$ nach s_1' bzw. s_2'; bei Variation von H längs k durchläuft der Schnittpunkt Q' von s_1' und s_2' die gesuchte Zielbahn q. Diese erscheint solcherart als Erzeugnis einer gewissen (2,2)-Korrespondenz zwischen den Strahlbüscheln $P_1(s_1')$ und $P_2(s_2')$, wäre also bei allgemeiner Lage von Q eine (monozirkulare) Quartik mit Doppelpunkten in P_1 und P_2. Nun liegt aber Q (als gefährlicher Zielpunkt) auf k. Dies hat zur Folge, daß in der

[4] In diesem Zusammenhang ist auf eine Arbeit von J. Krames [8] hinzuweisen, der erkannt hat, daß die Standpunktpaare, aus welchen zwei vorgelegte Zielpunktvierecke durch jeweils kongruente Strahlenquadrupel projiziert werden, sich auf zwei zirkulare Kubiken verteilen.

genannten Korrespondenz $s_1' \to s_2'$ der gemeinsame Büschelstrahl sich selbst entspricht; gelangt nämlich H nach Q, so fallen s_1' und s_2' in P_1P_2 zusammen. Diese Gerade spaltet sich vom Erzeugnis ab, so daß für die Zielbahn q im allgemeinen bloß eine *zirkulare Kubik* überbleibt.[5] Auf diesem Wege wurden in Figur 4 für jene gefährliche Annahme des Clausenschen Problems, welche der Figur 1 in [6] zugrunde lag, Bahnstücke der fünf Zielpunkte eingetragen.



Figur 4: Gefährliche Annahme beim Clausenschen Problem

Die geschilderte Methode läßt sich nun auch rechnerisch nachvollziehen. Haben u, v und u', v' dieselbe Bedeutung wie in Abschnitt 2, so hat man bloß in (4.6) die mit (2.4) übereinstimmende Substitution

$$a = (u' - u)/(uu' + 1), \quad b = (v' - v)/(vv' + 1) \tag{4.9}$$

vorzunehmen. Die so gewonnene Beziehung

$$\begin{aligned} &A(uu' + 1)(v' - v)[(uv + 1)(u'v' + 1) + (u - v)\\ &(u' - v')] - B(u^2 + 1)(u'^2 + 1)(v' - v)^2 + [(v - u)\\ &(u'v' + 1) + (uv + 1)(u' - v')] \times [C(uu' + 1)(v' - v) -\\ &- D(u' - u)(v' - v) + E(uu' + 1)(vv' + 1) +\\ &+ F(u - v)(u'v' + 1) - F(uv + 1)(u' - v')] = 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

[5] Die Zirkularität von q erkennt man, wenn man H in einem der beiden absoluten Kreispunkte annimmt, die ja k angehören.

stellt dann bei festem u und v den analytischen Ausdruck für die erwähnte (2,2)-*Korrespondenz* $s_1'(u') \rightarrow s_2'(v')$ dar. Der gemeinsame Büschelstrahl $u' = v' = 0$ ist selbstentsprechend, falls

$$(4.11) \quad \begin{aligned} &Av(uv+1) + B(u^2+1)v^2 + (v-u)(Cv + Duv - \\ &- E + Fu - Fv) = 0, \end{aligned}$$

und dies ist, wie man leicht nachprüft, gerade die Bedingung dafür, daß der betrachtete Zielpunkt $Q(X, Y)$ auf der gefährlichen Kubik k (3.2) liegt, also voraussetzungegemäß erfüllt. Die Gleichung der Zielbahn q würde man anschließend erhalten, wenn man in (4.10) die Ausdrücke $u' = Y'/X'$ und $v' = Y'/(X'-1)$ einsetzt, worauf jedoch verzichtet werden soll.

In Erweiterung von Satz 2 gilt nach allem:

Satz 3: Liegen beim Clausenschen oder Lambertschen Achtpunktproblem sämtliche Stand- und Zielpunkte auf einer (eventuell zerfallenden) zirkularen Kubik, so besitzt das Problem eine stetige Schar von Lösungen. Werden zwei Standpunkte festgehalten, so variieren die Zielpunkte unabhängig von den übrigen Standpunkten auf gewissen (eventuell zerfallenden) zirkularen Kubiken, welche die beiden Fixpunkte enthalten. Die Anzahl der Stand- und Zielpunkte auf der gefährlichen Kubik kann beliebig vermehrt werden, ohne daß die Gefährlichkeit für das dann überbestimmte Problem aufgehoben würde.

Natürlich wäre es erwünscht, auch etwas über die Wanderung der nicht fixierten *Standpunkte* zu erfahren, doch muß die Frage wegen allzu großer Schwierigkeit im allgemeinen Fall noch offen bleiben. Für einen bemerkenswerten Sonderfall wird sie aber im nächsten Abschnitt beantwortet werden.

5. Gefährliche Kegelschnitte

Statt einer ausführlichen Diskussion der mannigfachen Möglichkeiten des Zerfalls der gefährlichen Kubik und aller denkbaren Verteilungen der Stand- und Zielpunkte auf die Bestandteile soll jener wichtige, für $A = B = 0$ eintretende Sonderfall eingehend erörtert werden, in welchem sich der gefährliche Ort unter Abspaltung der Ferngeraden f auf einen *Kegelschnitt* k

$$(5.1) \qquad -EX^2 + CXY + DY^2 + EX + FY = 0$$

reduziert. Dieser ist regulär, falls $E(DE - CF - F^2) \neq 0$, was hiermit vorausgesetzt sei.

Aus den ersten beiden Gleichungen des grundlegenden Systems (4.2) folgt

$$(5.2) \qquad a = b = c,$$

sofern sie linear unabhängig sind, d. h. wenn nicht

$$(5.3) \qquad b\xi + \eta = 0.$$

Dementsprechend sind zwei Unterfälle zu berücksichtigen, die auf *zwei verschiedene Lösungsscharen* führen.

Fall I ($a = b = c$)

Diese Annahme bedeutet $\alpha = \beta = \gamma$, d. h. die drei Zielstrahlbüschel P_1, P_2, P_3 erfahren Verdrehungen um gleiche Winkel. Der Hauptpunkt H (4.8) liegt für jede der zur Herleitung von Nebenlösungen anzuwendenden Newton-Transformationen $\mathfrak{Q}$ (2.7) im Unendlichen, variiert also auf dem uneigentlichen Bestandteil f der zerfallenden gefährlichen Kubik. Weil der Kegelschnitt k die Hauptpunkte P_1 und P_2 von $\mathfrak{Q}$ enthält, ist sein Newton-Bild k', auf welches sich die Neulagen Q' aller Zielpunkte $Q \in k$ verteilen, wiederum ein gleichartiger Kegelschnitt. Er ist im allgemeinen sogar zu k *ähnlich*, da beide Fernpunkte von k die gleiche Drehung um α erfahren; auszunehmen sind lediglich die beiden ausgearteten Exemplare der Schar $\{k'\}$, die sich einstellen, wenn H mit einem Fernpunkt von k zusammenfällt.

Die (2,2)-Korrespondenz (4.10) reduziert sich mit $A = B = 0$ auf die gleichsinnige Kongruenz

$$(5.4) \quad (v - u)(u'v' + 1) + (uv + 1)(u' - v') = 0 \text{ mit } u, v = \text{const},$$

so daß die *Zielbahnen* q der gefährlichen Punkte $Q \in k$ zu *Kreisen*

$$(5.5) \quad (X'^2 + Y'^2 - X')Y = (X^2 + Y^2 - X)Y' \text{ mit } X, Y = \text{const}$$

durch die Fixpunkte P_1, P_2 werden, was mittels des Peripheriewinkelsatzes auch unmittelbar einzusehen ist.

Der Rest des Gleichungssystems (4.2) vereinfacht sich, wenn man überdies τ durch $(a^2 + 1)\tau'$ ersetzt, zu

$$
\begin{aligned}
&\tau' C = ax - y + \eta = a(x - x') + (y' - y),\\
&\tau' D = x - \xi = -ay' + (x - x'),\\
&\tau' E = ay \quad \text{mit } x, y = \text{const.}
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

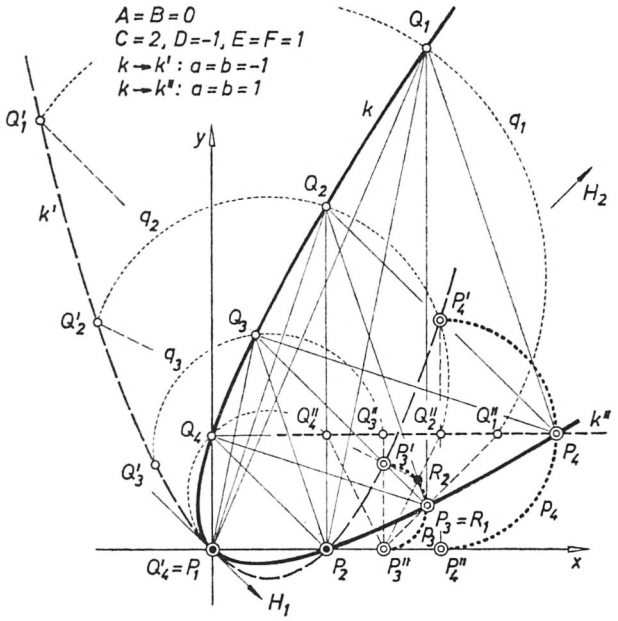
Durch Elimination der Parameter τ' und a gelangt man dann über

$$
\begin{vmatrix}
C & x - x' & y' - y\\
D & -y' & x' - x\\
E & y & 0
\end{vmatrix} = 0
\tag{5.7}
$$

zur Gleichung

$$
\begin{aligned}
&E(x'^2 + y'^2) + (Cy - 2Ex)x' + (D - E)y' +\\
&+ (Ex^2 - Cxy - Dy^2) = 0.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

welche die *Bahn p_3 des Standpunktes* $P_3(x,y)$ im Zuge der Verlagerung als *Kreis* erkennen läßt.[6]



Figur 5: Lambertsches Problem mit gefährlichem Kegelschnitt; 1. Lösungsschar

[6] Elementar läßt sich dieses Ergebnis durch Betrachtung des wegen $\alpha = \beta = \gamma$ *starren Dreistrahls* Q_1P_1, Q_1P_2, Q_1P_3 herleiten: Wenn sein Scheitel Q_1 im Zuge der Verlagerung auf dem Zielbahnkreis q_1 durch P_1 und P_2 wandert,

Figur 5 illustriert den Sachverhalt für das Lambertsche Achtpunktproblem unter der Voraussetzung einer gefährlichen *Parabel* k mit der Gleichung $(X-Y)^2 = X+Y$. Außer der Originalsituation ($a = 0$) wurden zwei Nebenlösungen eingetragen: Zum Parameterwert $a = 1$ ($\alpha = \pi/4$) gehört wieder eine *Parabel* k' ($X'^2 = X' + Y'$), zu $a = -1$ ($\alpha = -\pi/4$) hingegen ein *Parallelenpaar*, bestehend aus der Standlinie $Y'' = 0$ und der die Zielpunkte tragenden Geraden k'' ($Y'' = 1$).

Fall II ($b\xi + \eta = 0$)

Hier reduziert sich die Koppelbedingung (4.6) auf die bilineare Relation

$$Dab + Fa - (C+F)b - E = 0, \tag{5.9}$$

im Einklang mit dem Umstand, daß der Hauptpunkt H (4.8) jetzt auf dem Kegelschnitt k (5.1) selbst variiert. Weil der Kegelschnitt k alle drei Hauptpunkte P_1, P_2, H enthält, wird sein Newton-Bild k' diesmal eine *Gerade*

$$UX' + VY' + W = 0. \tag{5.10}$$

Nach Eintragen der Ausdrücke (2.7) für X' und Y' und anschließendem Koeffizientenvergleich mit (5.1) erhält man unter Beachtung von (5.9) nach einiger Rechnung für die Geradenkoordinaten U, V, W die Bestimmungsformeln

$$\begin{aligned} U : V : W = &-(La^2 - 2Ma + N) : [Ma^2 + \\ &+ (L-N)a - M] : \frac{LN - M^2}{L+N}(a^2+1), \end{aligned} \tag{5.11}$$

wobei

$$\begin{aligned} L &= D^2 + DE - CF,\ M = CD + DF + EF, \\ N &= C^2 + CF + DE + E^2. \end{aligned} \tag{5.12}$$

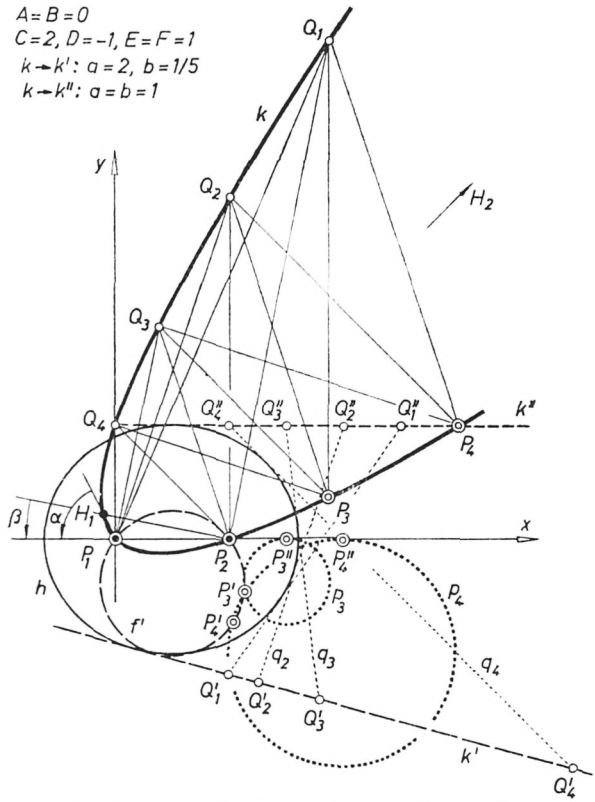
Diese ∞^1 Geraden k', die jeweils die Neulagen Q' der Zielpunkte $Q \in k$ tragen, haben gemäß (5.11) quadratisch vom freien Parameter a abhängende Koordinaten, sind also Tangenten eines *Hüllkegelschnittes* h. Unter den Tangenten kommen für $a = \pm i$

so gleitet der Strahl Q_1P_3 auf Grund des Peripheriewinkelsatzes durch einen festen Punkt R_1 auf q_1 (Figur 5). Die gleiche Überlegung für einen zweiten Zielpunkt Q_2 ergibt dann als Erzeugnis der gleichsinnig-kongruenten Strahlbüschel R_1 und R_2 – wieder mittels des Peripheriewinkelsatzes – einen *Kreis* p_3 durch R_1 und R_2 als Ortslinie des Punktes P_3.

auch die vom Ursprung ausgehenden Minimalstrahlen $U : V : W = 1 : \pm i : 0$ vor; P_1 ist also ein *Brennpunkt* von h, und ebenso natürlich auch P_2. Zur Bestätigung mag man nachprüfen, ob das Produkt der Abstände von P_1 und P_2 für alle Geraden k' (5.10) denselben Wert annimmt, was bekanntlich die Tangentenscharen von Ellipsen und Hyperbeln kennzeichnet. Man findet tatsächlich für dieses Produkt

$$(5.13) \qquad \frac{W(U+W)}{U^2+V^2} = \frac{M^2-LN}{(L+N)^2} = \frac{CF+F^2-DE}{C^2+(D+E)^2} = \text{const.}$$

Damit hat man nicht nur das Quadrat der Nebenhalbachse von h, sondern auch eine parameterfreie Darstellung in Geradenkoordinaten. – Figur 6 illustriert die Verhältnisse für dieselbe Annahme, die Figur 5 zugrunde lag.



Figur 6: Lambertsches Problem mit gefährlichem Kegelschnitt; 2. Lösungsschar

Die (2,2)-Korrespondenz (4.10) reduziert sich im Einklang mit (5.9) auf die bilineare Beziehung

$$\begin{aligned}&[Euv + (C+F)u - Fv - D]\,u'v' - [(C+F)uv - \\ &- Eu - Dv + F]\,u' + (Fuv + Du + Ev + C + \\ &+ F)v' = 0 \text{ mit } u, v = \text{const.}\end{aligned} \tag{5.14}$$

Die daraus mittels der Substitutionen $u' = Y'/X'$ und $v' = Y'/(X'-1)$ zu gewinnenden *Zielbahnen* q erweisen sich als *Geraden*

$$U'X' + V'Y' + W' = 0, \tag{5.15}$$

mit

$$\begin{aligned}U' &= -Cuv + (D+E)(u+v) + C,\\ V' &= Euv + (C+F)u - Fv - D,\\ W' &= (C+F)uv - Eu - Dv + F.\end{aligned} \tag{5.16}$$

Nach Elimination von v mittels der zu (5.1) äquivalenten Koppelbedingung $Duv - Fu + (C+F)v - E = 0$ ergibt sich mit Benützung der Abkürzungen (5.12):

$$\begin{aligned}&U' : V' : W' = (Lu^2 + 2\,Mu + N) : [Mu^2 + \\ &+ (N - L)u - M] : \frac{M^2 - LN}{L+N}(u^2+1).\end{aligned} \tag{5.17}$$

Der Vergleich mit (5.11) lehrt, daß die Zielbahnen q denselben Hüllkegelschnitt h berühren wie die Trägergeraden k', denn für $u = -a$ hat man $U' : V' : W' = U : -V : W$, wobei der Vorzeichenunterschied bei V wegen der Symmetrie von h bezüglich der x-Achse ohne Belang ist.

Zur Erfassung der *Standpunktsverlagerung* $P_3(x,y) \to P_3'(x',y')$ beachte man vorerst die aus den ersten beiden Gleichungen von (4.2) mit $A = B = 0$ folgenden Formeln

$$\xi = (a-c)/(a-b),\ \eta = b(c-a)/(a-b). \tag{5.18}$$

Geht man damit in die letzten beiden Gleichungen von (4.2) ein, so erhält man für $c = \operatorname{tg}\gamma$ den Ausdruck

$$c = \frac{(a-b)\,[Ex\,(ab-1) + Dy\,(a+b)] + Ea\,(b^2+1)}{(a-b)\,[Ex\,(a+b) - Dy\,(ab-1)] + E\,(b^2+1)}. \tag{5.19}$$

Damit könnte man nun gemäß (4.7) die gesuchten Koordinaten

$$x' = \frac{bc+1}{c^2+1} \cdot \frac{a-c}{a-b},\quad y' = \frac{c-b}{c^2+1} \cdot \frac{a-c}{a-b} \tag{5.20}$$

berechnen. Vorteilhafter ist es jedoch, die Richtungsgrößen der Strahlen P_1P_3' und P_2P_3' heranzuziehen. Man findet hierfür unschwer:

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{y'}{x'} = \frac{c-b}{bc+1} = \frac{(b-a)(Ex-Dya-E)}{(a-b)(Exa+Dy)+E(ab+1)}, \\ v^* &= \frac{y'}{x'-1} = \frac{c-a}{ac+1} = \frac{(b-a)(Ex-Dyb)}{(a-b)(Exb+Dy)+E(b^2+1)}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Schon ohne Kenntnis des Wertes von c läßt sich hieraus die Konstanz des Winkels $P_1P_3'P_2$ bei festem a, b folgern, denn es ist

$$\frac{v^*-u^*}{u^*v^*+1} = \frac{(c-a)(bc+1)-(c-b)(ac+1)}{(c-b)(c-a)+(ac+1)(bc+1)} = \frac{b-a}{ab+1}, \tag{5.22}$$

also $\sphericalangle P_1P_3'P_2 = \beta - \alpha = \text{const}$. Hieraus folgt mit dem Peripheriewinkelsatz, daß P_3' auf dem *Fluchtkreis* f'

$$x'^2 + y'^2 - x' = \frac{ab+1}{b-a}\, y' \tag{5.23}$$

liegt; ebenso tun dies natürlich auch die Neulagen allfälliger weiterer Standpunkte. Dies ist nicht allzu überraschend, da ja die Neulagen sämtlicher Ziel- und Standpunkte auf dem Newton-Bild der zerfallenden Kubik $k \cup f$ liegen müssen, also auf $k' \cup f'$; nachdem die Zielpunkte der Geraden k' angehören, können sich die Standpunkte nur auf dem Kreis f' befinden (Figur 6).

Für die Frage nach der *Wanderung des Standpunktes* P_3' beim Durchlaufen der Lösungsschar ist die Kenntnis des Wertes (5.19) von c jedoch vonnöten. Mit Benützung der Koppelbedingung (5.9) kann man der Darstellung (5.21) noch folgende übersichtlichere Gestalt geben:

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{(Da^2-Ca-E)y}{Exa^2+(D+E)ya+Ex-Cy}, \\ v^* &= \frac{(Db^2-Cb-E)y}{E(x-1)b^2+(D+E)yb+E(x-1)-Cy}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Die damit über die Koppelung (5.9) erklärte (2,2)-Korrespondenz zwischen den Strahlbüscheln P_1 und P_2 erzeugt die gesuchte *Standpunktbahn* p_3, für welche man vermöge

$$(5.25) \qquad x' = v^*/(v^* - u^*),\ y' = u^* v^*/(v^* - u^*)$$

eine Parameterdarstellung gewinnen könnte. In der Korrespondenz ist der gemeinsame Büschelstrahl $u^* = v^* = 0$ selbstentsprechend, und da dies doppelt zählt – der Annahme des Hauptpunktes H in den Fernpunkten des Kegelschnitts k entsprechend –, so reduziert sich das Erzeugnis um zwei Einheiten auf eine Kurve 2. Ordnung, und zwar auf einen *Kreis*, denn für $c = \pm i$ stellen sich parallele Minimalstrahlenpaare $u^* = v^* = \pm i$ ein, so daß p_3 die absoluten Kreispunkte enthalten muß.

Zwecks Lokalisierung dieses Kreises p_3 betrachte man vorerst die beiden zu $a = b$ gehörigen Grenzlagen auf der x-Achse. Mit Hilfe von (5.21) findet man

$$(5.26) \qquad x' : (x' - 1) = v^* : u^* = (Ex - Dya) : (Ex - Dya - E),$$

also

$$(5.27) \qquad x' = x - \frac{Dya}{E} \text{ mit } Da^2 - Ca - E = 0.$$

Auf diese Weise wird zunächst der gesuchte Kreis p_3 eingebettet in das Büschel

$$(5.28) \qquad x'^2 + y'^2 - (2x - \frac{Cy}{E})x' + x + \frac{Fy}{E} = \lambda y'.$$

Um ihn daraus auszusondern, mag etwa der zu $a = \infty$, $b = -F/D$ gehörige Punkt P_3' herangezogen werden, dessen Koordinaten sich gemäß (5.21) und (5.22) mit

$$(5.29) \qquad x' = \frac{Ex\,(Ex + Fy)}{E^2x^2 + D^2y^2},\quad y' = \frac{Dy\,(Ex + Fy)}{E^2x^2 + D^2y^2}$$

ergeben. Eintragen dieser Werte in (5.28) liefert dann den fehlenden Faktor $\lambda = (D - E)y/E$. Die Gleichung des *Bahnkreises* p_3 lautet schließlich:

$$(5.30) \qquad \begin{aligned} &E(x'^2 + y'^2) - (2Ex - Cy)x' - (D - E)yy' + Ex + \\ &+ Fy = 0. \end{aligned}$$

Die Mittelpunktskoordinaten und der Radius von p_3 betragen demnach:

$$(5.31)\quad x_0 = x - \frac{Cy}{2E},\ y_0 = \frac{(D-E)y}{2E},\ r = \frac{y}{2E}\sqrt{C^2+(D+E)^2}.$$

In Zusammenfassung der Ergebnisse gilt mithin

Satz 4: Liegen beim Achtpunktproblem die Stand- und Zielpunkte auf einem regulären Kegelschnitt, so wird die Lösung unbestimmt und es existieren zwei einparametrige Lösungsscharen. Bei der ersten befinden sich die acht Punkte stets auf untereinander ähnlichen Kegelschnitten (von denen zwei in Geradenpaare ausarten können); bei der zweiten verteilen sich die Zielpunkte auf Geraden, während die Standpunkte jeweils einem Kreis angehören (der zu einer Geraden abflachen kann). Werden zwei Standpunkte fixiert, so wandern beim Durchlaufen der Schar die Zielpunkte im ersten Fall auf Kreisen durch das Fixpunktpaar, im zweiten Fall auf den Tangenten eines Kegelschnittes, der die Fixpunkte zu Brennpunkten hat und auch von den Trägergeraden der Zielpunktgruppen eingehüllt wird. Jeder bewegliche Standpunkt variiert auf einem Kreis.

Damit hat man offensichtlich auch jene gefährlichen Annahmen erfaßt, bei welchen die Zielpunkte auf einer Geraden und die Standpunkte auf einem Kreis liegen. Die umgekehrte Verteilung bedürfte einer eigenen Untersuchung, die jedoch dem Leser überlassen sei. Als Korollar hat man jedenfalls

Satz 5: Sind beim Clausenschen Achtpunktproblem die fünf Zielpunkte kollinear, dann liegt eine gefährliche Annahme mit zwei Scharen von je ∞^1 Lösungen vor.

Literatur:

[1] J. H. Lambert: Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, I. Berlin 1765, S. 186–194.

[2] Th. Clausen: Auflösung einer geometrischen Aufgabe. Astron. Nachr. *20* (1843), 69–74.

[3] W. Láska: Über ein Problem der photogrammetrischen Küstenaufnahme. Monatsh. Math. Phys. *12* (1901), 172–176.

[4] N. Herz: Eine Verallgemeinerung des Problems des Rückwärtseinschneidens; Problem der acht Punkte. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien (IIa) *113* (1904), 355–379.

[5] M. Lagally: Über eine dem Lambertschen Problem der acht Punkte verwandte Aufgabe. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. 1912, 261–272.

[6] W. Wunderlich: Über die gefährlichen Örter bei zwei Achtpunktproblemen und einem Fünfpunktproblem. Österr. Z. Vermessungswesen u. Photogrammetrie *64* (1977), 119–128.

[7] L. Berzolari: Algebraische Transformationen und Korrespondenzen. Enzykl. Math. Wiss. III C 11.

[8] J. Krames: Die Pseudofokalkurven zweier ebenen Vierecke. Österr. Z. Vermessungswesen *53* (1965), 33–40.