

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1968

MÜNCHEN 1969

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Bemerkung zu einem Satz von Morita über Frobenius-Erweiterungen

Von Takeshi Onodera in München

Vorgelegt am 8. November 1968

Sei Γ ein Ring mit 1-Element und A ein Unterring von Γ mit
1. Γ ist eine Frobenius-Erweiterung von A nach Fr. Kasch [1],
wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) ${}_A\Gamma$ ist endlich erzeugt und projektiv.

(2) ${}_r\Gamma_A \cong {}_r\text{Hom}({}_A\Gamma, {}_AA)_A$.

Sei E der Endomorphismenring der additiven Gruppe Γ^+
von Γ . Für eine Untermenge $U (\neq \emptyset)$ von E bezeichnen wir mit
 $V_E(U)$ den Zentralisator von U in E . Für $\alpha \in \Gamma$ bezeichne α_L
bzw. α_R den Endomorphismus von Γ^+ , der durch Linksmultipli-
kation bzw. Rechtsmultiplikation von Γ mit α erzeugt wird.

Für $A \subseteq \Gamma$ sei

$$A_L = \{\alpha_L \mid \alpha \in A\} \text{ bzw. } A_R = \{\alpha_R \mid \alpha \in A\}.$$

Offenbar gilt $\Gamma_R \subseteq V_E(A_L)$ und daraus folgt

$$V_E(V_E(A_L)) \subseteq V_E(\Gamma_R) = \Gamma_L.$$

Also gibt es einen Unterring $A' \subseteq \Gamma$ mit

$$A \subseteq A', A'_L = V_E(V_E(A_L)).$$

Sei ferner A_0 der Unterring von A , der von $1 \in A$ und allen Ele-
menten $f(\gamma)$ mit $f \in \text{Hom}({}_A\Gamma, {}_AA)$, $\gamma \in \Gamma$, erzeugt wird.

Kürzlich hat K. Morita den folgenden Satz bewiesen. ([2],
Theorem 1.1).

Satz. Wenn Γ Frobenius-Erweiterung von A ist, dann ist Γ auch Frobenius-Erweiterung von jedem Unterring $T \subseteq \Gamma$ mit

$$A_0 \subseteq T \subseteq A'.$$

Für diesen Satz wollen wir hier einen einfachen Beweis angeben.

Zum Beweis wird die folgende Kennzeichnung von Frobenius-Erweiterungen benutzt ([3], Satz 7):

Γ ist Frobenius-Erweiterung von A dann und nur dann, wenn es Elemente $r_1, \dots, r_n, l_1, \dots, l_n$ von Γ und einen zweiseitigen A -Homomorphismus (= Frobenius-Homomorphismus) h von Γ in A gibt, so daß gilt:

$$(*) \quad \gamma = \sum_{i=1}^n h(\gamma r_i) l_i = \sum_{i=1}^n r_i h(l_i \gamma)$$

für jedes $\gamma \in \Gamma$.

Auf Grund dieser Tatsache genügt es zum Beweis zu zeigen, daß das zuvor angegebene h sogar ein zweiseitiger T -Homomorphismus von Γ in T ist. Es ist zunächst klar, daß h ein T -Homomorphismus von ${}_T \Gamma$ in ${}_T T$ ist, weil $h \in V_E(A_L)$ und $h(\Gamma) \subseteq A_0 \subseteq T$. Es bleibt zu zeigen, daß h ein T -Homomorphismus von Γ_T in T_T ist. Seien γ ein beliebiges Element von Γ und t ein beliebiges Element von T . Dann gilt für ein beliebiges Element γ' von Γ :

$$\begin{aligned} h\{(h(\gamma t) - h(\gamma) t) \gamma'\} &= h\{h(\gamma t) \gamma' - h(\gamma) t \gamma'\} \\ &= h(\gamma t) h(\gamma') - h(\gamma) h(t \gamma') = h\{\gamma t h(\gamma')\} - h(\gamma) h(t \gamma') \\ &= h\{\gamma h(t \gamma')\} - h(\gamma) h(t \gamma') = h(\gamma) h(t \gamma') - h(\gamma) h(t \gamma') = 0. \end{aligned}$$

Da wegen (*) kein von Null verschiedenes Rechtsideal im Kern von h enthalten ist, folgt

$$h(\gamma t) - h(\gamma) t = 0, \quad \gamma \in \Gamma, \quad t \in T,$$

d. h. ist h ein T -Homomorphismus von Γ_T in T_T .

Bemerkung 1. Seien A_1, A_2 und A_3 die folgendermaßen definierten Unterringe von Γ :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{\gamma_1 \in \Gamma; h(\gamma_1 \gamma) = \gamma_1 h(\gamma) \text{ für alle } \gamma \in \Gamma\}, \\
A_2 &= \{\gamma_2 \in \Gamma; h(\gamma \gamma_2) = h(\gamma) \gamma_2 \text{ für alle } \gamma \in \Gamma\}, \\
A_3 &= V_E(V_E(A_R)).
\end{aligned}$$

Dann gilt $A_1 = A_2 = A_3 = A'$.

Diese Tatsache kann man leicht aus der Gleichung (*) und dem obigen Beweis entnehmen.

Bemerkung 2. Mit Hilfe der hier durchgeführten Überlegung kann man auch einen einfachen Beweis für Theorem 1.2 in [1] angeben.

Literatur

- [1] Fr. Kasch, Projektive Frobenius-Erweiterungen. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss., (1960/1961), 89–109.
- [2] K. Morita, A Theorem on Frobenius extensions (im Druck).
- [3] T. Onodera, Über Kogeneratoren (im Druck).