

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1965

MÜNCHEN 1966

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Singularitätenfreie analytische Raumkurven als vollständige Durchschnitte

Herrn Geheimrat Prof. Dr. Oskar Perron zum 85. Geburtstag

Von Otto Forster und Karl Josef Ramspott
in München

Vorgelegt von Herrn Karl Stein am 8. Januar 1965

Im Jahre 1941 widerlegte O. PERRON [7] ein von K. Th. VAHLEN angegebenes Beispiel, das zeigen sollte, daß im allgemeinen eine algebraische Raumkurve sich nicht als Nullstellengebilde von weniger als vier Polynomen darstellen läßt. (Tatsächlich kommt man stets mit drei Polynomen aus, wie M. KNESER [5] vor fünf Jahren bewies.) In jener Arbeit bemerkt PERRON, daß noch keine einzige Kurve bekannt sei, die nicht schon das Nullstellengebilde zweier Polynome ist.

Die PERRONSchen Ausführungen begegneten damals teilweise einem merkwürdigen Mißverständnis, das auf mystischen Vielfachheitsvorstellungen beruhte. Zur Klärung dieses Begriffs schlug PERRON [8] vor, das Ideal aller auf einer Kurve K verschwindenden Polynome zu betrachten und zu sagen, ein System von Polynomen stelle die Kurve K in der „richtigen“ (= minimalen) Vielfachheit dar, wenn diese Polynome das zu K gehörige Ideal erzeugen.

Dieselbe Idee liegt auch der heute gebräuchlichen Definition des Begriffes „vollständiger Durchschnitt“ zugrunde. Eine k -dimensionale algebraische Menge X im n -dimensionalen Raum wird als vollständiger Durchschnitt bezeichnet, wenn das Ideal aller auf X verschwindenden Polynome durch $n-k$ Formen erzeugt werden kann. PERRON zeigte in [8], daß nicht jede algebraische Kurve, selbst wenn sie singularitätenfrei ist, ein vollständiger Durchschnitt zu sein braucht.

Es ist nun bemerkenswert, daß im analytischen Fall einfachere Verhältnisse herrschen. Wir beweisen den Satz: Jede singularitä-

tenfreie analytische Kurve im dreidimensionalen Zahlenraum ist ein (globaler) vollständiger Durchschnitt, d. h. das Ideal aller auf ihr verschwindenden ganzen holomorphen Funktionen wird durch zwei Elemente erzeugt (vgl. das in [3] formulierte Problem). Daß man im analytischen Fall mehr beweisen kann als im algebraischen, beruht auf dem starken Hilfsmittel des OKASchen Prinzips, das man in der Funktionentheorie zur Verfügung hat und das erlaubt, gewisse analytische Probleme auf topologische zurückzuführen.

Bezeichnungen:

$\mathbf{C}$ Körper der komplexen Zahlen

$\mathbf{C}^n$ n -dimensionaler komplexer Zahlenraum

$\mathbf{C}_n^*$ der $\mathbf{C}^n$ ohne den Nullpunkt

$M(n \times m, \mathbf{C})$ Menge aller Matrizen mit n Zeilen, m Spalten und komplexen Koeffizienten

$GL(n, \mathbf{C})$ Gruppe aller n -reihigen nichtsingulären Matrizen mit komplexen Koeffizienten

I

Satz. *Jede singularitätenfreie analytische Kurve im $\mathbf{C}^3$ ist ein vollständiger Durchschnitt, d. h. das Ideal α aller auf X verschwindenden ganzen holomorphen Funktionen im $\mathbf{C}^3$ kann durch zwei Elemente erzeugt werden.*

Es ist also X eine abgeschlossene Punktmenge des $\mathbf{C}^3$ derart, daß es zu jedem Punkt $x_0 \in X$ eine offene Umgebung U und holomorphe Funktionen h_1 und h_2 in U gibt, so daß

$$X \cap U = \{x \in U : h_1(x) = h_2(x) = 0\}$$

und der Rang der Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \partial_1 h_1 & \partial_2 h_1 & \partial_3 h_1 \\ \partial_1 h_2 & \partial_2 h_2 & \partial_3 h_2 \end{pmatrix}$$

in jedem Punkt von U gleich zwei ist. (∂_v bedeutet die partielle Ableitung nach der v -ten Koordinate.)

Aus den Theoremen A und B der analytischen Garbentheorie [1] folgt: Ein System $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ von Funktionen aus $\mathfrak{a}$ erzeugt im Ring $\mathfrak{H}(\mathbb{C}^3)$ aller im $\mathbb{C}^3$ holomorphen Funktionen das Ideal $\mathfrak{a}$ genau dann, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Es ist $(\varphi_1(y), \dots, \varphi_k(y)) \neq (0, \dots, 0)$ für alle $y \in Y := \mathbb{C}^3 \setminus X$ (dem Komplement von X in $\mathbb{C}^3$).
- (2) Der Rang der Funktionalmatrix $(\partial_\nu \varphi_\kappa)_{1 \leq \kappa \leq k, 1 \leq \nu \leq 3}$ ist in jedem Punkt $x \in X$ gleich zwei.

Man kann leicht zeigen, daß es vier Funktionen $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathfrak{a}$ gibt, die das Ideal $\mathfrak{a}$ erzeugen (vgl. [2]). Um ein Erzeugendensystem f_1, f_2 aus zwei Funktionen zu erhalten, machen wir den Ansatz

$$f_i = \sum_{k=1}^4 \psi_{ik} g_k \quad (i = 1, 2)$$

mit $\psi_{ik} \in \mathfrak{H}(\mathbb{C}^3)$. Wir verwenden die Matrizenschreibweise und setzen

$$f := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad g := \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}, \quad \Psi := \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \end{pmatrix},$$

womit sich das obige Gleichungssystem durch

$$f = \Psi g$$

abkürzen läßt. Wir untersuchen nun, welchen Bedingungen die holomorphe Matrix Ψ genügen muß, damit f_1 und f_2 ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{a}$ bilden. Es sei D die Funktionalmatrix

$$D := \begin{pmatrix} \partial_1 g_1 & \partial_2 g_1 & \partial_3 g_1 \\ \partial_1 g_2 & \partial_2 g_2 & \partial_3 g_2 \\ \partial_1 g_3 & \partial_2 g_3 & \partial_3 g_3 \\ \partial_1 g_4 & \partial_2 g_4 & \partial_3 g_4 \end{pmatrix}.$$

Wir führen folgende Matrizenmengen ein:

$\mathbf{r}^*$

$$E_x := \{T \in M(2 \times 4, \mathbf{C}) : \text{Rang}(TD(x)) = 2\} \text{ für } x \in X,$$

$$E_y := \{T \in M(2 \times 4, \mathbf{C}) : Tg(y) \neq 0\} \text{ für } y \in Y = \mathbf{C}^3 \setminus X$$

und behaupten:

Die Funktionen f_1 und f_2 bilden dann und nur dann ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{a}$, wenn

$$(*) \quad \Psi(z) \in E_z \text{ für alle } z \in \mathbf{C}^3.$$

Um dies zu beweisen, brauchen wir nur die Bedingungen (1) und (2) nachzuprüfen. Die Bedingung (1) ist äquivalent mit der Bedingung $\Psi(y) \in E_y$ für alle $y \in Y$. Die Bedingung (2) ist äquivalent mit $\Psi(x) \in E_x$ für alle $x \in X$, denn wegen $\partial_v f = (\partial_v \Psi)g + \Psi(\partial_v g)$ ist $(\partial_v f)(x) = \Psi(x)(\partial_v g)(x)$ für alle $x \in X$; die Funktionalmatrix von f im Punkte $x \in X$ ist also gleich $\Psi(x)D(x)$ und unsere Behauptung ist bewiesen.

Wir setzen

$$E := \{(z, T) \in \mathbf{C}^3 \times M(2 \times 4, \mathbf{C}) : T \in E_z\}.$$

Wie man leicht nachrechnet, ist E eine offene Teilmenge des Raumes $\mathbf{C}^3 \times M(2 \times 4, \mathbf{C})$, (der als $\mathbf{C}^{11}$ aufzufassen ist).

Es sei p die kanonische Projektion

$$p : \mathbf{C}^3 \times M(2 \times 4, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}^3.$$

Eine holomorphe Matrix $\Psi: \mathbf{C}^3 \rightarrow M(2 \times 4, \mathbf{C})$ zu finden, die der Bedingung (*) genügt, ist nun gleichbedeutend damit, eine holomorphe Abbildung $H: \mathbf{C}^3 \rightarrow E$ zu finden mit $p(H(z)) = z$ für alle $z \in \mathbf{C}^3$. Aus [4] folgt, daß eine solche Abbildung H existiert, falls es nur eine stetige Abbildung $S: \mathbf{C}^3 \rightarrow E$ mit $p(S(z)) = z$ für alle $z \in \mathbf{C}^3$ gibt. Unser Satz wird also bewiesen sein, wenn die Existenz von S nachgewiesen ist. Dazu müssen wir die topologischen Eigenschaften von E näher untersuchen, was wir im nächsten Abschnitt tun.

II

Für einen beliebigen Teilraum $R \subset \mathbf{C}^3$ setzen wir

$$E(R) := p^{-1}(R) \cap E = \{(z, T) \in R \times M(2 \times 4, \mathbf{C}) : T \in E_z\}.$$

Es sei $F_1 := GL(2, \mathbf{C}) \times M(2 \times 2, \mathbf{C})$ und L_1 die Gruppe aller Matrizen aus $GL(4, \mathbf{C})$, die sich schreiben lassen als

$$\begin{pmatrix} P_1 & Q \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \text{ mit } P_1, P_2 \in GL(2, \mathbf{C}), Q \in M(2 \times 2, \mathbf{C}).$$

L_1 wirkt auf F_1 durch Rechtsmultiplikation: Sei $(T_1, T_2) \in F_1$, $\begin{pmatrix} P_1 & Q \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \in L_1$; dann ist $(T_1, T_2) \begin{pmatrix} P_1 & Q \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} = (T_1 P_1, T_1 Q + T_2 P_2) \in F_1$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

$E(X)$ ist (mit der Beschränkung von p als Projektion) ein Faserbündel über X mit Faser F_1 und Strukturgruppe L_1 .

Beweis. Weil die Matrix $D(x)$ für alle $x \in X$ den Rang zwei besitzt, gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ und eine stetige (sogar eine holomorphe) Matrix $G: U \rightarrow GL(4, \mathbf{C})$, so daß

$$GD = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $B: U \rightarrow M(2 \times 3, \mathbf{C})$ eine in U stetige (2×3) -Matrix ist, die in jedem Punkt den Rang zwei besitzt, und 0 die (2×3) -Nullmatrix bedeutet. Ein Element $(x, T) \in U \times M(2 \times 4, \mathbf{C})$ gehört genau dann zu $E(U)$, wenn $\text{Rang}(TD(x)) = 2$. Wir schreiben $TG^{-1}(x)$ als (T_1, T_2) mit $T_1, T_2 \in M(2 \times 2, \mathbf{C})$. Es ist

$$TD(x) = TG^{-1}(x) G(x) D(x) = (T_1, T_2) \begin{pmatrix} B(x) \\ 0 \end{pmatrix} = T_1 B(x).$$

Da $B(x)$ den Rang zwei hat, besitzt $T_1 B(x)$ genau dann den Rang zwei, wenn T_1 nichtsingulär ist. Wir haben also $(x, T) \in E(U)$ dann und nur dann, wenn $TG^{-1}(x) = (T_1, T_2) \in$

$\in GL(2, \mathbf{C}) \times M(2 \times 2, \mathbf{C}) = F_1$. Durch $\Phi_U(x, T) := (x, TG^{-1}(x))$ wird deshalb ein fasertreuer Homöomorphismus $\Phi_U: E(U) \rightarrow U \times F_1$ definiert.

Führt man dieselbe Konstruktion über einer Umgebung $\tilde{U}$ eines anderen Punktes $\tilde{x}_0 \in X$ aus und bezeichnet die G und B entsprechenden Matrizen mit $\tilde{G}$ und $\tilde{B}$, so erhält man einen fasertreuen Homöomorphismus $\Phi_{\tilde{U}}: E(\tilde{U}) \rightarrow \tilde{U} \times F_1$ und man hat über dem Durchschnitt $\tilde{U} \cap U$, wenn er nicht leer ist, die Abbildung

$$\Phi_{\tilde{U}U} := \Phi_{\tilde{U}} \circ \Phi_U^{-1}: (\tilde{U} \cap U) \times F_1 \rightarrow (\tilde{U} \cap U) \times F_1,$$

für die $\Phi_{\tilde{U}U}(x, T) = (x, TG(x)\tilde{G}^{-1}(x))$. Da $G(x)D(x) = \begin{pmatrix} B(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\tilde{G}(x)D(x) = \begin{pmatrix} \tilde{B}(x) \\ 0 \end{pmatrix}$, gilt $G(x)\tilde{G}^{-1}(x)\begin{pmatrix} \tilde{B}(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(x) \\ 0 \end{pmatrix}$. Daraus folgt $G(x)\tilde{G}^{-1}(x) \in L_1$. Durch $G_{\tilde{U}U}(x) := G(x)\tilde{G}^{-1}(x)$ für $x \in \tilde{U} \cap U$ wird deshalb eine stetige Abbildung $G_{\tilde{U}U}: \tilde{U} \cap U \rightarrow L_1$ definiert, mit der $\Phi_{\tilde{U}U}(x, T) = (x, TG_{\tilde{U}U}(x)T)$. Damit ist bewiesen, daß $E(X)$ ein Faserbündel über X mit Faser F_1 und Strukturgruppe L_1 ist.

Es sei $F_2 := \mathbf{C}_2^* \times M(2 \times 3, \mathbf{C})$. Wir fassen dabei $\mathbf{C}_2^*$ als Unterraum von $M(2 \times 1, \mathbf{C})$ auf und können deshalb F_2 mit einem Unterraum von $M(2 \times 4, \mathbf{C})$ identifizieren. Mit L_2 bezeichnen wir die Untergruppe aller derjenigen Matrizen aus $GL(4, \mathbf{C})$, in deren erster Spalte der Einheitsvektor

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

steht. L_2 wirkt auf F_2 durch Rechtsmultiplikation. Es gilt:

$E(Y)$ ist (mit der Beschränkung von p als Projektion) ein Faserbündel über $Y = \mathbf{C}^3 \setminus X$ mit Faser F_2 und Strukturgruppe L_2 .

Beweis. Da der Vektor $g(y)$ für alle $y \in Y$ ungleich null ist, gibt es zu jedem Punkt $y_0 \in Y$ eine Umgebung U und eine

stetige (sogar eine holomorphe) Matrix $G: U \rightarrow GL(4, \mathbf{C})$ mit $Gg = e_1$. Ein Element $(y, T) \in U \times M(2 \times 4, \mathbf{C})$ gehört genau dann zu $E(U)$, wenn $Tg(y)$ nicht der Nullvektor ist. Schreiben wir $TG^{-1}(y)$ als (t, T') mit $t \in M(2 \times 1, \mathbf{C})$ und $T' \in M(2 \times 3, \mathbf{C})$, so ist

$$Tg(y) = TG^{-1}(y) G(y) g(y) = (t, T') e_1 = t,$$

d. h. es ist $(y, T) \in E(U)$ genau dann, wenn $TG^{-1}(y) = (t, T') \in \mathbf{C}_2^* \times M(2 \times 3, \mathbf{C})$. Durch $\Phi_U(y, T) := (y, TG^{-1}(y))$ wird deshalb ein fasertreuer Homöomorphismus $\Phi_U: E(U) \rightarrow U \times F_2$ definiert.

Führt man dieselbe Konstruktion über einer Umgebung $\tilde{U}$ eines anderen Punktes $\tilde{y}_0 \in Y$ aus und bezeichnet die G entsprechende Matrix mit $\tilde{G}$, so erhält man einen fasertreuen Homöomorphismus $\Phi_{\tilde{U}}: E(\tilde{U}) \rightarrow \tilde{U} \times F_2$ und man hat über dem Durchschnitt $\tilde{U} \cap U$, wenn er nicht leer ist, die Abbildung

$$\Phi_{\tilde{U}U} := \Phi_{\tilde{U}} \circ \Phi_U^{-1}: (\tilde{U} \cap U) \times F_2 \rightarrow (\tilde{U} \cap U) \times F_2,$$

für die $\Phi_{\tilde{U}U}(y, T) = (y, TG(y) \tilde{G}^{-1}(y))$. Da $G(y) g(y) = \tilde{G}(y) g(y) = e_1$, ist $G(y) \tilde{G}^{-1}(y) e_1 = e_1$. Daraus folgt $G(y) \tilde{G}^{-1}(y) \in L_2$. Durch $G_{\tilde{U}U}(y) := G(y) \tilde{G}^{-1}(y)$ wird deshalb eine stetige Abbildung $G_{\tilde{U}U}: \tilde{U} \cap U \rightarrow L_2$ definiert, mit der $\Phi_{\tilde{U}U}(y, T) = (y, TG_{\tilde{U}U}(y))$. Damit ist bewiesen, daß $E(Y)$ ein Faserbündel über Y mit Faser F_2 und Strukturgruppe L_2 ist.

III

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt die gesuchte stetige Abbildung $S: \mathbf{C}^3 \rightarrow E$ mit $p(S(z)) = z$ für alle $z \in \mathbf{C}^3$ schrittweise konstruieren.

Zunächst gibt es eine stetige Abbildung $S_1: X \rightarrow E$ mit $p(S_1(x)) = x$ für alle $x \in X$. Eine Abbildung mit dieser Eigenschaft ist nämlich nichts anderes als ein Schnitt im Bündel $E(X)$. Da die Strukturgruppe L_1 kurvenzusammenhängend ist und die Faser F_1 zusammenhängt und eine abelsche Fundamentalgruppe

besitzt, existiert ein solcher Schnitt nach bekannten Aussagen der Hindernistheorie [10] sicher dann, wenn für alle $q \geq 1$ die Cohomologiegruppen $H^{q+1}(X, \pi_q(F_1)) = 0$ sind. Dabei ist $\pi_q(F_1)$ die q -te Homotopiegruppe von F_1 . Da X eine komplex eindimensionale Mannigfaltigkeit ohne kompakte Komponenten ist, verschwinden aber für eine beliebige abelsche Gruppe A sämtliche Cohomologiegruppen $H^p(X, A)$ für $p \geq 2$.

Die Abbildung S_1 wird jetzt in eine Umgebung von X fortgesetzt. Dazu wählen wir eine abgeschlossene Umgebung V von X im $\mathbf{C}^3$ so, daß X Deformationsretrakt von V ist und daß der Rand von V Träger eines Unterkomplexes einer simplizialen Zerlegung von $Y = \mathbf{C}^3 \setminus X$ ist (vgl. etwa [6]). Die Abbildung $S_1: X \rightarrow E$ läßt sich schreiben als $S_1(x) = (x, s_1(x))$, $x \in X$, mit einer stetigen Abbildung $s_1: X \rightarrow M(2 \times 4, \mathbf{C})$. Ist $r: V \rightarrow X$ eine retrahierende Abbildung, so erhält man durch die Definition $S_2(z) := (z, s_1(r(z)))$ für $z \in V$ eine stetige Abbildung $S_2: V \rightarrow \mathbf{C}^3 \times M(2 \times 4, \mathbf{C})$. Da E offen in $\mathbf{C}^3 \times M(2 \times 4, \mathbf{C})$ ist, können wir V als so klein voraussetzen, daß S_2 sogar eine Abbildung von V in E ist.

Es sei $W := V \setminus X$. Die auf W beschränkte Abbildung $S_2|_W$ ist ein Schnitt im Bündel $E(Y)$ über W . Wenn wir diesen zu einem Schnitt von $E(Y)$ über ganz Y fortsetzen können, haben wir damit auch die Existenz einer stetigen Abbildung $S: \mathbf{C}^3 \rightarrow E$ mit $p(S(z)) = z$ für alle $z \in \mathbf{C}^3$ sichergestellt.

Nach Wahl von V ist W Träger eines Unterkomplexes einer simplizialen Zerlegung von Y . Da die Strukturgruppe L_2 des Bündels $E(Y)$ kurvenzusammenhängend ist und die Faser F_2 zusammenhängt und eine abelsche (sogar verschwindende) Fundamentalgruppe besitzt, läßt sich der Schnitt $S_2|_W$ sicher dann wie gewünscht fortsetzen, wenn für alle $q \geq 1$ die relativen Cohomologiegruppen $H^{q+1}(Y, W; \pi_q(F_2)) = 0$ sind (vgl. [10]). $H^2(Y, W; \pi_1(F_2))$ verschwindet, weil $\pi_1(F_2) = 0$ ist. Wir brauchen also nur noch den Fall $q \geq 2$ zu untersuchen. Für eine beliebige abelsche Gruppe A und eine beliebige natürliche Zahl p sind wegen des Ausschneidungssatzes die Gruppen $H^p(Y, W; A)$ und $H^p(\mathbf{C}^3, V; A)$ isomorph; ebenso gilt die Isomorphie $H^p(V, A) \cong H^p(X, A)$, da X Deformationsretrakt von V ist (vgl. [9]). Wir betrachten die exakte Cohomologiesequenz

$$\dots \rightarrow H^q(V, A) \rightarrow H^{q+1}(\mathbf{C}^3, V; A) \rightarrow H^{q+1}(\mathbf{C}^3, A) \rightarrow \dots$$

Es ist $H^q(V, A) \cong H^q(X, A) = 0$ (weil $q \geq 2$) und $H^{q+1}(\mathbf{C}^3, A) = 0$. Daraus folgt $H^{q+1}(\mathbf{C}^3, V; A) \cong H^{q+1}(Y, W; A) = 0$; der Schnitt $S_2|W$ kann also nach Y fortgesetzt werden, und nach den gemachten Bemerkungen ist damit unser Satz bewiesen.

IV

Wir haben unsere Betrachtungen (pour fixer les idées) auf den $\mathbf{C}^3$ beschränkt. Man kann den bewiesenen Satz aber leicht auf den $\mathbf{C}^n$ verallgemeinern. Es gilt:

Jede singularitätenfreie analytische Kurve X im $\mathbf{C}^n$ ist ein voll-vollständiger Durchschnitt, d. h. das Ideal aller auf X verschwindenden ganzen holomorphen Funktionen im $\mathbf{C}^n$ kann durch $n-1$ Elemente erzeugt werden.

(Allgemein wird eine k -dimensionale analytische Menge im $\mathbf{C}^n$ ein vollständiger Durchschnitt genannt, wenn das Ideal aller auf ihr verschwindenden ganzen holomorphen Funktionen durch $n-k$ Elemente erzeugt werden kann).

Das Analogon unseres Satzes in der algebraischen Geometrie ist nicht richtig, wie folgendes auf O. PERRON [8] zurückgehende Gegenbeispiel zeigt.

$$X := \{(s^3 : s^2 t : s t^2 : t^3) \in P_3(\mathbf{C}) : (s, t) \in \mathbf{C}_2^*\}$$

ist eine singularitätenfreie algebraische Kurve im $P_3(\mathbf{C})$. Trotzdem kann das Ideal aller auf X verschwindenden Polynome nicht durch zwei Formen erzeugt werden. Wäre dies der Fall, so müßte das Produkt ihrer Grade gleich drei sein, (wie aus dem Satz von BÉZOUT folgt). Eines der Polynome müßte also linear sein. Das ist aber unmöglich, weil X keine ebene Kurve ist.

Jedoch läßt sich X als genaues Nullstellengebilde zweier Formen darstellen; es ist nämlich

$$X = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in P_3(\mathbf{C}) : x_0 x_2 - x_1^2 = 0, \\ x_0 x_3^2 - 2 x_1 x_2 x_3 + x_2^3 = 0\},$$

wie O. PERRON schon in [7] bemerkt.

Literatur

- [1] H. CARTAN: Variétés analytiques et cohomologie. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles 1953, pp. 41–55.
- [2] O. FORSTER: Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Noetherschen Ring. Math. Z. 84 (1964) 80–87.
- [3] O. FORSTER und K. J. RAMSPOTT: Über die Darstellung analytischer Mengen. Sb. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl., 1963, 89–99.
- [4] O. FORSTER und K. J. RAMSPOTT: Okasche Paare von Garben nichtabelscher Gruppen. In Vorbereitung.
- [5] M. KNESER: Über die Darstellung algebraischer Raumkurven als Durchschnitte von Flächen. Arch. Math. 11 (1960) 157–158.
- [6] J. R. MUNKRES: Elementary differential topology. Annals of Mathematics Studies 54. Princeton: University Press 1963.
- [7] O. PERRON: Über das Vahlensche Beispiel zu einem Satz von Kronecker. Math. Z. 47 (1942) 318–324.
- [8] O. PERRON: Beweis und Verschärfung eines Satzes von Kronecker. Math. Ann. 118 (1941/43) 441–448.
- [9] H. SCHUBERT: Topologie. Stuttgart: Teubner 1964.
- [10] N. STEENROD: The topology of fibre bundles. Princeton: University Press 1951.