

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

3760

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1963

MÜNCHEN 1964

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Bemerkungen zum Brückensatz

Von Hans-Joachim Kowalsky in Braunschweig

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 8. November 1963

Von OTTO HAUPT, GEORG NÖBELING und CHRISTIAN PAUC wurde in [1] ein allgemeiner Brückensatz bewiesen. Als Sonderfall enthält er den sogenannten speziellen Brückensatz, der auch als unmittelbare Konsequenz aus zwei Sätzen von R. L. MOORE [4] gewonnen werden kann. Eine Folgerung aus dem speziellen Brückensatz ist schließlich der Randsatz von Z. JANISZEWSKI [2]. Alle diese Sätze beziehen sich auf einen zusammenhängenden und kompakten metrisierbaren Raum X . Nachstehend soll nun gezeigt werden, daß die Voraussetzungen abgeschwächt bzw. abgeändert werden können: Einerseits kann man nämlich die Metrisierbarkeit durch die schwächere Forderung ersetzen, daß X lediglich das Trennungsaxiom T_4 erfüllt. Zweitens aber kann man auch unter Beibehaltung des Zusammenhangs auf die Kompaktheit und die Metrisierbarkeit verzichten und statt dessen verlangen, daß X lokal zusammenhängend ist. Gerade diese Abänderung gestattet in allen Fällen eine verhältnismäßig kurze Beweisführung.

Im folgenden verweisen die Zahlenangaben in runden Klammern auf die entsprechenden Sätze in [3].

Herrn OTTO HAUPT bin ich für Hinweise auf die Problemstellung zu Dank verpflichtet.

1. Der Randsatz

Das Komplement einer Teilmenge A von X wird stets mit $\mathbf{C}A$ bezeichnet. Ist M eine zweite Teilmenge von X , so bedeutet $\mathbf{C}_M A$ das relative Komplement von A in M ; es gilt also $\mathbf{C}_M A = M \cap \mathbf{C}A$. Der Begriff „kompakt“¹ wird immer ohne Einschluß von Trennungseigenschaften benutzt. Ebenso soll das Tren-

¹ In [3] „vollkompakt“.

nungsaxiom T_4 nicht etwa T_1 einschließen; es besagt also lediglich: zu je zwei nicht-leeren, abgeschlossenen und punktfremden Mengen A, B existieren offene Mengen U, V mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$. Jeder abgeschlossene Unterraum eines kompakten T_4 -Raumes ist selbst ein kompakter T_4 -Raum (9.5, 11.6). Hingewiesen sei schließlich noch auf das folgende

Lemma 1: *Es sei X ein kompakter T_4 -Raum, und K sei eine Komponente von X . Ferner bedeute $\mathfrak{S}$ das System aller gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen S von K mit $K \subseteq S$. Dann gilt*

$$K = \bigcap \{ S : S \in \mathfrak{S} \}.$$

Zum Beweis vgl. (14.9).

Randsatz: *Es sei X ein zusammenhängender Raum, der außerdem entweder*

(a) *lokal zusammenhängend*

oder

(b) *ein kompakter T_4 -Raum*

ist. Ferner sei A eine nicht-leere und abgeschlossene Teilmenge von X . Dann gilt für jede Komponente K von $\mathfrak{CA}$

$$\bar{K} \cap A \neq \emptyset.$$

Beweis: Es kann $A \neq X$ vorausgesetzt werden, weil andernfalls $\mathfrak{CA}$ leer ist und somit keine Komponente besitzt. Weiter sei nun K eine Komponente von $\mathfrak{CA}$, und es werde $\bar{K} \cap A = \emptyset$ angenommen. Diese Annahme soll in den Fällen (a) und (b) einzeln zum Widerspruch geführt werden.

Fall (a): Als Komponente von $\mathfrak{CA}$ ist K abgeschlossen in $\mathfrak{CA}$, wegen $\bar{K} \cap A = \emptyset$ aber sogar abgeschlossen in X . Außerdem ist K als Komponente einer offenen Menge wegen des lokalen Zusammenhangs von X aber auch offen in X . Da $K \neq \emptyset$ und $K \neq X$ gilt, ist dies ein Widerspruch zum Zusammenhang von X .

Fall (b): Wegen T_4 gibt es zu A und $\bar{K}$ offene Mengen U und V mit $A \subseteq U$, $\bar{K} \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$. Wegen $K \subseteq \mathfrak{CU}$ und $\mathfrak{CU} \subseteq \mathfrak{CA}$ ist K auch eine Komponente von $\mathfrak{CU}$. Es sei nun $\mathfrak{S}$ das System aller in $\mathfrak{CU}$ gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen S von $\mathfrak{CU}$ mit $K \subseteq S$. Für jedes $S \in \mathfrak{S}$ werde ferner

$B_S = S \cap \bar{U}$ gesetzt und zunächst $B_S \neq \emptyset$ für alle $S \in \mathfrak{S}$ angenommen. Es gilt $B_{S_1 \cap S_2} = B_{S_1} \cap B_{S_2}$. Wegen der Abgeschlossenheit der Mengen B_S und wegen der Kompaktheit von $\bar{U}$ folgt daher, daß die Menge

$$D = \bigcap \{B_S : S \in \mathfrak{S}\}$$

nicht leer ist (11.19). Nun gilt aber $D \subseteq \bar{U}$ und wegen Lemma 1 auch $D \subseteq \bigcap \{S : S \in \mathfrak{S}\} = K$. Es folgt $K \cap \bar{U} \neq \emptyset$ im Widerspruch zu $K \subseteq V \subseteq \mathbf{C}\bar{U}$. Somit kann $B_S \neq \emptyset$ nicht für alle $S \in \mathfrak{S}$ erfüllt sein; d. h. es gibt ein $S_0 \in \mathfrak{S}$ mit $S_0 \cap \bar{U} = \emptyset$. Es ist S_0 abgeschlossen in $\mathbf{C}U$, wegen der Abgeschlossenheit von $\mathbf{C}U$ aber sogar abgeschlossen in X . Weiter ist S_0 auch offen in $\mathbf{C}U$. Wegen $S_0 \subseteq \mathbf{C}\bar{U}$ ist S_0 aber auch offen in $\mathbf{C}\bar{U}$ und damit sogar in X . Dies ist ein Widerspruch zum Zusammenhang von X , weil ja $S_0 \neq \emptyset$ wegen $K \subseteq S_0$ und $S_0 \neq X$ wegen $S_0 \subseteq \mathbf{C}\bar{U} \subseteq \mathbf{C}A$ gilt.

2. Der spezielle Brückensatz

Zur Vorbereitung sollen zunächst zwei Hilfssätze bewiesen werden.

Lemma 2: *Es sei X ein zusammenhängender und kompakter T_4 -Raum. Ferner seien A und B zwei nicht-leere, abgeschlossene und punktfremde Teilmengen von X . Dann gibt es in dem System $\mathfrak{Z}$ aller zusammenhängenden und abgeschlossenen Teilmengen Z von X mit $Z \cap A \neq \emptyset$ und $Z \cap B \neq \emptyset$ eine minimale Menge.*

Beweis: (Vgl. [1].) Wegen $X \in \mathfrak{Z}$ ist $\mathfrak{Z}$ nicht leer. Weiter sei das Teilsystem $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{Z}$ eine Kette (hinsichtlich der mengentheoretischen Inklusion). Dann ist auch

$$D = \bigcap \{Z : Z \in \mathfrak{C}\}$$

eine zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge von X (14.6). Wegen $Z \cap A \neq \emptyset$ für alle $Z \in \mathfrak{C}$ und wegen der Kompaktheit von A gilt außerdem $D \cap A \neq \emptyset$ (11.18) und analog $D \cap B \neq \emptyset$. Es folgt $D \in \mathfrak{Z}$, und die Behauptung ergibt sich unmittelbar mit Hilfe des ZORNSchen Lemmas.

Lemma 3: *Es sei X ein kompakter T_4 -Raum, und $\mathfrak{K}$ sei ein nicht-leeres System nicht-leerer, zusammenhängender Teilmengen von X . Schließlich sei $\mathfrak{v}$ ein Ultrafilter von $\mathfrak{K}$. Setzt man dann für jede Menge $\mathfrak{B} \in \mathfrak{v}$*

$$C_{\mathfrak{B}} = \overline{\bigcup \{K : K \in \mathfrak{B}\}},$$

so ist

$$C = \bigcap \{C_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{B} \in \mathfrak{v}\}$$

eine nicht-leere, zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge von X .

Beweis: Die nicht-leeren und abgeschlossenen Mengen $C_{\mathfrak{B}}$ bilden eine Filterbasis. Wegen der Kompaktheit von X ist daher C ebenfalls nicht leer und abgeschlossen (11.19). Angenommen werde, daß C nicht zusammenhängend ist, daß es also nicht-leere, abgeschlossene und punktfremde Teilmengen C' und C'' von C mit $C' \cup C'' = C$ gibt. Wegen T_4 existieren dann offene Mengen U' und U'' mit $C' \subseteq U'$, $C'' \subseteq U''$ und $U' \cap U'' = \emptyset$. Wegen $C' \subseteq C \subseteq C_{\mathfrak{B}}$ und $C' \subseteq U'$ gibt es zu jedem $\mathfrak{B} \in \mathfrak{v}$ mindestens ein $K \in \mathfrak{B}$ mit $K \cap U' \neq \emptyset$. Für die Menge $\mathfrak{K}'$ aller $K \in \mathfrak{K}$ mit $K \cap U' \neq \emptyset$ gilt daher $\mathfrak{K}' \in \mathfrak{v}$, weil $\mathfrak{v}$ ein Ultrafilter ist (3.12). Ebenso erhält man für die Menge $\mathfrak{K}''$ aller $K \in \mathfrak{K}$ mit $K \cap U'' \neq \emptyset$ auch $\mathfrak{K}'' \in \mathfrak{v}$. Für alle $\mathfrak{B} \in \mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{K}' \cap \mathfrak{K}''$ und für alle $K \in \mathfrak{B}$ folgt somit $K \cap U' \neq \emptyset$ und $K \cap U'' \neq \emptyset$. Für alle diese K muß daher auch $K \cap \mathbf{C}(U' \cup U'') \neq \emptyset$ gelten, weil andernfalls die Gleichung $K = (K \cap U') \cup (K \cap U'')$ dem Zusammenhang von K widersprechen würde. Es folgt $C_{\mathfrak{B}} \cap \mathbf{C}(U' \cup U'') \neq \emptyset$ für alle $\mathfrak{B} \in \mathfrak{v}$ und schließlich wegen der Kompaktheit von $\mathbf{C}(U' \cup U'')$ auch $C \cap \mathbf{C}(U' \cup U'') \neq \emptyset$. Dies aber widerspricht $C = C' \cup C'' \subseteq U' \cup U''$.

Spezieller Brückensatz: *Es sei X ein zusammenhängender Raum, der außerdem entweder*

- oder*
- (a) *lokal zusammenhängend*
 - (b) *ein kompakter T_4 -Raum*

ist. Ferner seien A und B zwei nicht-leere, abgeschlossene und punktfremde Teilmengen von X . Dann gibt es eine Komponente K von $\mathbf{C}(A \cup B)$ mit $K \cap A \neq \emptyset$ und $K \cap B \neq \emptyset$.

Beweis: Die Behauptung wird einzeln für die Fälle (a) und (b) bewiesen.

Fall (a): Wegen des Zusammenhangs von X gilt $A \cup B \neq X$, also $\mathbf{C}(A \cup B) \neq \emptyset$. Es sei nun $\mathfrak{K}$ das System aller Komponenten von $\mathbf{C}(A \cup B)$. Da $A \cup B$ eine nicht-leere und abgeschlossene Teilmenge von X ist, gilt für jedes $K \in \mathfrak{K}$ nach dem Randsatz $\bar{K} \cap A \neq \emptyset$ oder $\bar{K} \cap B \neq \emptyset$. Angenommen werden soll, daß für kein $K \in \mathfrak{K}$ gleichzeitig $\bar{K} \cap A \neq \emptyset$ und $\bar{K} \cap B \neq \emptyset$ erfüllt ist. Und diese Annahme muß zum Widerspruch geführt werden.

Es werde gesetzt

$$\mathfrak{K}_A = \{ K' : K' \in \mathfrak{K}, \bar{K}' \cap A \neq \emptyset \} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{K}_B = \{ K'' : K'' \in \mathfrak{K}, \bar{K}'' \cap B \neq \emptyset \}.$$

Dann gilt $\mathfrak{K}_A \cap \mathfrak{K}_B = \emptyset$. Setzt man noch

$$K_A = A \cup \bigcup \{ K' : K' \in \mathfrak{K}_A \} \quad \text{und}$$

$$K_B = B \cup \bigcup \{ K'' : K'' \in \mathfrak{K}_B \},$$

so folgt $K_A \cap K_B = \emptyset$, $K_A \cup K_B = X$ und außerdem $K_A \neq \emptyset$, $K_B \neq \emptyset$. Dies ist ein Widerspruch zum Zusammenhang von X , wenn jetzt abschließend noch gezeigt wird, daß K_A (und aus Symmetriegründen dann auch K_B) eine offene Menge ist.

Es gelte $x \in A$. Wegen des lokalen Zusammenhangs existiert dann eine zusammenhängende, offene Umgebung U von x mit $U \cap B = \emptyset$ (15.1). Es werde zunächst $U \cap K'' \neq \emptyset$ für ein $K'' \in \mathfrak{K}_B$ angenommen. Als Komponente von $\mathbf{C}(A \cup B)$ ist K'' offen in X und abgeschlossen in $\mathbf{C}(A \cup B)$. Wegen $K'' \in \mathfrak{K}_B$, also $\bar{K}'' \cap B \neq \emptyset$, ist K'' aber sogar abgeschlossen in $\mathbf{C}B$. Da $U \subseteq \mathbf{C}B$ gilt, ist somit $U \cap K''$ eine in U gleichzeitig offene und abgeschlossene Menge. Wegen des Zusammenhangs von U folgt $U \cap K'' = U$, was jedoch $x \in U$ und $x \in K''$ ($x \in A$!) widerspricht. Daher muß $U \cap K'' = \emptyset$ für alle $K'' \in \mathfrak{K}_B$ erfüllt sein. Es folgt $U \cap K_B = \emptyset$, also $U \subseteq K_A$. Außerdem sind die Mengen $K' \in \mathfrak{K}_A$ als Komponenten von $\mathbf{C}(A \cup B)$ offen. Zusammen ergibt sich hieraus schließlich, daß auch K_A eine offene Menge ist.

Fall (b): Nach Lemma 2 existiert eine zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge Z von X mit $Z \cap A \neq \emptyset$ und $Z \cap B \neq \emptyset$,

die hinsichtlich dieser Eigenschaften minimal ist. Wenn also $C \subseteq Z$ ebenfalls eine zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge von X mit $C \cap A \neq \emptyset$ und $C \cap B \neq \emptyset$ ist, so muß $C = Z$ gelten.

Es ist Z ein zusammenhängender und kompakter T_4 -Raum. Setzt man $A^* = Z \cap A$ und $B^* = Z \cap B$, so sind A^* und B^* zwei nicht-leere, abgeschlossene und punktfremde Teilmengen von Z , und das relative Komplement $Y = \mathbf{C}_Z(A^* \cup B^*)$ ist nicht leer. Außerdem gilt $\bar{Y} \cap A^* \neq \emptyset$ und $\bar{Y} \cap B^* \neq \emptyset$, weil z. B. aus $\bar{Y} \cap A^* = \emptyset$ folgen würde, daß die zusammenhängende Menge Z Vereinigung der nicht-leeren, abgeschlossenen und punktfremden Mengen A^* und $\bar{Y} \cup B^*$ ist.

Nimmt man nun zunächst an, daß Y zusammenhängend ist, so gibt es wegen $Y \subseteq \mathbf{C}(A \cup B)$ eine Komponente K von $\mathbf{C}(A \cup B)$ mit $Y \subseteq K$. Für sie gilt $\bar{K} \cap A \supseteq \bar{Y} \cap A^* \neq \emptyset$ und entsprechend $\bar{K} \cap B \supseteq \bar{Y} \cap B^* \neq \emptyset$. Damit ist die Behauptung des speziellen Brückensatzes unter dieser zusätzlichen Annahme bewiesen.

Weiterhin soll daher vorausgesetzt werden, daß Y unzusammenhängend ist. Und diese Annahme muß noch zum Widerspruch geführt werden.

Jetzt gibt es nicht-leere und punktfremde Teilmengen M_1 und M_2 von Y , die beide in Y abgeschlossen sind. Für jede Komponente K von Y gilt $K \subseteq M_1$ oder $K \subseteq M_2$. Bedeutet daher $\mathfrak{R}_i$ das System aller Komponenten K von Y mit $K \subseteq M_i$ ($i = 1, 2$), so gilt $\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{R}_2 = \emptyset$, und $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ ist das System aller Komponenten von Y . Für jedes $K \in \mathfrak{R}$ gilt nach dem Randsatz (angewandt auf Z statt X und A^*, B^* statt A, B) $\bar{K} \cap A^* \neq \emptyset$ oder $\bar{K} \cap B^* \neq \emptyset$. Aber für kein $K \in \mathfrak{R}$ sind beide Beziehungen gleichzeitig erfüllt, weil sonst $C = \bar{K}$ eine zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge von Z (und also auch von X) mit $C \cap A \neq \emptyset$ und $C \cap B \neq \emptyset$ wäre, für die jedoch nicht $C = Z$ erfüllt ist (s. o.). Setzt man daher weiter für $i = 1, 2$

$$\mathfrak{R}_{i,A} = \{K : K \in \mathfrak{R}_i, \bar{K} \cap A^* \neq \emptyset\} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{R}_{i,B} = \{K : K \in \mathfrak{R}_i, \bar{K} \cap B^* \neq \emptyset\},$$

so sind die Systeme $\mathfrak{R}_{i,A}, \mathfrak{R}_{i,B}$ ($i = 1, 2$) paarweise elementfremd, und es gilt $\mathfrak{R}_{i,A} \cup \mathfrak{R}_{i,B} = \mathfrak{R}_i$. Schließlich werde

$$K_{i,A} = A^* \cup \bigcup \{K : K \in \mathfrak{K}_{i,A}\} \quad \text{und}$$

$$K_{i,B} = B^* \cup \bigcup \{K : K \in \mathfrak{K}_{i,B}\} \quad (i = 1, 2)$$

gesetzt. Von diesen Mengen kann zunächst festgestellt werden, daß nicht gleichzeitig

$$\overline{K_{i,A}} \cap K_{i,B} = \emptyset \quad \text{und} \quad K_{i,A} \cap \overline{K_{i,B}} = \emptyset \quad \text{für } i = 1, 2$$

gelten kann: Da nämlich die Mengen M_i in Y abgeschlossen sind, würde folgen, daß die nicht-leeren und punktfremden Mengen $K_{1,A} \cup K_{2,A}$ und $K_{1,B} \cup K_{2,B}$ abgeschlossen sind. Da aber Z die Vereinigung dieser beiden Mengen ist, würde dies dem Zusammenhang von Z widersprechen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann daher weiter die Existenz eines Punktes $p \in \overline{K_{1,A}} \cap K_{1,B}$ vorausgesetzt werden. Dann gibt es zu jeder Umgebung U aus dem Umgebungsfiler $\mathfrak{u}$ von p mindestens ein $K \in \mathfrak{K}_{1,A}$ mit $K \cap U \neq \emptyset$. Setzt man daher

$$\mathfrak{B}_U = \{K : K \in \mathfrak{K}_{1,A}, K \cap U \neq \emptyset\} \quad (U \in \mathfrak{u}),$$

so sind die Mengen $\mathfrak{B}_U$ nicht leer, und $\{\mathfrak{B}_U : U \in \mathfrak{u}\}$ ist Basis eines Filters von $\mathfrak{K}_{1,A}$, der zu einem Ultrafilter $\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{K}_{1,A}$ verfeinert werden kann. Mit

$$C_{\mathfrak{B}} = \overline{\bigcup \{K : K \in \mathfrak{B}\}} \quad \text{und} \quad C = \bigcap \{C_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{B} \in \mathfrak{v}\}$$

gilt dann nach Lemma 3, daß C eine zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge von Z ist. Ferner ergibt sich laut Konstruktion $C \cap U \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathfrak{u}$, wegen der Abgeschlossenheit von C also $p \in C$. Schließlich gilt $\overline{K} \cap A \neq \emptyset$ für alle $K \in \mathfrak{K}_{1,A}$ und somit $C_{\mathfrak{B}} \cap A \neq \emptyset$ für alle $\mathfrak{B} \in \mathfrak{v}$. Wegen der Kompaktheit von A folgt daher $C \cap A \neq \emptyset$ (11.18).

Aus $p \in K_{1,B}$ ergibt sich $p \in B^*$ oder $p \in K'$ für ein $K' \in \mathfrak{K}_{1,B}$. Setzt man im ersten Fall $C^* = C$ und im zweiten Fall $C^* = C \cup \overline{K'}$, so ist C^* in jedem Fall eine zusammenhängende und abgeschlossene Teilmenge von Z mit $C^* \cap A \neq \emptyset$ und $C^* \cap B \neq \emptyset$ (wegen $K' \in \mathfrak{K}_{1,B}$ gilt ja $\overline{K'} \cap B \neq \emptyset$). Es folgt

(s. o.) $C^* = Z$ und damit $M_2 \subseteq C^*$. Dies ist ein Widerspruch, weil C^* offenbar in der zu M_2 punktfremden Menge $A^* \cup M_1 \cup B^*$ enthalten ist.

3. Verallgemeinerungen

Abschließend soll jetzt noch der eingangs erwähnte allgemeine Brückensatz unter den hier gemachten Voraussetzungen bewiesen werden. Vorausgeschickt wird eine entsprechende Verallgemeinerung des Randsatzes.

Ist Q eine beliebige Teilmenge eines topologischen Raumes X , und ist $\mathfrak{K}$ das System aller Komponenten von $\mathbf{C}Q$, so werde

$$\langle Q, X \rangle = Q \cap \bigcup \{K : K \in \mathfrak{K}\}$$

gesetzt. Gilt $Q = X$, so ist $\mathfrak{K}$ leer und daher auch $\langle Q, X \rangle$.

Lemma 4: *Es sei X ein lokal zusammenhängender Raum, und Q sei eine abgeschlossene Teilmenge von X . Weiter sei Z eine zusammenhängende Teilmenge von X mit $Z \cap \langle Q, X \rangle = \emptyset$. Dann gilt $Z \subseteq Q$ oder $Z \subseteq \mathbf{C}Q$.*

Beweis: Es werde $Z \cap \mathbf{C}Q \neq \emptyset$ angenommen. Dann gibt es eine Komponente K von $\mathbf{C}Q$ mit $K \cap Z \neq \emptyset$. Als Komponente der offenen Menge $\mathbf{C}Q$ ist K wegen des lokalen Zusammenhangs offen, also $K \cap Z$ offen in Z . Weiter ist K als Komponente von $\mathbf{C}Q$ auch abgeschlossen in $\mathbf{C}Q$. Wegen $K \cap Q \subseteq \langle Q, X \rangle$ ist K aber sogar abgeschlossen in $\mathbf{C}\langle Q, X \rangle$. Daher ist schließlich $K \cap Z$ abgeschlossen in Z , weil ja $Z \subseteq \mathbf{C}\langle Q, K \rangle$ gilt. Wegen des Zusammenhangs von Z folgt $K \cap Z = Z$, also $Z \subseteq K \subseteq \mathbf{C}Q$.

Lemma 5: *Es sei X ein kompakter T_4 -Raum, Q eine abgeschlossene Teilmenge von X und U eine offene Teilmenge von X mit $\langle Q, X \rangle \subseteq U$. Ist dann Z eine zusammenhängende Teilmenge von X mit $Z \cap U = \emptyset$, so gilt $Z \subseteq Q$ oder $Z \subseteq \mathbf{C}Q$.*

Beweis: Es werde $Z \cap Q \neq \emptyset$ und $Z \cap \mathbf{C}Q \neq \emptyset$ angenommen. Es ist Z ein zusammenhängender und kompakter T_4 -Raum, $A = Z \cap Q$ ist eine nicht-leere und abgeschlossene Teilmenge von Z , und das relative Komplement $Y = \mathbf{C}_Z Q$ ist nicht leer. Es gibt daher eine Komponente K' von Y , und für sie gilt nach dem

Randsatz $\overline{K'} \cap A \neq \emptyset$. Wegen $Y \subseteq \mathbf{C}Q$ gibt es weiter eine Komponente K von $\mathbf{C}Q$ mit $K' \subseteq K$. Es folgt $\overline{K'} \cap A \subseteq \overline{K} \cap Q \subseteq \langle Q, X \rangle$ und wegen $\overline{K'} \subseteq \overline{Z}$ sogar $\overline{K'} \cap A \subseteq \overline{Z} \cap \langle Q, X \rangle$. Wegen $Z \cap U = \emptyset$ und $\langle Q, X \rangle \subseteq U$ gilt aber $\overline{Z} \cap \langle Q, X \rangle = \emptyset$, also erst recht $\overline{K'} \cap A = \emptyset$ im Widerspruch zu $\overline{K'} \cap A \neq \emptyset$.

Verallgemeinerter Randsatz: *Es sei X ein zusammenhängender Raum, der außerdem entweder*

(a) *lokal zusammenhängend*

oder

(b) *ein kompakter T_4 -Raum*

ist. Ferner gelte $\langle Q, X \rangle \subseteq A \subseteq Q$ mit nicht-leeren und abgeschlossenen Teilmengen A und Q von X . Ist dann K eine Komponente des relativen Komplements $Y = \mathbf{C}_Q A$, so gilt $\overline{K} \cap A \neq \emptyset$.

Beweis:

Fall (a): Jedenfalls ist K in einer Komponente Z von $\mathbf{C}A$ enthalten, für die dann nach dem Randsatz $\overline{Z} \cap A \neq \emptyset$ gilt. Wegen $\langle Q, X \rangle \subseteq A$ erhält man $Z \cap \langle Q, X \rangle = \emptyset$. Wegen $K \subseteq Z$ und $K \subseteq Q$ gilt $Z \cap Q \neq \emptyset$, und aus Lemma 4 folgt $Z \subseteq Q$, also $Z \subseteq Q \cap \mathbf{C}A = Y$. Da K aber eine Komponente von Y ist, muß $K = Z$ und damit $\overline{K} \cap A = \overline{Z} \cap A \neq \emptyset$ erfüllt sein.

Fall (b): Es werde $\overline{K} \cap A = \emptyset$ angenommen. K ist abgeschlossen in Y , wegen $\overline{K} \cap A = \emptyset$ aber sogar abgeschlossen in Q und damit in X ; d. h. es gilt $\overline{K} = K$. Wegen T_4 gibt es offene Mengen U und V mit $A \subseteq U$, $K \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$. Es folgt $K \cap \overline{U} = \emptyset$, und nach dem speziellen Brückensatz gibt es eine Komponente Z von $\mathbf{C}(K \cup \overline{U})$ mit $\overline{Z} \cap K \neq \emptyset$ und $\overline{Z} \cap \overline{U} \neq \emptyset$. Die Menge $K^* = K \cup Z$ ist zusammenhängend und wegen $K^* \cap \overline{U} \neq \emptyset$, $K \cap \overline{U} = \emptyset$ eine echte Obermenge von K . Da aber K eine Komponente von Y ist, kann K^* und somit Z nicht in Y enthalten sein. Wegen $\overline{Z} \cap A \subseteq \overline{Z} \cap U = \emptyset$ muß daher $\overline{Z} \cap \mathbf{C}Q \neq \emptyset$ gelten. Hieraus folgt aber wegen $\langle Q, X \rangle \subseteq A \subseteq U$ und $\overline{Z} \cap U = \emptyset$ nach Lemma 5 sogar $\overline{Z} \subseteq \mathbf{C}Q$. Dies ist ein Widerspruch zu $\overline{Z} \cap Q \supseteq \overline{Z} \cap K \neq \emptyset$.

Setzt man in dem verallgemeinerten Randsatz $Q = X$, so erhält man als Spezialfall den Randsatz.

Allgemeiner Brückensatz: *Es sei X ein zusammenhängender Raum, der außerdem entweder*

- oder*
- (a) *lokal zusammenhängend*
 - (b) *ein kompakter T_4 -Raum*

ist. Ferner gelte $A \subseteq Q$, $B \subseteq Q$, $A \cap B = \emptyset$ und $\langle Q, X \rangle \subseteq A \cup B$, mit nicht-leeren und abgeschlossenen Teilmengen A , B und Q von X . Dann gibt es eine zusammenhängende Teilmenge Z von $\mathbf{C}(A \cup B)$ mit $\bar{Z} \cap A \neq \emptyset$ und $\bar{Z} \cap B \neq \emptyset$, für die $Z \subseteq Q$ oder $Z \subseteq \mathbf{C}Q$ gilt.

Beweis: Nach dem speziellen Brückensatz gibt es eine Komponente K von $\mathbf{C}(A \cup B)$ mit $\bar{K} \cap A \neq \emptyset$ und $\bar{K} \cap B \neq \emptyset$.

Fall (a): Wegen $\langle Q, X \rangle \subseteq A \cup B$ gilt $K \cap \langle Q, X \rangle = \emptyset$, und nach Lemma 4 folgt $K \subseteq Q$ oder $K \subseteq \mathbf{C}Q$. Die Behauptung ist also mit $Z = K$ erfüllt.

Fall (b): Es seien A_0 und B_0 Komponenten von A bzw. B mit $\bar{K} \cap A_0 \neq \emptyset$ und $\bar{K} \cap B_0 \neq \emptyset$. Dann ist $X^* = A_0 \cup K \cup B_0$ ein zusammenhängender und kompakter T_4 -Raum. Weiter seien A^* und B^* diejenigen Komponenten von $Q^* = X^* \cap Q$, für die $A_0 \subseteq A^*$ und $B_0 \subseteq B^*$ gilt. Dann sind A^* , B^* , Q^* nicht-leere und abgeschlossene Teilmengen von X^* mit $A^* \subseteq Q^*$, $B^* \subseteq Q^*$, $A^* \cap B^* = \emptyset$ und $\langle Q^*, X^* \rangle \subseteq A^* \cup B^*$. Es werden nun zwei Fälle unterschieden:

1. $A^* \cap B^* \neq \emptyset$: Dann folgt $A^* = B^*$, und A^* ist ein zusammenhängender, kompakter T_4 -Raum mit $A_0 \subseteq A^*$ und $B_0 \subseteq A^*$. Nach dem speziellen Brückensatz existiert daher eine Komponente Z von $\mathbf{C}(A_0 \cup B_0) \cap A^*$ mit $\bar{Z} \cap A_0 \neq \emptyset$ und $\bar{Z} \cap B_0 \neq \emptyset$. Erst recht folgt $\bar{Z} \cap A \neq \emptyset$ und $\bar{Z} \cap B \neq \emptyset$. Wegen $Z \subseteq \mathbf{C}(A_0 \cup B_0) \cap A^*$ erhält man $Z \subseteq \mathbf{C}(A \cup B)$ und wegen $A^* \subseteq Q^* \subseteq Q$ schließlich auch $Z \subseteq Q$.
2. $A^* \cap B^* = \emptyset$: Nach dem verallgemeinerten Randsatz (angewandt auf X^* , Q^* , $A^* \cup B^*$ statt X , Q , A) müßte für jede Komponente K^* von $\mathbf{C}(A^* \cup B^*) \cap Q^*$ entweder $\bar{K}^* \cap A^* \neq \emptyset$ oder $\bar{K}^* \cap B^* \neq \emptyset$ gelten, was in jedem Fall dem widerspricht, daß A^* und B^* Komponenten von Q^* sind. Es folgt $A^* \cap B^* = Q^*$. Nach dem speziellen Brückensatz existiert daher eine Kompo-

nente Z von $\mathbf{C}(A^* \cup B^*) \cap X^* = \mathbf{C}Q \cap X^*$ mit $\bar{Z} \cup A^* \neq \emptyset$ und $\bar{Z} \cap B^* \neq \emptyset$. Wegen $Z \subseteq \mathbf{C}Q$ gibt es weiter eine Komponente Z' von $\mathbf{C}Q$ mit $Z \subseteq Z'$. Es folgt $\bar{Z} \cap A^* \subseteq \bar{Z}' \cap Q \cap A^* \subseteq \langle Q, X \rangle \cap A^* \subseteq A$, also $\bar{Z} \cap A \neq \emptyset$, und entsprechend $\bar{Z} \cap B \neq \emptyset$.

Damit ist in beiden Fällen die Behauptung bewiesen.

Setzt man in dem allgemeinen Brückensatz $Q = X$, so erhält man wieder als Spezialfall den speziellen Brückensatz.

Literatur

- [1] HAUPT-NÖBELING-PAUC, Sekanten und Paratingenten in topologischen Abhängigkeitsräumen, Journ. f. r. u. a. Math. 182 (1940), 105–121.
- [2] JANISZEWSKI, Sur les continus irréductibles entre deux points, Thèse (Paris 1911) = Journ. École Polyt. (2) 16 (1912), 100.
- [3] KOWALSKY, Topologische Räume, Birkhäuser (Basel) 1961.
- [4] MOORE, Foundations of point set theory, Colloquium Publications of the Amer. Math. Soc. 13, New York 1932.