

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1960



MÜNCHEN 1961

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung, wenn die unabhängig Variable gegen $+\infty$ geht

Heinrich Tietze zum 80. Geburtstag am 31. August 1960

Von Oskar Perron in München

Mit einer Figur

Vorgelegt am 3. Juni 1960

Übersicht

§ 1. Vermutetes und Bewiesenes	35
§ 2. Beweis von Satz 1	40
§ 3. Beweis eines Hilfssatzes	42
§ 4. Beweis von Satz 2	50
§ 5. Eine weitere Substitution	51

§ 1. Vermutetes und Bewiesenes

Kürzlich habe ich bei linearen Differentialgleichungen

$$(1.1) \quad \frac{d^n x}{dt^n} + P_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + P_n(t) x = 0,$$

wenn die Koeffizienten $P_\nu(t)$ Polynome, die Integrale x also *ganze* Funktionen $f(t)$ sind, die funktionentheoretische Wachstumsordnung α und den zugehörigen Typus γ untersucht,¹ das heißt,

¹ Über lineare Differenzengleichungen und eine Anwendung auf lineare Differentialgleichungen mit Polynomkoeffizienten. Mathemat. Zeitschrift 72, 16–24 (1959).

wenn das Maximum von $|f(t)|$ für $|t| \leq r$ mit $M(r)$ bezeichnet wird, die Grenzwerte

$$\alpha = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r}, \quad \gamma = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r^\alpha}.$$

Ich habe mich dabei eines bekannten Zusammenhanges zwischen α und γ mit der Koeffizientenordnung ϱ und dem zugehörigen Typus σ bedient, worunter, wenn $f(t) = \sum D_\nu t^\nu$ ist, die Grenzwerte

$$\varrho = \underline{\lim}_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\log |D_\nu^{-1}|}{\log (\nu!)}, \quad \sigma = \overline{\lim}_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt[\nu]{|D_\nu| (\nu!)^\varrho}$$

zu verstehen sind, und habe dann ϱ und σ aus der von der Differentialgleichung gelieferten linearen Rekursionsformel für die Taylorkoeffizienten D_ν gewonnen. Der erwähnte Zusammenhang ist enthalten in den Formeln

$$\alpha = \frac{1}{\varrho}, \quad \gamma \alpha = \sigma^\alpha.$$

Ein verwandtes, aber doch grundverschiedenes Problem liegt vor, wenn man t nicht als komplexe Variable betrachtet, sondern sich auf reelle Werte beschränkt und nach dem infinitären Verhalten der Integrale für $t \rightarrow \infty$ fragt. Hat die Differentialgleichung etwa die beiden Integrale $x_1 = \exp(t)$ und $x_2 = \exp(-t)$, so ist im funktionentheoretischen Wachstum kein Unterschied; für beide ist $\alpha = 1$ und $\gamma = 1$. Aber im positiv Reellen ist doch $x_1 > x_2$. Und hat man gar die beiden Integrale $x_1 = \exp(t)$ und $x_2 = \exp(-t^2)$, so hat x_2 funktionentheoretisch die Wachstumsordnung 2, aber x_1 nur die Wachstumsordnung 1, so daß man schreiben kann: $x_2 > x_1$. Aber für reelle positive t ist doch gewiß $x_1 > x_2$. Mir scheint nun das reelle Problem mindestens ebenso wichtig wie das funktionentheoretische. Denn durch solche Differentialgleichungen wird doch meistens ein Bewegungszustand beschrieben, wobei t die Zeit bedeutet. Da wird sich dann kaum jemand für imaginäre Zeiten interessieren.

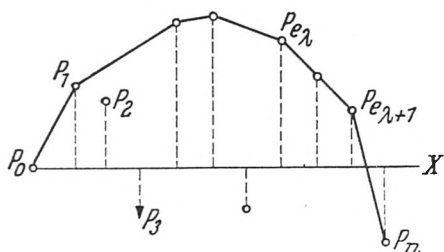
Deshalb will ich mich jetzt dem reellen Problem zuwenden; die vorkommenden Konstanten und Funktionen des reellen t dürfen aber auch komplexwertig sein. Dabei wird es nicht nötig

sein, die Koeffizienten $P_v(t)$ als Polynome vorauszusetzen. Es genügt,

$$(1.2) \quad P_v(t) = a_v t^{k_v} + o(t^{k_v})$$

vorauszusetzen, unter $o(t)$ das bekannte Ordnungssymbol für $t \rightarrow \infty$ verstanden. Und es brauchen auch die Exponenten k_v keine ganzen Zahlen zu sein, sie dürfen beliebige reelle (auch negative) Zahlen sein. Falls ein $P_v(t)$ identisch 0 ist, soll dabei $a_v = 0$, $k_v = -\infty$ gesetzt werden. Meine frühere Methode ist hier natürlich nicht verwendbar. Es gibt ja keine Taylor-Koeffizienten und daher kein ϱ und kein σ .

Wir markieren jetzt in einem rechtwinkligen XY -Koordinatensystem die $n+1$ Punkte $P_0, P_1, \dots, P_n$, und zwar P_v mit den Koordinaten $x = v, y = k_v + v$, wobei $k_0 = 0$ sein soll, und führen von P_0 nach P_n einen nach der positiven Y -Seite konvexen Newton-Puiseux'schen (später abgekürzt NP-) Streckenzug, der eindeutig durch die Forderung bestimmt ist, daß jede Ecke einer der Punkte P_v ist, während die übrigen dieser Punkte nicht auf der konvexen Seite liegen dürfen (siehe die Figur).² Die Eckpunkte seien



$$P_{e_0} = P_0, P_{e_1}, \dots, P_{e_g} = P_n.$$

Der Richtungskoeffizient der Strecke $\overline{P_{e_\lambda} P_{e_\lambda+1}}$

² Im Fall von Polynomkoeffizienten ist das übrigens nach Weglassen der evtl. vorhandenen Strecken mit nichtpositiven Richtungskoeffizienten derselbe NP-Streckenzug, der auch in meiner zitierten Arbeit vorkommt, nur um 90° gedreht.

$$\frac{(k_{e_{\lambda+1}} + e_{\lambda+1}) - (k_{e_{\lambda}} + e_{\lambda})}{e_{\lambda+1} - e_{\lambda}} = \frac{k_{e_{\lambda+1}} - k_{e_{\lambda}}}{e_{\lambda+1} - e_{\lambda}} + 1$$

werde mit p_{λ} bezeichnet, wobei dann

$$p_0 > p_1 > p_2 > \cdots > p_{g-1}$$

ist und außerdem

$$(1.3) \quad k_{\nu} + \nu - \nu p_{\lambda} \leq k_{e_{\lambda}} + e_{\lambda} - e_{\lambda} p_{\lambda}$$

mit Gleichheitszeichen insbesondere für $\nu = e_{\lambda}$ und $\nu = e_{\lambda+1}$ und mit Kleinerzeichen für $\nu < e_{\lambda}$ und für $\nu > e_{\lambda+1}$.

Nun habe ich, wenn die Koeffizienten der Differentialgleichung (1.1) die Form (1.2) haben, nach Konstruktion des NP-Strecken-zuges die folgende

Vermutung. Wenn der Richtungskoeffizient p_{λ} der Strecke $\overline{P_{e_{\lambda}} P_{e_{\lambda+1}}}$ positiv ist, wenn der reelle Teil von $a_{e_{\lambda}}$ nicht gleich 0 ist und wenn die Gleichung

$$(1.4) \quad \sum_{\nu} a_{\nu} z^{n-\nu} = 0 \quad (a_0 = 1),$$

wobei der Summationsindex ν über diejenigen Werte ν läuft, für welche in (1.3) das Gleichheitszeichen gilt, eine Wurzel ϱ hat, deren reeller Teil von dem jeder anderen Wurzel verschieden ist, so hat die Differentialgleichung (1.1) ein Integral, für welches

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{p_{\lambda}-1}} \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \varrho, \quad \text{also} \quad \log x = \frac{\varrho t^{p_{\lambda}}}{p_{\lambda}} + o(t^{p_{\lambda}})$$

ist.

Da nun die Gleichung (1.4) vom Grad $n - e_{\lambda}$ ist und die $(n - e_{\lambda+1})$ -fache Wurzel 0 hat und da dann die $e_{\lambda+1} - e_{\lambda}$ anderen Wurzeln im Normalfall³ lauter verschiedene reelle Teile

³ Ich möchte hier einmal als Normalfall das wirklich Normale, das Alltägliche bezeichnen und nicht, wie sonst in der Mathematik vielfach üblich (z. B. Normalteiler), das Exzeptionelle. Man versteht ja auch unter einem Normalverbraucher nicht gerade einen Mann mit einem exzeptionell großen, sondern mit einem (meist recht) mittelmäßigen Portemonnaie.

haben, kommt man so zu $e_{\lambda+1} - e_\lambda$ Integralen, die man leicht als linear unabhängig erkennt. Denn bezeichnet man sie, nach der Größe der reellen Teile von ϱ geordnet, mit $x_1, x_2, x_3, \dots$, so ist ja $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_v}{x_{v+1}} = 0$.

Wenn nun alle Strecken des NP-Streckenzuges einen positiven Richtungskoeffizienten haben, so ergeben sich im ganzen im Normalfall $e_g - e_0$, also genau n Integrale, die sich offenbar auch wieder so anordnen lassen, daß $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_v}{x_{v+1}} = 0$ ist, wodurch sie sich als linear unabhängig erweisen. Damit hat man dann auch das allgemeine Integral.

Die Vermutung kann ich leider noch nicht vollständig beweisen. In den folgenden Paragraphen werden aber einzelne Teile bewiesen: Zunächst die Aussage über die erste Strecke des NP-Streckenzuges; diese läßt sich so formulieren:

Satz 1. *Wenn die Zahl*

$$\text{Max}_{v=1}^n \frac{k_v + v}{v} = p$$

positiv ist und wenn r den größten Index bezeichnet, für den $k_r + r = rp$ ist, wenn ferner die Gleichung

$$\sum a_v z^{r-v} = 0 \quad (a_0 = 1),$$

wo sich die Summe über diejenigen Werte v erstreckt, für welche $k_v + v = vp$ ist, eine Wurzel ϱ hat, deren reeller Teil von dem jeder anderen Wurzel verschieden ist, dann hat die Differentialgleichung (1.1), deren Koeffizienten $P_v(t)$ die Gestalt (1.2) haben, ein Integral, für welches

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{p-1}} \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \varrho, \quad \text{also} \quad \log x = \frac{\varrho t^p}{p} + o(t^p)$$

ist.

Das gibt im Normalfall r linear unabhängige Integrale. Wenn insbesondere $r = n$ ist, wenn also $\frac{k_n + n}{n} \geq \frac{k_v + v}{v}$ für $v = 1, 2, \dots, n-1$ ist, hat man damit schon n linear unabhängige Integrale, und damit auch das allgemeine Integral.

Weiter kann ich die Vermutung, wenn $e_1 = 1$ ist, auch für die zweite NP-Strecke beweisen. Sie läßt sich so formulieren:

Satz 2. Wenn $k_v < v k_1$ für $v = 2, 3, \dots, n$ ist und wenn die Zahl

$$\text{Max}_{v=2}^n \frac{(k_v + v) - (k_1 + 1)}{v - 1} = p$$

positiv, aber kleiner als $k_1 + 1$ ist, wenn ferner der reelle Teil von a_1 nicht gleich 0 ist, wenn schließlich r den größten Index bezeichnet, für den $(k_r + r) - (k_1 + 1) = (r - 1)p$ ist, und wenn die Gleichung

$$\sum_v a_v z^{r-v} = 0,$$

wo sich die Summe über diejenigen Werte $v (\geq 1)$ erstreckt, für welche $(k_v + v) - (k_1 + 1) = (v - 1)p$ ist, eine Wurzel ϱ hat, deren reeller Teil von dem jeder anderen Wurzel verschieden ist, dann hat die Differentialgleichung (1.1), deren Koeffizienten $P_v(t)$ die Gestalt (1.2) haben, ein Integral, für welches

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{p-1}} \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \varrho, \quad \text{also} \quad \log x = \frac{\varrho t^p}{p} + o(t^p)$$

ist.

Das gibt also im Normalfall, da die Gleichung vom Grad $r - 1$ ist, $r - 1$ und zusammen mit dem einen durch Satz 1 garantierten sogar schon r linear unabhängige Integrale. Insbesondere für $r = n$ hat man also schon wieder n linear unabhängige Integrale und damit das allgemeine Integral.

Bei Satz 1 ist der erste, bei Satz 2 auch der zweite Richtungskoeffizient des NP-Strecken-zuges positiv, die späteren dürfen auch 0 oder negativ sein. In § 5 werden wir noch kurz auf den Fall eingehen, daß die Richtungskoeffizienten schon vom ersten oder zweiten an ≤ 0 sind.

§ 2. Beweis von Satz 1

Wir setzen jetzt, unter p irgendeine positive Zahl verstehend,

$$(2.1) \quad t^p = \tau, \quad t = \tau^{1/p},$$

so daß die Beziehung $\tau \rightarrow \infty$ soviel besagt wie $t \rightarrow \infty$. Es ist

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} p t^{p-1} = \frac{dx}{d\tau} p \tau^{1-1/p},$$

und allgemeiner findet man durch Schluß von ν auf $\nu + 1$

$$\begin{aligned} \frac{d^\nu x}{d\tau^\nu} &= \frac{d^\nu x}{d\tau^\nu} p^\nu \tau^{\nu-1/p} + c_{\nu,1} \frac{d^{\nu-1} x}{d\tau^{\nu-1}} \tau^{\nu-1-1/p} \\ &+ c_{\nu,2} \frac{d^{\nu-2} x}{d\tau^{\nu-2}} \tau^{\nu-2-1/p} + \dots + c_{\nu,\nu-1} \frac{dx}{d\tau} \tau^{1-1/p}, \end{aligned}$$

wobei es auf die Konstanten $c_{\nu,\mu}$ nicht weiter ankommen wird.

Setzt man nun diese Ausdrücke in die Differentialgleichung (1.1) ein, so geht sie nach Division durch $p^n \tau^{n-1/p}$ über in:

$$(2.2) \quad \frac{d^n x}{d\tau^n} + Q_1(\tau) \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \dots + Q_n(\tau) x = 0,$$

und nachdem die $P_\nu(t)$ das in (1.2) angegebene Aussehen haben, ergibt sich für die $Q_\nu(\tau)$ das folgende Aussehen:

$$(2.3) \quad Q_\nu(\tau) = \frac{a_\nu}{p^\nu} \tau^{(k_\nu + \nu)/p - \nu} + o(\tau^{(k_\nu + \nu)/p - \nu}) + O(\tau^{K_\nu}),$$

wobei

$$(2.4) \quad K_\nu = \max_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{k_\mu + \mu}{p} - \nu$$

ist. Wenn wir jetzt unter den Voraussetzungen von Satz 1 unter p die dort eingeführte positive Zahl p verstehen, so ist

$$\frac{k_\nu + \nu}{p} \leq p \quad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

oder also

$$\frac{k_\nu + \nu}{p} \leq \nu,$$

wobei insbesondere für $\nu = r$ und übrigens auch für $\nu = 0$ das Gleichheitszeichen gilt, für $\nu > r$ aber das Kleinerzeichen. Für $\mu < \nu$ ist dann weiter

$$\frac{k_\mu + \mu}{p} \leq \mu < \nu,$$

woraus nach (2.4) sofort $K_\nu < 0$ folgt. Aus (2.3) ergibt sich somit

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} Q_\nu(\tau) = \begin{cases} \frac{a_\nu}{p^\nu} & \text{für } k_\nu + \nu = \nu p \\ 0 & \text{für } k_\nu + \nu < \nu p, \text{ also insbesondere für } \nu > r. \end{cases}$$

Wendet man daher den von mir kürzlich bewiesenen Satz⁴ auf die Differentialgleichung (2.2) an, so hängen die Integrale von der Gleichung

$$(2.5) \quad \sum_{\nu} \frac{a_\nu}{p^\nu} z^{r-\nu} = 0 \quad (a_0 = 1)$$

ab, wobei die Summe über diejenigen Indizes ν zu erstrecken ist, für welche $k_\nu + \nu = \nu p$ ist. Zu jeder Wurzel ϱ' dieser Gleichung, deren reeller Teil von dem jeder anderen Wurzel verschieden ist, gibt es nach dem erwähnten Satz ein Integral, für welches

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \frac{dx}{d\tau} = \varrho', \quad \text{also} \quad \log x = \varrho' \tau + o(\tau)$$

ist. Der Wurzel ϱ' der Gleichung (2.5) entspricht aber eine Wurzel $\varrho = p \varrho'$ der in Satz 1 stehenden Gleichung

$$(2.6) \quad \sum_{\nu} a_\nu z^{r-\nu} = 0,$$

womit der Satz 1 bewiesen ist.

§ 3. Beweis eines Hilfssatzes

Ehe wir den Beweis von Satz 2 angreifen können, müssen wir einen Hilfssatz vorausschicken, der auch unabhängig von der Anwendung, die wir dann von ihm machen werden, wohl nicht ohne Interesse sein dürfte.

⁴ Über lineare Differentialgleichungen mit reeller unabhängiger Variabler. Sitz.-Ber. der Bayer. Akad. der Wissenschaften, Math.-naturw. Klasse 1960, Seite 2.

Hilfssatz. *Bei der Differentialgleichung*

$$(3.1) \quad \frac{d^n x}{dt^n} + F(t) \sum_{v=1}^n a_v \frac{d^{n-v} x}{dt^{n-v}} + \sum_{v=1}^n \varphi_v(t) \frac{d^{n-v} x}{dt^{n-v}} = 0$$

seien die a_v Konstanten, während die Funktionen $F(t)$ und $\varphi_v(t)$ den Bedingungen

$$(3.2) \quad \begin{aligned} F(t) &> 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \infty, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_v(t)}{F(t)} &= 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

genügen. Wenn dann der reelle Teil $\Re(a_1)$ von 0 verschieden ist und wenn die Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{n-1}$ der Gleichung

$$\sum_{v=1}^n a_v z^{n-v} = 0$$

die Bedingung $\Re(\varrho_1) \neq \Re(\varrho_v)$ für $v = 2, 3, \dots, n-1$ erfüllen, so hat die Differentialgleichung ein Integral, für welches

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \varrho_1, \quad \text{also} \quad \log x = \varrho_1 t + o(t)$$

ist.

Im Normalfall, d. h., wenn alle Wurzeln ϱ_v lauter verschiedene reelle Teile haben, kann jedes ϱ_v die Rolle von ϱ_1 übernehmen, und man erhält so, den $n-1$ verschiedenen Wurzeln entsprechend, genau $n-1$ Integrale, die offenbar linear unabhängig sind. Es fehlt noch ein n^{tes} Integral, bei dem die spezielle Form von $F(t)$ zur Geltung kommt. Ist z. B. $F(t) = t^k$, wo $k > 0$, so kann man den Satz 1 anwenden, wobei $p = k+1$ ist. Er liefert ein Integral, bei dem

$$\log x = \frac{-a_1 t^{k+1}}{k+1} + o(t^{k+1})$$

ist.

Zum Beweis des Hilfssatzes führen wir die Operatoren

$$D_{\lambda} = \frac{d}{dt} - \varrho_{\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n-1)$$

ein.⁵ Dann ist

$$D_1 x = \frac{dx}{dt} - \varrho_1 x,$$

$$D_2 D_1 x = \frac{d^2 x}{dt^2} - (\varrho_1 + \varrho_2) \frac{dx}{dt} + \varrho_1 \varrho_2 x,$$

.....

und schließlich

$$D_{n-1} D_{n-2} \dots D_2 D_1 x = \frac{1}{a_1} \left(a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + a_n x \right).$$

Durch Umkehrung ergeben sich hieraus Formeln der Gestalt

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \frac{d^v x}{dt^v} &= \gamma_{v,0} x + \gamma_{v,1} D_1 x + \gamma_{v,2} D_2 D_1 x \\ &+ \dots + \gamma_{v,v} D_v D_{v-1} \dots D_1 x \quad (v = 1, 2, \dots, n-1), \end{aligned}$$

wobei die $\gamma_{v,\mu}$ Konstanten sind und speziell offenbar $\gamma_{v,v} = 1$. Die Differentialgleichung (3.1) läßt sich dann in die Form setzen

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 F(t) D_{n-1} D_{n-2} \dots D_1 x + \psi_0(t) x \\ + \psi_1(t) D_1 x + \dots + \psi_{n-1}(t) D_{n-1} D_{n-2} \dots D_1 x = 0, \end{aligned}$$

wobei die $\psi_v(t)$ sich linear aus den $\varphi_{\mu}(t)$ zusammensetzen, so daß auch

$$(3.5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi_v(t)}{F(t)} = 0 \quad (v = 0, 1, \dots, n-1)$$

ist. Wir führen jetzt $n-1$ unbekannte Funktionen $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ ein, indem wir setzen:

⁵ Man vergleiche zu diesem ganzen Paragraphen die in Fußnote 4 zitierte Arbeit.

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_1 x = u_1 x, \\ D_2 (u_1 x) = u_2 x, \\ \dots\dots\dots \\ D_{n-1} (u_{n-2} x) = u_{n-1} x. \end{array} \right.$$

Dann ist

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_1 x = u_1 x, \\ D_2 D_1 x = u_2 x, \\ \dots\dots\dots \\ D_{n-1} D_{n-2} \dots D_1 x = u_{n-1} x, \end{array} \right.$$

und die Formel (3.3) speziell für $v = n-1$ geht, wenn für $\gamma_{n-1, \mu}$ kürzer γ_μ geschrieben wird, über in

$$(3.8) \quad \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} = (\gamma_0 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \dots + \gamma_{n-1} u_{n-1}) x,$$

wobei speziell $\gamma_{n-1} = 1$ ist.

Nach der ersten Gleichung (3.6) ist $\frac{dx}{dt} - \varrho_1 x = u_1 x$, also

$$(3.9) \quad \frac{dx}{dt} = (\varrho_1 + u_1) x.$$

Sodann ist nach den späteren Gleichungen (3.6)

$$D_{v+1} (u_v x) = u_{v+1} x \quad (v = 1, 2, \dots, n-2)$$

oder also

$$\frac{d(u_v x)}{dt} - \varrho_{v+1} u_v x = u_{v+1} x \quad (v = 1, 2, \dots, n-2),$$

und wenn man links ausdifferenziert,

$$u_v \frac{dx}{dt} + x \frac{du_v}{dt} = (u_{v+1} + \varrho_{v+1} u_v) x.$$

Wenn man hier für $\frac{dx}{dt}$ den Wert aus (3.9) einsetzt und dann durch x dividiert, ergibt sich

$$(3.10) \quad \frac{du_v}{dt} = (\varrho_{v+1} - \varrho_1) u_v + u_{v+1} - u_v u_1 \quad (v = 1, 2, \dots, n-2).$$

Wenn man jetzt die Formel (3.8) differenziert und dabei für $\frac{dx}{dt}$ und die $\frac{du_v}{dt}$ mit $v \leq n-2$ die Werte aus (3.9) und (3.10) einsetzt, ergibt sich, da $\gamma_{n-1} = 1$ ist, nach leichter Rechnung

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \left[\sum_{v=0}^{n-2} \gamma_v (\varrho_{v+1} u_v + u_{v+1}) + u_{n-1} (\varrho_1 + u_1) + \frac{du_{n-1}}{dt} \right] x,$$

wobei $u_0 = 1$ zu setzen ist. Hiermit nimmt nun unsere Differentialgleichung (3.4) nach Division durch x die Gestalt an:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \frac{du_{n-1}}{dt} + a_1 F(t) u_{n-1} = & - \sum_{v=0}^{n-2} \gamma_v (\varrho_{v+1} u_v + u_{v+1}) \\ & - u_{n-1} (\varrho_1 + u_1) - \sum_{v=0}^{n-1} \psi_v(t) u_v \quad (\text{wobei } u_0 = 1). \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung (3.1) oder, was ja dasselbe ist, (3.4) ist daher gleichbedeutend mit dem System der einen Gleichung (3.11) und der $n-2$ Gleichungen (3.10) für die $n-1$ Hilfsunbekannten $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ und dann noch der Gleichung (3.9) für die eigentliche Unbekannte x . Wenn es uns nun gelingt, für das System (3.10) und (3.11) eine Lösung nachzuweisen, bei der

$$(3.12) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u_v = 0 \quad \text{für } v = 1, 2, \dots, n-1,$$

also insbesondere $\lim_{t \rightarrow \infty} u_1 = 0$ ist, so folgt aus Gleichung (3.9):

$$x = \exp \left(\varrho_1 t + \int u_1 dt \right).$$

Daher ist x dauernd von 0 verschieden, und es ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \varrho_1.$$

Damit wird also der Hilfssatz bewiesen sein. Übrigens ergibt sich sogar weiter (vgl. die in Fußnote 4 zitierte Arbeit)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \frac{d^v x}{dt^v} = \varrho_1^v \quad (v = 1, 2, \dots, n-1),$$

was wir aber nicht benötigen.

Die gewünschte Lösung des Systems (3.10), (3.11) suchen wir jetzt durch sukzessive Approximationen zu gewinnen, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} \frac{du_{v,\lambda+1}}{dt} &= (\varrho_{v+1} - \varrho_1) u_{v,\lambda+1} + u_{v+1,\lambda} - u_{v,\lambda} u_{1,\lambda} \quad (v = 1, 2, \dots, n-2), \\ \frac{du_{n-1,\lambda+1}}{dt} + a_1 F(t) u_{n-1,\lambda+1} &= - \sum_{v=0}^{n-2} \gamma_v (\varrho_{v+1} u_{v,\lambda} + u_{v+1,\lambda}) - \\ &\quad - u_{n-1,\lambda} (\varrho_1 + u_{1,\lambda}) - \sum_{v=0}^{n-1} \psi_v(t) u_{v,\lambda} \quad (\text{wobei } u_{0,\lambda} = 1), \end{aligned}$$

ausgehend von dem Anfangsfunktionensystem $u_{1,0} = u_{2,0} = \dots = u_{n-1,0} = 0$.

Dieses Gleichungssystem für die Funktionen $u_{v,\lambda+1}$ hat, wenn $\int F(t) dt = G(t)$ gesetzt wird, das Integral

$$(3.13) \quad u_{v,\lambda+1} = e^{(\varrho_{v+1} - \varrho_1)t} \int (u_{v+1,\lambda} - u_{v,\lambda} u_{1,\lambda}) e^{(\varrho_1 - \varrho_{v+1})t} dt \quad (v = 1, 2, \dots, n-2),$$

$$(3.14) \quad u_{n-1,\lambda+1} = e^{-a_1 G(t)} \int \Phi_\lambda(t) e^{a_1 G(t)} dt,$$

wobei

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \Phi_\lambda(t) &= - \sum_{v=0}^{n-2} \gamma_v (\varrho_{v+1} u_{v,\lambda} + u_{v+1,\lambda}) - u_{n-1,\lambda} (\varrho_1 + u_{1,\lambda}) - \\ &\quad - \sum_{v=0}^{n-1} \psi_v(t) u_{v,\lambda} \end{aligned}$$

und wobei wir als untere Integralgrenze in (3.13) und (3.14) im Fall $\Re(\varrho_1 - \varrho_{v+1}) > 0$ bzw. $\Re(a_1) > 0$ eine (hinreichend große) endliche Zahl, im Fall $\Re(\varrho_1 - \varrho_{v+1}) < 0$ bzw. $\Re(a_1) < 0$ aber ∞ wählen wollen. Wenn nun $\lim_{t \rightarrow \infty} u_{v,\lambda} = 0$ für $v = 1, 2, \dots, n-1$ ist, was für $\lambda = 0$ gewiß zutrifft, so ist auch $\lim_{t \rightarrow \infty} u_{v,\lambda+1} = 0$ (nach der Hôpitalschen Regel wie in der in Fußnote 4 zitierten Arbeit Seite 6, 7). Somit ist für alle λ

$$(3.16) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u_{v,\lambda} = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n-1).$$

Nun sei ε eine positive Zahl, die nur den später notwendig werdenden Forderungen zu genügen braucht:

$$(3.17) \quad 2\varepsilon^2 < |\Re(\varrho_1 - \varrho_{v+1})| \quad (v = 1, 2, \dots, n-2),$$

$$(3.18) \quad \varepsilon < 1.$$

Für $t \geq t_0$, wo t_0 hinreichend groß, ist dann für $v = 0, 1, \dots, n-1$

$$(3.19) \quad \left| \frac{\gamma_v \varrho_{v+1}}{\Re(a_1) F(t)} \right| < \frac{\varepsilon^2 n}{4n}, \quad \left| \frac{\gamma_v}{\Re(a_1) F(t)} \right| < \frac{\varepsilon^2 n}{4n},$$

$$\left| \frac{|\varrho_1| + 1}{\Re(a_1) F(t)} \right| < \frac{\varepsilon^2 n}{4}, \quad \left| \frac{\psi_v(t)}{\Re(a_1) F(t)} \right| < \frac{\varepsilon^2 n}{4n}.$$

Wenn nun weiter für ein gewisses λ

$$(3.20) \quad |u_{v,\lambda}| \leq \varepsilon^{2v} \quad (v = 1, 2, \dots, n-1)$$

ist, was für $\lambda = 0$ gewiß zutrifft und übrigens wegen $u_{0,\lambda} = 1$ auch für $v = 0$ gilt, so folgt zunächst für $v = 1, 2, \dots, n-2$ aus (3.13)

$$|u_{v,\lambda+1}| < \frac{\varepsilon^{2v+2} + \varepsilon^{2v} \varepsilon^2}{|\Re(\varrho_1 - \varrho_{v+1})|} < \varepsilon^{2v} \quad (\text{nach (3.17)}).$$

Aber auch für $v = n-1$ gilt diese Abschätzung. Denn aus (3.15), (3.19), (3.20) und (3.18) folgt sofort

$$\left| \frac{\Phi_\lambda(t)}{\Re(a_1) F(t)} \right| < \frac{\varepsilon^2 n}{4} + \frac{\varepsilon^2 n}{4} + \frac{\varepsilon^2 n}{4} + \frac{\varepsilon^2 n}{4} < \varepsilon^{2(n-1)}$$

und sodann aus (3.14)

$$|u_{n-1,\lambda+1}| \leq \left| e^{-\Re(a_1) G(t)} \int \left| \frac{\Phi_\lambda(t)}{\Re(a_1) F(t)} \right| \cdot \Re(a_1) G'(t) e^{\Re(a_1) G(t)} dt \right|$$

$$\leq \text{Max} \left| \frac{\Phi_\lambda(t)}{\Re(a_1) F(t)} \right| < \varepsilon^{2(n-1)}.$$

Somit gilt allgemein für alle λ die Formel (3.20).

Wenn man jetzt in (3.13) und (3.14) λ durch $\lambda - 1$ ersetzt, kann man leicht auch Abschätzungen für die Differenz $u_{v,\lambda+1} - u_{v,\lambda}$ gewinnen, und zwar findet man:

$$(3.21) \quad |u_{v, \lambda+1} - u_{v, \lambda}| < M \varepsilon^{2v+\lambda+1},$$

wo M eine positive Konstante ist. Die Rechnung ist für $v = 1, 2, \dots, n-2$ genau die gleiche wie in der in Fußnote 4 zitierten Arbeit Seite 8, für $v = n-1$ ist sie, wenn man wie soeben bei der Abschätzung von $u_{n-1, \lambda+1}$ verfährt, ebenso einfach.

Aus (3.21) erschließt man jetzt sofort die Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} u_{v, \lambda} = u_v,$$

und es ist

$$|u_v - u_{v, \lambda}| < M (\varepsilon^{2v+\lambda+1} + \varepsilon^{2v+\lambda+2} + \dots) = \frac{M}{1-\varepsilon} \varepsilon^{2v+\lambda+1}.$$

Läßt man hier t bei festem λ gegen ∞ streben, so kommt mit Rücksicht auf (3.16)

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |u_v| < \frac{2M}{1-\varepsilon} \varepsilon^{2v+\lambda+1},$$

und weil λ dabei beliebig groß sein darf, ergibt sich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_v = 0.$$

Nun kann man auch in (3.13) und (3.14) den Grenzübergang $\lambda \rightarrow \infty$ durchführen und erhält

$$u_v = e^{(q_{v+1} - q_1)t} \int (u_{v+1} - u_v u_1) e^{(q_1 - q_{v+1})t} dt \quad (v = 1, 2, \dots, n-2),$$

$$u_{n-1} = e^{-a_1 G(t)} \int \Phi(t) e^{a_1 G(t)} dt,$$

wobei

$$\Phi(t) = - \sum_{v=0}^{n-2} \gamma_v (q_{v+1} u_v + u_{v+1}) - u_{n-1} (q_1 + u_1) - \sum_{v=0}^{n-1} \psi_v(t) u_v$$

ist. Durch Differentiation ergeben sich hieraus gerade die Formeln (3.10) und (3.11), so daß die Funktionen $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ wirklich allen Forderungen genügen.

§ 4. Beweis von Satz 2

Wir führen jetzt wie in § 2 die Differentialgleichung (1.1) durch die Substitution

$$(4.1) \quad t^p = \tau$$

wieder über in

$$(4.2) \quad \frac{d^n x}{d\tau^n} + Q_1(\tau) \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \dots + Q_n(\tau) x = 0,$$

wobei wieder

$$(4.3) \quad Q_v(\tau) = \frac{a_v}{p^v} \tau^{(k_v+v)/p-v} + o(\tau^{(k_v+v)/p-v}) + O(\tau^{K_v}),$$

$$(4.4) \quad K_v = \max_{\mu=0}^{v-1} \frac{k_\mu + \mu}{p} - v$$

ist. Wenn wir jetzt unter den Voraussetzungen von Satz 2 unter p die dort eingeführte positive Zahl p verstehen, so ist

$$\frac{(k_v + v) - (k_1 + 1)}{v - 1} \leq p \quad (v = 2, 3, \dots, n)$$

oder also

$$\frac{k_v + v}{p} - v \leq \frac{k_1 + 1}{p} - 1,$$

wobei insbesondere für $v = r$ (und übrigens auch für $v = 1$) das Gleichheitszeichen gilt, für $v > r$ aber das Kleinerzeichen. Für $\mu < v$ ist dann weiter

$$\frac{k_\mu + \mu}{p} \leq \mu + \frac{k_1 + 1}{p} - 1 < v + \frac{k_1 + 1}{p} - 1,$$

daher nach (4.4)

$$K_v < \frac{k_1 + 1}{p} - 1.$$

Da p in Satz 2 kleiner als $k_1 + 1$ vorausgesetzt ist, so ist die Zahl

$$K = \frac{k_1 + 1}{p} - 1$$

positiv und aus (4.3) folgt, daß

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{Q_v(\tau)}{\tau^K} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{a_v}{p^v}$$

ist, und zwar

$$\begin{aligned} & \text{○ für } \frac{k_v + v}{p} - v < \frac{k_1 + 1}{p} - 1, \text{ also insbesondere für } v > r, \\ & \frac{a_v}{p^v} \text{ für } \frac{k_v + v}{p} - v = \frac{k_1 + 1}{p} - 1, \text{ also insbesondere für } v = 1 \\ & \hspace{15em} \text{und } v = r. \end{aligned}$$

Damit kann man auf die Differentialgleichung (4.2) den Hilfsatz mit $F(\tau) = \tau^K$ anwenden und erhält dann, wenn man von der unabhängig Variablen τ mittels (4.1) wieder zu t zurückkehrt, genau den Satz 2.

§ 5. Eine weitere Substitution

Wir wenden uns jetzt dem Fall zu, daß der NP-Streckenzug keine Strecke mit einem positiven Richtungskoeffizienten hat. Das tritt ein, wenn

$$k_v + v \leq 0 \quad \text{für } v = 1, 2, \dots, n$$

ist. In diesem Fall existieren die Grenzwerte

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^v P_v(t) = \begin{cases} a_v & \text{für } k_v + v = 0, \\ 0 & \text{für } k_v + v < 0. \end{cases}$$

Wir machen jetzt die Substitution

$$\log t = \tau.$$

Dann ist

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{t^2} \left(\frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{dx}{d\tau} \right)$$

und allgemein

$$\frac{d^v x}{dt^v} = \frac{1}{t^v} \left(\frac{d^v x}{d\tau^v} + c_{v,1} \frac{d^{v-1} x}{d\tau^{v-1}} + \dots + c_{v,v-1} \frac{dx}{d\tau} \right),$$

wobei die $c_{v,\mu}$ aus den Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} c_{v+1,1} &= c_{v,1} - v, \\ c_{v+1,2} &= c_{v,2} - v c_{v,1}, \\ &\dots \dots \dots \\ c_{v+1,v-1} &= c_{v,v-1} - v c_{v,v-2}, \\ c_{v+1,v} &= -v c_{v,v-1} \end{aligned}$$

zu berechnen sind. Die Differentialgleichung (1.1) transformiert sich jetzt in

$$\frac{d^n x}{d\tau^n} + R_1(\tau) \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \dots + R_n(\tau) x = 0,$$

wobei die Grenzwerte

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_v(\tau) = b_v \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

existieren. Nach der in Fußnote 4 zitierten Arbeit kommt es dann auf die Gleichung

$$\varrho^n + b_1 \varrho^{n-1} + \dots + b_n = 0$$

an. Zu jeder ihrer Wurzeln ϱ , deren reeller Teil von dem jeder anderen Wurzel verschieden ist, gibt es ein Integral x , bei dem

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \frac{dx}{d\tau} = \varrho, \quad \text{also} \quad \log x = \varrho \tau + o(\tau)$$

ist. Das ergibt dann ein Integral der Gleichung (1.1), für welches

$$\log x = \varrho \log t + o(\log t)$$

ist.

Auf gleiche Art läßt sich auch der Fall behandeln, daß $e_1 = 1$ ist und der Richtungskoeffizient für die erste Strecke des NP-Streckenzugs positiv, für die anderen aber nichtpositiv ist. Das tritt ein für

$$\begin{aligned} k_1 + 1 &> 0, \\ k_\nu + \nu &\leq k_1 + 1 \quad (\nu = 2, 3, \dots, n). \end{aligned}$$

Hier liefert zunächst der Satz 1 mit $p = k_1 + 1$ ein Integral, bei dem

$$\log x = \frac{-a_1 t^{k_1+1}}{k_1+1} + o(t^{k_1+1})$$

ist. Sodann führt die Substitution $\log t = \tau$ die Differentialgleichung (1.1) über in

$$\frac{d^n x}{d\tau^n} + e^{(k_1+1)\tau} \sum_{\nu=1}^n S_\nu(\tau) \frac{d^{n-\nu} x}{d\tau^{n-\nu}} = 0,$$

wobei die Grenzwerte

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} S_\nu(\tau) = c_\nu$$

existieren und speziell $c_1 = a_1$ ist. Auf diese Gleichung läßt sich nun der Hilfssatz des § 3 mit $F(\tau) = e^{(k_1+1)\tau}$ anwenden. Er liefert, wenn $\Re(a_1) \neq 0$ ist, zu jeder Wurzel ϱ der Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^n c_\nu z^{n-\nu} = 0,$$

deren reeller Teil von dem jeder anderen Wurzel verschieden ist, ein Integral, für welches

$$\log x = \varrho \tau + o(\tau)$$

ist, also

$$\log x = \varrho \log t + o(\log t).$$