

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1959

MÜNCHEN 1960

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Fastautomorphe Funktionen

Von Wilhelm Maak in Göttingen

Vorgelegt von Herrn Georg Aumann am 10. Juli 1959

Im nachfolgenden werden solche analytischen Funktionen behandelt, die zu den Modulfunktionen im gleichen Verhältnis stehen wie die analytischen fastperiodischen Funktionen (von H. Bohr [1]) zu den analytischen periodischen Funktionen. Wir wollen die Funktionen dieser neuen Funktionenklasse fastautomorph nennen. Ein wesentlicher Unterschied der Theorie fastautomorpher Funktionen zu derjenigen der analytischen fastperiodischen Funktionen besteht darin, daß man notwendig Singularitäten mit in die Betrachtungen einbeziehen muß. Es ergibt sich nämlich, daß beschränkte fastautomorphe Funktionen konstant sind (§ 5 Satz 3), während fastperiodische Funktionen in den Streifen der komplexen Zahlenebene, in denen man sie betrachtet, im allgemeinen beschränkt vorausgesetzt werden können. Der eigentliche Reiz der Theorie fastautomorpher Funktionen besteht gerade in der Untersuchung dieser Singularitäten, bei der die H. Bohrschen Resultate über analytische fastperiodische Funktionen und ihre Dirichletentwicklungen eine ausschlaggebende Rolle spielen.

Ein interessanter wesentlicher Satz über fastautomorphe Funktionen besagt, daß ihr Mittelwert (erstreckt über die Modulgruppe) eine Modulfunktion ist (§ 4 Satz 2). Eine solche besitzt, gemessen in den Ortsvariablen, nur höchstens Pole als Singularitäten. Würde man für fastautomorphe Funktionen ganz willkürliche Singularitäten zulassen, so ließe sich nicht erzwingen, daß ihr Mittelwert nur Pole besitzt. Man muß daher verlangen, daß die Singularitäten einer fastautomorphen Funktion „polartig“ sind. Es ist naheliegend, diesen Begriff zu fixieren, indem man verlangt, daß die Funktionswerte nahe einer solchen Stelle gegen ∞ streben. Es ließe sich dann sogar zeigen, daß eine fastautomorphe Funktion $f(\tau)$ auch in ihren Singularitäten (genau

wie in allen übrigen Punkten) gegenüber der Modulgruppe fastperiodisches Verhalten zeigt (d. h. es ist dort $1/f(\tau)$ fastperiodisch bzgl. Γ). Leider läßt sich dann nicht beweisen, daß mit zwei Funktionen auch ihre Summe wieder nur polartige Singularitäten besitzen. An dieser Tatsache sind schon früher Versuche gescheitert, auf vernünftige Weise doppeltfastperiodische analytische Funktionen zu erklären. Die Forderung ist zu scharf.

Es erweist sich aber als möglich, die polartigen Singularitäten dadurch zu charakterisieren, daß man verlangt, das Wachstum der betr. Funktion in der Nähe einer solchen Stelle soll beschränkt sein, wobei dieses Wachstum mit einer geeigneten Variablen gemessen wird. Es ist dadurch allerdings nicht ausgeschlossen, daß nahe einer solchen Stelle die Funktion noch jedem Wert beliebig nahe kommt. Auch von fastperiodischem Verhalten der Funktion nahe einer in diesem Sinne polartigen Stelle kann im allgemeinen nicht mehr die Rede sein. Wenn man aber eine solche Funktion über alle Modulsubstitutionen mittelt, so verwandelt sich die betreffende Singularität in einen Pol im Sinne der Theorie der Modulfunktionen.

In Anbetracht dieser skizzierten Schwierigkeiten dürfte es von Interesse sein, daß eine Theorie fastautomorpher Funktionen mit im eben genannten Sinne polartigen Singularitäten tatsächlich durchführbar ist. Der Hauptsatz der Theorie (§ 5 Satz 2) weist nach, daß eine genaue Kenntnis der (beschränkten) Darstellungen der Modulgruppe es gestattet, die fastautomorphen Funktionen zu beherrschen. In einer weiteren Abhandlung wird gezeigt werden, daß umgekehrt die Kenntnis der fastautomorphen Funktionen die Beherrschung der beschränkten Darstellungen ermöglicht. Programmatish gehaltene Ausführungen hierüber findet man in [3].

§ 1. Definition der fastautomorphen Funktionen

Die Gesamtheit der Punkte $\tau = x + iy$ mit $y > 0$, ergänzt durch die rationalen Punkte $\tau = x$ mit rationalem x und den Punkt $i\infty$, wird die obere τ -Halbebene genannt. Wir machen

sie zu einem topologischen Raum, indem wir als Umgebungen der Punkte $\tau = x + iy$ mit $y > 0$ kleine Kreisscheiben mit τ im Innern betrachten. Die Umgebungen des Punktes $i\infty$ sind die Halbebenen $y > \eta$ für jedes $\eta > 0$, als Umgebungen rationaler Punkte $\tau = x$ führen wir kleine Kreisscheiben in der oberen τ -Halbebene ein, welche die reelle Achse in τ berühren.

Die obere τ -Halbebene wird durch die Substitutionen $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit ganz rationalen a, b, c, d und $ad - bc = 1$ vermöge

$$\tau \rightarrow L\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

in sich übergeführt. Diese sogenannten Modulsstitutionen bilden in ihrer Gesamtheit die Modulgruppe Γ . Die Punkte τ mit

$$|\tau| > 1 \quad |\tau + 1| > |\tau| \quad |\tau - 1| > |\tau|$$

erfüllen ein Gebiet. Fügen wir diesem alle Randpunkte τ mit $\text{Rea } \tau \leq 0$ sowie den Punkt $i\infty$ hinzu, so erhalten wir den Fundamentalbereich Ω der Modulgruppe. Zu jedem τ' der oberen τ -Halbebene existiert ein und nur ein $\tau \in \Omega$ und ein (und im wesentlichen nur ein) $L \in \Gamma$, so daß

$$\tau' = L\tau.$$

Es heißt τ die Spur von τ' (in Ω), in Zeichen

$$\tau = \text{Sp } \tau'.$$

Punkte mit gleicher Spur heißen äquivalent.

Wir betrachten in der oberen τ -Halbebene erklärte eindeutige analytische Funktionen $f(\tau)$. Ist $f(\tau)$ in der (punktierten) Umgebung eines Punktes τ_0 beschränkt, so sagen wir, $f(\tau)$ zeige im Punkt τ_0 *reguläres Verhalten*. Wenn $\text{Sp } \tau_0 \neq i\infty$ ist, so ist reguläres Verhalten gleichbedeutend mit Regularität im Punkte τ_0 . Wenn $f(\tau)$ in der Umgebung eines Punktes τ_0 nicht beschränkt ist, so sagen wir, $f(\tau)$ zeige im Punkte τ_0 *singuläres Verhalten*.

Ist $\text{Sp } \tau_0 \neq i\infty$, so wird die untere Grenze K aller nicht-negativen reellen Zahlen k , für die

$$(1) \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} (\tau - \tau_0)^k f(\tau) = 0$$

gilt, die *Wachstumsordnung* von f im Punkte τ_0 genannt. Ist $\text{Sp } \tau_0 = i\infty$ und gilt etwa

$$i\infty = L\tau_0,$$

so wird die untere Grenze aller nichtnegativen reellen Zahlen k , für die

$$(2) \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} e^{2\pi i k L \tau} f(\tau) = 0,$$

richtig ist, die Wachstumsordnung von f im Punkte τ_0 genannt. Die Wachstumsordnung in einem beliebigen Punkte τ_0 kann sowohl den Wert 0 wie auch ∞ annehmen. Z. B. ist in Punkten regulären Verhaltens die Wachstumsordnung stets 0. Wenn kein k existiert, welches (1) bzw. (2) erfüllt, so ist die Wachstumsordnung $= \infty$ zu setzen. Ist $\text{Sp } \tau_0 \neq i\infty$ und ist $f(\tau)$ in τ_0 wesentlich singulär, so ist $f(\tau)$ in τ_0 von der Wachstumsordnung ∞ . Wenn die Wachstumsordnung in einem solchen Punkte endlich, aber > 0 ist, so handelt es sich offenbar um einen Pol. Allgemein sprechen wir bei einem (beliebigen) Punkte τ_0 von einer *polartigen Stelle*, wenn $f(\tau)$ in τ_0 singuläres Verhalten zeigt, jedoch die Wachstumsordnung endlich ist. Es ist aber denkbar, daß die Wachstumsordnung in einer polartigen Stelle 0 ist und daß, obwohl die Wachstumsordnung > 0 nicht $\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} f(\tau) = \infty$ gilt.

Wir erklären, daß eine Funktion $f(\tau)$ *meromorphes Verhalten* zeigt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1.] Alle Punkte singulären Verhaltens sind polartige Stellen. Die Wachstumsordnung ist (gleichgradig bzgl. τ) beschränkt.

2. Als Spuren der polartigen Stellen treten höchstens endlich viel Punkte $\tau_1, \dots, \tau_r \in \Omega$ auf, die wir kurz (aber nicht ganz sachgemäß) Polspuren nennen. (Nur die $\tau_i \neq i\infty$ sind wirklich Spuren von Polen.)¹

3. In jedem abgeschlossenen Gebiet D , welches keine zu polartigen Stellen äquivalente Punkte enthält, gilt¹

¹ Wenn $f(\tau)$ für irgendein τ_0 mit $\text{Sp } \tau_0 = i\infty$ nicht erklärt ist, so setze man (vorläufig) $f(\tau_0) = 0$. Siehe aber die Bemerkung in § 2 nach Satz 3.

$$(3) \quad \|f\|_D = \sup_{L \in \Gamma, \tau \in D} |f(L\tau)| < \infty.$$

Es sei nun $f(\tau)$ irgendeine eindeutige analytische Funktion der Punkte τ der oberen τ -Halbebene und U irgendeine Punktmenge in der oberen τ -Halbebene. Wir setzen entsprechend¹ wie bei (3)

$$\|f\|_U = \sup_{L \in \Gamma, \tau \in U} |f(L\tau)|.$$

Erklärt man

$$Lf = Lf(\tau) = f(L\tau),$$

so gilt offenbar

$$\|Lf\|_U = \|f\|_U.$$

Es heißt $f(\tau)$ *fastperiodisch in U* , wenn $\|f\|_U < \infty$ und wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{A}_i$$

von Γ durch Teilmengen $\mathfrak{A}_i \subset \Gamma$ existiert, so daß für beliebige $i = 1, \dots, n$ und beliebige $L_1, L_2 \in \mathfrak{A}_i$ gilt

$$\|L_1 f - L_2 f\|_U < \varepsilon.$$

Wir nennen $f(\tau)$ *fastperiodisch im Punkte τ_0* , wenn eine Umgebung U_{τ_0} von τ_0 existiert, innerhalb derer $f(\tau)$ fastperiodisch im eben genannten Sinne ist.

Definition: Eine Funktion $f(\tau)$, erklärt in der oberen τ -Halbebene, heißt *fastautomorph*, wenn $f(\tau)$ meromorphes Verhalten zeigt und in wenigstens einem Punkte τ_0 fastperiodisch ist.

Wir zeigen, daß die reelle Achse eine natürliche Grenze des Definitionsbereiches einer nichtkonstanten fastautomorphen Funktion $f(\tau)$ ist. Dazu werden einige Hilfssätze benötigt. Eine elementare Schlußweise ([2] § 35 Satz 4) zeigt, daß die Definition von „fastperiodisch“ etwas anders gefaßt werden kann:

Satz 1: Eine (eindeutige analytische) Funktion $f(\tau)$ ist dann und nur dann fastperiodisch in U , wenn $\|f\|_U < \infty$ und wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung

¹ Siehe Fußnote Seite 292.

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{A}_i$$

von Γ existiert, so daß für beliebiges $i = 1, \dots, n$, für beliebige $L_1, L_2 \in \mathfrak{A}_i$ und beliebige $L \in \Gamma$ gilt

$$\|LL_1f - LL_2f\|_U < \varepsilon.$$

Indem man jedem $\mathfrak{A}_i$ einen Repräsentanten L_i entnimmt, findet man unter Benutzung von Satz 1:

Satz 2: Ist $f(\tau)$ fastperiodisch in U , so existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ Elemente $L_1, \dots, L_n \in \Gamma$ derart, daß für beliebige $L, L' \in \Gamma$ und geeignetes von L, L' abhängiges $\nu = 1, \dots, n$ gilt

$$(4) \quad \sup_{\tau \in U} |f(LL_\nu L'\tau) - f(\tau)| \leq \varepsilon.$$

Es sei nun $\tau_0 \in U$ ein fester Punkt mit $\text{Sp } \tau_0 \neq i\infty$, L' werde stets $= 1$ gesetzt. Ferner seien $\tau = x$ ein willkürlicher rationaler Punkt und $\eta > 0$ eine beliebig kleine Zahl. Dann kann man L stets so wählen, daß für alle $L_1, \dots, L_n$ des Satzes 2 gilt

$$|LL_i\tau_0 - x| < \eta \quad i = 1, \dots, n.$$

Ist nun $f(\tau)$ in x regulär, so kann man $\eta > 0$ so klein wählen, daß für geeignetes $\nu = 1, \dots, n$

$$|f(x) - f(\tau_0)| \leq |f(x) - f(LL_\nu\tau_0)| + |f(LL_\nu\tau_0) - f(\tau_0)| < 2\varepsilon$$

wird. Da $\varepsilon > 0$ und $\tau_0 \in U$ beliebig waren, ist notwendig $f(\tau)$ in U konstant $= f(x)$. Daraus folgt

Satz 3. Ist $f(\tau)$ fastautomorph und nicht konstant, so ist die reelle Achse natürliche Grenze des Definitionsbereiches.

Besonders einfache Beispiele fastautomorpher Funktionen sind die gewöhnlichen Modulfunktionen; denn sie sind trivialerweise fastperiodisch, weil $f(L\tau)$ als Funktion von L konstant ist. Ferner zeigen sie meromorphes Verhalten, wie unmittelbar aus ihrer Definition folgt. Man erkennt aber auch leicht, daß alle Modulfunktionen höherer Stufe fastautomorph sind. Was zunächst das meromorphe Verhalten betrifft, so folgt es wiederum

unmittelbar aus der Definition dieser Funktionen. Ist nun $\mathfrak{U} \subset \Gamma$ eine Untergruppe von Γ mit endlichem Index, also etwa

$$(5) \quad \Gamma = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{U} M_i \quad M_i \in \Gamma$$

eine Aufspaltung von Γ in Rechtsnebangruppen von $\mathfrak{U}$, und ist $f(\tau)$ invariant gegenüber

$$L f = f(L\tau) = f(\tau) = f \quad L \in \mathfrak{U},$$

so ist für jedes τ , welches mit keiner polartigen Stelle von f äquivalent ist, $f(L\tau)$ eine fastperiodische Funktion von L , und zwar ist (5) eine Überdeckung von Γ im Sinne der Definition von fastperiodisch, welche für jedes $\varepsilon > 0$ brauchbar ist. Deshalb ist $f(\tau)$ in jedem Punkt, der nicht mit einer polartigen Stelle äquivalent ist, fastperiodisch. Somit haben wir bewiesen

Satz 4. Jede Modulfunktion beliebiger Stufe ist fastautomorph.

Man kann den Begriff fastautomorph in genau derselben Weise wie oben auch dann einführen, wenn man an Stelle von Γ irgendeine Untergruppe $\mathfrak{U} \subset \Gamma$ von Γ zugrunde legt, welche wie Γ einen Fundamentalbereich besitzt. Es genügt z. B., $\Gamma/\mathfrak{U} < \infty$ anzunehmen. Wir wollen dann gegebenenfalls von bzgl. $\mathfrak{U}$ fastautomorphen Funktionen sprechen; fastautomorph ohne Zusatz bedeutet soviel wie bzgl. Γ fastautomorph. Es gilt:

Satz 5. Ist $\mathfrak{U} \subset \Gamma$ Untergruppe von Γ von endlichem Index, so ist eine Funktion dann und nur dann fastautomorph, wenn sie bzgl. $\mathfrak{U}$ fastautomorph ist.

Wir verzichten auf einen Beweis, da wir diesen Satz nicht benötigen.

§ 2. Das fastperiodische Verhalten fastautomorpher Funktionen

Ist $f(\tau)$ eine fastautomorphe Funktion, so existiert nach Definition ein Punkt τ_0 , in dem $f(\tau)$ fastperiodisch ist, d. h. es existiert eine Umgebung U von τ_0 mit $\|f\|_U < \infty$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Überdeckung

$$(1) \quad \Gamma = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{U}_i,$$

so daß

$$(2) \quad \|L_1 f - L_2 f\|_U < \varepsilon$$

für beliebiges $i = 1, \dots, n$ und beliebiges $L_1, L_2 \in \mathfrak{U}_i$. Ist U irgendeine Punktmenge mit $\|f\|_U < \infty$, und ist (1) eine Überdeckung von Γ , welche (2) erfüllt, so führen wir für diese Überdeckung das Symbol

$$\mathfrak{Z}\{f(\tau), U, \varepsilon\}$$

ein. Man kann also unter Benutzung dieses Zeichens sagen: Eine Funktion $f(\tau)$ ist dann und nur dann fastperiodisch in U , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung $\mathfrak{Z}\{f(\tau), U, \varepsilon\}$ existiert.

Wenn nun außer $f(\tau)$ und U noch eine weitere Funktion $g(\tau)$ und eine weitere Punktmenge V gegeben sind, so wollen wir sagen, es sei $g(\tau)$ in V gleichartig fastperiodisch wie $f(\tau)$ in U , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß jede Überdeckung $\mathfrak{Z}\{f(\tau), U, \delta\}$ eine Überdeckung $\mathfrak{Z}\{g(\tau), V, \varepsilon\}$ ist. Ferner erklären wir, daß $g(\tau)$ in τ_1 gleichartig fastperiodisch wie $f(\tau)$ in τ_0 heißen soll, wenn Umgebungen U_{τ_0} und V_{τ_1} so existieren, daß $g(\tau)$ in V_{τ_1} gleichartig fastperiodisch ist wie $f(\tau)$ in U_{τ_0} .

Es leuchtet ein, daß diese Begriffe sich aufdrängen werden, wenn man die Fastperiodizität gewisser Funktionen aus der Fastperiodizität anderer Funktionen herleiten will. Über bloße Fastperiodizität hinaus wird aber auch von einer Gleichartigkeit der Fastperiodizität gesprochen, welche, wenn sie wirklich nachgewiesen werden kann, mit sich bringt, daß die Fourierreihen der gleichartig fastperiodischen Funktionen gleichartige Eigenschaften, besonders bzgl. Summierbarkeit, haben. Letzteres ist für § 5 von entscheidender Bedeutung.

Satz 1. Es sei $f(\tau)$ fastautomorph. Ist dann $f(\tau)$ in τ_0 fastperiodisch und ist $\text{Sp } \tau_1 \neq i\infty$ und nicht Polspur, so ist $f(\tau)$ in τ_1 gleichartig fastperiodisch wie in τ_0 .

Beweis: Man darf annehmen, daß $\text{Sp } \tau_0 \neq i\infty$ und nicht rational ist. Ist nämlich z. B. $\tau_0 = i\infty$, so ersetze man τ_0 durch

einen Punkt $\neq i\infty$ aus der Umgebung von τ_0 , innerhalb derer $f(\tau)$ fastperiodisch ist. Es sei D ein (offenes) Gebiet in der oberen τ -Halbebene, das folgende Bedingungen erfüllt:

1. Die abgeschlossene Hülle $\bar{D}$ von D enthält keine Punkte, welche mit Polspuren von $f(\tau)$ äquivalent sind.

2. D enthält τ_0 und τ_1 .

Dann existiert offenbar eine Umgebung U_1 von τ_1 , deren abgeschlossene Hülle (d. i. eine abgeschlossene Kreisscheibe) ganz in D liegt. Ferner existiert eine Umgebung U_0 von τ_0 , welche ganz in D liegt und innerhalb derer $f(\tau)$ fastperiodisch ist.

Nun werde die Menge $\mathfrak{M}$ aller (offenbar in D erklärten) Funktionen

$$f(M_1\tau) - f(M_2\tau) \quad \tau \in D \quad M_1, M_2 \in \Gamma$$

betrachtet. Für alle diese Funktionen gilt in D nach Definition des meromorphen Verhaltens

$$|f(M_1\tau) - f(M_2\tau)| \leq 2 \|f\|_D < \infty.$$

Sämtliche Funktionen aus $\mathfrak{M}$ sind also gleichgradig beschränkt. Ist nun $\varepsilon > 0$ irgendwie gegeben, so gibt es ein $\delta > 0$, so daß aus

$$\sup_{\tau \in U_0} |f(M_1\tau) - f(M_2\tau)| < \delta$$

folgt

$$\sup_{\tau \in U_1} |f(M_1\tau) - f(M_2\tau)| < \varepsilon.$$

Wäre dies nämlich nicht richtig, so würde ein $\varepsilon_0 > 0$ und Elementfolgen $M_1^{(n)}, M_2^{(n)}$ existieren mit

$$\sup_{\tau \in U_0} |f(M_1^{(n)}\tau) - f(M_2^{(n)}\tau)| < 1/n$$

$$\sup_{\tau \in U_1} |f(M_1^{(n)}\tau) - f(M_2^{(n)}\tau)| \geq \varepsilon_0.$$

Entgegen der Aussage des Satzes von Vitali könnte man aus der Folge der Funktionen

$$f(M_1^{(n)}\tau) - f(M_2^{(n)}\tau)$$

keine Teilfolge auswählen, die in einem U_0 und U_1 umfassenden abgeschlossenen und beschränkten Gebiet gleichmäßig konvergiert.

Somit gibt es also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß aus

$$\sup_{\tau \in U_0, L \in \Gamma} |f(L_1 L \tau) - f(L_2 L \tau)| < \delta \quad L_1, L_2 \in \Gamma$$

folgt

$$\sup_{\tau \in U_1, L \in \Gamma} |f(L_1 L \tau) - f(L_2 L \tau)| < \varepsilon.$$

D. h. es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß eine Überdeckung $\mathfrak{Z}\{f(\tau), U_0, \delta\}$ stets auch eine Überdeckung $\mathfrak{Z}\{f(\tau), U_1, \varepsilon\}$ ist. Damit ist unser Satz bewiesen. Am Ende des Paragraphen (Satz 5) wird gezeigt, daß die Annahme $\text{Sp } \tau_1 \neq i\infty$ entbehrlich ist.

Aus unserem Satz 1 kann man entnehmen, daß eine fast-automorphe Funktion in sämtlichen Punkten einer vollen Umgebung von $i\infty$ mit evtl. Ausnahme von $i\infty$ selber fastperiodisch bzgl. Γ sein muß; denn die polartigen Stellen von $f(\tau)$ können sich nicht in $i\infty$ häufen. Die Transformationen

$$\tau \mapsto \tau + n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

bilden eine Untergruppe $\mathfrak{B}$ von Γ . Für alle $\tau = x + iy$ mit $y > \eta$ einem geeigneten $\eta > 0$ sind also die Funktionen

$$f(\tau + n) = \varphi_\tau(n)$$

fastperiodische Funktionen von n . Da $f(\tau)$ für $\text{Im } \tau > \eta$ regulär ist, folgt hieraus leicht, daß $f(\tau) = f(x + iy)$ eine analytische fastperiodische Funktion im Sinne H. Bohr's der Variablen $s = -i\tau$ ist. Nach H. Bohr ([1] § 4) kann man eine solche Funktion in eine Fourierreihe entwickeln

$$f(\tau) \sim \sum_p A_p e^{2\pi i A_p \tau} \quad A_p \text{ reell}$$

und man beweist, daß $f(\tau)$ dann und nur dann in $i\infty$ reguläres Verhalten zeigt, wenn alle Fourierexponenten $A_p \geq 0$ sind ([1] Satz 19, 20). Ferner ergibt sich, daß $i\infty$ dann und nur dann polartiges Verhalten zeigt, wenn es negative Fourierexponenten

gibt, diese aber nach unten beschränkt sind ([1] Satz 26). Zeigt $f(\tau)$ in $i\infty$ reguläres Verhalten und ist A_0 der Fourierkoeffizient zum Exponenten $A_0 = 0$, so gilt ([1] Satz 18)

$$\lim_{\tau \rightarrow i\infty} f(\tau) = A_0.$$

Wenn $\tau = x$ ein rationaler Punkt mit

$$i\infty = Lx$$

ist, und wenn die fastautomorphe Funktion $f(\tau)$ nahe diesem Punkt x betrachtet werden soll, so bilde man die Funktion

$$g(\tau) = f(L^{-1}\tau)$$

und untersuche diese nahe $i\infty$. Da auch $g(\tau)$ wieder fastautomorph ist, gilt nach Obigem

$$g(\tau) \sim \sum_v A_v e^{2\pi i A_v \tau},$$

d. h.

$$f(L^{-1}\tau) \sim \sum_v A_v e^{2\pi i A_v \tau}$$

oder

$$f(\tau) \sim \sum_v A_v e^{2\pi i A_v L \tau}.$$

Unsere Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen (vgl. [1] § 4):

Satz 2. Ist $f(\tau)$ fastautomorph und gilt für geeignetes $L \in \Gamma$

$$i\infty = L\tau_0,$$

so besitzt $f(\tau)$ in einer Umgebung von τ_0 eine Fourierentwicklung

$$(3) \quad f(\tau) \sim \sum_A A(A) q^A,$$

wobei

$$q = e^{2\pi i L \tau}$$

und (mit hinreichend großem y)

$$A(A) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(L^{-1}\tau) e^{-2\pi i \tau A} dx \quad \tau = x + iy$$

gesetzt ist. Es ist $A(A) \neq 0$ nur für höchstens abzählbar viele A , die sogenannten Fourierexponenten $A_0, A_1, \dots$. Die entsprechenden $A(A_\nu) = A_\nu$ heißen die Fourierkoeffizienten. Statt (3) schreiben wir auch

$$f(\tau) \sim \sum_{\nu} A_{\nu} q^{A_{\nu}}.$$

Dann und nur dann zeigt $f(\tau)$ in τ_0 reguläres Verhalten, wenn alle $A_{\nu} \geq 0$ sind, und es gilt dann

$$(4) \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} f(\tau) = A(0).$$

Wenn τ_0 eine polartige Stelle ist, so existieren negative Fourierexponenten, die aber eine endliche untere Schranke nicht unterschreiten.

Vorstehender Satz ist ein Ersatz für die Potenzreihenentwicklung einer Modulfunktion nach der Ortsvariablen q . Bei Stellen τ_0 mit $\text{Sp } \tau_0 \neq i\infty$ gilt statt dessen die Laurentreihenentwicklung

$$f(\tau) = \sum_{\nu=-K}^{\infty} a_{\nu} (\tau - \tau_0)^{\nu}.$$

Ist $K \leq 0$, so ist $f(\tau)$ in τ_0 regulär, im anderen Fall ist K die Wachstumsordnung von $f(\tau)$ in τ_0 und gleichzeitig die Ordnung des Pols in τ_0 . Wir bezeichnen der Kürze halber zukünftig sowohl

$$f(\tau) \sim \sum_{\nu} A_{\nu} q^{A_{\nu}}$$

in Punkten τ_0 mit $\text{Sp } \tau_0 = i\infty$, als auch

$$f(\tau) = \sum_{\nu=-K}^{\infty} a_{\nu} (\tau - \tau_0)^{\nu}$$

in den übrigen Punkten als die Potenzreihenentwicklung von $f(\tau)$ im Punkte τ_0 . Setzt man auch im letzteren Fall $\tau - \tau_0 = q$, so darf stets geschrieben werden

$$f(\tau) \sim \sum_{\nu} A_{\nu} q^{A_{\nu}}.$$

Satz 3. Ein Punkt τ_0 ist dann und nur dann polartige Stelle einer fastautomorphen Funktion $f(\tau)$, wenn die Potenzreihenentwicklung von $f(\tau)$ in τ_0 negative Exponenten besitzt. Die

untere Grenze dieser Exponenten ist dann stets eine endliche Zahl $-A^*$ und $A^* = K$ ist gleich der Wachstumsordnung von $f(\tau)$ in τ_0 . Es zeigt also $f(\tau)$ in τ_0 dann und nur dann reguläres Verhalten, wenn die Wachstumsordnung in τ_0 verschwindet.

Beweis: Wenn $\text{Sp } \tau_0 \neq i\infty$ ist, so ist unser Satz klar. Wenn $\tau_0 = i\infty$, so folgt er aus den Erörterungen H. Bohrs in [1] § 8. Durch Übertragung dieser Überlegungen auf den Fall $\tau_0 = L^{-1} i\infty$ wird dann der Satz allgemein bewiesen.

Da die Punkte τ der oberen τ -Halbebene mit $\text{Sp } \tau = i\infty$ zum Rand des Definitionsbereiches der fastautomorphen Funktionen $f(\tau)$ gehören, ist nicht unmittelbar klar, ob und wie sich in diesen Punkten auf vernünftige Weise ein Funktionswert erklären läßt. Unsere obigen Ergebnisse jedoch zeigen, daß man widerspruchlos für alle τ_0

$$f(\tau_0) = \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} f(\tau)$$

setzen darf, auch dann, wenn $\text{Sp } \tau_0 = i\infty$, jedoch nur, wenn dort f reguläres Verhalten zeigt oder wenigstens einen kleinsten Fourierexponenten besitzt (siehe [1] Satz 26). Im letzteren Falle ist $f(\tau_0) = \infty$. Die wichtige Aussage (4) des Satzes 2 läßt sich dann als Verallgemeinerung des Satzes vom arithmetischen Mittel auffassen, dessen Gültigkeit natürlich für reguläre Stellen τ_0 mit $\text{Sp } \tau_0 \neq i\infty$ außer Frage steht. Für Stellen τ_0 mit $\text{Sp } \tau_0 = i\infty$ sei er wegen seiner besonderen Bedeutung nochmals formuliert.

Satz 4 vom arithmetischen Mittel. Es zeige die fastautomorphe Funktion $f(\tau)$ in τ_0 mit $\text{Sp } \tau_0 = i\infty$ reguläres Verhalten und es gelte etwa $\tau_0 = Li\infty$. Dann ist

$$f(\tau_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(L\tau) dx \quad \tau = x + iy$$

für alle hinreichend großen y .

Um den Satz 1 auch für den Punkt $\tau_1 = i\infty$ zu beweisen, nehmen wir an, daß keine polartige Stelle die Spur $i\infty$ besitze. Dann läßt sich eine Zahl $y_1 \geq 1$ finden, so daß keine polartige Stelle

eine Spur mit einem Imaginärteil $\geq y_1$ besitzt. Ferner sei $y_2 > y_1$ beliebig. Den Bereich

$$-1/2 \leq x \leq 1/2 \quad y_1 \leq y \leq y_2$$

der oberen τ -Halbebene bezeichnen wir mit D . Die Funktion $f(\tau)$ sei nun etwa in τ_0 mit $\text{Sp } \tau_0 \neq i\infty$ fastperiodisch. Dann ist $f(\tau)$ auch in einer Umgebung U_0 von τ_0 fastperiodisch. Wegen Satz 1 darf angenommen werden, daß $\tau_0 \in U_0 \subset D$. Offenbar gilt

$$\|f\|_D < \infty.$$

Also hat man für alle Funktionen $f(M_1\tau) - f(M_2\tau)$ mit beliebigen $M_1, M_2 \in \Gamma$

$$\sup_{\tau \in D} |f(M_1\tau) - f(M_2\tau)| \leq 2 \|f\|_D.$$

Ist nun $\varepsilon > 0$ irgendwie vorgegeben, so gibt es ein $\delta > 0$, so daß aus

$$\sup_{\tau \in U_0} |f(M_1\tau) - f(M_2\tau)| < \delta$$

folgt

$$\sup_{\tau \in D} |f(M_1\tau) - f(M_2\tau)| < \varepsilon/2$$

(siehe Beweis zu Satz 1). Aus

$$(5) \quad \sup_{\tau \in U_0, L \in \Gamma} |f(L_1 L\tau) - f(L_2 L\tau)| < \delta \quad L_1, L_2 \text{ beliebig} \in \Gamma$$

folgt also

$$\sup_{\tau \in D, L \in \Gamma} |f(L_1 L\tau) - f(L_2 L\tau)| < \varepsilon/2.$$

Wird mit S der volle Streifen

$$y_1 \leq y \leq y_2$$

bezeichnet, so kann man offenbar aus (5) auch folgern

$$(6) \quad \sup_{\tau \in S, L \in \Gamma} |f(L_1 L\tau) - f(L_2 L\tau)| < \varepsilon/2,$$

weil nämlich Γ sämtliche Substitutionen $\tau \rightarrow \tau + n$, n ganz-rational, enthält. Aus Satz 4 folgt für $\tau_1 = i\infty$, wenn (5) erfüllt ist,

$$|f(L_1 L \tau_1) - f(L_2 L \tau_1)| < \varepsilon/2.$$

Aus Satz 2 (4) entnehmen wir die Existenz eines $y_3 > 0$, so daß für alle $\tau = x + iy$ mit $y \geq y_3$ gilt

$$(7) \quad |f(L_1 L \tau) - f(L_2 L \tau)| < \varepsilon.$$

Die Menge aller $\tau = x + iy$ mit $y \geq y_3$ werde U genannt. Wir haben offenbar bewiesen, daß jede Überdeckung $\mathfrak{Z}\{f(\tau), U_0, \delta\}$ stets auch eine Überdeckung $\mathfrak{Z}\{f(\tau), U, \varepsilon\}$ ist. Es ist also $f(\tau)$ in $\tau_1 = i\infty$ gleichartig fastperiodisch wie in τ_0 . Damit ist auch die entsprechende Aussage für jeden Punkt τ_1 mit $\text{Sp } \tau_1 = i\infty$ bewiesen.

Der Satz 1 ist also verschärft zu

Satz 5. Es sei $f(\tau)$ fastautomorph und fastperiodisch in τ_0 . Ist dann $\text{Sp } \tau_1$ keine Polspur, so ist $f(\tau)$ in τ_1 gleichartig fastperiodisch wie in τ_0 .

Die Schlußweise, welche zum Beweise dieses Satzes führte, ist auch in späteren Paragraphen nützlich anzuwenden. Wir formulieren ihren wichtigsten Bestandteil deshalb als

Satz 6. Es sei $\mathfrak{M}$ eine Menge fastautomorpher Funktionen $f(\tau)$ und D sei ein Gebiet der oberen τ -Halbebene. Ferner existiere eine Konstante $G > 0$ derart, daß für alle $f \in \mathfrak{M}$

$$\|f\|_D = \sup_{L \in \Gamma, \tau \in D} |f(L\tau)| < G$$

ist. Sind dann $\tau_0, \tau_1 \in D$ und ist U_0 Umgebung von τ_0 und U_1 eine hinreichend kleine Umgebung von τ_1 , so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $f \in \mathfrak{M}$

$$\text{aus } \|f\|_{U_0} < \delta \quad \text{folgt} \quad \|f\|_{U_1} < \varepsilon.$$

§ 3. Die endlichen unitären Darstellungen von Γ

Die fastautomorphen Funktionen bilden einen Ring mit dem Körper der komplexen Zahlen als Operatorenbereich. Würde man den Begriff „fastautomorph“ noch weiter dadurch einschränken,

daß man zusätzliche Annahmen über das Verschwinden der Funktionen macht, so könnte man auch die Körpereigenschaft erzwingen. Dadurch würde die Anwendbarkeit dieser Funktionen für unsere Zwecke nicht betroffen. Der Einfachheit halber aber verzichten wir auf Untersuchungen in dieser Richtung. Um die Ringeigenschaften nachzuweisen, beweisen wir

Satz 1. Mit $f(\tau)$ und $g(\tau)$ sind auch $f(\tau) + g(\tau)$ und $f(\tau) \cdot g(\tau)$ fastautomorphe Funktionen.

Beweis: Mit f und g zeigen in der Tat auch $f + g$ und $f \cdot g$ meromorphes Verhalten. Ist ferner τ_0 ein Punkt der oberen τ -Halbebene, dessen Spur $\text{Sp } \tau_0$ weder für f noch für g Polspur ist, so sind f und g in τ_0 fastperiodisch (§ 2 Satz 5), also auch $f + g$ und $f \cdot g$.

Der Raum der fastautomorphen Funktionen ist auch gegenüber Grenzwertbildung in gewissem Sinne abgeschlossen. Doch gehen wir darauf erst im nächsten Paragraphen ein, da wir zunächst nur endlichdimensionale Teilräume fastautomorpher Funktionen betrachten, in denen die Abgeschlossenheit keine Rolle spielt (bzw. trivial ist).

Vermöge

$$f(\tau) \rightarrow Lf(\tau) = f(L\tau)$$

ist jeder Modulsstitution L im Raume der fastautomorphen Funktionen eine lineare Substitution zugeordnet. Es sei $\mathfrak{M}$ ein endlichdimensionaler Teilmodul der Menge aller fastautomorphen Funktionen, der gegenüber diesen Transformationen invariant ist, d. h.

wenn $f \in \mathfrak{M}$, $L \in \Gamma$, so auch $Lf \in \mathfrak{M}$.

Es existiert dann in $\mathfrak{M}$ eine endliche Basis $f_1(\tau), \dots, f_s(\tau)$, so daß für jedes $f \in \mathfrak{M}$ gilt (mit komplexen α_ϱ)

$$f = \sum_{\varrho=1}^s \alpha_\varrho f_\varrho.$$

Man erkennt, daß nur endlich viele Punkte als Polspuren von Funktionen aus $\mathfrak{M}$ auftreten können. Es gibt also ein τ_0 , sogar eine volle Umgebung U_0 von τ_0 , wo alle $f \in \mathfrak{M}$ fastperiodisch

sind. Wir dürfen auch annehmen, daß $\text{Sp } \tau_0 \neq i\infty$ ist, dann ist U_0 eine Kreisscheibe, deren Flächeninhalt etwa $= |U_0|$ gesetzt werde.

Wir bilden für beliebige $f, g \in \mathfrak{M}$

$$\varphi(L) = \int_{U_0} f(L\tau) \overline{g(L\tau)} dx dy \quad \tau = x + iy.$$

Es ist dann für beliebige $L_1, L_2 \in \Gamma$

$$\begin{aligned} & |\varphi(L_1 M) - \varphi(L_2 M)| \leq \\ & \leq \int_{U_0} |f(L_1 M\tau) \overline{g(L_1 M\tau)} - f(L_2 M\tau) \overline{g(L_2 M\tau)}| dx dy \\ & \leq |U_0| \cdot \|L_1 f - L_2 f\|_{U_0} \cdot \|g\|_{U_0} + |U_0| \cdot \|L_1 g - L_2 g\|_{U_0} \cdot \|f\|_{U_0}. \end{aligned}$$

Hieraus entnimmt man, da f und g fastperiodisch in U_0 sind, daß auch φ fastperiodische Funktion auf Γ ist. Man kann deshalb φ über Γ mitteln. Wir setzen

$$(f, g)_{U_0} = M_L \left\{ \int_{U_0} f(L\tau) \overline{g(L\tau)} dx dy \right\}.$$

Dieses *Skalarprodukt* in $\mathfrak{M}$ hat die üblichen Eigenschaften. Außerdem ist für alle $L \in \Gamma$

$$(1) \quad (Lf, Lg)_{U_0} = (f, g)_{U_0}$$

Vermöge

$$Lf_\sigma = \sum_{\varrho} D_{\varrho\sigma}(L) f_\varrho \quad \sigma = 1, \dots, s$$

wird nun jeder Modulsstitution $L \in \Gamma$ eine lineare Transformation mit der Matrix $D(L) = \{D_{\varrho\sigma}(L)\}$ zugeordnet. Offenbar ist $D(L)$ eine Darstellung von Γ , wegen (1) ist sie „unitär äquivalent“, d. h. wählt man die Basis $f_1, \dots, f_s$ orthonormalnormiert, so sind sämtliche Matrizen $D(L)$ unitär. Bekanntlich ist eine Darstellung $D(L)$ dann und nur dann einer unitären äquivalent, wenn sie beschränkt ist (siehe z. B. [2] Paragraphen 4 und 30). Deshalb haben wir

Satz 2. Spannen die fastautomorphen Funktionen $f_1(\tau), \dots, f_s(\tau)$ einen s -dimensionalen Raum $\mathfrak{M}$ auf, der gegenüber Γ invariant ist, so bilden die durch

$$L f_{\sigma} = \sum_{\varrho} D_{\varrho \sigma}(L) f_{\varrho} \quad \sigma = 1, \dots, s$$

erklärten Matrizen $D(L) = \{D_{\varrho \sigma}(L)\}$ eine beschränkte Darstellung von L .

Der soeben bewiesene Satz läßt folgende Umkehrung zu.

Satz 3. Es seien $f_1(\tau), \dots, f_s(\tau)$ eindeutige analytische Funktionen in der oberen τ -Halbebene, welche im Fundamentalebereich Ω von L höchstens endlichviele polartige Stellen besitzen. Der durch diese Funktionen aufgespannte s -dimensionale Raum $\mathfrak{M}$ sei gegenüber L invariant und die durch

$$(2) \quad L f_{\sigma} = \sum_{\varrho=1}^s D_{\varrho \sigma}(L) f_{\varrho} \quad \sigma = 1, \dots, s$$

erklärten Matrizen $D(L) = \{D_{\varrho \sigma}(L)\}$ seien beschränkt. Dann sind die sämtlichen Funktionen in $\mathfrak{M}$ fastautomorph.

Beweis: Die Schranke von $D(L)$ sei etwa mit G bezeichnet

$$(3) \quad |D(L)| = + \sqrt{\sum_{\varrho \sigma=1}^s |D_{\varrho \sigma}(L)|^2} < G.$$

Für jedes τ bilden wir den Vektor

$$\mathfrak{f}(\tau) = \{f_1(\tau), \dots, f_s(\tau)\}.$$

Offenbar ist dann

$$L \mathfrak{f} = L \mathfrak{f}(\tau) = \mathfrak{f}(L \tau)$$

zu setzen. Wir haben wegen (2)

$$(4) \quad L \mathfrak{f} = D(L) \mathfrak{f}.$$

Bedeutet $|\mathfrak{f}|$ die übliche Vektorlänge

$$|\mathfrak{f}| = \sqrt{\sum_{\varrho} |f_{\varrho}|^2},$$

so gilt wegen (3) und (4)

$$|L \mathfrak{f}| \leq G |\mathfrak{f}|.$$

Daraus folgt, daß alle Stellen singulären Verhaltens polartig sind, genau wie die entsprechenden Spuren in Ω . Ferner muß

jede dieser polartigen Stellen eine Spur besitzen, welche eine der endlichvielen in Ω zugelassenen polartigen Stellen ist, und die Wachstumsordnung ist offensichtlich beschränkt. Ist sodann D ein abgeschlossenes Gebiet, welches keine zu polartigen Stellen äquivalente Punkte enthält und ist $D' \subset \Omega$ die Menge aller Spuren $\text{Sp } \tau$ mit $\tau \in D$, so gilt

$$\begin{aligned} \sup_{L \in \Gamma, \tau \in D} |\mathfrak{f}(L\tau)| &= \sup_{L \in \Gamma, \tau \in D'} |\mathfrak{f}(L\tau)| \\ &\leq G \cdot \sup_{\tau \in D'} |\mathfrak{f}(\tau)|. \end{aligned}$$

Nach Annahme über D ist nun aber sicher $|\mathfrak{f}(\tau)|$ in D' beschränkt, also

$$\sup_{L \in \Gamma, \tau \in D} |\mathfrak{f}(L\tau)| < \infty.$$

Entsprechendes muß dann auch für jede Komponente von $\mathfrak{f}$ gelten, d. h.

$$\|f_\varrho\|_D < \infty \quad \text{für } \varrho = 1, \dots, s.$$

Damit ist nachgewiesen, daß alle f_ϱ , $\varrho = 1, \dots, s$ meromorphes Verhalten zeigen.

Nun sei τ_0 ein Punkt, der mit keiner polartigen Stelle einer der Funktionen $f_1, \dots, f_s$ äquivalent ist. Dann existiert eine Umgebung U_0 von τ_0 , deren abgeschlossene Hülle ebenfalls keinen Punkt enthält, dessen Spur eine Polspur der $f_1, \dots, f_s$ ist. Nach Obigem ist

$$\sup_{L \in \Gamma, \tau \in U_0} |\mathfrak{f}(L\tau)| = \|\mathfrak{f}\|_{U_0} < \infty.$$

Deshalb haben wir für alle $\tau \in U_0$ und beliebige $L_1, L_2, L \in \Gamma$

$$\begin{aligned} (5) \quad |\mathfrak{f}(L_1 L \tau) - \mathfrak{f}(L_2 L \tau)| &= |(D(L_1) - D(L_2)) \mathfrak{f}(L \tau)| \\ &\leq |D(L_1) - D(L_2)| \cdot \|\mathfrak{f}\|_{U_0}. \end{aligned}$$

Da $D(L)$ und damit alle $D_{\varrho\sigma}(L)$ beschränkt sind, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{A}_i$$

von Γ , so daß für beliebiges $i = 1, \dots, n$ und beliebige $L_1, L_2 \in \mathfrak{A}_i$ gilt

$$|D(L_1) - D(L_2)| < \frac{\varepsilon}{\|\mathfrak{f}\|_{U_0}}.$$

Daraus folgt dann wegen (5)

$$\sup_{L \in \Gamma, \tau \in U_0} |\mathfrak{f}(L_1 L \tau) - \mathfrak{f}(L_2 L \tau)| < \varepsilon \quad L_1, L_2 \in \mathfrak{A}_i.$$

Natürlich gilt die entsprechende Ungleichung für jede Komponente f_ϱ von $\mathfrak{f}$. Also sind alle $f_\varrho(\tau)$ in τ_0 fastperiodisch, sie sind damit fastautomorph. –

Wir wollen eine fastautomorphe Funktion dann *regulär* nennen, wenn sie keine Stellen singulären Verhaltens besitzt. Definitionsgemäß ist eine fastautomorphe Funktion dann und nur dann (überall) regulär, wenn sie beschränkt ist. Wir denken uns einen endlichdimensionalen Modul $\mathfrak{M}$, der nur aus regulären fastautomorphen Funktionen besteht und der gegenüber Modulsstitutionen invariant ist. Wählt man eine Basis $f_1, \dots, f_s$ von $\mathfrak{M}$, so ist durch

$$L f_\sigma = \sum_{\varrho} D_{\varrho\sigma}(L) f_\varrho$$

eine Darstellung $D(L) = \{D_{\varrho\sigma}(L)\}$ gegeben, die nach Satz 2 beschränkt, also unitär-äquivalent ist, d. h. wir dürfen annehmen, daß von vornherein die Basis so gewählt wurde, daß $D(L)$ unitär ist.

Wir fassen wieder, wie im Beweis zu Satz 3 die Basisfunktionen zu einem Vektor zusammen

$$\mathfrak{f}(\tau) = \{f_1(\tau), \dots, f_s(\tau)\}.$$

Wegen

$$L \mathfrak{f} = D(L) \mathfrak{f}$$

und weil $D(L)$ unitär ist, muß die Länge von $\mathfrak{f}$

$$|\mathfrak{f}| = \sqrt{\sum_{\varrho} |f_{\varrho}|^2}$$

eine gegenüber Modulsstitutionen invariante Funktion von τ sein

$$|L\mathfrak{f}| = |\mathfrak{f}|.$$

Ich behaupte nun, daß $|\mathfrak{f}|$ in keinem Punkte τ_0 der oberen τ -Halbebene ein Maximum annehmen kann. Sei zunächst $\text{Sp } \tau_0 \neq i\infty$. Es gilt dann

$$f_q(\tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}^{(q)} (\tau - \tau_0)^{\nu}.$$

Wenn man nun den Integralmittelwert von $|f_q(\tau)|^2$ entlang eines Kreises vom Radius r um τ_0 berechnet, so ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_q(\tau_0 + r e^{i\varphi})|^2 d\varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\nu}^{(q)}|^2 r^{2\nu}$$

und folglich

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathfrak{f}(\tau_0 + r e^{i\varphi})|^2 d\varphi = \sum_{q=1}^s \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\nu}^{(q)}|^2 r^{2\nu},$$

während im Punkte τ_0 gilt

$$|\mathfrak{f}(\tau_0)|^2 = \sum_{q=1}^s |a_0^{(q)}|^2.$$

Wenn daher $|\mathfrak{f}(\tau)|$ im Punkte τ_0 ein Maximum besitzt, so kann dies nur sein, wenn alle $a_{\nu}^{(q)}$ mit $\nu \neq 0$ verschwinden, alle $f_q(\tau)$ also konstant sind.

Nun betrachten wir den Punkt $\tau_0 = i\infty$. Es sei dort gemäß § 2 Satz 2

$$f_q(\tau) \sim \sum_{\nu} A_{\nu}^{(q)} q^{A_{\nu}}.$$

Da alle $f_q(\tau)$ in $i\infty$ reguläres Verhalten zeigen, sind alle $A_{\nu} \geq 0$. Wir bezeichnen den Exponenten 0 mit A_0 . Dann ist

$$f_q(i\infty) = A_0^{(q)},$$

also

$$|\mathfrak{f}(i\infty)|^2 = \sum_{q=1}^s |A_0^{(q)}|^2.$$

Aus der Parsevalschen Gleichung für analytische fastperiodische Funktionen ergibt sich

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f_\varrho(\tau)|^2 dx = \sum_\nu |A_\nu^{(\varrho)}|^2 e^{-4\pi A_\nu y} \quad \tau = x + iy$$

(vgl. H. Bohr [1] Satz 12) und somit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |\mathfrak{f}(\tau)|^2 dx = \sum_{\varrho=1}^s \sum_\nu |A_\nu^{(\varrho)}|^2 e^{-4\pi A_\nu y} \quad \tau = x + iy.$$

Es muß also irgendwo auf jeder Parallelen $y = \text{const}$ zur reellen Achse $|\mathfrak{f}(\tau)|$ einmal $> |\mathfrak{f}(i\infty)|$ sein, wenn nicht alle $A_\nu^{(\varrho)}$ mit $\nu \neq 0$ verschwinden sollen. D. h. auch im Punkte $\tau_0 = i\infty$ kann $|\mathfrak{f}|$ kein Maximum besitzen, ohne daß alle $f_\varrho(\tau)$ konstant sind. Entsprechende Überlegungen kann man in rationalen Punkten anwenden.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage, den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 4. Wenn ein endlich-dimensionaler Modul regulärer fastautomorpher Funktionen durch sämtliche Modulsstitutionen in sich transformiert wird, so sind die Funktionen dieses Moduls konstant.

Beweis: Wir gehen von der Annahme aus, daß die Funktionen des Moduls nicht konstant seien. Durch geeignete Wahl der Basis $f_1(\tau), \dots, f_s(\tau)$ des Moduls kann man, wie wir gesehen haben, erreichen, daß die Länge des Vektors $\mathfrak{f}(\tau) = \{f_1(\tau), \dots, f_s(\tau)\}$ gegenüber Modulsstitutionen invariant ist

$$|L\mathfrak{f}| = |\mathfrak{f}|.$$

Wir fragen uns nun, an welcher Stelle in Ω die reelle Funktion $|\mathfrak{f}|$ ihr Maximum annimmt. Im Innern von Ω kann dies nicht geschehen, da es in der Umgebung eines jeden τ_0 Punkte gibt, in denen $|\mathfrak{f}|$ größer als in τ_0 ist. Also liegt das Maximum auf dem Rande von Ω . Es kann dies nicht der Randpunkt $i\infty$ von Ω sein. Denn sicher nimmt $|\mathfrak{f}|$ auf jeder Horizontalen irgendwo größere Werte an als in $i\infty$. Sei dies etwa im Punkte τ_1 der Fall, sei also

$$|\mathfrak{f}(\tau_1)| > |\mathfrak{f}(i\infty)|,$$

dann existiert sicher eine ganze Zahl n , so daß

$$\tau_1 + n \in \Omega.$$

Weil $\tau_1 \rightarrow \tau_1 + n$ eine Modulsstitution ist, folgt

$$|f(\tau_1 + n)| > |f(i\infty)|,$$

und dies kann nicht sein, wenn $|f(i\infty)|$ das Maximum von $|f|$ in Ω sein soll.

Das gesuchte Maximum liegt also auf dem Rand von Ω , nicht aber im Punkte $i\infty$. Wir nehmen an, das Maximum von $|f|$ werde in τ_0 angenommen. Um τ_0 herum werde ein kleiner Kreis geschlagen. Auf ihm, natürlich außerhalb Ω , muß ein Punkt τ_1 liegen, so daß

$$|f(\tau_1)| > |f(\tau_0)|.$$

Zu τ_1 existiert ein $L \in \Gamma$, so daß $L\tau_1$ im Innern von Ω liegt. Es gilt

$$|f(L\tau_1)| = |Lf(\tau_1)| = |f(\tau_1)| > |f(\tau_0)|,$$

d. h. es gibt im Innern von Ω einen Punkt, in dem $|f|$ größer ist als in jedem Randpunkt von Ω . Dies ist ein Widerspruch, der Satz 4 ist also bewiesen.

§ 4. Mittelwerte fastautomorpher Funktionen

Der Mittelwert $M_L\{f(L\tau)\}$ fastautomorpher Funktionen $f(\tau)$ ist Grenzwert von Folgen von Näherungsmittelwerten, die selber wieder fastautomorph sind. Wir sehen uns deshalb genötigt, Folgen fastautomorpher Funktionen bezüglich Konvergenz zu untersuchen. Es ist nicht ganz selbstverständlich, welches der vernünftigste und allgemeinste Konvergenzbegriff für Folgen fastautomorpher Funktionen ist, bezüglich dessen der Raum aller fastautomorphen Funktionen sich als abgeschlossen erweist. Wenn man jedoch nur die Durchführung der Mittelwerttheorie als Ziel vor Augen hat, bietet sich folgende Definition als brauchbar an.

Definition: Eine Folge $f_n(\tau)$ fastautomorpher Funktionen heißt *konvergent*, wenn gilt:

1. Es gibt endlich viel Punkte $\tau_1, \dots, \tau_r$ derart, daß jede Polspur einer jeden Funktion $f_n(\tau)$ der Folge gleich einem τ_i ist ($i = 1$ oder $\dots$ oder r).

2. Die Wachstumsordnungen sind beschränkte Funktionen von n und τ , kurz gleichgradig beschränkt.

3. Ist D ein beliebiges abgeschlossenes Gebiet, welches kein τ mit $\text{Sp } \tau = \tau_i$ ($i = 1$ oder $\dots$ oder r) enthält, so ist

$$\|f_n\|_D = \sup_{L \in F, \tau \in D} |f_n(L\tau)|$$

eine beschränkte Zahlenfolge.

4. Es gibt wenigstens einen Punkt τ_0 mit $\text{Sp } \tau_0 \neq \tau_1, \dots, \tau_r$, in dem die Folge $f_n(\tau)$ gleichmäßig konvergiert, d. h. es existiert eine Umgebung U_0 von τ_0 und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N , so daß aus $m, n > N$ folgt

$$\|f_m - f_n\|_{U_0} < \varepsilon.$$

Satz 1. Eine konvergente Folge fastautomorpher Funktionen $f_n(\tau)$ konvergiert gleichmäßig in allen Punkten, die nicht mit polartigen Stellen der Funktionen der Folge äquivalent sind. Die wohlbestimmte Funktion

$$f(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\tau)$$

ist fastautomorph.

Beweis: Wegen Forderung 4. (in der Definition) gibt es einen Punkt τ_0 , in dessen Nähe die Folge gleichmäßig konvergiert. Es sei τ' ein weiterer Punkt, der zu keiner polartigen Stelle irgendeiner der Funktionen $f_n(\tau)$ äquivalent ist. Wir wählen dann ein Gebiet D , das folgende Bedingungen erfüllt.

$$\alpha) \tau_0 \in D \quad \tau' \in D.$$

$\beta)$ Die abgeschlossene Hülle $\bar{D}$ von D enthält keinen Punkt τ , welcher mit einer polartigen Stelle einer der Funktionen der Folge äquivalent ist.

Es gilt dann für geeignetes G wegen 3.

$$\|f_n\|_D < G$$

und aus § 2 Satz 6 folgt die gleichmäßige Konvergenz der Folge nahe τ' .

Sieht man zunächst ab von denjenigen Punkten τ , welche mit polartigen Stellen der $f_n(\tau)$ äquivalent sind, so ist $f(\tau)$ offenbar in allen anderen Punkten wohlbestimmt und als Grenzfunktion einer im kleinen gleichmäßig konvergenten Folge regulärer Funktionen ebenfalls regulär bzw. von regulärem Verhalten. Aus Forderung 3. der Definition der Konvergenz entnehmen wir auch, daß für jedes abgeschlossene Gebiet D , welches keinen der zunächst aus der Betrachtung ausgeschlossenen Punkte τ (mit $\text{Sp } \tau = \tau_1, \dots, \tau_r$) enthält, gilt

$$\|f\|_D = \sup_{L \in D, \tau \in D} |f(L\tau)| < \infty.$$

Es sei nun τ'_i ein Punkt mit $\text{Sp } \tau'_i = \tau_i$ ($i = 1, \dots, r$) und es sei $k_n < K < \infty$ für alle Wachstumsordnungen k_n der $f_n(\tau)$ in τ'_i (Forderung 2). Ist $\text{Sp } \tau'_i \neq i\infty$, so konvergiert $f_n(\tau)$ in jedem Punkt der Peripherie eines kleinen Kreises um τ'_i gleichmäßig, also konvergiert die Folge auf der gesamten Kreis-peripherie gleichmäßig. Dasselbe gilt dann offenbar auch für die Funktionenfolge $(\tau - \tau'_i)^K f_n(\tau)$. Da diese Funktionen aber sämtlich im Innern des Kreises gleichgradig beschränkt sind, konvergieren sie im gesamten Kreis gleichmäßig, und zwar gilt offenbar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\tau - \tau'_i)^K f_n(\tau) = (\tau - \tau'_i)^K f(\tau).$$

Da

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau'_i} (\tau - \tau'_i)^K f_n(\tau) = 0,$$

folgt

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau'_i} (\tau - \tau'_i)^K f(\tau) = 0.$$

Die Wachstumsordnung von f in τ'_i ist also $\leq K$.

Wenn $\tau_i = i\infty$, so folgt leicht aus § 2 Satz 6, daß $f_n(\tau)$ in jedem Streifen $y_1 \leq \text{Im } \tau \leq y_2$ gleichmäßig konvergiert, in dem und oberhalb dessen kein $\tau_1, \dots, \tau_r$ liegt. Demnach ist $f(\tau)$ oberhalb der Graden $\text{Im } \tau = y_1$ im Bohr'schen Sinne fast-periodische Funktion von x . Sind

$$f_n(\tau) \sim \sum A_n(A) q^A \qquad f(\tau) \sim \sum A(A) q^A$$

die Fourierreihen der Funktionen $f_n(\tau)$, $f(\tau)$, so gilt wegen der gleichmäßigen Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\lambda) = A(\lambda).$$

Da sämtliche $A_n(\lambda)$ mit $\lambda \leq -K$ verschwinden (für geeignetes K , Forderung 2), gilt auch

$$A(\lambda) = 0 \quad \text{für } \lambda \leq -K.$$

Die Funktion

$$q^K f(\tau)$$

besitzt offenbar nur positive Fourierexponenten, und es gilt somit

$$\lim_{\tau \rightarrow i\infty} q^K f(\tau) = 0.$$

Deshalb ist die Wachstumsordnung von f in $i\infty$ wiederum $\leq K$. In Punkten τ'_i mit $\text{Sp } \tau'_i = i\infty$, welche von $i\infty$ verschieden sind, schließt man entsprechend.

Wir haben also gezeigt, daß $f(\tau)$ meromorphes Verhalten zeigt. Ist nun τ ein beliebiger Punkt mit $\text{Sp } \tau \neq \tau_i$ ($i = 1, \dots, r$), so gibt es eine Umgebung U von τ , in der alle $f_n(\tau)$ fastperiodisch sind und in der die Folge im Sinne der Norm $\|f\|_U$ konvergiert. Daraus folgt sofort, daß die Grenzfunktion in τ fastperiodisch, insgesamt, also fastautomorph ist. –

Es sei nun $f(\tau)$ irgendeine fastautomorphe Funktion. Sie sei fastperiodisch in τ_0 . Dann gibt es eine Umgebung U von τ_0 , in der alle Funktionen

$$\varphi_\tau(L) = f(L\tau) \quad \tau \in U$$

gleichgradig fastperiodische Funktionen von L sind ([2] § 10). Die Theorie fastperiodischer Funktionen auf Gruppen lehrt nun ([2] Paragraphen 9 und 10), daß dann eine in τ ($\tau \in U$) gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(L_i^{(n)} \tau) = F_n(\tau)$$

angegeben werden kann, deren Grenzwert auf U der Mittelwert $M_L \{f(L\tau)\}$ ist. Man erkennt leicht, daß auch die Folge $F_n(M\tau)$

für $M \in \Gamma$ gleichmäßig in M und τ gegen denselben Mittelwert konvergiert. Sind $\tau_1, \dots, \tau_r$ die Polspuren von $f(\tau)$, so sind dies auch diejenigen Punkte, welche als Polspuren der $F_n(\tau)$ in Frage kommen. Sind die Wachstumsordnungen in polartigen Stellen von $f(\tau)$ etwa $< K$, so gilt Entsprechendes natürlich auch von den Funktionen $F_n(\tau)$. Ist ferner D ein beliebiges abgeschlossenes Gebiet, welches kein τ mit $\text{Sp } \tau = \tau_i$ ($i = 1, \dots, r$) enthält, so ist

$$\|F_n\|_D \leq \frac{1}{N} \sum_{L \in \Gamma, \tau \in D} \sup |f(L_i^{(n)} L \tau)| = \|f\|_D.$$

Somit ist erkannt, daß die $F_n(\tau)$ eine im Sinne der Definition dieses Paragraphen konvergente Folge fastautomorpher Funktionen bilden. Nach Satz 1 ist der Grenzwert

$$M\{f\} = M_L\{f(L\tau)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\tau)$$

eine fastautomorphe Funktion. Da $M_L\{f(L\tau)\}$ invariant ist gegenüber Γ , so ist dieser Mittelwert sogar Modulfunktion.

Satz 2. Der Mittelwert einer fastautomorphen Funktion $f(\tau)$ ist eine Modulfunktion. Er ist enthalten in dem von $f(\tau)$ aufgespannten gegenüber Γ invarianten abgeschlossenen Modul fastautomorpher Funktionen.

Es bereitet keine Schwierigkeiten, den Satz 2 wie folgt zu verallgemeinern.

Satz 3. Die Faltung

$$\varphi \times f(\tau) = M_L\{\varphi(L) f(L^{-1} \tau)\}$$

einer komplexwertigen fastperiodischen Funktion $\varphi(L)$ auf Γ mit einer fastautomorphen Funktion $f(\tau)$ ist fastautomorph. Die Funktion $\varphi \times f$ ist in dem von f aufgespannten invarianten abgeschlossenen Modul fastautomorpher Funktionen enthalten.

In den Sätzen 2 und 3 tritt der Begriff „von f erzeugter abgeschlossener invarianter Modul“ auf. Zur Definition ist nichts weiter zu bemerken. Jedoch ist folgender Satz von Bedeutung, auf dessen Beweis nicht eingegangen werden braucht.

Satz 4. Ist $f(\tau)$ fastautomorphe Funktion mit den Polspuren $\tau_1, \dots, \tau_r$ und sind die Wachstumsordnungen sämtlich $< K$, so enthält der von f erzeugte abgeschlossene invariante Modul nur Funktionen, deren Polspuren wieder unter den Punkten $\tau_1, \dots, \tau_r$ zu finden sind, und bei denen die Wachstumsordnungen in polartigen Stellen $\leq K$ sind.

§ 5. Der Hauptsatz über fastautomorphe Funktionen

Es bedeute $D^{(v)}(L) = \{D_{\varrho\sigma}^{(v)}(L)\}$ ein vollständiges System irreduzibler inäquivalenter unitärer Darstellungen von Γ (siehe [2] Seite 121). Ihr Grad werde mit $s^{(v)}$ bezeichnet. Ist dann $f(\tau)$ eine fastautomorphe Funktion, so werde

$$(1) \quad A_{\varrho\sigma}^{(v)}(\tau) = D_{\sigma\varrho}^{(v)} \times f(\tau)$$

der zu $D_{\varrho\sigma}^{(v)}(L)$ gehörige *Fourierkoeffizient* von f genannt. Ferner schreiben wir

$$f(L\tau) \sim \sum_v s^{(v)} \sum_{\varrho, \sigma} A_{\varrho\sigma}^{(v)}(\tau) D_{\varrho\sigma}^{(v)}(L)$$

und sprechen von der *Fourierentwicklung* von f . Für jedes feste τ ist die Reihe rechts nichts anderes als die Fourierreihe der Funktion $f(L\tau) = \varphi_\tau(L)$ von L im Sinne der Theorie fastperiodischer Funktionen auf Γ .¹ Wir suchen nun, diese verschiedenen Fourierreihen durch ein für alle τ einheitlich gültiges Verfahren zu summieren.

Weil $f(\tau)$ fastautomorph ist, gibt es einen Punkt τ_0 und eine Umgebung U_0 von τ_0 , in der $f(\tau)$ fastperiodisch ist. Wir bilden

$$\Delta(L_1, L_2) = \sup_{L \in \Gamma} \|LL_1 f - LL_2 f\|_{U_0}.$$

Ferner setzen wir

$$F_n(u) = \begin{cases} 1 - nu & \text{wenn } u \leq 1/n \\ 0 & \text{wenn } u \geq 1/n \end{cases}$$

¹ Die Fourierreihen des gegenwärtigen Paragraphen dürfen nicht mit denjenigen des § 2 verwechselt werden. Die letzteren bezeichnet man besser als Potenzreihen.

und

$$g_n(L) = \frac{F_n(A(L^{-1}, 1))}{M_L \{F_n(A(L^{-1}, 1))\}}.$$

Diese Funktion ist eine sogenannte Gewichtsfunktion ([2] Seite 138) mit der Fourierreihe

$$g_n(L) = \sum_v s^{(v)} \gamma_n^{(v)} \sum_{\varrho} D_{\varrho\varrho}^{(v)}(L)$$

(vgl. [2] § 33 Satz 4). Die Fourierreihen gefalteter Funktionen konvergieren gleichmäßig ([2] Seite 142). Deshalb gilt

$$(2) \quad g_n \times f(L\tau) = \sum_v s^{(v)} \gamma_n^{(v)} \sum_{\varrho\sigma} A_{\varrho\sigma}^{(v)}(\tau) D_{\varrho\sigma}^{(v)}(L)$$

gleichmäßig für alle $\tau \in U_0$ und alle $L \in \Gamma$. Aus der Konstruktion der g_n folgt, daß

$$\|f(L\tau) - g_n \times f(L\tau)\|_{U_0} \leq 1/n.$$

Ist D ein beliebiges abgeschlossenes Gebiet, welches kein zu einer polartigen Stelle äquivalentes τ enthält, so ist nach [2] § 33 Satz 2

$$\|g_n \times f(L\tau)\|_D \leq \|f\|_D.$$

Berücksichtigt man noch die Sätze 3 und 4 des vorangegangenen Paragraphen, so erkennt man, daß die fastautomorphen Funktionen (2) im Sinne der Definition des § 4 gegen $f(L\tau)$ konvergieren. Insbesondere konvergieren die Funktionen

$$\sum_v s^{(v)} \gamma_n^{(v)} \sum_{\varrho} A_{\varrho\varrho}^{(v)}(\tau)$$

gegen $f(\tau)$. Wir haben also bewiesen

Satz 1. Besitzt die fastautomorphe Funktion $f(\tau)$ die Fourierreihe

$$f(\tau) \sim \sum_v s^{(v)} \sum_{\varrho} A_{\varrho\varrho}^{(v)}(\tau)$$

mit

$$A_{\varrho\varrho}^{(v)}(\tau) = D_{\varrho\varrho}^{(v)} \times f(\tau),$$

so existieren Zahlen $\gamma_n^{(v)}$, so daß die durch die konvergenten Reihen

$$\sum_v s^{(v)} \gamma_n^{(v)} \sum_{\varrho} A_{\varrho\varrho}^{(v)}(\tau)$$

erklärten fastautomorphen Funktionen mit $n \rightarrow \infty$ gegen $f(\tau)$ konvergieren.

Anmerkung: Die Zahlen $\gamma_n^{(v)}$ sind nur für abzählbar viele v ungleich Null. Existiert für ein v ein n_0 mit $\gamma_{n_0}^{(v)} \neq 0$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{(v)} = 1$$

(siehe [2] § 33 Satz 4).

Aus (1) folgt leicht

$$A_{\varrho\varrho}^{(v)}(L\tau) = \sum_{\sigma} D_{\varrho\sigma}^{(v)}(L) A_{\varrho\sigma}^{(v)}(\tau),$$

d. h. jedes $A_{\varrho\varrho}^{(v)}(\tau)$ gehört dem irreduziblen $s^{(v)}$ -dimensionalen Darstellungsmodul von $D^{(v)}(L)$ an, welcher von den $s^{(v)}$ fastautomorphen Funktionen $A_{\varrho 1}^{(v)}(\tau), \dots, A_{\varrho s^{(v)}}^{(v)}(\tau)$ aufgespannt wird. Diese Moduln sind nach § 4 Satz 3 sämtlich in dem von $f(\tau)$ aufgespannten Modul enthalten. Hieraus ergibt sich leicht der

Satz 2 (Hauptsatz): Jeder abgeschlossene gegenüber Modulsubstitutionen invariante Modul $\mathfrak{M}$ fastautomorpher Funktionen ist der kleinste abgeschlossene (invariante) Modul, welcher alle irreduziblen (und folglich endlich-dimensionalen) Moduln umfaßt, die in $\mathfrak{M}$ enthalten sind.

Um die Anwendbarkeit dieses Satzes zu demonstrieren, beweisen wir

Satz 3. Jede reguläre fastautomorphe Funktion ist konstant.

Beweis: Die (überall) regulären fastautomorphen Funktionen bilden einen abgeschlossenen invarianten Modul $\mathfrak{M}$. Die in $\mathfrak{M}$ enthaltenen endlich-dimensionalen Moduln bestehen natürlich nur aus regulären fastautomorphen Funktionen, die nach § 3 Satz 4 sämtlich konstant sind. Also besteht wegen Satz 2 auch $\mathfrak{M}$ nur aus Konstanten.

Literatur

- [1] H. Bohr, Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. III Dirichlet-entwicklung analytischer Funktionen. *Acta Mathematica* 47 (1926), 237 bis 281. Collected mathematical works C 12.
- [2] W. Maak, Fastperiodische Funktionen. Berlin 1950.
- [3] W. Maak, Zur Theorie der Modulgruppe. *Abh. math. Sem. Univ. Hamb.* 22 (1958), 267–275.