

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1959

MÜNCHEN 1960

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Beiträge zur Methodik der trigonometrischen Höhenmessung

Von **Klaus Linkwitz** in München

Mit 4 Abbildungen

Vorgelegt von Herrn Richard Finsterwalder am 10. Juli 1959

Übersicht

I. Einleitung	263
II. Die Feldarbeiten, deren Meßergebnisse zur Untersuchung verwendet werden	265
III. Zusammenfassung und Folgerungen Feldergebnisse	273
IV. Berechnungs- und Ausgleichsverfahren der Höhen-triangulation	275
V. Praktische Berechnungen unter Berücksichtigung der im vorigen angegebenen Gesichtspunkte	283
Literaturverzeichnis	287

I. Einleitung

Bekanntlich sind der Höhenbestimmung durch das Nivellement auch heute noch Grenzen gesetzt, wenn praktisch unüberwindliche Geländeschwierigkeiten eine kontinuierliche Begehung des Nivellementsweges verhindern. Nivellitische Höhenmessungen sind deshalb im allgemeinen in den Hochregionen der Gebirge nicht mehr möglich.

Zur wissenschaftlichen Erforschung und praktischen Erschließung dieser Gebiete sind jedoch genaue Höhenangaben unerläßlich. Nur unter Zuhilfenahme von verläßlichen Höhenfestpunkten lassen sich z. B. die nicht unwahrscheinlichen vertikalen Erdkrustenbewegungen in den geologisch jungen Hochgebirgen der Erde studieren. Auch zur Lösung der Hauptaufgabe der wissenschaftlichen Geodäsie – die Erforschung und Be-

schreibung des Geoids – vermag die trigonometrische Höhenmessung besonders im Gebirge einen wesentlichen Beitrag zu liefern.

Nach jahrzehntelanger Vernachlässigung hat sich die wissenschaftliche Geodäsie dem Problem der Höhentriangulation wieder verstärkt zugewendet.¹ An neueren Arbeiten sind zu nennen: Die Höhenmessungen am Nanga Parbat 1934 von R. Finsterwalder [2], bei der zum ersten Male Lotabweichungen aus Zenitdistanzmessungen in größerem Umfang gerechnet wurden; die Höhentriangulation in den Chiemgauer Alpen von R. Finsterwalder und H. Gänger 1941 [3], bei der die am Nanga Parbat entwickelte Methodik weiter ausgebaut wurde. Von Arbeiten nach dem Kriege sind zu erwähnen: Die Höhentriangulation von W. Hofmann 1951 im Isartal [10], wobei der Beweis einer bedeutenden Genauigkeitssteigerung erbracht werden konnte; schließlich die Arbeiten der Schweizer Geodätischen Kommission 1950/51 im Meridian des St. Gotthard durch F. Kobold [15], in denen in einem ausgezeichneten Nord-Süd-Profil aus Zenitdistanzmessungen Lotabweichungen hoher Genauigkeit gewonnen und astronomisch kontrolliert wurden. Gegenwärtig laufen Rechenarbeiten der Bayerischen Landesvermessung zur trigonometrischen Neubestimmung der Höhe der Zugspitze.

Als wesentlicher Beitrag zur Methodik der Rechenverfahren ist eine erst 1957 erschienene Veröffentlichung von L. Hradilek, Karls-Universität Prag zu erwähnen [11].

Trotz weitgehender Kenntnis der theoretischen Zusammenhänge sind Technik und Methodik der trigonometrischen Höhenmessung als noch im Fluß befindlich zu erachten, wobei zur Verifizierung der Theorie weiteres Beobachtungsmaterial beigebracht werden muß.

Auf Anregung und mit Förderung von Herrn Professor R. Finsterwalder und mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft wird deshalb gegenwärtig im Rahmen eines Forschungsauftrages untersucht, wie sich ausgewählte, lokale Geoidstücke mittels Höhentriangulationen methodisch erschließen lassen. Dabei wird zum ersten Male in größerem Umfang

¹ Ein vollständiges Literaturverzeichnis wird einer späteren Arbeit beigelegt.

von der elektronischen Rechentechnik Gebrauch gemacht. Die Arbeiten dazu dauern noch an, so daß hier nur Zwischenergebnisse mitgeteilt werden können.

Als Beobachtungsmaterial werden vier vom Verfasser in den letzten sechs Jahren gemessene örtliche Triangulationen herangezogen. Die Arbeitsgebiete sind Hochgebirgslandschaften in Asien, die als repräsentativ für solche Gebiete gelten können, in denen die Höhentriangulation sinnvoll und mit Nutzen angewendet werden kann. Die Meßergebnisse entsprechen in ihrer Genauigkeit den Anforderungen, welche an eine verfeinerte Untersuchung gestellt werden müssen.

II. Die Feldarbeiten, deren Meßergebnisse zur Untersuchung verwendet werden

Kurze generelle Beschreibung der vier Triangulationen zur Charakterisierung der örtlichen Verhältnisse

1. Triangulation Salang (Abb. 1)

Das Netz liegt im afghanischen Hindukusch, etwa im Schnittpunkt einer geraden Verbindungslinie von Kabul nach Doshi mit dem Hauptkamm des Hindukusch. Es wurde im Herbst 1953 beobachtet. Die Triangulation hat eine Höhenlage von 3300 bis 4000 m, umfaßt zehn Punkte, die Beobachtungs- und Vermarkungszeit betrug vier Wochen. Die Örtlichkeit ist vegetationsloses, kahles Hochgebirge etwa 800 m unterhalb der Schneegrenze. Die klimatischen Bedingungen waren für die Höhentriangulation außerordentlich günstig: Während der Beobachtungsperiode wurden klare, konstante Witterungsverhältnisse angetroffen mit Tagestemperaturen von 10 bis 15 °C und Nachttemperaturen bis —6 °C.

2. Triangulation Banihal (Abb. 2)

Das Arbeitsgebiet befindet sich in Kashmir, etwa 60 km südlich Srinagar im Pir Panjal, einem Höhenzug, der das Kashmirtal nach Süden und Westen abschließt. Die Hauptbeobachtungen

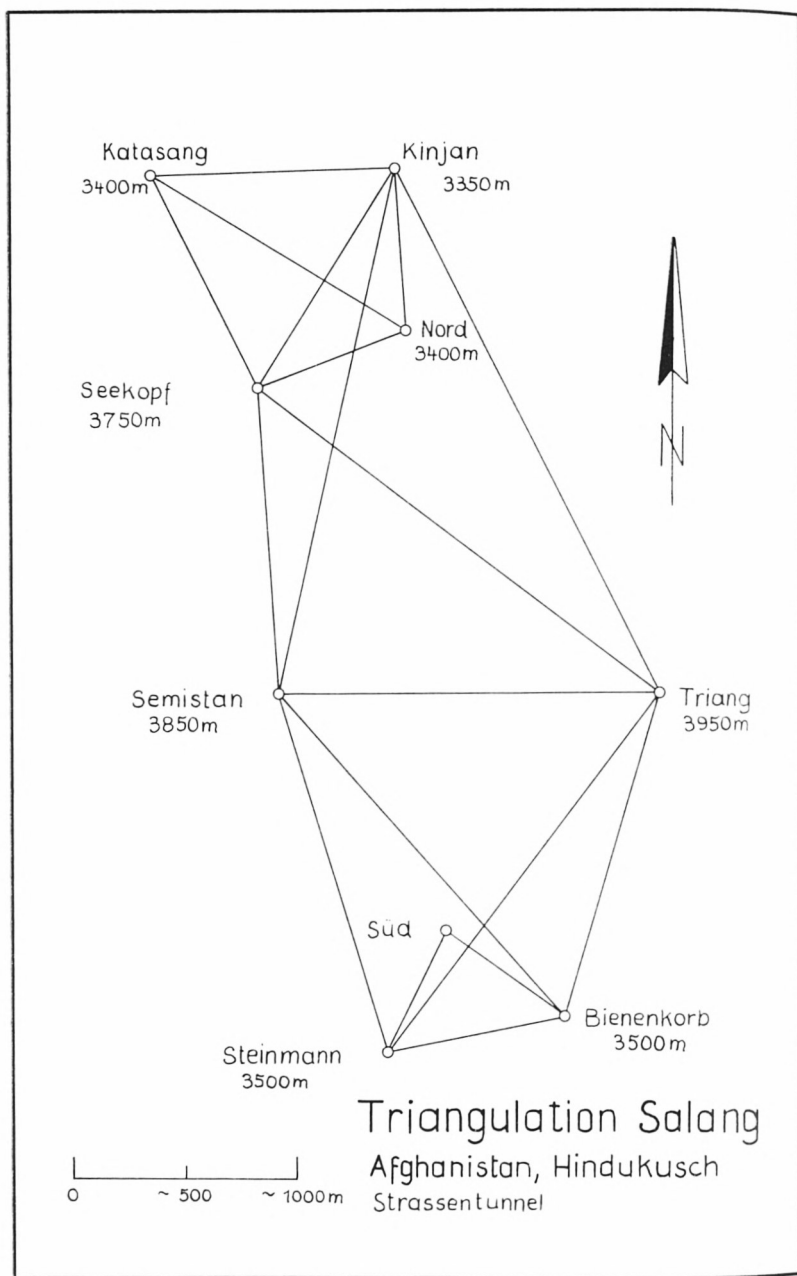


Abb. 1

Triangulation Banihal

Indien, (Jammu-Kashmir)

Strassentunnel i. Pir Panjal

Schutzhütte
2474 m

Nord
2224 m

Waldhügel
2362 m

Tunnel Achse

Pass
2823 m

Basis Nord

~ 2830 m

Basis Süd

Bären-
Kopf
3122 m

Edenrock
2536 m

Süd
2205 m

Wassernase
2082 m



Abb. 2

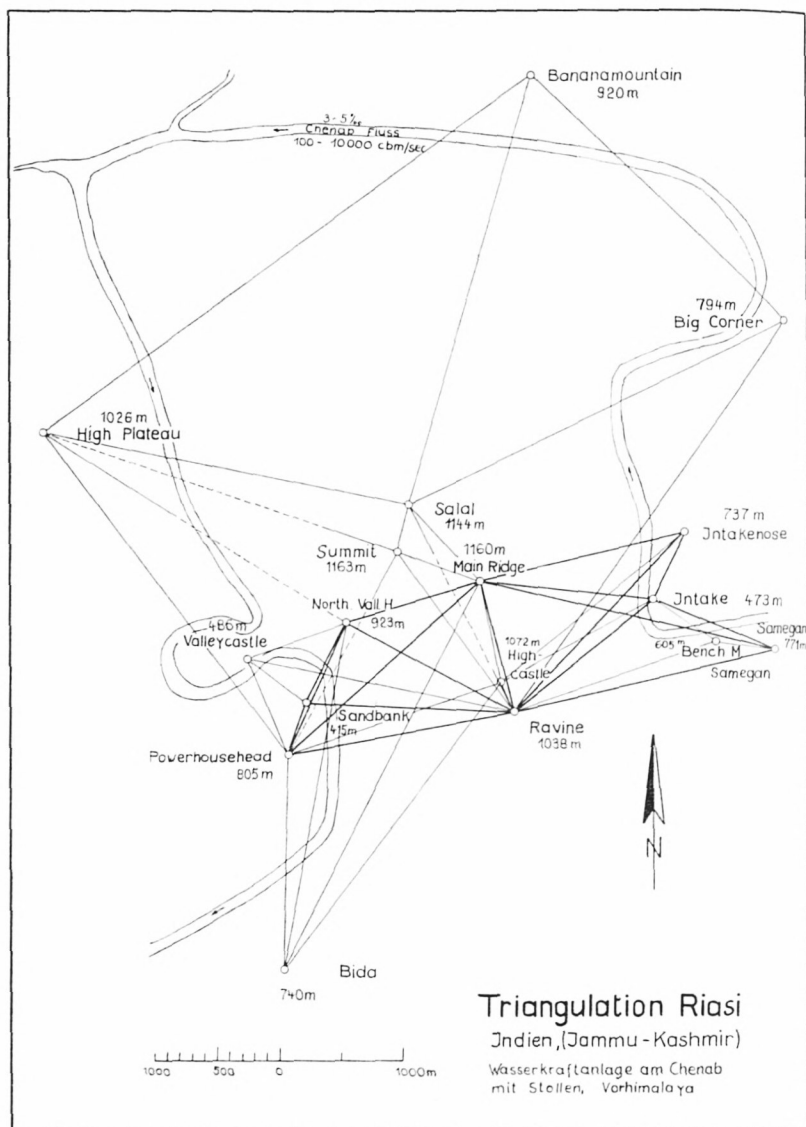


Abb. 3

fanden im Spätherbst 1954, einzelne Nachbeobachtungen im Frühjahr 1955 statt. Die Meßstationen befinden sich in Höhen zwischen 2100 und 3130 m; die Gesamtbeobachtungszeit für Horizontal- und Höhenwinkel betrug etwa sieben Wochen. Das Gebirge ist auf der Südseite vollkommen kahl, trägt jedoch auf der Nordseite vereinzelte, lichte Nadelwälder. Es wurde überwiegend in den günstigen Witterungsverhältnissen der Nachmonsunzeit beobachtet, bei Temperaturen ähnlich denen der Salangtriangulation.

3. Triangulation Riasi (Abb. 3)

Das Triangulationsgebiet liegt etwa 50 km nördlich Jammu am Chenab-Fluß in den Kalkvorbergen des Himalaya. Bei einer Höhenlage von 400 bis 1300 m ist das Gebiet typisch für den gesamten Vorhimalaya: Das Relief ist klein gegliedert; steile, tief eingeschnittene Täler durchziehen die überwiegend schroffen Gebirgsformen. Die Vegetation wechselt von äußerst dichtem subtropischen Dschungel in den Niederungen bis zu lichten Nadelwäldern in den höheren Lagen. An Sommertemperaturen werden bis zu 45 °C erreicht, während der Nachmonsun vom Herbst ab bei konstanten Witterungsverhältnissen günstigere Beobachtungsbedingungen bringt. In dieser Nachmonsunzeit wurde 1956/57 beobachtet.

4. Triangulation Mahru (Abb. 4)

Die Triangulation wurde bei einer Vermessungsexpedition, in welcher die kartographischen Planunterlagen zur Untersuchung eines wasserwirtschaftlichen Projektes terrestrisch-photogrammetrisch erstellt wurden, im Herbst 1958 beobachtet. Das Expeditionsgebiet liegt 160 km östlich von 3. im Lahaul-Himalaya etwa 7 Tagereisen nördlich Chamba am Oberlauf des Chenab-Flusses. Die von der Triangulation überbrückte Chanju Range ist in diesem Gebiet der erste Höhenrücken mit spezifischen Himalayaeigenschaften: Die Begehrbarkeit des Gebirges ist schwierig; von den Ufern des Chenab erheben sich Bergflanken, die mit einer Hangneigung bis zu 45° ohne Gegensteigung mit bis zu 4000 m relativer Höhendifferenz in die Gipfel-

flur führen, und die Feldarbeiten waren nur innerhalb einer wohlausgerüsteten Expedition durchzuführen. Auf der Westseite der Chanju Range findet sich undurchdringlicher subtropischer Regenwald bis in Höhen von 3000 m, anschließende Rhododendronwälder führen bis zur Waldgrenze in etwa 3500 m. Die Ostseite des Hauptkammes ist überwiegend kahl mit vereinzelten, lichten Nadelwäldern. Auch hier wurde überwiegend in der günstigen Witterungsperiode des Nachmonsun beobachtet.

Kurze Beschreibung der Feldarbeiten und Hinweise auf die Genauigkeit des Beobachtungsmaterials

Als Beobachtungsinstrument fand für alle Triangulationen ein Kern Theodolit DKM 2 neuer Teilung Verwendung, dessen Meßgenauigkeit bei Visurlängen bis zu 10 km auch für wissenschaftliche Untersuchungen ausreicht.

Alle vier Triangulationen wurden auch im Grundriß beobachtet, wobei aus hier nicht näher erläuterten Gründen bis auf das Mahrnetz nach Winkelmessungen in allen Kombinationen verfahren wurde. In die Stationsausgleichungen gehen nur vollständige Winkelmessungen ein.

Die Höhenwinkel wurden stets getrennt von den Horizontalwinkeln beobachtet und nur am Mittelfaden eingestellt. Die Messungen sind zeitlich gestreut, so daß die Einzelmessungen der zum arithmetischen Mittel vereinigten Gesamtbeobachtung zu Zeitpunkten stattfanden, die um jeweils etwa eine Stunde auseinander liegen. Zielexzentrizitäten und Instrumentenhöhen sind – bis auf das Mahrnetz – mit Millimetergenauigkeit bestimmt.

In keiner der Triangulationen konnte der Anschluß an das Landesnetz hergestellt werden. Zur Ableitung des Netzmaßstabes wurden deshalb lokale Grundlinien gemessen; in den Netzen Salang und Mahru mit einer 2-m-Invarlatte, in den Netzen Banihal und Riasi mit einem 20-m-Stahlmeßband.

Die Netze sind durch Kompaßmessungen und teilweise genaue astronomische Ortsbestimmungen flüchtig bis genau orientiert. Die astronomischen Ortsbestimmungen dienen zur Kontrolle der

später berechneten Lotabweichungsdifferenzen und zur Bestimmung des Refraktionskoeffizienten.

Die Triangulationen 1. bis 3. sind in dauerhaften Bodenpunkten sorgfältig vermarktet und mit Holzsignalen genau signalisiert. Zur Vermeidung exzentrischer Standpunkte konnten die mit Stahldraht abgespannten Signale bei der Instrumentenaufstellung leicht abgenommen werden.

Genauigkeit der Feldarbeiten

Die hier mitgeteilten Ergebnisse beziehen sich auf Auswertungen des Beobachtungsmaterials der Triangulationen 2. Banihal und 3. Riasi.

Die Triangulationen Salang und Banihal sind als gleich genau zu bewerten; in der Mahrutriangulation werden nur in der Höhenwinkelmessung gleiche Genauigkeiten wie am Banihal erreicht. Die Basismessungen mit der Invarbasislatte sind in ihrer Genauigkeit erheblich geringer einzustufen als die Grundlinienmessungen mit dem Meßband.

Triangulation Banihal:

Horizontalrichtungen

Mittl. Fehler der beob. Richtung

(Mittel aus Stations- und Netzausgleichung)

$\pm 4^{\text{cc}}$

Zenitdistanzen

Mittl. Fehler des Mittels aus 4 Sätzen

$\pm 4,1^{\text{cc}}$

Mittl. Fehler eines Einzelhöhenwinkels

$\pm 8,2^{\text{cc}}$

Basis

Länge der mit dem Meßband gemessenen Basis

114,9 m

Mittl. Fehler des Mittels aus vier Messungen

$\pm 0,47 \text{ mm}$

(Temperaturintervall von $+2^{\circ}\text{C}$ bis -4°C)

Basisübertragungsnetz

Mittl. Fehler der höhergewichtigen

Übertragungsrichtungen

$\pm 0,5^{\text{cc}}$ bis $\pm 0,6^{\circ}$

Triangulation Riasi:

Horizontalrichtungen

Mittl. Fehler der beob. Richtung
(Mittel aus Stations- und Netzausgleichung) $\pm 3,6^{\text{cc}}$

Zenitdistanzen

Mittl. Fehler des Mittels aus 5 Sätzen $\pm 2,75^{\text{cc}}$

Mittl. Fehler eines Einzelhöhenwinkels $\pm 6,15^{\text{cc}}$

Basis

Länge der mit dem Meßband gemessenen Basis 146,7 m

Mittl. Fehler des Mittels aus 6 Basismessungen $\pm 0,4$ mm
(Temperaturintervall von $+11^{\circ}\text{C}$ bis $+19^{\circ}\text{C}$)

Basisübertragungsnetz

Mittl. Fehler der höhergewichtigen Übertragungsrichtungen $\pm 1,0^{\text{cc}}$ bis $\pm 1,4^{\text{cc}}$

Astronomische Messungen (Breiten- und Azimutbestimmungen)

In gleicher Genauigkeit wie oben, d.h. $\pm 2^{\text{cc}}$ bis $\pm 4^{\text{cc}}$

III. Zusammenfassung und Folgerungen Feldergebnisse

1. Refraktion: Die Erfahrungen bei der Beobachtung und Ausgleichung der vorstehend genannten Netze bestätigen, daß die Refraktion im Hochgebirge während längerer Perioden konstant ist. Dies trifft in den Gebirgen Asiens besonders für die Großwetterlagen in der Nachmonsunzeit zu.

Es kann im Hochgebirge mit Berechtigung angenommen werden, daß die Refraktionswinkel an den Endpunkten eines Zielstrahls gleich sind. Diese an den vorstehenden Beobachtungen gemachte Erfahrung stimmt überein mit den Erfahrungen W. Hofmann's bei der Beobachtung des Isartalnetzes, den Schweizer Arbeiten im Meridian des St. Gotthard und den Nachbeobachtungen von R. Sigl und Marzahn im Isartalnetz 1956 [14].

Wegen dieser Konstanz kann im allgemeinen bei der Feldmessung auf die Beobachtung gegenseitig gleichzeitiger Zenitdistanzen verzichtet werden.

Kurzperiodische Schwankungen der Refraktion verfälschen die Höhenwinkel bei genügendem Bodenabstand der Visuren nicht systematisch, sondern wirken wie zufällige Beobachtungsfehler. Jedoch konnte bei bodennahen Visuren eine regelmäßige Änderung der Zenitdistanzen mit der Zeit gelegentlich beobachtet werden.

Der Refraktionskoeffizient nimmt mit zunehmender Höhe ab:

Riasinetz	$k = 0,18$
Isartalnetz	$k = 0,19$ [1951] $k = 0,14$ [1956]
St. Gotthard	$k = 0,105$
Banihal	$k = 0,10$

2. Höhenwinkelmessung

Die Genauigkeit eines Einzelhöhenwinkels bei der Messung mit einem Instrument vom Typ Wild T 2 oder Kern DKM 2 liegt bei $4''$ bis $6''$:

Hofmann Isartalnetz	$\pm 6''$
Banihalnetz	$\pm 8''$
Riasinetz	$\pm 6''$
Nachmessung Isartal 1956	$\pm 4''$

IV. Berechnungs- und Ausgleichsverfahren der Höhentriangulation

Die Auswertung des Beobachtungsmaterials geschieht im allgemeinen in zwei Stufen: Berechnung der Höhenunterschiede und darauf folgende Ausgleichung. Welche Verfahren dabei angewendet werden, hängt von der Güte der Beobachtungen und von der Fragestellung an das Beobachtungsmaterial ab: Wenn nur Höhenunterschiede berechnet werden sollen, kommen andere Methoden in Anwendung, als wenn zusätzlich Lotabweichungen bestimmt oder die Bezugsfläche definiert werden soll.

1. Die Berechnung der Höhenunterschiede

Bekanntlich erhält man, – unter Annahme gleicher Refraktionswinkel an den Endpunkten der Visur –, und bei Verwendung gegenseitiger, gemessener Zenitdistanzen, aus dem Mittel der zwei berechneten Höhenunterschiede eine Höhendifferenz, die sich auf einen kreisbogenförmigen Normalschnitt bezieht. Die Krümmung dieses Kreisbogens ist durch die in den Normalschnitt fallenden physikalischen Lotrichtungen auf den Endpunkten der gegenseitigen Visur bestimmt.

Da bei Mittelung des Höhenunterschiedes aus Hin- und Rückvisur sich die Krümmungsglieder in der Höhenformel wegheben, braucht prinzipiell die Krümmungskorrektur bei der Berechnung von Höhenunterschieden aus gegenseitigen Messungen nicht berücksichtigt zu werden. Eine genaue Höhenformel ist für diese Berechnung nicht notwendig, sondern sie kann in ihrer Reihenentwicklung nach dem ersten Glied abgebrochen werden [10].

Soll dagegen die Höhentriangulation Aufschluß geben über eine zusätzliche Krümmung der Bezugsfläche, oder soll die Krümmung der Bezugsfläche selbst geändert werden, um den tatsächlichen Verhältnissen Rechnung zu tragen, dann sind Einzelhöhenunterschiede zu berechnen, wobei die Krümmungsglieder der Rechenformel genau berücksichtigt werden müssen.

Da letzteres bei den gegenwärtigen Untersuchungen der Fall ist, wurde die Höhenformel neu abgeleitet. Im Gegensatz zu W. Hofmann [10], welcher die strenge Reihenentwicklung des kreisbogenförmig angenommenen Normalschnittes aus der Differentialgleichung für beliebige Normalschnitte herleitet, konnte die hier genannte Höhenformel elementargeometrisch unter Zuhilfenahme von Reihenentwicklungen bei wiederum als kreisbogenförmig angenommenen Normalschnitt abgeleitet werden. Die so erhaltene Höhenformel

$$\Delta h = s \cdot \operatorname{tg} \beta + \frac{s^2}{2r} (1 - k) \cdot \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{s^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta}{2r} + i - z \quad (1)$$

stimmt in ihrem geometrischen Teil ($k = 0$) mit der von W. Hofmann abgeleiteten Formel in den ersten drei Gliedern genau überein, differiert also entsprechend mit den üblichen Formeln. Zur Kontrolle wurde jeder Höhenunterschied doppelt gerechnet, wobei zur Kontrollrechnung eine bisher nicht gebräuchliche, geometrisch strenge Formel

$$\begin{aligned} \Delta h &= s \{ \cos \gamma/2 \cdot \operatorname{tg} (\beta + \gamma - \delta/2) - \sin \gamma/2 \} + i - z; \cos \gamma/2 \approx 1 \\ \rightarrow \Delta h &= s \{ \operatorname{tg} (\beta + \gamma - \delta/2) - \sin \gamma/2 \} + i - z \end{aligned} \quad (2)$$

in Anwendung kam. Diese Formel enthält keine Reihenentwicklungen und soll daher als Winkelformel bezeichnet werden. Ihr einfacher Aufbau und ihre bequeme Handhabung beim praktischen Rechnen lassen sie weitergetriebenen Reihenformeln gegenüber als überlegen erscheinen. Die Rechenkontrolle ist durchgreifend, da bei Anwendung von (1) und (2) nicht mit den gleichen numerischen Winkelwerten in die Funktionstafeln eingegangen wird. Die Abweichung der nach beiden Formeln gerechneten Höhenunterschiede überschritt nicht den Betrag von 2 mm. Bemerkenswert ist, daß das dritte Glied $\frac{s^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta}{2r}$ der Reihenformel (1) bei den teilweise steilen Visuren erheblichen Einfluß hat, nämlich bis zu 8,56 cm in der Visur Wassernase-Bärenkopf des Banihalnetzes. Zur Berechnung der Einzelhöhenunterschiede ist ferner zu bemerken:

Refraktionskoeffizient $k = 0,10$ für Baniḥalnetz
 $k = 0,176$ für Riasinetz

Mittl. Erdradius $r = \sqrt{M \cdot N}$. Dieser wurde für jedes Netz nach der Mittelbreite gesondert gerechnet.

Entfernung s . Sie ist stets auf die Höhe des Instrumentenstandpunktes zu beziehen und entsprechend zu reduzieren.

Refraktionswinkel δ , erhalten aus der Beziehung $\delta = \gamma \cdot k$ (3); k wurde also als das Verhältnis von Refraktionswinkel zu Zentriwinkel angenommen. Es bleibt zu klären, ob die Annahme $\delta = \frac{\gamma \cdot k}{\cos \beta}$ (4), also $k =$ Verhältnis der Radian, den tatsächlichen Bedingungen besser gerecht wird.

2. Ausgleichsverfahren

Zur methodischen Betrachtung mögen die üblichen Ausgleichsverfahren an dieser Stelle aufgeführt werden:

a) Die klassischen Ausgleichsverfahren, nämlich

Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen,
 Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen,

der Höhenunterschiede, ohne Berücksichtigung von Lotabweichungen, mit verschiedenen Gewichtsfestsetzungen der Fehlergleichungen [7], [8], [12].

b) Die vier von R. Finsterwalder 1937 angegebenen Ausgleichsverfahren [2]:

1. Gemeinsame Bestimmung aller Höhen und Lotabweichungen in einem Rechengang nach vermittelnden Beobachtungen. (Wegen großen Rechenaufwandes bisher kaum benutzt).
2. Stufenweise Ausgleichung: Berechnung der Höhen nach a) nachträgliche Berechnung der Lotabweichungen aus Restfehlern in jedem einzelnen Punkt. (Angewendet und diskutiert in [2], [3]).
3. Stufenweise Ausgleichung, jedoch zuerst Berechnung der Lotabweichung aus gegenseitigen Zenitdistanzen, an-

- schließend normale Höhenausgleichung nach a) mit den verbesserten Höhenwinkeln der ersten Stufe. (Angewendet z. B. in [10]).
4. Auflösung des Höhennetzes in meridionale Profile und ostwestliche Querverbindungen. (Angewendet in [15]).
- c) Netzausgleichung durch wiederholte Bildung des arithmetischen Mittels nach Anér, ausgebaut und gründlich erprobt von H. Lichte [17].
- d) Ausgleichung nach L. Hradilek [11]: Ausgleichung aller Bedingungen zwischen den gemessenen Höhenwinkeln unter Mitführung der Lotabweichungen als zusätzliche Unbekannte. Da das Verfahren neu ist, soll es kurz skizziert werden. Hradilek definiert:
- „Seitenbedingungsungleichungen“, welche zwischen gegenseitig gemessenen Zenitdistanzen als Folge der vorgeschriebenen Winkelsumme im Normalschnitt bestehen;
- „Dreiecksbedingungsungleichungen“, welche aus der Bedingung des Höhenschlusses im Dreieck folgen. Ihre Anzahl ist identisch mit der Zahl der Winkelgleichungen bei der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen im Grundriß.

Die Summe der „Seitenbedingungsungleichungen“ und „Dreiecksbedingungsungleichungen“ erschöpft alle überhaupt möglichen Bedingungen zwischen den Beobachtungen der Höhen-triangulation. Da in der Ausgleichung die Lotabweichungen als Unbekannte mitgeführt werden, werden die Zenitdistanzen implizit in der Ausgleichung auf die Rechenfläche reduziert. Die Höhen werden anschließend aus den widerspruchsfreien ausgeglichenen Zenitdistanzen berechnet und beziehen sich streng auf die vorher definierte Rechenfläche, also das Ellipsoid.

Von den genannten Verfahren sind nur die Ausgleichungen nach R. Finsterwalder (Berechnung von Höhen und Lotabweichungen in einem Guß) und L. Hradilek (Berücksichtigung aller Relationen zwischen den Beobachtungen) streng in dem Sinne, als das zugrunde liegende geometrisch mathematische Modell der Höhentriangulation (gegeben durch die Höhenformel) voll in der Ausgleichung berücksichtigt wird.

Das Verfahren 3 von R. Finsterwalder kann als Teilung der Ausgleichung nach Hradilek aufgefaßt werden. Auch die anderen vorstehend genannten Ausgleichsmethoden sind Näherungsmethoden. Denn die in der ersten Ausgleichungsstufe erhaltenen Werte werden in die zweite Teilausgleichung wie unabhängige Beobachtungen eingeführt, während sie, da sie aus einer ersten Ausgleichung hervorgehen, miteinander korreliert sind. Nur die strengen Ausgleichsverfahren vermögen Höhen zu liefern, deren Bezugsfläche eindeutig definiert ist. Unter Berücksichtigung der am kreisbogenförmig angenommenen Normalschnitt des Ellipsoids abgeleiteten Höhenformel beziehen sich die aus den strengen Ausgleichungen abgeleiteten Höhen auf das Ellipsoid. Demgegenüber ist die Bezugsfläche der aus Näherungsausgleichungen erhaltenen Höhen nicht eindeutig bestimmt. Die Höhen beziehen sich weder auf die (ellipsoidische) Rechenfläche noch auf die physikalische Bezugsfläche [2], da man bei der Ausgleichung vernachlässigt, daß die physikalische Lotrichtung, nach der das Instrument orientiert wird, und die ellipsoidische Lotrichtung, nach der das mathematische Modell „orientiert“ ist, im allgemeinen nicht identisch sind.

Es muß jedoch ausdrücklich vermerkt werden, daß selbst das Zusammenfallen der Lotrichtungen in den Endpunkten einer Visur noch kein hinreichender Beweis für die Identität von Rechen- und Bezugsfläche ist. Die entsprechenden Verhältnisse sind von W. Hofmann [10] und K. Ledersteger [16] am Normalschnitt ausführlich diskutiert. Sie lassen sich anschaulich auch auf die flächenhafte Höhentriangulation erweitern.

Dazu mögen die verschiedenen mathematischen Modelle, wie sie der Höhenmessung zugrunde liegen, qualitativ in unterschiedlichen Annäherungsstufen formuliert werden:

a) Strenges Modell

Jedem Punkt der Erdoberfläche ist eine Raumkurve, nämlich die gekrümmte Lotlinie, zugeordnet. Die gekrümmten Lotlinien sind Orthogonaltrajektorien zu der Schar der Niveauflächen. Die ausgezeichnete Niveaufläche, welche die ruhende Meeresoberfläche enthält, wird als Geoid bezeichnet. Die orthometrische Höhe eines Punktes ist die metrische, längs der ge-

krümmten Lotlinie gemessene Entfernung vom Punkt bis zum Geoid. Da die Lotlinien Raumkurven sind, folgt, daß die Niveauflächen nicht parallel sind.

b) Erste Approximation

Die Krümmung der Lotlinien wird vernachlässigt und jede Lotlinie durch ihre Tangente im Punkt der Erdoberfläche ersetzt. Aus dem System von Raumkurven ist damit ein Vektorfeld geworden, welches wiederum eine Schar von Flächen definiert, zu denen die Vektoren Orthogonaltrajektorien sind. Die Schar dieser Flächen soll für die Zwecke dieser anschaulichen Interpretation als „angenäherte Niveauflächen“ bezeichnet werden. Auch diese „angenäherten Niveauflächen“ lassen sich nicht in einem elementargeometrischen Ausdruck beschreiben, sondern können z. B. durch eine Differentialgleichung dargestellt werden.

c) Zweite Approximation

Von den wie unter b) definierten Flächen wird eine als ausgezeichnet (Höhenhorizont) ausgewählt und durch eine elementargeometrisch beschreibbare Fläche möglichst gut angenähert. Diese Fläche soll als Rechenfläche bezeichnet werden. Als Rechenfläche ist zunächst jede mathematisch einfach beschreibbare Fläche geeignet, zum Zwecke dieser Untersuchung wählen wir jedoch eine ellipsoidische Fläche. Durch die ellipsoidische Fläche ist wieder ein System von ellipsoidischen Loten definiert, welches als ellipsoidisches Vektorfeld bezeichnet werden soll. Jedem ellipsoidischen Vektor ist ein Niveauvektor nach b) zugeordnet; die Richtungsabweichung zwischen zugeordneten Ellipsoidvektoren und Niveauvektoren soll als lokale Lotstörung bezeichnet werden. Da wir unter b) bereits die gekrümmten Lotlinien durch ihre Tangenten ersetzt haben, ist die Zuordnung eindeutig und nach Helmert definiert [9], [13].

Es ist theoretisch durchaus denkbar, daß in einzelnen zugeordneten Punkten der beiden Flächen nach b) und c) Niveauvektor und Ellipsoidvektor auch in ihrer Richtung identisch sind. Diese Identität ist jedoch lediglich ein Kriterium für die Parallelität der beiden entsprechenden Tangentialebenen, *nicht* jedoch dafür, daß sich beide Flächen berühren. Wenn zufällig die Beobachtungsstationen in einer Höhentriangulation alle so liegen,

daß Ellipsoidvektor und Niveauvektor zusammenfallen, so können bei der Höhenberechnung *keine* Lotstörungen nachgewiesen werden, ohne daß in diesem Verschwinden aller Lotstörungen ein Beweis für die Identität von „angenäherter Niveaufläche“ und Rechenfläche im gesamten Netz liegt.

Eine diesen Verhältnissen entsprechende Topographie der Erdoberfläche ist gedanklich konstruierbar, sie könnte in Anlehnung an die Photogrammetrie als „gefährliche Topographie“ bezeichnet werden; z. B.:

In einem vollkommen flachen Gebiet mögen sich vereinzelte kegelförmige Berge verschiedener Höhe erheben. Zu jedem dieser kegelförmigen Berge gehört eine kleine Niveauflächenundulation, die wie eine „Blase“ auf der sonst nach allen Richtungen gleichmäßig gekrümmten Niveaufläche sitzt. Da die Berge verschieden hoch sein sollen, haben auch die relativen Undulationen verschiedene Höhen. Werden jetzt bei einer Höhentriangulation nur Beobachtungspunkte auf den Bergspitzen gewählt, so sind in allen Aufstellungspunkten Rechenflächenvektor und Niveauvektor richtungsidentisch; die berechneten Höhenunterschiede beziehen sich auf die Rechenfläche und können die Undulationen nicht erfassen.

Dieser Zufall ist bei der praktischen Höhentriangulation unwahrscheinlich; wohl aber kann es vorkommen, daß die berechneten lokalen Lotstörungen wenig repräsentativ sind und nur einen angenäherten Aufschluß über die wirkliche physikalische Bezugsfläche zulassen.

Andererseits folgt, daß beim Verschwinden aller Lotstörungen, d. h. beim Arbeiten in einer „gefährlichen Topographie“, die normale Höhenberechnung und Ausgleichung ohne Berücksichtigung von Lotstörungen Höhen ergibt, die sich streng auf die Rechenfläche beziehen.

Wesentliche Impulse erhielt die Systematik und Technik der Ausgleichsrechnung in neuerer Zeit aus drei verschiedenen Richtungen. Sie lassen sich mit großem Nutzen auch auf die Ausgleichsprobleme der Höhentriangulation anwenden:

1. Die systematische Erforschung und Darstellung der Ausgleichsrechnung und ihre Erweiterung auf korrelierte Beob-

achtungen, vor allem durch J. M. Tienstra [19]. Damit kann das Problem der Stufenausgleichung streng gelöst werden, da sich die aus einer ersten Ausgleichung hervorgehenden Größen als korrelierte Beobachtungen auffassen lassen.

2. Die Einführung des Matrizenkalküls in die Ausgleichsrechnung, vor allem durch E. Gotthardt [4], A. Bjerhammer [1] und R. Marchant [18]. Mit Hilfe der Matrizenrechnung lassen sich die inneren Zusammenhänge der Ausgleichsrechnung sehr klar darstellen, vor allem aber –, da jede Matrizen Gleichung auch eine Rechenvorschrift enthält –, sich geeignete Rechenverfahren bei der Ausgleichung in Stufen gewinnen. Als Beispiel sei der von E. Gotthardt entwickelte Matrizenalgorithmus [6] genannt.

3. Die Entwicklung der elektronischen Rechentechnik, welche die Verarbeitung umfangreichen Zahlenmaterials bei geringem Zeitbedarf gestattet.

Damit ist die Möglichkeit gegeben:

a) Die beiden genannten strengen Ausgleichsmethoden, welche bisher wegen der zeitraubenden Rechnungen nicht benutzt werden konnten, allgemeiner anzuwenden, z. B. auf das vorliegende Beobachtungsmaterial;

b) Die Genauigkeit der Näherungsverfahren kritischer, als es bisher möglich war, abzuschätzen. Die Abschätzung kann dabei aus zwei Gesichtspunkten erfolgen:

Empirische Abschätzung durch Vergleich der Ergebnisse von strengen Ausgleichungen mit den Ergebnissen der Näherungsausgleichung

Mathematische Abschätzung, unter Heranziehung der Theorie der korrelierten Beobachtungen und des Matrizenkalküls.

c) Da schließlich bei der Ausgleichung nach den strengen Verfahren auch erreicht wird, daß sich die Höhen immer auf eine eindeutige Rechenfläche beziehen, kann aus den sich auf die

Rechenfläche beziehenden Lotstörungen besser auf den Verlauf der physikalischen Bezugsfläche geschlossen werden.

Dazu sind gegenwärtig folgende Arbeiten im Gange, bzw. im weiteren Verlauf der Untersuchung geplant:

V. Praktische Berechnungen unter Berücksichtigung der im vorigen angegebenen Gesichtspunkte

1. Rechenprogramm an der PERM des Rechenzentrums der Technischen Hochschule München

In Zusammenarbeit mit dem Rechenzentrum werden gegenwärtig strenge Ausgleichungen für das Banihalnetz unter verschiedenen Nebenbedingungen gerechnet. Dies Netz eignet sich für Ausgangsuntersuchungen wegen seiner verhältnismäßig geringen Punktzahl (maximal 22 Unbekannte) bei genügenden Überbestimmungen (40 einseitige Höhenunterschiede) besonders. Die gewonnenen Erfahrungen sollen dann auf das größere Riasinetz angewendet werden, welches bei gemeinsamer Ausgleichung von Lotstörungen und Höhen über 50 Unbekannte enthält. Als begriffliche Verständigungsbrücke bewährte sich auch in dieser Zusammenarbeit zwischen Mathematikern und Geodäten die Matrizenrechnung, da der gesamte Komplex der linearen Gleichungen bei Verwendung größerer Rechenanlagen matrizentechnisch behandelt wird.

Die Lösung der Normalgleichungen erfolgt mit dem Rechenprogramm der Dreieckszerlegung nach Cholesky [22], [23], einer symmetrischen Matrix (Normalgleichungssystem). Da zur Untersuchung der Stufenausgleichung auch das vollständige Gewichtsgleichungssystem benötigt wird, werden alle Normalgleichungssysteme immer auch unbestimmt aufgelöst. D. h. es wird jede symmetrische Normalgleichungsmatrix nicht nur nach den bekannten rechten Seiten aufgelöst, sondern auch die inverse Matrix gebildet. Zur Lösung eines Normalgleichungssystems von 20 bis 25 Unbekannten benötigt die PERM 10 bis 12 Minuten, wobei die Hälfte der Zeit auf die Inversion entfällt.

Es wird dabei nach folgenden Gesichtspunkten experimentiert:

Änderung des Radius der Bezugsfläche (durch Einführung einer Krümmungskorrektur als Unbekannte, bei fest angenommener Refraktion).

Einführung von Nebenbedingungen für die Lotstörungen: Die Lotstörung wird in ausgezeichneten Punkten gleich Null angenommen, d. h. in diesen ausgezeichneten Punkten wird die physikalische Lotrichtung mit der ellipsoidischen identifiziert.

Die Summe aller Lotstörungen im Netz wird gleich Null gesetzt, als zusätzliche Nebenbedingung. (Entspr. der Bedingung, daß die Summe der quadratischen Lotstörungen zum Minimum wird).

Durch diese Berechnungen wird eine lokal bestanschließende Rechenfläche gewonnen, die durch die bekannten Eingangselemente eindeutig definiert ist. Die verbleibenden Lotstörungen beziehen sich dann natürlich auf diese Rechenfläche. Da jedoch in den Punkten Nord und Süd der Triangulation die Lotabweichungen des indischen Referenzellipsoids bekannt sind, lassen sie sich entsprechend umrechnen.

Aus den verbleibenden Lotstörungen soll anschließend, ähnlich wie beim astronomischen Nivellement [20], [21], die physikalische Bezugsfläche als alle physikalischen Lotrichtungen senkrecht schneidend abgeleitet werden. Die Genauigkeit des Verfahrens hängt von der Signifikanz der Beobachtungspunkte ab und kann selbstverständlich Lotkrümmungen nicht berücksichtigen.

Die Zwischenergebnisse der Berechnung lassen die Genauigkeit des Beobachtungsmaterials auch für diese Untersuchungen ausreichend erscheinen:

1. Die größten Lotabweichungsdifferenzen sind (absolut) etwa zwanzigmal so groß wie der mittlere Beobachtungsfehler der Zenitdistanzmessung.

2. Die Genauigkeit der Höhenübertragung von Nord nach Süd ergibt sich zu $\pm 1,2$ cm. Da das Banihalnetz Abstecknetz für einen inzwischen fast fertiggestellten Tunnel ist, konnte die

Höhenübertragung nivellistisch nach dem Durchschlag durch den Tunnel hindurch kontrolliert werden. Dabei ergab sich eine Abweichung von 4 mm zwischen dem aus der Höhentriangulation gerechneten und dem durch das Nivellement direkt gemessenen Höhenunterschied.

Da normalerweise zur Berechnung von trigonometrischen Höhenmessungen eine elektronische Rechanlage nicht zur Verfügung steht, wurden auch für die praktische Rechnung wesentliche Fragen in die Untersuchung miteingeschlossen, z. B.:

2. Einfluß verschiedener Gewichtsannahmen auf das Ergebnis

Wie die Erfahrungen zeigen [2], [17], ändern sich die Werte der ausgeglichenen Höhen nur wenig bei verschiedener Gewichtsannahme für die Fehlergleichungen. Im Beispiel des Banihalnetz ändern sich die Punkthöhen nur innerhalb ihres mittleren Fehlers, wenn man gegenüber der strengen Gewichtsannahme (Verhältnis des größten zum kleinsten Gewicht 1 : 25), alle Fehlergleichungen als gleichgewichtig einführt.

Die Frage werde mit Hilfe des Matrizenkalküls definiert:

Bei Annahme gleicher Gewichte erhält man über die

$$\text{Fehlergleichungen} \quad \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{l} + \mathfrak{v} \quad (5)$$

$$\text{die Normalgleichungen} \quad (\mathfrak{A}' \mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{A}' \mathfrak{l} \quad (6)$$

$$\text{mit der Lösung} \quad \mathfrak{x} = (\mathfrak{A}' \mathfrak{A})^{-1} \cdot \mathfrak{A}' \mathfrak{l} = (\mathfrak{A}' \mathfrak{C} \mathfrak{A})^{-1} \cdot \mathfrak{A}' \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{l} \quad (7)$$

Bei ungleichen Gewichten ist eine zusätzliche, nur in ihrer Hauptdiagonalen besetzte Gewichtsmatrix

$$\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & p_n \end{pmatrix}$$

zu berücksichtigen.

Damit wird das Normalgleichungssystem $(\mathcal{W}'\mathcal{P}\mathcal{W}) \cdot \mathfrak{x} = \mathcal{W}'\mathcal{P} \cdot \mathfrak{l}$ (8)

mit der Lösung $\mathfrak{x} = (\mathcal{W}'\mathcal{P}\mathcal{W})^{-1} \cdot \mathcal{W}'\mathcal{P} \cdot \mathfrak{l}$. (9)

Die Frage lautet also:

Wie ändert sich der Vektor $\mathfrak{x}$, wenn statt der Einheitsmatrix $\mathcal{E}$ die mit verschiedenen Elementen besetzte Diagonalmatrix $\mathcal{P}$ in den Lösungsformen

$$\mathfrak{x} = (\mathcal{W}'\mathcal{E}\mathcal{W})^{-1} \cdot \mathcal{W}'\mathcal{E} \cdot \mathfrak{l}$$

$$\bar{\mathfrak{x}} = (\mathcal{W}'\mathcal{P}\mathcal{W})^{-1} \cdot \mathcal{W}'\mathcal{P} \cdot \mathfrak{l} \quad \text{steht.}$$

3. Untersuchung der ausgeglichenen Höhenunterschiede als direkte Funktion der beobachteten Höhenunterschiede

Es ist aus der Theorie der Ausgleichsrechnung bekannt, daß sich die ausgeglichenen Größen als direkte lineare Funktion der beobachteten Größen darstellen lassen. Dennoch wurde bisher diese Darstellungsart kaum zu Untersuchungen herangezogen. E. Gotthardt zeigt in [5] die Anwendung auf ein Dreiecksnetz.

Bezeichnet man wieder das Fehlergleichungssystem mit $\mathcal{W} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{l} + \mathfrak{v}$, so erhält man über das Normalgleichungssystem $(\mathcal{W}'\mathcal{W}) \cdot \mathfrak{x} = \mathcal{W}'\mathfrak{l}$

durch Einsetzen $\mathfrak{l} + \mathfrak{v} = \{\mathcal{W} \cdot (\mathcal{W}'\mathcal{W})^{-1} \cdot \mathcal{W}'\} \cdot \mathfrak{l} = \tilde{\mathcal{W}} \cdot \mathfrak{l}$ (10)

und für die Unbekannten $\mathfrak{x} = \{(\mathcal{W}'\mathcal{W})^{-1} \cdot \mathcal{W}'\} \cdot \mathfrak{l} = \bar{\mathcal{W}} \cdot \mathfrak{l}$. (11)

In dieser Darstellungsart ist der Anteil der Einzelbeobachtungen am ausgeglichenen Ergebnis klar ersichtlich. Damit besteht die Möglichkeit zur Untersuchung von

Einfluß systematischer Verfälschungen der Beobachtungen auf das Ausgleichsergebnis

Einfluß weiter entfernt liegender Netzteile auf einen bestimmten Punkt, bzw. Höhe.

Mit den Untersuchungen nach den vorstehend genannten Gesichtspunkten, die sich an die praktische Berechnung der

Netze knüpfen, sollen Wege erschlossen werden, welche allgemein die Möglichkeiten der trigonometrischen Höhenmessung für Wissenschaft und Praxis weiter ausnutzen lassen, als dies bisher der Fall war.

Literaturverzeichnis

- [1] Bjerhammer, A., Application of calculus of matrices to method of least squares. Kungl. Tekniska Högskolans Handlingar Transaction of the Royal Institute of Technology, Stockholm, Bd. 49, 1951.
- [2] Finsterwalder, R., Die Bestimmung von Lotabweichungen aus der trigonometrischen Höhenmessung. Zeitschrift f. Vermessungswesen 1937, Heft 13, 14, 16.
Die geodätischen, gletscherkundlichen und geographischen Ergebnisse der Deutschen Himalaya-Expedition 1934 zum Nanga Parbat. Deutsche Forschung, Neue Folge Bd. 2, Berlin 1938.
- [3] Finsterwalder, R. und Gänger, H., Die trigonometrische Höhenmessung im Gebirge. Bericht über eine genaue Höhentriangulation in den Chiemgauer Alpen. Nachr. aus dem Reichsvermessungsdienst 1941, Nr. 1.
- [4] Gotthardt, E., Ableitung der Grundformeln der Ausgleichsrechnung mit Hilfe der Matrizenrechnung. Deutsche Geod. Kommission bei der Bayerischen Akad. d. Wissenschaften, Reihe A: Höhere Geodäsie-Veröffentl. Nr. 4, Bamberg 1952.
- [5] Gotthardt, E., Kritische Betrachtungen zur Ausgleichung, insbesondere der von Dreiecksketten und -netzen. Deutsche Geod. Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe A: Höhere Geodäsie-Veröffentl. Nr. 7, München 1953.
- [6] Gotthardt, E., Der Matrizenalgorithmus. Deutsche Geod. Kommission, Vollsitzung 1953, wissenschaftl. Referate II. Teil, München 1955.
- [7] Grossmann, W., Grundzüge der Ausgleichsrechnung. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.
- [8] Helmert, F. R., Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1907.
- [9] Helmert, F. R., Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie. 2 Bände, Leipzig 1880-84.
- [10] Hofmann, W., Studien zur trigonometrischen Höhenmessung im Gebirge. Bayerische Akademie der Wissenschaften, Neue Folge Heft 70, München 1955.
- [11] Hradilek, L., Bestimmung der relativen Lotabweichungen und des Refraktionskoeffizienten beim Ausgleich trigonometrisch gemessener Höhennetze. Karls-Universität Prag, 1955.

- [12] Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde, 7. Auflage Bd. 1, Stuttgart 1920.
- [13] Kneißl, M., Begriff und Bedeutung der Lotabweichung in der Geodäsie. Allg. Verm.-Nachr. 1951, Heft 4.
- [14] Kneißl, M. und Sigl, R., Geodätische Beiträge zur naturwissenschaftlichen Erforschung Bayerns. Bayerische Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Neue Folge Heft 87, München 1958.
- [15] Kobold, F., Die Bestimmung der Lotabweichungskomponenten im Meridian des St. Gotthard aus Höhenwinkelmessungen. Commission Géodésique Suisse, Neuchâtel 1951.
- [16] Ledersteger, K., Zur Theorie der trigonometrischen Höhenmessung. Veröffentl. der Österr. Kommission für die internationale Erdmessung, Wien 1955.
- [17] Lichte, H., Die trigonometrische Höhenmessung als Hilfsmittel der Landesvermessung. Geodätisches Institut der Technischen Hochschule Hannover, 1948.
- [18] Marchant, R., La compensation des mesures surabondantes. Institut Géographique Militaire, 2, Allée du Cloître-Bruxelles 1956.
- [19] Tienstra, J. M., Theory of the adjustment of normally distributed observations. N. V. Uitgeverij „Argus“, Amsterdam 1956.
- [20] Wolf, H., Versuch einer Geoidbestimmung im mittleren Europa aus astronomisch-geodätischen Lotabweichungen. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe A: Allg. Geodäsie-Heft 18, Frankfurt a. M. 1956.
- [21] Zurmühl, R., Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker (S. 319 ff.), Springer-Verlag, Berlin/Gött./Heidelberg 1953.
- [22] Zurmühl, R., Matrizen. (S. 70). – 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Gött./Heidelberg 1958.
- [23] Hallert, B., Über einige Verfahren zur Lösung von Normalgleichungen. Zeitschr. f. Verm.-Wesen, 1943, S. 238.