

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1959

MÜNCHEN 1960

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über Regelflächen mit ähnlichen Lieschen Schmieglflächen 2. Ordnung und die Spitzen der scheinbaren Umrisse von Regelschrauben- flächen bei Parallelprojektion

Von Hermann Schaal in Stuttgart

Mit 26 Abbildungen

Vorgelegt von Herrn Frank Löbell am 6. März 1959

Übersicht

	Seite
1. Problemstellung	112
2. Grundlagen: Der Begleitkörper. Die Grundinvarianten	113
3. Schmieglstreifen 2. Ordnung einer Regelfläche $\mathcal{P}$	118
4. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Exi- stenz von Regelflächen Φ der verlangten Art. Folgerungen	120
5. Eine anschauliche Erzeugung von Φ	133
6. Regelflächen 2. Ordnung F_0	139
7. Beispiele zu Regelflächen Φ mit lauter ähnlichen Lie- F^2 .	144
8. Regelflächen Φ , deren sämtliche Schmieglstreifen 2. Ord- nung zu einem einzigen Schmieglstreifen 2. Ordnung von F_0 ähnlich sind	151
9. Eine Konstruktion der Lie- F^2 bei Regelschraubenflächen	155
10. Umrißspitzen	166
11. Konstruktion der bei Parallelprojektion von Φ mög- licherweise auftretenden Spitzen des scheinbaren Um- risses	168
12. Eine Konstruktion der beim scheinbaren Umriß von Regelschraubenflächen möglicherweise auftretenden Spitzen	170
Literaturverzeichnis	181

Die vorliegende Arbeit ist eine gekürzte Fassung meiner von der Technischen Hochschule Stuttgart genehmigten Dissertation. Die Originalfassung befindet sich in der Bibliothek der Mathematischen Institute der T. H. Stuttgart.

Meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. O. Baier danke ich für seine allzeit tatkräftige Unterstützung bei der Fertigstellung dieser Arbeit.

1. Problemstellung

Drei diskrete Erzeugende e_i ($i = 1, 2, 3$) einer beliebigen windschiefen Regelfläche Ψ bestimmen im allgemeinen eine Regelfläche 2. Ordnung, deren Grenzlage für $e_i \rightarrow e_1$ die Liesche Schmieglfläche 2. Ordnung F^2 (kurz: Lie- F^2)² von Ψ längs der Erzeugenden e_1 darstellt.³ Die Lie- F^2 berührt Ψ längs e_1 von 2. Ordnung, hat also in jedem Punkt von e_1 mit Ψ die Dupinsche Indikatrix gemeinsam. Läßt man die Regelfläche Ψ von der Erzeugenden e_1 überstreichen, so ändert die mitgeführte Lie- F^2 im allgemeinen Lage, Größe und Gestalt. Es sollen nun alle Regelflächen Φ bestimmt werden, deren sämtliche Lie- F^2 zu einer vorgegebenen Regelfläche 2. Ordnung F_0 ähnlich sind.⁴ Bei dieser ähnlichen Beziehung werden den Berührerzeugenden von verschiedenen Lie- F^2 im allgemeinen verschiedene Erzeugende von F_0 entsprechen. Es ist jedoch auch möglich, daß den Berührerzeugenden von allen Lie- F^2 immer dieselbe Erzeugende von F_0 entspricht. Im Hinblick darauf läßt sich die Aufgabe jetzt in folgender Weise formulieren:

Der Flächenstreifen der Lie- F^2 von Ψ längs e_1 , der e_1 im Innern enthält und der von zwei (beliebigen) Erzeugenden der zu e_1 gehörenden Schar begrenzt wird, soll als „Schmiegstreifen 2. Ordnung von Ψ längs e_1 “ bezeichnet werden. In ihm ist e_1 also besonders ausgezeichnet. Es sollen zunächst alle Regelflächen Φ bestimmt werden, bei denen jeder Schmiegstreifen 2. Ordnung zu

² Vgl. z. B. Müller [17] Bd. I S. 353, Blaschke [1] Bd. II S. 221–228, insbesondere S. 226–228, Müller-Krames [18] Bd. III S. 79 (dort als „oskulierendes Hyperboloid“ bezeichnet), Kruppa [11] S. 130 (dort als „Schmiequadrik F^2 “ bezeichnet).

³ In diesem Sinne ist die vielfach benützte Ausdrucksweise zu verstehen: „Die Lie- F^2 ist durch drei benachbarte Erzeugende von Ψ bestimmt.“

⁴ Mit einem in gewissem Sinne verwandten Problem befaßte sich E. Edlinger, „Über Regelflächen, deren sämtliche oskulierenden Hyperboloide Drehhyperboloide sind“ [4]; vgl. S. 131. Krames bemerkt in [18] S. 82–83, daß die Regelflächen, die längs jeder Erzeugenden von einem hyperbolischen Paraboloid oskuliert werden, eine Richtebene besitzen, und daß jede Regelfläche mit einer Richtebene als oskulierende Regelflächen 2. Grades nur (hyperbolische) Paraboloid besitzt.

irgendeinem Schmiegestreifen 2. Ordnung von F_0 ähnlich ist. Sodann sollen die speziellen Regelflächen Φ ermittelt werden, bei denen alle Schmiegestreifen 2. Ordnung zu demselben Schmiegestreifen 2. Ordnung von F_0 ähnlich sind, die also mit anderen Worten lauter ähnliche Schmiegestreifen 2. Ordnung haben.

Auf Grund der Eigenschaft der Regelflächen Φ , daß sämtliche $Lie-F^2$ zu einer vorgegebenen Regelfläche 2. Ordnung ähnlich sind, kann eine einheitliche Konstruktion entwickelt werden, nach der man die bei Parallelprojektion von Φ möglicherweise auftretenden Spitzen des scheinbaren Umrisses bestimmen kann. Seit Ch. Dupin wurde vielfach auf solche Spitzen aufmerksam gemacht, insbesondere bei der Behandlung der Umrisse von Regelschraubenflächen.⁵ Abgesehen vom speziellen Fall der Wendelfläche wird jedoch nirgends eine Konstruktion dieser Spitzen versucht. Bei den Regelschraubenflächen wird die Konstruktion besonders einfach; zum einen Teil hat sie dabei transzendenten Charakter (die Verschraubung). Der andere Teil ist algebraisch vom vierten Grad; es stellt sich jedoch heraus, daß die Konstruktion dieses algebraischen Teils sogar mit Zirkel und Lineal möglich ist. Außerdem ergibt sich ein Kriterium für das Auftreten solcher Umrißspitzen.

2. Grundlagen:

Der Begleitkörper. Die Grundinvarianten

Zunächst sollen als Grundlagen für die späteren Ausführungen einige wichtige und bekannte Sachverhalte über Regelflächen in geeigneter Weise dargestellt werden. Es wird dabei erstrebt, das geometrische Objekt durch sachgemäße, unmittelbare geometrische Betrachtungen zu erfassen. Die Anschaulichkeit soll dabei

⁵ Mit den Umrissen von Flächen befaßten sich Monge [15], [16], Dupin [3], Hachette [7], de la Gournerie [5], [6], Mannheim [14] in allgemeiner Weise. Burmester [2] und Wiener [26] behandelten die Umrisse von beliebigen Schraubenflächen. Die Umrisse von Regelschraubenflächen bei Parallelprojektion wurden von Tesař [24], [25], Pelz [20], Prochazka [21], Mack [13], Janisch [8], Rohn-Papperitz [22], Schmid [23] in mehr oder weniger spezieller Weise behandelt.

besondere Pflege finden. Wegen der erwünschten Eindeutigkeit müssen Fragen der Orientierung eingehend behandelt werden.

Die Regelfläche Ψ werde durch stetige Bewegung einer zunächst willkürlich gerichteten Geraden e im Raum erzeugt. Es seien e_i ($i = 1, 2, 3$) die Lagen von e zu den Zeiten $t = t_i$,

$$(1) \quad t_1 < t_2 < t_3$$

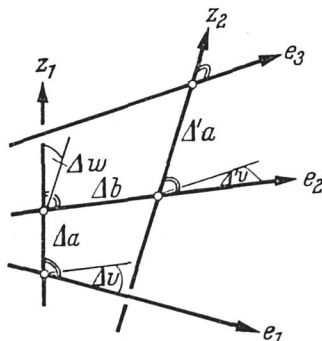


Abb. 1

(Abb. 1). Die Gerade e_1 läßt sich durch (kürzeste) Schraubung um das Gemeinlot z_1 von e_1, e_2 in e_2 überführen (Drehwinkel Δv , Vorschub Δa ; der Fall $\Delta v = 0$ wird ausgeschlossen). z_1 sei so orientiert, daß die Richtungen e_1, e_2, z_1 ein Rechtssystem bilden. Die orientierte Gerade z_1 geht durch (kürzeste) Schraubung um e_2 in das Gemeinlot z_2 von e_2, e_3 über (Drehwinkel Δw , Vorschub Δb). z_2 erhält dadurch eine Orientierung.

Ändert man den (ursprünglich willkürlich festgelegten) Richtungssinn von e und damit von e_i , und läßt man im übrigen die Geraden e_1, e_2, z_1, z_2 in ihrer Lage, so wird die Orientierung von z_1 und z_2 dadurch nicht geändert. Es ist zweckmäßig, die Orientierung der Geraden e bzw. e_i fortan so zu wählen, daß die Richtungen z_1, z_2, e_2 ein Rechtssystem bilden (im Fall $\Delta w = 0$ kann der Richtungssinn von e beliebig sein).

Die Orientierung des Drehwinkels Δv ($\Delta v \neq 0$) der Schraubung $e_1 \rightarrow e_2$ soll so festgesetzt werden, daß

$$(2) \quad \Delta v > 0$$

ist. Der Vorschub Δa sei positiv, wenn e_1 durch Rechtsschraubung in e_2 übergeht, und negativ, wenn dies durch Linksschraubung erfolgt. Schneiden sich e_1, e_2 , so ist $\Delta a = 0$. Die Bewegung $e_1 \rightarrow e_2$ ist dabei eine reine Drehung, die im folgenden – wie auch die reine Schiebung – lediglich als Sonderfall einer Schraubung betrachtet wird.

Der Drehwinkel Δw der Schraubung $z_1 \rightarrow z_2$ sei (falls $\Delta w \neq 0$ ist) so orientiert, daß

$$(3) \quad \Delta w > 0$$

ist. Der Vorschub Δb sei positiv oder negativ, je nachdem z_1 durch Rechts- oder Linksschraubung in z_2 übergeht.

Setzt man

$$(4) \quad \Delta t = t_2 - t_1,$$

so ist die Grenzlage von z_1 für $\Delta t \rightarrow 0$ die Zentraltangente von Ψ im Kehlpunkt von e_1 . Der bewegliche rechte Winkel, dessen einer Schenkel die auf Ψ bewegte Erzeugende e und dessen anderer Schenkel die zugehörige Zentraltangente z bildet (dessen Scheitel also die Striktionslinie von Ψ beschreibt), werde im Anschluß an F. Löbell Begleitkörper⁶ von Ψ genannt. Die Grenzwerte, deren Existenz vorausgesetzt wird,

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta a}{\Delta t}, \\ \dot{b} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta b}{\Delta t}, \\ \dot{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}, \\ \dot{w} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} \end{aligned}$$

bestimmen den augenblicklichen Bewegungszustand des Begleitkörpers im Zeitpunkt $t = t_1$. Ist $t = t_1$ variabel ($t_0 \leq t \leq t_n$), so sind (5) Funktionen von t . Sie werden als die (homogenen)

⁶ F. Löbell [12] S. 30–31 (kursiv).

Grundinvarianten von Ψ bezeichnet.⁷ Die Funktionen $\dot{a}$, $\dot{b}$ sind die Komponenten der momentanen Schubgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Kehlpunktes in Richtung z bzw. e . Entsprechend sind $\dot{v}$, $\dot{w}$ die Komponenten der momentanen Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ des Begleitkörpers in Richtung z bzw. e .⁶ (In der zu e , z senkrechten Richtung [Flächennormale] haben $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ keine Komponenten).

Der zeitliche Ablauf der Bewegung des Begleitkörpers kann durch willkürliche Beschleunigung oder Verzögerung geändert werden. Das Verhältnis der Momentangeschwindigkeiten (5) wird dabei nicht geändert. Deshalb werden oft auch die drei inhomogenen Grundinvarianten

$$\begin{aligned} k_1 &= \dot{a} : \dot{v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta a}{\Delta v}, \\ (6) \quad k_2 &= \dot{\tilde{b}} : \dot{v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta \tilde{b}}{\Delta v}, \\ k_3 &= \dot{w} : \dot{v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta v} \end{aligned}$$

verwendet.⁸ S. Finsterwalder bezeichnete in seinen Vorlesungen k_1 als „Schränkungsradius“ (k_1^{-1} als „Schränkung“),⁹ k_2 als „Verwerfung“, k_3 als „Biegung“ der Regelfläche Ψ . Da Δv und Δt immer positiv sind, haben k_i ($i = 1, 2, 3$) dieselben Vorzeichen wie $\dot{a}$, $\dot{\tilde{b}}$, $\dot{w}$. Insbesondere ist wegen $\Delta v > 0$, $\Delta w \geq 0$ stets

$$(7) \quad k_3 \geq 0.$$

⁷ Nach einer Bemerkung von Löbell [12] S. 31 und Zindler [28] S. 21 wurden diese Funktionen von X. Antomari (1894) eingeführt. Im wesentlichen dieselben Funktionen definieren K. Zindler [28] S. 2 ff., S. 17 ff., W. Blaschke [1] S. 270, J. Krames [18] S. 103–104, E. Kruppa [11] S. 127–129, F. Löbell [12] S. 31–41, u. a.

⁸ Solche Tripel von inhomogenen Grundinvarianten lassen sich noch in mannigfach anderer Weise bilden; tatsächlich findet man in der Literatur keine Einheitlichkeit.

⁹ Wie F. Löbell bemerkt (vgl. [12] S. 32 kursiv), geht die Bezeichnung „Schränkung“ für k_1^{-1} auf F. Buka (1881) zurück. M. Chasles bezeichnete k_1 als „Verteilungsparameter“, W. Blaschke als „Drall“ (vgl. [1] Bd. I S. 268); diese Benennungen sind jedoch uneinheitlich.

gleichzeitig ausgedrückt, daß die geometrischen Betrachtungen vom zeitlichen Ablauf unabhängig sind. Der Anschaulichkeit ist es jedoch förderlich, sich den Ablauf durchaus zeitlich vorzustellen, etwa so, daß der sphärische Bildpunkt der bewegten Erzeugenden e auf (I) die konstante Bahngeschwindigkeit 1 hat, daß also

$$(9) \quad v = t$$

ist. Dann bedeutet Δt zugleich den Bogen zwischen den durch $v_1 = t_1$ und $v_2 = t_2$ festgelegten Punkten von (I) . Nach (2) bedeutet Δv die sphärische Sehne dieses Bogens. Daher ist

$$(10) \quad \dot{v} = \lim_{\Delta t, \Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = 1.$$

Ersetzt man die Sehne Δv durch den Bogen $v_2 - v_1$, so wird der Fehler wegen (10) beliebig klein, sofern Δv genügend klein ist. Im Hinblick auf den späteren Grenzübergang $\Delta v \rightarrow 0$ kann demnach unter Δv auch der Bogen $v_2 - v_1$ verstanden werden.

3. Schmiegestreifen 2. Ordnung einer Regelfläche Ψ

Die drei Erzeugenden e_i ($i = 1, 2, 3$) von Ψ seien durch die Parameterwerte v_1 , $v_1 + \Delta v$, $v_1 + \Delta v + \Delta'v$ bestimmt (Abb. 1 S. 114). Gemäß (10) ist Δv der Winkel von e_1 , e_2 und $\Delta'v$ der Winkel von e_2 , e_3 . Der kürzeste Abstand von e_1 , e_2 sei wieder Δa , der kürzeste Abstand von e_2 , e_3 sei $\Delta'a$. Da e_3 aus e_2 durch Schraubung um z_2 mit dem Vorschub $\Delta'a$ und dem Drehwinkel $\Delta'v$ hervorgeht, sind die drei Geraden e_i durch die sechs Werte

$$(11) \quad \Delta a, \Delta b, \Delta v, \Delta w, \Delta'a, \Delta'v$$

bis auf eine Bewegung im Raum festgelegt. Läßt man Δv , $\Delta'v$ unabhängig voneinander beliebige Nullfolgen durchlaufen, so erhält man bei geeigneten Voraussetzungen über die Differenzierbarkeit als Grenzlage der durch e_i bestimmten Regelfläche 2. Ordnung unabhängig von der Art der Nullfolgen die Lie- F^2

von Ψ längs e_1 . Diese Lie- F^2 bestimmt zusammen mit der ausgezeichneten Erzeugenden e_1 den Schmiegestreifen 2. Ordnung von Ψ längs e_1 .

Durch den Grenzübergang $\Delta v \rightarrow 0$ erhält man aus (11) gemäß (6) die Grundinvarianten von Ψ an der Stelle $v = v_1$

$$(12a) \quad k_1(v_1) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta a}{\Delta v},$$

$$(12b) \quad k_2(v_1) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta b}{\Delta v},$$

$$(12c) \quad k_3(v_1) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta v}.$$

Entsprechend erhält man aus (11) für $\Delta'v \rightarrow 0$, $\Delta v \neq 0$ die Grundinvariante k_1 von Ψ an der Stelle $v = v_1 + \Delta v$

$$(13) \quad k_1(v_1 + \Delta v) = \lim_{\Delta'v \rightarrow 0} \frac{\Delta' a}{\Delta' v}.$$

Mit (12a) und (13) ergibt sich die Dralländerung von Ψ an der Stelle $v = v_1$ durch den Grenzwert

$$(14) \quad \left. \frac{dk_1}{dv} \right|_{v=v_1} = k'_1(v_1) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{k_1(v_1 + \Delta v) - k_1(v_1)}{\Delta v}.$$

Durch das Wertequadrupel

$$(15) \quad k_1(v_1), \quad k_2(v_1), \quad k_3(v_1), \quad k'_1(v_1)$$

ist der Schmiegestreifen 2. Ordnung längs e_1 vollständig bestimmt, wie folgende Überlegung zeigt.

Bildet man mit (15) die sechs Werte

$$(16) \quad \overline{\Delta a} = k_1 \Delta v, \quad \overline{\Delta b} = k_2 \Delta v, \quad \Delta v, \quad \overline{\Delta w} = k_3 \Delta v,$$

$$\overline{\Delta' a} = (k_1 + k'_1 \Delta v) \Delta' v, \quad \Delta' v, \quad (\Delta v > 0, \Delta' v > 0),$$

so weichen diese für genügend kleine Δv , $\Delta' v$ von (11) beliebig wenig ab. Daher weichen auch die durch (11) und (16) definierten

Regelflächen 2. Ordnung beliebig wenig voneinander ab; daraus folgt, daß ihre Grenzlagen für $\Delta v, \Delta'v \rightarrow 0$ übereinstimmen. Der Schmiegestreifen 2. Ordnung von Ψ längs e_1 ist demnach durch (15) vollständig bestimmt. Zwei Schmiegestreifen mit demselben Wertequadrupel (15) sind also kongruent.

Zwei Schmiegestreifen 2. Ordnung mit den Werten (15) und

$$(17) \quad c \cdot k_1(v_1), \quad c \cdot k_2(v_1), \quad k_3(v_1), \quad c \cdot k'_1(v_1) \quad (c = \text{const.} \neq 0)$$

sind gleichsinnig oder ungleichsinnig ähnlich, je nachdem $c > 0$ oder $c < 0$ ist; dies sieht man folgendermaßen ein. Der Faktor $|c|$ bewirkt eine Maßstabänderung der Längen $\Delta a, \Delta b$, und $\Delta' a$, während die Winkel $\Delta v, \Delta w, \Delta' v$ ungeändert bleiben. Da nach (2) und (3) alle Winkel positiv genommen werden müssen, bewirkt der Faktor -1 die Änderung der Richtungen aller Längen; dies hat wiederum die Änderung sämtlicher Schraubsinne zur Folge, was einer Spiegelung an einer Ebene (oder einer Spiegelung an einem Punkt des Raumes) gleichkommt.

4. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Regelflächen Φ der verlangten Art. Folgerungen

Alle Größen, die zu der gegebenen Regelfläche 2. Ordnung F_0 gehören, werden mit einem Querstrich bezeichnet, ohne Querstrich dagegen die entsprechenden Größen, die zur Regelfläche Φ gehören. Soll jeder Schmiegestreifen 2. Ordnung von Φ zu einem Schmiegestreifen 2. Ordnung von F_0 ähnlich sein, so ist dafür wegen (15) und (17) notwendig und hinreichend, daß es zu jedem Wert v von Φ (mindestens) einen Wert $\bar{v}$ von F_0 gibt, so daß

$$(18) \quad \begin{aligned} k'_1(v) : k_1(v) &= \bar{k}'_1(\bar{v}) : \bar{k}_1(\bar{v}), \\ k_2(v) : k_1(v) &= \bar{k}_2(\bar{v}) : \bar{k}_1(\bar{v}), \\ k_3(v) &= \bar{k}_3(\bar{v}) \end{aligned}$$

gilt. Es muß also eine Funktion

$$(19) \quad \bar{v} = f(v)$$

geben, so daß (18) erfüllt ist.

Es gelten nun die folgenden drei Sätze:

Satz 1. Zu jeder beliebigen reellen, eindeutigen und stetig differenzierbaren Funktion $\bar{v} = f(v)$ gibt es bis auf Ähnlichkeit genau eine Regelfläche Φ , deren sämtliche Lie- F^2 zur gegebenen Regelfläche 2. Ordnung F_0 ähnlich sind.

Satz 2. Die nach Satz 1 (bis auf Ähnlichkeit) bestimmte Regelfläche Φ ist genau dann von 2. Ordnung (und damit notwendig zu F_0 ähnlich), wenn entweder F_0 eine beliebige Regelfläche 2. Ordnung und in (21) $\bar{v} = v - v_0$, $v_0 = \text{const.}$ ist, oder wenn F_0 ein Rotationshyperboloid und $\bar{v} = f(v)$ eine beliebige Funktion ist.

Durch Satz 2 wird gewährleistet, daß die Gesamtheit der Regelflächen Φ aus Satz 1 nicht bloß von den Regelflächen 2. Ordnung gebildet wird.

Satz 3. Außer dem Rotationshyperboloid gibt es keine Regelfläche, deren sämtliche Lie- F^2 zu demselben vorgegebenen Rotationshyperboloid F_0 ähnlich sind.

Beweis von Satz 1

Bei gegebener Fläche F_0 sind $\bar{k}_i(\bar{v})$, $\bar{k}'_1(\bar{v})$ ($i = 1, 2, 3$) bekannte analytische Funktionen von $\bar{v}$.¹¹ Durch die Substitution $\bar{v} = f(v)$ geht (18) über in

$$(20) \quad \begin{aligned} k'_1 &: k_1 = g_1(v), \\ k_2 &: k_1 = g_2(v), \\ k_3 &= g_3(v), \end{aligned}$$

¹¹ Diese sind S. 139 bis S. 144 ausgerechnet.

wobei $g_i(v)$ eindeutige, reelle und stetig differenzierbare Funktionen von v sind. Aus der ersten Gleichung ergibt sich durch Integration

$$(21) \quad k_1(v) = C \cdot e^{\int_0^v g_1(t) dt}, \quad C = \text{const.} \neq 0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt damit

$$(22) \quad k_2(v) = C \cdot g_2(v) \cdot e^{\int_0^v g_1(t) dt}.$$

Damit sind die Funktionen $k_i(v)$ bestimmt. Wegen der willkürlichen Konstante C in (21) und (22) ist Φ durch die Funktionen k_i bis auf Ähnlichkeit eindeutig festgelegt.

Es sei

$$(23) \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{a}(v)$$

die Parameterdarstellung der sphärischen Indikatrix (I) von Φ in Abhängigkeit von der Bogenlänge v von (I) ($a \leq v \leq b$) bezogen auf den Kugelmittelpunkt als Ursprung. Die Parameterdarstellung der Striktionslinie von Φ sei

$$(24) \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{z}(v).$$

Bedeutet u ($c \leq u \leq d$) die Länge auf den Erzeugenden von Φ , gemessen von der Striktionslinie in Richtung $\mathfrak{a}$, so ist

$$(25) \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{z}(v) + u \cdot \mathfrak{a}(v)$$

die Gleichung von Φ mit den Parametern u, v . Sind $k_i(v)$ gegeben, so kann (25) in folgender Weise bestimmt werden.¹²

Nach (23) ist der Einheitsvektor $\mathfrak{a}$ mit der Erzeugenden e gleichgerichtet (Abb. 3). Der Einheitsvektor $\mathfrak{A}$ sei mit der vom Kehlpoint K ausgehenden Zentraltangente z gleichgerichtet. Der durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{A}$ bestimmte Begleitkörper von Φ hat nach (5), (6) und (9) die Drehgeschwindigkeit

$$(26) \quad \mathfrak{u} = k_3 \mathfrak{a} + \mathfrak{A}.$$

¹² Damit wird zugleich bewiesen, daß Φ durch die Grundinvarianten k_i eindeutig bestimmt ist. Der hier eingeschlagene Weg ist von den in Fußnote 10 S. 117 angegebenen Beweisen teilweise verschieden.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \mathfrak{z}' \mathfrak{A} = (\mathfrak{z}' \mathfrak{a} \mathfrak{a}'), \\
 k_2 &= \mathfrak{z}' \mathfrak{a} \\
 k_3 &= \mathfrak{A} \mathfrak{a}'' = (\mathfrak{a} \mathfrak{a}' \mathfrak{a}'').
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

Die Aufgabe besteht nun darin, die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{z}$ aus den k_i zu bestimmen:

Da v Bogenlänge von (I) ist, erhält man aus (32) den Krümmungsradius ϱ von (I) mit

$$1 : \varrho = |\mathfrak{a}''| = + \sqrt{1 + k_3^2}.$$

$$\tag{35}$$

Ist $k_3 \equiv 0$, dann ist $\varrho \equiv 1$. (I) ist dann ein Kugelgroßkreis; dies bedeutet, daß Φ eine Richtebene besitzt. Ist $k_3 \equiv \text{const.} \neq 0$, dann ist $\varrho \equiv \text{const.} < 1$. (I) ist in diesem Fall ein Kugelkleinkreis und der Richtkegel von Φ ein Drehkegel. Es ist zweckmäßig, die Fälle $k_3 \neq \text{const.}$ und $k_3 \equiv \text{const.}$ getrennt zu behandeln.

$k_3 \neq \text{const.}$ Dann ist $\varrho' \neq 0$. Aus der Gleichung für den Radius R der Schmiegekugel der sphärischen Indikatrix (I)

$$R^2 = \varrho^2 + \varrho'^2 \tau^2 = 1$$

$$\tag{36}$$

ergibt sich der Torsionsradius τ von (I) in Abhängigkeit von der Bogenlänge v bis auf das Vorzeichen zu

$$\tau = \pm k_3 \frac{\varrho}{\varrho'}.$$

$$\tag{37}$$

Durch $\varrho(v)$ und $\tau(v)$ ist (I) bis auf die Lage im Raum bestimmt. Die verschiedenen Vorzeichen von τ führen zu spiegelbildlichen Kurven (I) . Da diese durch räumliche Punktspiegelung zu gleichsinnig kongruenten Kurven werden, so legen beide denselben Richtkegel fest. Durch diesen ist der Vektor $\mathfrak{a}$ bis auf ein Vorzeichen bestimmt. Das Vorzeichen von $\mathfrak{a}$ ist nun entsprechend der Vereinbarung (7) S. 116 so zu wählen, daß $k_3 = (\mathfrak{a} \mathfrak{a}' \mathfrak{a}'') \geq 0$ ist. Der Vektor $\mathfrak{a}$ ist damit bestimmt. Aus (29) folgt

$$\mathfrak{A} = [\mathfrak{a} \mathfrak{a}'].$$

$$\tag{38}$$

Mit den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{U}$ erhält man aus (28) durch Integration

$$(39) \quad \mathfrak{z} = \int_a^v (k_2 \mathfrak{a} + k_1 \mathfrak{U}) dt + \mathfrak{z}_0, \quad \mathfrak{z}_0 = \text{const.}$$

Die Regelfläche Φ ist damit im Fall $k_3 \equiv \text{const.}$ bis auf ihre Lage im Raum eindeutig bestimmt.

$k_3 \equiv \text{const.}$ In diesem Fall kann Φ einfacher bestimmt werden, da (I) als Kreis bereits bekannt ist. Es sei $\frac{\pi}{2} - \alpha$ der halbe Öffnungswinkel des Richtkegels von Φ (Abb. 4). Dann ist

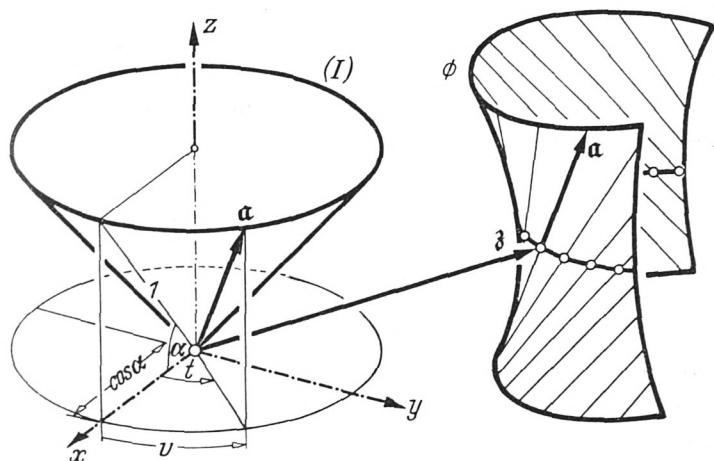


Abb. 4

$$(40) \quad \mathfrak{a} = \left(\cos \alpha \cos \frac{v}{\cos \alpha}, \cos \alpha \sin \frac{v}{\cos \alpha}, \sin \alpha \right).$$

Für $\alpha = 0$ ist der Richtkegel zu einer Ebene entartet, für die (40) ebenfalls gilt. Die Parameterdarstellung der Striktionslinie von Φ sei

$$(41) \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{z}(v) = (x(v), y(v), z(v)).$$

a) $x(v), y(v) \equiv \text{const.}$ Es sei t der Winkel der Tangenten an den Grundriß

$$(42) \quad x = x(v), \quad y = y(v)$$

der Striktionslinie gegen die x -Achse ($t \neq \text{const.}$), r der Krümmungsradius von (42) und s die Bogenlänge von (42). Dann ist

$$(43) \quad \frac{dx}{ds} = \cos t, \quad \frac{dy}{ds} = \sin t, \quad \frac{ds}{dt} = r.$$

Differenziert man (41) nach v , so erhält man mit (43)

$$(44) \quad \frac{d\mathfrak{z}}{dv} = \mathfrak{z}' = \left(r \cos t \cdot \frac{dt}{dv}, \quad r \sin t \cdot \frac{dt}{dv}, \quad z'(v) \right).$$

Die Bedingung $\alpha' \mathfrak{z}' = 0$ für die Striktionslinie (vgl. (33) S. 123) gibt nach kurzer Rechnung

$$(45) \quad t = \frac{v}{\cos \alpha},$$

vgl. Abb. 4. Bildet man mit (40), (44) und (45) die Werte k_i an Hand von (34), so erhält man

$$(46) \quad \begin{aligned} k_1 &= z'(v) \cos \alpha - r(t) \operatorname{tg} \alpha, \\ k_2 &= z'(v) \sin \alpha + r(t), \\ k_3 &= \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt sofort α . Die ersten beiden Gleichungen bilden ein lineares System für z' und r , wobei die Determinante

$$(47) \quad \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{tg} \alpha \\ \sin \alpha & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos \alpha} \neq 0$$

ist. Für $\alpha = 0$ wird $r = k_2$, $z' = k_1$, $k_3 \equiv 0$. Das Vorzeichen von α kann dabei beliebig genommen werden.

Es sei noch bemerkt, daß der Grundriß (42) der Striktionslinie keine Gerade sein kann, denn aus dem Ansatz

$$(48) \quad \mathfrak{z}' = \left(\frac{ds}{dv} \cos t, \quad \frac{ds}{dv} \sin t, \quad z'(v) \right), \quad t = \text{const.}$$

für ihre Richtung folgt zusammen mit (40) und (33) nach kurzer Rechnung $\frac{ds}{dv} = 0$; damit folgt aus (48) durch Integration

$$(49) \quad x(v) = \text{const.}, \quad y(v) = \text{const.}$$

entgegen der Voraussetzung a).

b) $x(v) \equiv \text{const.}, y(v) \equiv \text{const.}, z(v) \not\equiv \text{const.}$ Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn

$$(50) \quad k_2 - k_1 k_3 \equiv 0, \quad k_3 \equiv \text{const.}$$

ist, wie aus folgendem hervorgeht.

Es sei (50) erfüllt. Dann kann man für α den Ansatz (40) machen. Aus (34) folgt mit (40) wieder

$$(46') \quad k_3 = \text{tg } \alpha.$$

Aus (38) und (40) erhält man mit $t = \frac{v}{\cos \alpha}$

$$(51) \quad \mathfrak{A} = (-\sin \alpha \cos t, -\sin \alpha \sin t, \cos \alpha).$$

Zerlegt man $\mathfrak{z}'$ in (28) mit Hilfe von (40) und (51) in Komponenten der Richtungen x, y, z , so ergibt sich

$$(52) \quad \mathfrak{z}' = \begin{pmatrix} (k_2 \cos \alpha - k_1 \sin \alpha) \cos t \\ (k_2 \cos \alpha - k_1 \sin \alpha) \sin t \\ (k_2 \sin \alpha + k_1 \cos \alpha) \end{pmatrix}.$$

Aus (50) und (46') folgt

$$(53) \quad k_2 = k_1 \text{ tg } \alpha.$$

Damit gibt (52)

$$(54) \quad \mathfrak{z}' = \left(0, 0, \frac{k_1}{\cos \alpha} \right),$$

also gerade Fall b).

Setzt man dagegen (54) voraus, so folgt aus (33), daß die z -Komponente von α identisch verschwinden muß, daß also α mit

der z -Achse einen festen Winkel bildet.¹³ Daher kann man für α den Ansatz (40) machen. Durch Vergleich von (52) und

$$(55) \quad \mathfrak{z}' = (0, 0, z'(v))$$

und mit (46') erhält man

$$(56) \quad \begin{aligned} k_1 &= z'(v) \cos \alpha, \\ k_2 &= z'(v) \sin \alpha, \\ k_3 &= \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Damit ist (50) erfüllt, und es gelten die Gleichungen (46) von Fall a), wenn dort noch $r(t) = 0$ gesetzt wird.

Durch die Funktionen $r(t)$ und $z'(v)$ ist $\mathfrak{z}$ eindeutig bis auf die Lage im Raum bestimmt. Es ist nämlich

$$(57) \quad \mathfrak{z} = \left(\int_{t_a}^t r(t^*) \cos t^* dt^*, \int_{t_a}^t r(t^*) \sin t^* dt^*, \int_a^v z'(v^*) dv^* \right).$$

Aus (40), (44) und (45) folgt außerdem, daß der Grundriß von α Tangente an den Grundriß (42) der Striktionslinie ist. Die Striktionslinie ist also wahrer Umriß von Φ bei Parallelprojektion senkrecht $z = 0$. Es gilt jedoch auch das Umgekehrte: Ist die Striktionslinie wahrer Umriß einer Regelfläche Ψ bei Parallelprojektion in Richtung z , so muß die Flächennormale $\alpha' = [\mathfrak{A} \alpha]$ (vgl. (29) S. 123) zu z senkrecht stehen. Daher hat α' in Richtung z keine Komponente; daraus folgt, daß α mit der z -Achse einen festen Winkel bildet.¹⁴

Damit ist nun gezeigt, daß es zu jeder Funktion $\bar{v} = f(v)$ nach Satz 1 eine Regelfläche Φ gibt, deren sämtliche Lie- F^2 zur ge-

¹³ Damit ist gleichzeitig folgende Spezialisierung eines Satzes von Bonnet bewiesen: Jede Regelfläche mit gerader Striktionslinie (S) hat als Richtkegel einen Drehkegel, dessen Achse zu (S) parallel ist, oder sie ist ein gerades Koid, vgl. Krames [18] S. 144.

¹⁴ Krames [18] S. 136: Die Striktionslinie einer Regelfläche Φ ist dann und nur dann zugleich wahrer Umriß für parallele Projektionsstrahlen l , wenn der Richtkegel von Φ ein Drehkegel (mit zu l paralleler Achse) ist oder wenn Φ eine (zu l normale) Richtebene besitzt.

gebenen Fläche F_0 ähnlich sind. Wegen der willkürlichen Konstante C in (21) und (22) S. 122 ist Φ bis auf Ähnlichkeit bestimmt.

Beweis von Satz 2 und Satz 3

Alle Lie- F^2 einer Regelfläche 2. Ordnung fallen mit dieser selbst zusammen. Soll Φ eine Regelfläche 2. Ordnung sein, so muß demnach notwendig Φ zu F_0 ähnlich sein. Dann ist

$$(58) \quad k_1(v) = \bar{k}_1(\bar{v}) \cdot c, \quad c = \text{const.} \neq 0.$$

Durch Differenzieren nach v erhält man

$$(58') \quad k'_1(v) = \bar{k}'_1(\bar{v}) \cdot \frac{d\bar{v}}{dv} \cdot c.$$

Damit ist

$$(59) \quad \frac{k'_1(v)}{k_1(v)} = \frac{\bar{k}'_1(\bar{v})}{\bar{k}_1(\bar{v})} \cdot \frac{d\bar{v}}{dv}.$$

Durch Vergleich von (59) mit der ersten Zeile von (18) S. 120 folgt

$$(59') \quad \frac{\bar{k}'_1(\bar{v})}{\bar{k}_1(\bar{v})} = \frac{\bar{k}'_1(\bar{v})}{\bar{k}_1(\bar{v})} \cdot \frac{d\bar{v}}{dv}.$$

Diese Gleichung ist für $\bar{v}(v)$ identisch erfüllt, wenn

- (a) $\bar{k}'_1(\bar{v}) \equiv 0$ für alle Werte $\bar{v}$ oder
 (60) (b) $\bar{k}'_1(\bar{v}) = 0$ für den Wert $\bar{v}_0$, wobei die Funktion $\bar{v}(v) = \bar{v}_0 = \text{const.}$ ist, oder
 (c) $\frac{d\bar{v}}{dv} = 1$ gilt.

Im Fall (a) ist $\bar{k}_1(\bar{v}) \equiv \text{const.}$; die einzige Regelfläche 2. Ordnung mit konstantem Drall ist jedoch das Rotationshyperboloid. Wegen der Rotationssymmetrie sind für dieses auch $\bar{k}_2(\bar{v})$ und $\bar{k}_3(\bar{v})$ je konstant. Die Funktionen $\bar{k}_i$ eines Rotationshyperboloids erhält man aus (46) mit $s'(v) = 0$ und dem vereinbarten Querstrich

$$(61) \quad \bar{k}_1 = -\bar{r} \operatorname{tg} \bar{\alpha}, \quad \bar{k}_2 = \bar{r}, \quad \bar{k}_3 = \operatorname{tg} \bar{\alpha}, \quad \bar{r} = \text{const.}$$

Ist F_0 als Rotationshyperboloid durch (61) gegeben, und ist $\bar{v} = f(v)$ eine beliebige Funktion, so erhält man die Grundinvarianten k_i von Φ aus (20) S. 121 mit

$$(62) \quad g_1 = 0, \quad g_2 = -\operatorname{ctg} \bar{\alpha}, \quad g_3 = \operatorname{tg} \bar{\alpha}.$$

Danach ist

$$(63) \quad k_1 = C, \quad k_2 = -C \cdot \operatorname{ctg} \bar{\alpha}, \quad k_3 = \operatorname{tg} \bar{\alpha}, \quad C = \text{const.}$$

Damit erhält man aus (46)

$$(64) \quad \alpha = \bar{\alpha}, \quad z'(v) = 0, \quad r(t) = -C \cdot \operatorname{ctg} \bar{\alpha}.$$

Dies bedeutet, daß Φ wieder ein Rotationshyperboloid und damit eine Regelfläche 2. Ordnung ist.

Damit ist gleichzeitig auch Satz 3 bewiesen.

Im Fall (b) ist die Funktion $\bar{v} = f(v)$ konstant gleich $\bar{v}_0$. Daher muß nach 4. S. 120 die Regelfläche Φ lauter ähnliche Schmiegestreifen 2. Ordnung haben. Die einzige Regelfläche 2. Ordnung mit dieser Eigenschaft ist das Rotationshyperboloid. Ist Φ speziell ein Rotationshyperboloid, dann notwendig auch F_0 . Dies bedeutet, daß die Funktion $\bar{v} = f(v)$ nur dann zu einer Regelfläche 2. Ordnung Φ führt, wenn F_0 ein Rotationshyperboloid ist. Ist andererseits F_0 ein Rotationshyperboloid, dann auch Φ auf Grund von Satz 3.

Im Fall (c) ist F_0 beliebig. Aus (60c) folgt notwendig

$$(65) \quad \bar{v} = v - v_0, \quad v_0 = \text{const.}$$

Da (65) lediglich eine Verschiebung der Bogenlänge der sphärischen Indikatrix um v_0 bedeutet, so leuchtet es geometrisch unmittelbar ein, daß (65) auch hinreichend dafür ist, daß Φ zu F_0 ähnlich und daher eine Regelfläche 2. Ordnung ist.

Der Fall, daß F_0 ein Rotationshyperboloid ist, soll zur Vertiefung noch von einem anderen Standpunkt aus betrachtet werden, zumal da die Aussage von Satz 3 zunächst sehr überrascht.

E. Edlinger [4] untersuchte die Regelflächen, deren sämtliche Lie- F^2 Rotationshyperboloide sind, vgl. Fußnote 4 S. 112, und zeigte: Läßt man ein starres gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid auf einer seiner Mindingschen Biegungsflächen ohne Gleiten rollen, so beschreibt die zur Schar der Eingriffslinien gehörende Scheitelerzeugende des Paraboloids eine Regelfläche, deren sämtliche Lie- F^2 Rotationshyperboloide sind. Jede Regelfläche mit dieser Eigenschaft läßt sich auch auf diese Weise erzeugen. Die Eingriffslinien werden von der einen Schar des Paraboloids gebildet und sind zugleich die Drehachsen der Rotationshyperboloide, die die Lie- F^2 bilden.

Nach diesem von E. Edlinger gefundenen Sachverhalt folgt unmittelbar, daß es außer dem Rotationshyperboloid keine Regelfläche gibt, die lauter ähnliche Rotationshyperboloide als Lie- F^2 hat: Da nämlich die Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloids mit der Scheitelerzeugenden dieser Schar lauter verschiedene Winkel einschließen, so kann die nach E. Edlinger erzeugte Regelfläche nicht lauter ähnliche Rotationshyperboloide als Lie- F^2 besitzen, es sei denn, die Regelfläche sei selbst ein Rotationshyperboloid. Dieses entsteht nach E. Edlinger als Sonderfall, wenn an Stelle der Mindingschen Biegungsfläche des Paraboloids eine Gerade gesetzt wird, um die man das Paraboloid rotieren läßt.

Im Anschluß an Satz 1 gilt der folgende

Satz 4. Durch die Funktion $\bar{v} = f(v)$ sind die Regelflächen Φ und F_0 derart aufeinander bezogen, daß für entsprechende Erzeugende v von Φ und $\bar{v} = f(v)$ von F_0

- a) die logarithmische Ableitung des Dralls nach der Bogenlänge der sphärischen Indikatrix,
 - b) der Winkel der Striktionslinie mit der Erzeugenden,
 - c) die Krümmung der sphärischen Indikatrix
- bei beiden Flächen übereinstimmen.

Beweis

a) Es ist

$$(66) \quad \frac{d}{dv} \log k_1(v) = \frac{k'_1(v)}{k_1(v)} ; \quad \frac{d}{d\bar{v}} \log \bar{k}_1(\bar{v}) = \frac{\bar{k}'_1(\bar{v})}{\bar{k}_1(\bar{v})} .$$

Nach (18) S. 120 gilt also

$$(67) \quad \frac{d}{dv} \log k_1(v) = \frac{d}{d\bar{v}} \log \bar{k}_1(\bar{v}).$$

b) Ist $\sigma(v)$ der Winkel der Striktionslinie $\mathfrak{s}(v)$ mit der Erzeugenden $\mathfrak{a}(v)$, so ist wegen (28) S. 123

$$(68) \quad \operatorname{tg} \sigma(v) = \frac{k_1(v)}{k_2(v)}; \quad \operatorname{tg} \bar{\sigma}(\bar{v}) = \frac{\bar{k}_1(\bar{v})}{\bar{k}_2(\bar{v})}.$$

Nach (18) folgt damit

$$(69) \quad \sigma(v) = \bar{\sigma}(\bar{v}).$$

c) Aus (35) S. 124 und (18) folgt

$$(70) \quad 1 : \varrho(v) = 1 : \bar{\varrho}(\bar{v}).$$

Es soll nun noch der Ähnlichkeitsmaßstab der Lie- F^2 zur gegebenen F_0 als Funktion von v bestimmt werden.

Der Drall von Φ längs einer Erzeugenden v ist $k_1(v)$; der Drall von F_0 längs der entsprechenden Erzeugenden $\bar{v} = f(v)$ ist $\bar{k}_1(\bar{v})$. Damit hat man als Ähnlichkeitsmaßstab $m(v)$ der Lie- F^2 von Φ längs v zur festen Fläche F_0

$$(71) \quad m(v) = k_1(v) : \bar{k}_1(\bar{v}), \quad \bar{v} = f(v).$$

Gibt es Regelflächen Φ , deren sämtliche Lie- F^2 zu einer gegebenen Regelfläche 2. Ordnung F_0 kongruent sind? Dann muß $m(v) \equiv 1$ sein. Aus (71) ergeben sich (58) S. 129 mit $c = 1$, und (59). Die Fälle (a) und (c), vgl. (60), führen wie dort zu Flächen 2. Ordnung. Im Fall (b), also für $\bar{v} = f(v) = v_0 = \text{const.}$, sind $\bar{k}_i(\bar{v}_0)$, $\bar{k}'_1(\bar{v}_0)$ konstant für alle v . Daher muß Φ in diesem Fall notwendig lauter kongruente Schmiegestreifen 2. Ordnung besitzen, vgl. (17) S. 120 mit $c = 1$. Dies bedeutet, daß die Grundinvarianten $k_i(v)$ von Φ Konstante sind. Aus (46) S. 126 folgt dann $\alpha = \text{const.}$, $r(t) = \text{const.}$ und $z'(v) = \text{const.}$, also $z(v) = \text{const.} \cdot v$. Dies bedeutet, daß Φ eine (allgemeine oder spezielle) Regelschraubenfläche (oder im Sonderfall ein Rotations-

hyperboloid) sein muß. Umgekehrt hat jede Regelschraubenfläche lauter kongruente Lie- F^2 , da man sie starr in sich verschrauben kann. Damit gilt

Satz 5. Die Regelschraubenflächen sind die einzigen Regelflächen, die lauter kongruente Lie- F^2 besitzen und nicht selbst von 2. Ordnung sind.¹⁵

5. Eine anschauliche Erzeugung von Φ

Sind die Grundinvarianten $k_i(v)$ einer beliebigen Regelfläche Ψ gegeben, so kann Ψ nach K. Zindler [28] S. 20–21¹⁶ dadurch erzeugt werden, daß man die Erzeugende e und ihre Zentraltangente z die durch (5) S. 115 definierte Bewegung ausführen läßt. Die Fläche Ψ erhält man näherungsweise, wenn man die Bewegung (5) in endlichen Schritten ausführt, indem man das Intervall $t_a \leq t \leq t_b$ in Teilintervalle Δt unterteilt und in jedem davon die Geschwindigkeiten (5) konstant läßt.

Ein anderer Weg, zu einer anschaulichen Erzeugungsweise der Regelfläche Ψ zu gelangen, ist der folgende.

Durch die beiden Vektorfunktionen $\alpha(v)$ und $\mathfrak{z}(v)$ ist die Regelfläche nach (25) S. 122 bestimmt. Da die Funktion $\alpha(v)$ den Ortsvektor der sphärischen Indikatrix (I) von Ψ bedeutet, so ist $\alpha(v)$ bekannt, wenn (I) bzw. der Richtkegel K von Ψ bestimmt ist. Da $\alpha'(v)$ der Tangentenvektor von (I) ist, so spannen $\alpha(v)$ und $\alpha'(v)$ die Tangentialebene von K auf. Der Normalenvektor von K ist daher $\mathfrak{A} = [\alpha \alpha']$. Der Winkel Δw zwischen $\mathfrak{A}(v)$ und $\mathfrak{A}(v + \Delta v)$ ist demnach auch der Winkel der Tangentialebenen von K längs $\alpha(v)$ und $\alpha(v + \Delta v)$. Nach (12c) S. 119 erhält man in erster Näherung

$$(72) \quad \Delta w = k_3(v) \Delta v.$$

¹⁵ Die Lie- F^2 einer allgemeinen Regelschraubenfläche werden in 9., S. 155 bestimmt.

¹⁶ Vgl. auch L. Krames [18] S. 104, F. Löbell [12] S. 29–34 (kursiv), E. Kruppa [11] S. 128.

Der Mantel von K läßt sich nun näherungsweise dadurch herstellen, daß der (radial aufgeschnittene) Einheitskreis zunächst in lauter Sektoren mit den (kleinen) Zentriwinkeln Δv eingeteilt wird. Auf seinem orientierten Umfang sei $v = a$ als Anfangspunkt festgelegt. Biegt man nun die Kreisscheibe derart (Abb. 5),

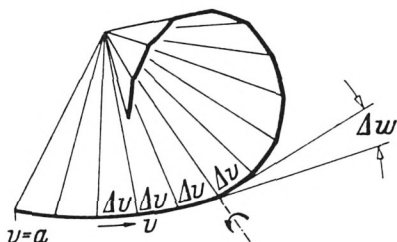


Abb. 5

daß die Sektoren eben bleiben und daß jeder Sektor mit seinem benachbarten den Winkel (72) bildet,¹⁷ wobei v durch den gemeinsamen Radius der benachbarten Sektoren festgelegt ist, so erhält man eine Näherungsfläche für K , die für $\Delta v \rightarrow 0$ den Richtkegel K als Grenzlage hat. Der Kreisumfang geht bei der Biegung in einen sphärischen Polygonzug über, der eine Näherung der Indikatrix (I) von Ψ darstellt und für $\Delta v \rightarrow 0$ die Grenzlage (I) hat. Aus der geometrischen Bedeutung von Δv , Δw folgt weiter, daß k_3 die tangentielle Krümmung von (I) auf der Einheitskugel ist; k_3 wird auch als konische Krümmung von K bezeichnet.

Ist Φ eine Regelfläche, deren sämtliche Lie- F^2 zu F_0 ähnlich sind, so kann ihre sphärische Indikatrix (I) auch in folgender Weise erzeugt werden.

Es sei F_0 ein einschaliges Hyperboloid.¹⁸

Die einparametrische Schar der Lie- F^2 von Φ läßt sich dadurch erzeugen, daß man die gegebene Fläche 2. Ordnung F_0 in bestimmter Weise an Φ entlangbewegt und gleichzeitig im Maß-

¹⁷ Durch die sich auf (3) S. 115 und (7) S. 116 beziehenden Vereinbarungen ist festgelegt, nach welcher Seite zu biegen ist.

¹⁸ Falls nichts anderes gesagt ist, soll das Rotationshyperboloid im folgenden ausgeschlossen sein.

stab $m(v)$ ähnlich deformiert. Der Richtkegel der bewegten und ähnlich deformierten Fläche F_0 wird dabei gestaltlich nicht geändert,¹⁹ ebensowenig die sphärische Indikatrix $(\bar{I})$ von F_0 . Die Indikatrix $(\bar{I})$ gleitet daher – in sich starr – an (I) entlang und berührt dabei (I) nach Satz 4, c stets von 2. Ordnung. Die Vektoren $\bar{a}(\bar{v})$, $\bar{\mathfrak{A}}(\bar{v})$ von F_0 decken sich in jeder Lage mit den Vektoren $a(v)$, $\mathfrak{A}(v)$ von Φ . Der durch a , $\mathfrak{A}$ bestimmte Begleitkörper von Φ ist daher auch zugleich Begleitkörper von F_0 .

a) Ist $\bar{v} = f(v) \neq \text{const.}$, so ist wegen $k_3(v) = \bar{k}_3(\bar{v})$ der Drehvektor

$$(73) \quad u = k_3 a + \mathfrak{A} = \bar{k}_3 \bar{a} + \bar{\mathfrak{A}}, \quad \bar{v} = f(v)$$

des Begleitkörpers gegen Φ und gegen F_0 derselbe. Daraus folgt, daß u auch der Drehvektor der Bewegung von $(\bar{I})$ gegen (I) ist. Wegen (29) und (31) S. 123 ist u zu a' und a'' und damit zur Schmiegebene von (I) senkrecht. Da u vom Kugelmittelpunkt ausgeht, ist u demnach die Krümmungsachse von (I) und damit auch von $(\bar{I})$. Für den Bewegungsablauf von $(\bar{I})$ gegen (I) bedeutet dies, daß die sphärische Evolute (E) von (I) die Rastpolbahn, die sphärische Evolute $(\bar{E})$ von $(\bar{I})$ die Gangpolbahn der Bewegung ist, daher gilt

Satz 6. Bei der Bewegung der Lie- F^2 längs der Regelfläche Φ rollt die sphärische Evolute von $(\bar{I})$ auf der sphärischen Evolute von (I) ohne Gleiten.

Die sphärische Evolute $(\bar{E})$ der Indikatrix $(\bar{I})$ eines einschaligen Hyperboloids ist nicht zu einem Punkt entartet.¹⁸ Läßt man $(\bar{E})$ auf einer beliebigen glatten, von einem Großkreis verschiedenen sphärischen Kurve (E) gleitfrei abrollen, so umhüllt $(\bar{I})$ eine sphärische Evolvente (I') von (E) . Ist v die Bogenlänge von (I') , so ist durch die Berührung eine Zuordnung $\bar{v} = f(v)$ der Punkte von (I') und $(\bar{I})$ festgelegt. Außerdem haben (I') und $(\bar{I})$ im jeweiligen Berührungspunkt eine gemeinsame Normalebene, die zu-

¹⁹ Von dieser Eigenschaft wird bei der Konstruktion der Spitzen des scheinbaren Umrisses von Φ bei Parallelprojektion wesentlich Gebrauch gemacht, siehe 11. S. 168.

gleich Tangentialebene der beiden Evoluten (E) und ($\bar{E}$) in deren Berührungspunkt ist. Daher haben (I') und ($\bar{I}$) in entsprechenden Punkten gleichen Krümmungsradius. Nach (35) S. 124 ist daher auch die tangentielle Krümmung $k_3(v)$ von (I') gleich der tangentialen Krümmung $\bar{k}_3(\bar{v})$ von F_0 . Wegen der dritten Gleichung (18) S. 120 ist daher (I') die sphärische Indikatrix (I) einer Regelfläche Φ , deren sämtliche Lie- F^2 zu F_0 ähnlich sind. Es gilt also die folgende Umkehrung von Satz 6:

Satz 7. Läßt man die sphärische Evolute der Indikatrix ($\bar{I}$) von F_0 auf einer beliebigen, von einem Großkreis verschiedenen sphärischen Kurve gleitfrei abrollen, so umhüllt ($\bar{I}$) die sphärische Indikatrix (I) einer Regelfläche Φ , deren Lie- F^2 sämtlich zu F_0 ähnlich sind.

b) Der Fall $\bar{v} = f(v) \equiv \text{const.}$ verdient besondere Beachtung. Der von $\bar{a}(\bar{v})$, $\bar{\mathfrak{A}}(\bar{v})$ festgelegte Begleitkörper des einschaligen Hyperboloids F_0 ist wegen $\bar{v} \equiv \text{const.}$ gegenüber F_0 in Ruhe. Da außerdem $\bar{k}_3(\bar{v}) \equiv \text{const.}$ folgt, so ist nach (18) S. 120 auch $k_3(v)$ eine Konstante. Folglich ist (I) ein Kugelkreis. Dieser muß jedoch wegen der gemeinsamen Krümmungsachse u der Krümmungskreis von ($\bar{I}$) im Punkt $\bar{v} = \text{const.}$ sein. Die Bewegung von ($\bar{I}$) gegen (I) erfolgt also dadurch, daß ($\bar{I}$) um die feste gemeinsame Krümmungsachse $u(\bar{v})$ eine reine Drehung ausführt. Dabei wird der Krümmungskreis (I) von ($\bar{I}$) in sich verschoben. Die Bewegung von F_0 längs Φ unterscheidet sich von der Bewegung im Fall a) $\bar{v} = f(v) \neq \text{const.}$ dadurch, daß die Berührerzeugende zwar auf Φ , nicht dagegen auf F_0 ihre Lage ändert. Wegen $\bar{v} \equiv \text{const.}$ berührt F_0 die Fläche Φ also immer längs derselben Erzeugenden von F_0 . Daher besitzt Φ sogar lauter ähnliche Schmiegestreifen 2. Ordnung, wie in 8. S. 151 ausgeführt wird. Im Fall a) dagegen ändert die Berührerzeugende während der Bewegung von F_0 ihre Lage auf beiden Flächen Φ und F_0 . Daher hat Φ zwar lauter ähnliche Lie- F^2 , nicht aber lauter ähnliche Schmiegestreifen 2. Ordnung.

Ist die sphärische Indikatrix (I) von Φ wenigstens näherungsweise gegeben, so kann die gesuchte Regelfläche Φ zumindest näherungsweise wie folgt bestimmt werden.

Die durch die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{A}$ aufgespannte Ebene ϑ (Abb. 6) schneidet die Einheitskugel in der sphärischen Normale $\mathfrak{n}$ von (I) . Beim Bewegungsablauf rollt $\mathfrak{n}$ gleitfrei auf der Evolute (E)

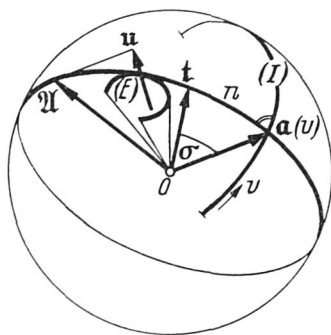


Abb. 6

von (I) . Der in der Ebene ϑ liegende und dort feste Vektor $\mathfrak{a}$ beschreibt dabei die sphärische Indikatrix (I) als Evolute von (E) . In der Ebene $\vartheta = (\mathfrak{a}, \mathfrak{A})$ werde der Einheitsvektor $\mathfrak{t}$ durch

$$(74) \quad \mathfrak{a} \mathfrak{t} = \cos \sigma$$

und

$$(75) \quad \mathfrak{A} \mathfrak{t} = \sin \sigma$$

festgelegt; dabei sei wie in (68) S. 132

$$(68) \quad \operatorname{tg} \sigma = k_1 : k_2.$$

Dann ist nach (28) S. 123

$$(76) \quad \mathfrak{t} = \frac{\mathfrak{z}'}{|\mathfrak{z}'|}.$$

Bewegt man nun den Richtkegel durch Parallelverschiebung in Richtung $\mathfrak{a}$ mit der Geschwindigkeit

$$(77) \quad |\mathfrak{z}'| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2},$$

so beschreibt der Vektor $\mathfrak{a}$ die Regelfläche Φ und der Kugel-

mittelpunkt O die Striktionslinie von Φ . Die Ebene ϑ stellt dabei den Begleitkörper von Φ dar.

Diese Erzeugungsweise hat den Vorzug, daß die Regelfläche Φ durch eine kontinuierliche Bewegung, also gewissermaßen in einem Zuge entsteht. Dies ist auch für die Anschaulichkeit sehr förderlich, besonders da die Striktionslinie hierbei als Bahn des Punktes O unmittelbar in Erscheinung tritt.

Es sei F_0 ein hyperbolisches Paraboloid.

Die Bewegung von $(\bar{I})$ gegen (I) ist in diesem Fall zu einer reinen Drehung ausgeartet, bei der sich der Kugelgroßkreis $(\bar{I})$ in sich verschiebt und zugleich den Großkreis (I) bildet (Abb. 7). Der Bewegungsablauf ist dabei durch die Funktion $\bar{v} = f(v)$ bestimmt. Der Vektor $\mathfrak{a}$ ist nach (40) S. 125 mit $\alpha = 0$ durch

$$(78) \quad \mathfrak{a} = (\cos v, \sin v, 0)$$

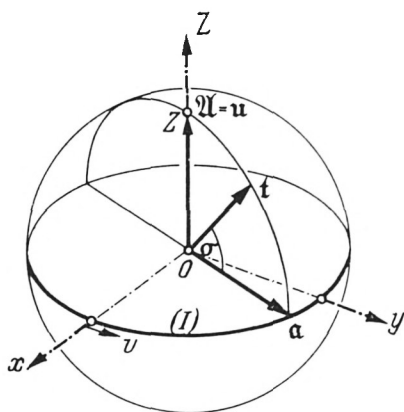


Abb. 7

festgelegt. Der Vektor $\mathfrak{U}$ ist der konstante Einheitsvektor der z -Richtung. Wegen $k_3 \equiv 0$ und (26) S. 122 ist $\mathfrak{u} = \mathfrak{U}$. Die Ebene ϑ dreht sich demzufolge um $\mathfrak{U}$. Bewegt man sie gleichzeitig in Richtung $\mathfrak{t}$ (74), (75) mit der Geschwindigkeit (77), so beschreibt $\mathfrak{a}$ wieder die Regelfläche Φ und O die Striktionslinie von Φ . Die Ebene ϑ repräsentiert ebenfalls wieder den Begleitkörper von Φ . Die Regelfläche Φ wird im vorliegenden Fall als Treppen-

fläche bezeichnet, da ihre Erzeugenden alle zu einer (horizontal gedachten) Ebene parallel sind. Als Sonderfälle erhält man die gerade offene und die gerade geschlossene Regelschraubenfläche. Hinsichtlich der Fallunterscheidung a) $\bar{v} = f(v) \neq \text{const.}$, b) $\bar{v} = \text{const.}$ gilt das Entsprechende zu den Ausführungen S. 135-136.

6. Regelflächen 2. Ordnung F_0

Um Beispiele für Regelflächen Φ der verlangten Eigenschaft zu finden, werden nun die Grundinvarianten $\bar{k}_i(\bar{v})$ und die Ableitung $\bar{k}'_1(\bar{v})$ für die verschiedenen Regelflächen 2. Ordnung F_0 berechnet.

a) Das gleichseitige hyperbolische Paraboloid (Abb. 8).

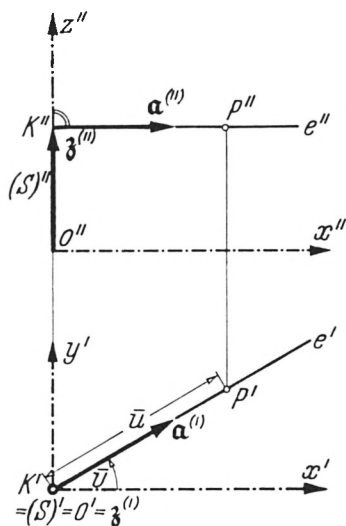


Abb. 8

Das rechtwinklige xyz -Koordinatensystem werde so gelegt, daß die x - und die z -Achse Scheiteltangenten sind. Dann ist der Ortsvektor der Striktionslinie (S)

$$(79) \quad \mathfrak{z} = (0, 0, 2p \operatorname{tg} \bar{v}), \quad p = \text{const.} \neq 0;$$

der Vektor der Erzeugenden ist

$$(80) \quad \alpha = (\cos \bar{v}, \sin \bar{v}, 0).$$

Damit erhält man nach (34) S. 124

$$(81) \quad \bar{k}_1 = \frac{2p}{\cos^2 \bar{v}}, \quad \bar{k}_2 = 0, \quad \bar{k}_3 = 0, \quad \bar{k}_1' = \frac{4p \sin \bar{v}}{\cos^3 \bar{v}}.$$

Weiter ergibt sich gemäß (18) S. 120

$$(82) \quad \bar{k}_1' : \bar{k}_1 = 2 \operatorname{tg} \bar{v}, \quad \bar{k}_2 : \bar{k}_1 = 0, \quad \bar{k}_3 = 0.$$

b) Das schiefe hyperbolische Paraboloid (Abb. 9).

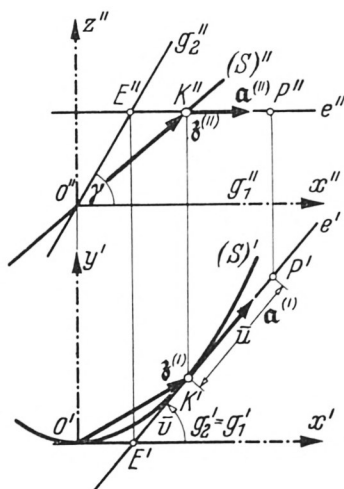


Abb. 9

Das rechtwinklige xyz -Koordinatensystem werde nun so gelegt, daß die x -Achse und die Gerade $y = 0, z = x \operatorname{tg} \gamma$ die Scheitelerzeugenden g_1 bzw. g_2 sind. Die Erzeugenden der einen Schar sind dann alle parallel zur xy -Ebene. Der erste wahre Umriss des Paraboloids ist eine Parabel. Diese ist zugleich die Strik-

tionslinie (S), vgl. Fußnote 14 S. 128. Der Grundriß von (S) ist dann ebenfalls eine Parabel. Sie habe die Gleichung

$$(83) \quad 2 \phi y = x^2, \quad \phi = \text{const.} \neq 0.$$

Es sei wieder $\bar{v}$ der Winkel, den die waagrechten Erzeugenden mit der x -Achse bilden. Dann ist

$$(84) \quad \frac{dy}{dx} = \text{tg } \bar{v}.$$

Aus (83) und (84) erhält man für den Grundriß der Striktionslinie die Parameterdarstellung

$$(85) \quad x = \phi \text{ tg } \bar{v}, \quad y = \frac{\phi}{2} \text{ tg}^2 \bar{v}.$$

Die Abszisse des Punktes E von g_2 (Abb. 9) ist die Hälfte der Abszisse des Punktes K der Striktionslinie, also $\frac{\phi}{2} \text{ tg } \bar{v}$. Demnach ist die Höhe von E und K gleich $\frac{\phi}{2} \text{ tg } \gamma \text{ tg } \bar{v}$. Die Striktionslinie (S) hat also die Parameterdarstellung

$$(86) \quad \mathfrak{s} = \left(\phi \text{ tg } \bar{v}, \quad \frac{\phi}{2} \text{ tg}^2 \bar{v}, \quad \frac{\phi}{2} \text{ tg } \gamma \text{ tg } \bar{v} \right).$$

Weiter ist

$$(87) \quad \alpha = (\cos \bar{v}, \sin \bar{v}, 0).$$

Damit erhält man nach (34) S. 124

$$(88) \quad \overline{k}_1 = \frac{\phi}{2} \text{ tg } \gamma \frac{1}{\cos^2 \bar{v}}, \quad \overline{k}_2 = \frac{\phi}{\cos^3 \bar{v}}, \quad \overline{k}_3 = 0, \quad \overline{k}'_1 = \frac{\phi \text{ tg } \gamma \sin \bar{v}}{\cos^3 \bar{v}}.$$

Damit wird gemäß (18) S. 120

$$(89) \quad \overline{k}'_1 : \overline{k}_1 = 2 \text{ tg } \bar{v}, \quad \overline{k}_2 : \overline{k}_1 = \frac{2 \text{ ctg } \gamma}{\cos \bar{v}}, \quad \overline{k}_3 = 0.$$

c) Das Rotationshyperboloid.

Es wurde zwar der Fall, daß F_0 ein Rotationshyperboloid ist, ausgenommen, vgl. Fußnote 18 S. 134. Die Grundinvarianten eines Rotationshyperboloids sollen jedoch an dieser Stelle zur Vollständigkeit angegeben werden.

Nach (61) S. 129 ist

$$(61) \quad \bar{k}_1 = -\bar{r} \operatorname{tg} \bar{\alpha}, \quad \bar{k}_2 = \bar{r}, \quad \bar{k}_3 = \operatorname{tg} \bar{\alpha}, \quad \bar{r} = \text{const.}$$

Alle drei Grundinvarianten $\bar{k}_i$ sind also Konstante.

d) Das einschalige Hyperboloid (Abb. 10).

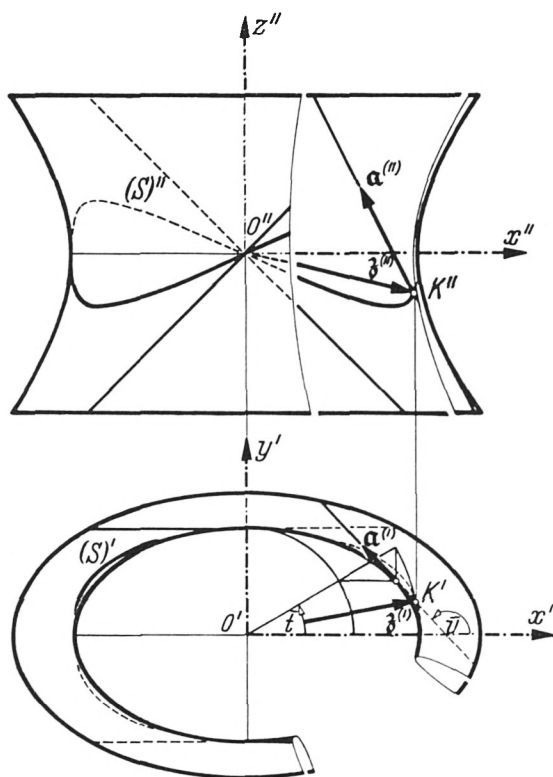


Abb. 10

Zur Berechnung der Grundinvarianten $\bar{k}_i$ geht man zweckmäßig von der Parameterdarstellung des einschaligen Hyperboloids

$$(90) \quad x = a \cos \bar{t} - \bar{u} \frac{a \sin \bar{t}}{W}, \quad y = b \sin \bar{t} + \bar{u} \frac{b \cos \bar{t}}{W}, \quad z = \bar{u} \frac{c}{W}$$

aus, in der a, b, c ($a \neq b$) die Halbachsen und $\bar{u}$ die Länge auf den Erzeugenden der einen Schar bedeuten. Durch $\bar{u} = 0$ ist die Kehlellipse festgelegt. Ferner ist

$$(91) \quad W^2 = a^2 \sin^2 \bar{t} + b^2 \cos^2 \bar{t} + c^2.$$

Die Richtung $\mathfrak{a}$ der Erzeugenden der betrachteten Schar ist

$$(92) \quad \mathfrak{a} = \left(-\frac{a \sin \bar{t}}{W}, \quad \frac{b \cos \bar{t}}{W}, \quad \frac{c}{W} \right).$$

Dabei ist

$$(93) \quad \mathfrak{a}^2 = 1.$$

Setzt man

$$(94) \quad N = a^2 b^2 + a^2 c^2 \cos^2 \bar{t} + b^2 c^2 \sin^2 \bar{t},$$

so ist der Ortsvektor der Striktionslinie (S) (Abb. 10)²⁰

$$(95) \quad \mathfrak{s}(\bar{t}) = \left(\frac{a^3 (b^2 + c^2) \cos \bar{t}}{N}, \quad \frac{b^3 (a^2 + c^2) \sin \bar{t}}{N}, \quad -\frac{c^3 (a^2 - b^2) \sin \bar{t} \cos \bar{t}}{N} \right).$$

In (92) und (95) ist noch anstelle von $\bar{t}$ die Bogenlänge $\bar{v}$ der sphärischen Indikatrix einzuführen. Dazu ergibt sich aus (92)

$$(96) \quad \bar{v} = \int_0^{\bar{t}} \frac{\sqrt{N}}{W^2} dt^*.$$

In (96) liegt ein elliptisches Integral vor.²¹ Aus (96) folgt

$$(97) \quad \bar{t} = \bar{t}(\bar{v}).$$

Vermöge (97) sind $\mathfrak{a}$ (92) und $\mathfrak{s}$ (95) Funktionen von $\bar{v}$. Weitere Rechnung ergibt

²⁰ Hinweise zum Gang der Rechnung und Zwischenergebnisse sind (auch für die beiden folgenden Abschnitte) in der Originalfassung angegeben, vgl. Fußnote S. 111.

²¹ Näheres siehe z. B. W. Wunderlich [27] S. 107.

(98)

$$\overline{k}_1(\bar{v}) = \frac{(\dot{\mathfrak{z}} \mathfrak{a} \dot{\mathfrak{a}})}{\dot{\mathfrak{a}}^2} = -abc \frac{W^2}{N} \Big|_{\bar{t}=\bar{t}(\bar{v})},$$

$$\overline{k}'_1(\bar{v}) = \frac{d\overline{k}_1}{d\bar{v}} = -\frac{2abcW^2(a^2-b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)\sin\bar{t}\cos\bar{t}}{N^2\sqrt{N}} \Big|_{\bar{t}=\bar{t}(\bar{v})}$$

$$\overline{k}_2(\bar{v}) = \frac{\dot{\mathfrak{z}} \mathfrak{a}}{|\dot{\mathfrak{a}}|} = \frac{W^3}{N^2\sqrt{N}} (a^2b^2c^2W^2 + a^4b^4 - a^4c^4\cos^2\bar{t} - b^4c^4\sin^2\bar{t}) \Big|_{\bar{t}=\bar{t}(\bar{v})}$$

$$\overline{k}_3(\bar{v}) = \frac{(\mathfrak{a} \dot{\mathfrak{a}} \ddot{\mathfrak{a}})}{|\dot{\mathfrak{a}}|^3} = \frac{abcW^3}{N\sqrt{N}} \Big|_{\bar{t}=\bar{t}(\bar{v})}.$$

7. Beispiele zu Regelflächen Φ mit lauter ähnlichen Lie- F^2

1. Beispiel.

Regelflächen Φ , die lauter gleichseitige hyperbolische Paraboide als Lie- F^2 haben.

Mit (82) S. 140 gibt (18) S. 120

$$(99) \quad \begin{aligned} k'_1(v) : k_1(v) &= 2 \operatorname{tg} \bar{v}, \\ k_2(v) : k_1(v) &= 0, \\ k_3(v) &= 0. \end{aligned}$$

Wählt man nun $\bar{v} = f(v)$ beliebig, so ergibt sich damit aus der ersten Gleichung (99) $k_1(v)$. Aus den beiden anderen folgt $k_2(v) = 0$, $k_3(v) = 0$. Aus (54) S. 127 und (40) S. 125 erhält man damit

$$(100) \quad \mathfrak{z} = \left(0, 0, \int_a^v k_1(t) dt \right)$$

und

$$(101) \quad \mathfrak{a} = (\cos v, \sin v, 0).$$

Φ ist also ein gerades Konoid. Da umgekehrt jedes gerade Konoid die Werte $k_2 = 0$ und $k_3 = 0$ hat, und da es zu jeder Funk-

tion $k_1(v)$ eine Funktion $\bar{v} = f(v)$ gibt, so daß auch die erste Gleichung (99) erfüllt ist, so gilt

Satz 8. Die einzigen Regelflächen mit lauter gleichseitigen hyperbolischen Paraboloiden als Lie- F^2 sind die geraden Konoide.

2. Beispiel.

Eine Regelfläche Φ , die lauter ähnliche schiefe hyperbolische Paraboloiden als Lie- F^2 hat.

Wählt man als Funktion $\bar{v} = f(v)$

$$(102) \quad \bar{v} = -v,$$

so ergibt sich aus (18) S. 120 mit (89) S. 141

$$(103) \quad \begin{aligned} k'_1(v) : k_1(v) &= -2 \operatorname{tg} v, \\ k_2(v) : k_1(v) &= 2 \operatorname{ctg} \gamma : \cos v, \\ k_3(v) &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt (vgl. Fußnote 20 S. 143)

$$(104) \quad \mathfrak{z} = \begin{pmatrix} C(2v + \sin 2v) \\ C(1 - \cos 2v) \\ C \frac{\operatorname{tg} \gamma}{2} (2v + \sin 2v) \end{pmatrix}$$

und

$$(105) \quad \alpha = (\cos v, \sin v, 0).$$

Die Striktionslinie (S) ist nach (104) eben. Ihr Grundriß ist eine gespitzte Zyклоide, vgl. Abb. 11 S. 146. (S) ist also eine zur gespitzten Zyклоide affine Kurve. Die Erzeugenden von Φ sind nach (105) alle parallel zur Grundrißebene. Sie bilden im Grundriß die Tangentenschar des Grundrisses von (S) . Der Winkel der Erzeugenden von Φ und der x -Achse ist v . Die entsprechenden Erzeugenden von F_0 bilden zur x -Achse den Winkel $\bar{v} = -v$. Soll nun F_0 von seiner Ausgangslage in die oskulierende Lage ge-

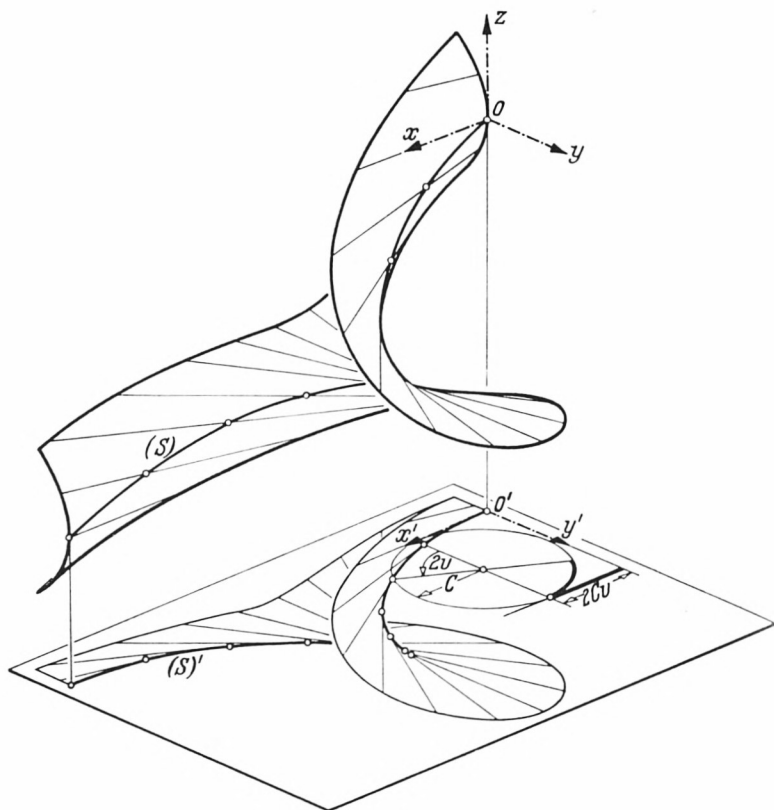


Abb. 11

bracht werden, so ist um den Winkel $2v$ im positiven Sinn zu drehen und dann parallel zu verschieben. Gleichzeitig muß F_0 ähnlich deformiert werden im Maßstab

$$(106) \quad m(v) = \frac{4C}{p} \cos^4 v,$$

wie aus (71) S. 132 folgt.

3. Beispiel.

Eine Differentialgleichung für die allgemeinste Regelfläche Φ , die lauter ähnliche hyperbolische Paraboloiden als $\text{Lie-}F^2$ hat und ihre Lösung in einem speziellen Fall.

Für die Gleichung der gesuchten Fläche Φ werde wieder der Ansatz (40) und (41) S. 125 mit $\alpha = 0$ gemacht. Damit folgt aus (46) S. 126 mit $t = v$

$$(107) \quad k_1(v) = z'(v), \quad k_2(v) = r(v), \quad k_3(v) = 0.$$

Mit (89) S. 141 und (107) gibt (18) S. 120

$$(108) \quad \begin{aligned} \frac{z''(v)}{z'(v)} &= 2 \operatorname{tg} \bar{v}, \\ \frac{r(v)}{z'(v)} &= \frac{2 \operatorname{ctg} \gamma}{\cos \bar{v}}. \end{aligned}$$

Nun kann $z'(v)$ aber nicht identisch verschwinden, sonst wäre $z = \text{const.}$ und deshalb Φ eine Ebene. Wenn $r(v)$ identisch verschwindet, muß $\gamma = \frac{\pi}{2}$, also F_0 ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid sein. Dieser Fall ist im 1. Beispiel S. 144 behandelt worden und soll jetzt ausgeschlossen werden.

Durch Eliminieren von $\bar{v}$ aus den Gleichungen (108) erhält man

$$(109) \quad r^2(v) \cdot \operatorname{tg}^2 \gamma = 4 z'^2(v) + z''^2(v).$$

Diese Differentialgleichung stellt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, daß Φ lauter ähnliche schiefe hyperbolische Paraboloiden als Lie- F^2 hat.

Bildet man zur Probe die Funktionen $r(v)$, $z'(v)$ und $z''(v)$ für das 2. Beispiel auf Grund von (104), so erfüllen diese (109).

An Hand von (109) sollen als Beispiel die Regelflächen Φ mit lauter ähnlichen schiefen hyperbolischen Paraboloiden als Lie- F^2 bestimmt werden, deren Striktionslinien als Grundriß einen Kreis haben.

Setzt man in (109) $r(v) = R = \text{const.}$ und $z'(v) = p(v)$, so erhält man die separierbare Differentialgleichung

$$(110) \quad p'^2 + 4p^2 = R^2 \operatorname{tg}^2 \gamma.$$

Diese hat die reguläre Lösung

$$(111) \quad p = \frac{R \operatorname{tg} \gamma}{2} \cos 2(v - v_0),$$

wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $v_0 = 0$ gesetzt werden kann. Dann folgt aus (111) durch Integration

$$(112) \quad z = \frac{R \operatorname{tg} \gamma}{4} \sin 2v = \frac{R \operatorname{tg} \gamma}{2} \sin v \cos v.$$

Wegen $R = \text{const.}$ ist

$$(113) \quad \begin{aligned} x &= R \sin v, \\ y &= -R \cos v. \end{aligned}$$

Durch (112) und (113) ist die Striktionslinie (S) von Φ festgelegt, und es ist tatsächlich $\mathfrak{z}' \mathfrak{a}' = 0$. Setzt man in (112) x und y vermöge (113) ein, so erhält man

$$(114) \quad z = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{2R} xy.$$

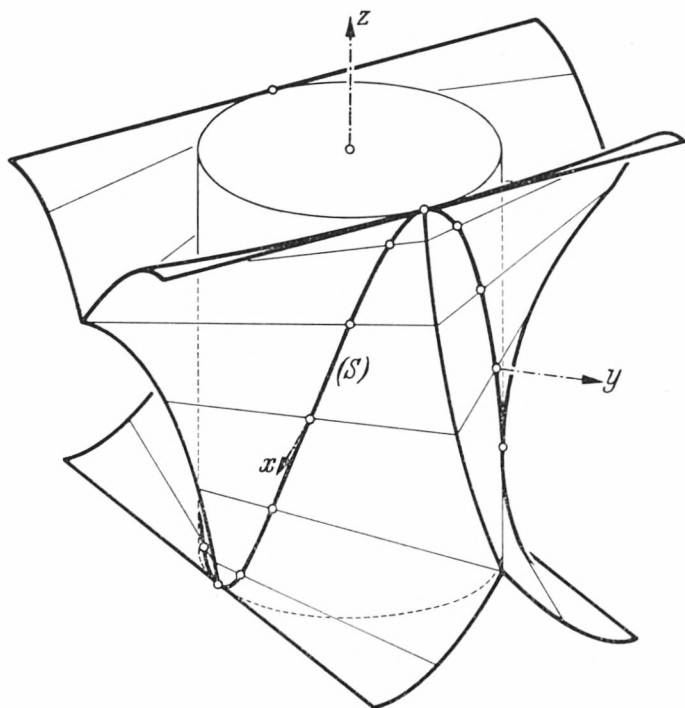


Abb. 12

Die Striktionslinie (S) ist also der Schnitt des Kreiszylinders (113) mit dem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid (114) und daher eine Kurve 4. Ordnung 1. Art. Die Erzeugenden von Φ sind parallel zur Ebene $z = 0$ und berühren den Zylinder (113) in den Punkten der Striktionslinie, vgl. Abb. 12. Die Parameterdarstellung von Φ lautet

$$(115) \quad \begin{aligned} x &= R \sin v + u \cos v, \\ y &= -R \cos v + u \sin v, \\ z &= \frac{R \operatorname{tg} \gamma}{2} \sin v \cos v. \end{aligned}$$

Φ ist eine algebraische Regelfläche 6. Ordnung. In Abb. 12 sind die zwischen den Selbstdurchdringungskurven ($y = \pm x$) liegenden Flächenstücke dargestellt; außerdem ist Φ durch die Parallelebenen zu $y = \pm x$ im Abstand $2R$ begrenzt.²²

Bildet man mit (115) die Funktionen $k'_1(v) : k_1(v)$ und $k_2(v) : k_1(v)$, so erhält man

$$(116) \quad \begin{aligned} k'_1(v) : k_1(v) &= -2 \operatorname{tg} 2v, \\ k_2(v) : k_1(v) &= \frac{2 \operatorname{ctg} \gamma}{\cos 2v}. \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit (89) S. 141 ergibt sich die Funktion $\bar{v} = f(v)$ mit

$$(117) \quad \bar{v} = -2v.$$

Der Ähnlichkeitsmaßstab $m(v)$ (71) S. 132 ergibt sich mit

$$(118) \quad m(v) = \frac{R}{p} \cos^3 2v.$$

Die Differentialgleichung (110) hat die singuläre Lösung

$$(119) \quad p = \frac{R \operatorname{tg} \gamma}{2} = \text{const.}$$

²² (Nachtrag). In (115) handelt es sich um eine „Umschwungfläche“ von W. Kautny („Über die durch harmonischen Umschwung erzeugbaren Strahlflächen“, Monatshefte f. Math., 63. Bd., 1959, Heft 2 S. 169–188) mit $a=R$, $b=0$, $n=2$, $h=\frac{R \operatorname{tg} \gamma}{4}$. Dies ist die einzige offene Umschwungfläche mit lauter ähnlichen Lie- F^2 .

Durch Integration erhält man

$$(120) \quad z = \frac{R \operatorname{tg} \gamma}{2} v.$$

Aus (120) folgt mit $R = \text{const.}$, daß die Striktionslinie (S) in diesem Fall eine gewöhnliche Schraubenlinie ist. Demnach ist Φ eine gerade, offene Regelschraubenfläche, vgl. 9. S. 155. Weiter ist

$$(121) \quad k'_1 : k_1 = 0, \quad k_2 : k_1 = 2 \operatorname{ctg} \gamma.$$

Durch Vergleich mit (89) S. 141 ergibt sich die Funktion $\bar{v} = f(v)$ zu

$$(122) \quad \bar{v} = 0 = \text{const.}, \text{ vgl. 8. S. 151.}$$

Das bedeutet, daß F_0 stets längs einer seiner Scheitelerzeugenden oskuliert. Der Ähnlichkeitsmaßstab ist dabei konstant.

4. Beispiel.

Eine Regelfläche Φ , deren sämtliche Lie- F^2 zu einem einschaligen Hyperboloid ähnlich sind.

Die Funktion $\bar{v} = f(v)$ von (19) S. 121 sei speziell

$$(123) \quad \bar{v} = -v.$$

Es zeigt sich, daß sich die Parameterdarstellung von Φ in diesem Fall noch in geschlossener Form ergibt.

Zunächst ergibt sich, daß wegen (123) Φ denselben Richtkegel hat wie F_0 . Mit t als Parameter ist daher entsprechend zu (92) S. 143

$$(124) \quad \mathfrak{a} = \left(-\frac{a \sin t}{W}, \quad \frac{b \cos t}{W}, \quad \frac{c}{W} \right),$$

wobei W wie in (91) S. 143, jedoch ohne Querstriche, gebildet ist. Setzt man zur Abkürzung

$$(125) \quad a^2 - b^2 = d^2, \quad a^2 + c^2 = e^2, \quad b^2 + c^2 = f^2,$$

so erhält man nach einem gewissen Aufwand an Rechnung (vgl. Fußnote 20 S. 143)

$$(126) \quad \mathfrak{z} \equiv \begin{pmatrix} x = \frac{af^2}{b^2c^2} \left[\frac{b^2-c^2}{W^2} \cos t + \frac{f^2}{de} \operatorname{Ar} \operatorname{Zg} \left(\frac{d}{e} \cos t \right) \right] \\ y = \frac{be^2}{a^2c^2} \left[\frac{a^2-c^2}{W^2} \sin t + \frac{e^2}{df} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{d}{f} \sin t \right) \right] \\ z = \frac{-cd^2}{a^2b^2} \left[\frac{a^2+b^2}{W^2} \sin t \cos t + \frac{d^2}{ef} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{e}{f} \operatorname{tg} t \right) \right] \end{pmatrix}.$$

Die als Ähnlichkeitsfaktor eingehende Integrationskonstante ist in (126) weggelassen.

Die Striktionslinie (S) ist nach (126) eine zu den drei Koordinatenachsen symmetrische, endliche und geschlossene Kurve. Der Ähnlichkeitsmaßstab der Lie- F^2 und F_0 ist mit W (91) und N (94) S. 143

$$(127) \quad m(v) = N^2: a^2 b^2 c^2 W^4.$$

Weitere Untersuchung ergibt, daß die Funktion $m(v)$ Extremwerte bei $\bar{t} = t = n \frac{\pi}{2}$, n ganz, besitzt. Ist C eine Konstante, so schwankt der Ähnlichkeitsmaßstab zwischen $C a^4$ und $C b^4$.

Läßt man mit $b \rightarrow a = R$ das allgemeine einschalige Hyperboloid F_0 gegen ein Rotationshyperboloid streben, so geht die durch (124) und (126) bestimmte Regelfläche Φ in ein Rotationshyperboloid über, wie es nach Satz 3 S. 121 zu erwarten war.

8. Regelflächen Φ , deren sämtliche Schmiegestreifen 2. Ordnung zu einem einzigen Schmiegestreifen 2. Ordnung von F_0 ähnlich sind

Nach 4. S. 120 ist durch die Funktion $\bar{v} = f(v)$ jedem Schmiegestreifen 2. Ordnung von Φ ein Schmiegestreifen 2. Ordnung von F_0 zugeordnet. Die Regelfläche Φ hat daher zwar lauter ähnliche Lie- F^2 , jedoch im allgemeinen nicht lauter ähnliche Schmiegestreifen 2. Ordnung. Es sollen jetzt alle speziellen Regelflächen Φ bestimmt werden, die auch lauter ähnliche Schmiegestreifen 2. Ordnung haben.

Der Schmiegestreifen 2. Ordnung von F_0 , zu dem alle Schmiegestreifen 2. Ordnung von Φ ähnlich sein sollen, sei durch

$$(128) \quad \bar{v} = \bar{v}_0 = \text{const.}$$

festgelegt. Die Funktion $\bar{v} = f(v)$ ist also in diesem Fall eine Konstante, vgl. Fall b) S. 136. Die Gleichungen (18) S. 120 gehen also über in

$$(129) \quad \begin{aligned} k'_1(v) : k_1(v) &= \bar{k}'_1(\bar{v}) : \bar{k}_1(\bar{v}) = c_1, & c_1 &= \text{const.}, \\ k_2(v) : k_1(v) &= \bar{k}_2(\bar{v}) : \bar{k}_1(\bar{v}) = c_2, & c_2 &= \text{const.}, \\ k_3(v) &= \bar{k}_3(\bar{v}) = \text{tg } \alpha, & \alpha &= \text{const.} \end{aligned}$$

Daraus erhält man (vgl. Fußnote 20 S. 143) für $c_1 \neq 0$, $C_1 = \text{const.}$ gemäß (46) S. 126

$$(130) \quad z(v) = C_1 e^{c_1 v}.$$

Ist $c_1 = 0$, so folgt in entsprechender Weise

$$(131) \quad z(v) = v \cdot \text{const.}$$

Mit $v = t \cos \alpha$ erhält man aus (129) mittels (46) S. 126

$$(132) \quad r(t) = C_2 e^{c_1 t \cos \alpha}, \quad C_2 = \text{const.}$$

Nach (43) S. 126 ist $\frac{ds}{dt} = r$. Damit gibt (132) für $c_1 \neq 0$ durch Integration im Fall $C_2 \neq 0$

$$(133) \quad s = C_3 e^{c_1 t \cos \alpha}, \quad C_3 = \text{const.} \neq 0.$$

Aus (132) und (133) folgt

$$(134) \quad s = r \cdot \text{const.}$$

Dies ist jedoch die natürliche Gleichung einer logarithmischen Spirale.²³ Mit (130) ist

$$(135) \quad z = s \cdot \text{const.}$$

Aus (134) und (135) folgt, daß die Striktionslinie (S) von Φ Loxodrome eines Drehkegels ist, Abb. 13 S. 153. Aus (40), (44)

²³ Siehe z. B. G. Kowalewski [9] S. 11.

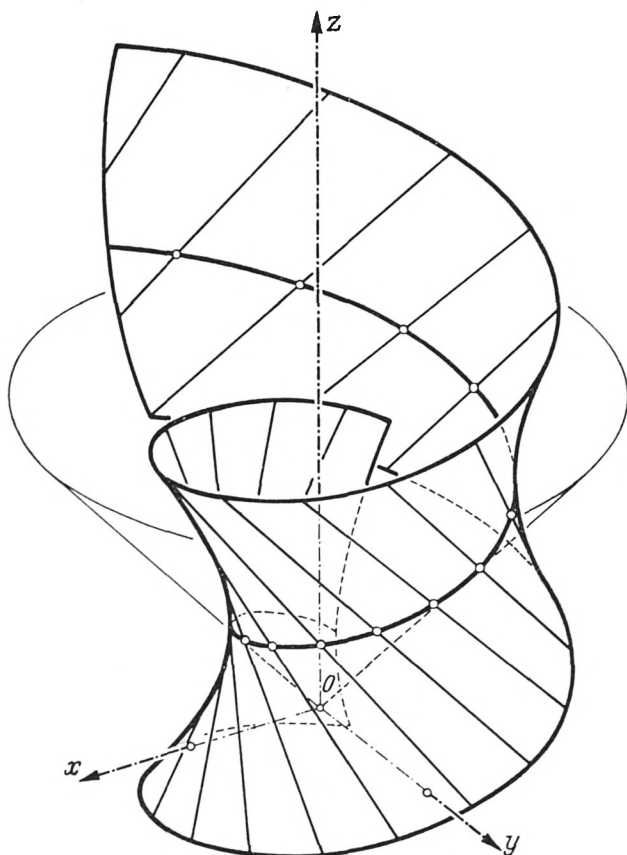


Abb. 13

und (45) S. 125–126 folgt, daß die Grundrisse von α und β' zusammenfallen, vgl. Fußnote 14 S. 128. Daher berühren die Erzeugenden von Φ den erstprojizierenden Zylinder der Striktionslinie und bilden wegen $\alpha = \text{const.}$ mit den Mantellinien der Berührungspunkte stets gleiche Winkel.

Ist in (132) $c_1 = 0$ und $C_2 \neq 0$, dann ist $r = \text{const.} \neq 0$. Der Grundriß der Striktionslinie ist dann ein Kreis. Mit (131) folgt weiter, daß die Striktionslinie von Φ eine gewöhnliche Schraubenlinie ist. Über die Anordnung der Erzeugenden von Φ gilt dasselbe wie im Fall $c_1 \neq 0$ und $C_2 \neq 0$. Daher ist Φ in diesem Fall eine allgemeine Regelschraubenfläche ($r \neq 0$).

Ist $C_2 = 0$, so folgt

$$(136) \quad k_2 - k_1 k_3 \equiv 0, \quad k_3 \equiv \text{const.},$$

wie (50) S. 127. Außerdem folgt $r = 0$. Dies bedeutet gemäß (54) S. 127, daß die Striktionslinie (S) die z -Achse ist. Für $c_1 \neq 0$ erhält man wieder

$$(130) \quad z(v) = C_1 e^{c_1 v},$$

und für $c_1 = 0$

$$(131) \quad z(v) = v \cdot \text{const.}$$

In beiden Fällen schneiden die Erzeugenden von Φ die z -Achse unter dem konstanten Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Das Gesetz ihrer Verschraubung ist (130) bzw. (131). Im zweiten Fall ist Φ eine geschlossene schiefe oder gerade Regelschraubenfläche. In beiden Fällen entsteht die gerade Striktionslinie als Grenzlage der Loxodrome im Fall $c_1 \neq 0$, wenn der Öffnungswinkel des Drehkegels bzw. der Radius des Drehzylinders, auf dem sie liegt, gegen Null konvergiert. Betrachtet man dies als Sonderfall des allgemeinen Falles $c_1 \neq 0$, so gilt also

Satz 9. Die Regelflächen Φ mit lauter ähnlichen Schmiegestreifen 2. Ordnung haben als Striktionslinie eine Loxodrome eines Drehkegels oder Drehzylinders. Die Erzeugenden von Φ berühren den erstprojizierenden Zylinder der Striktionslinie und bilden mit dieser konstante Winkel.

In Satz 9 sind als Sonderfall sämtliche Regelschraubenflächen enthalten. Da diese durch Verschraubung in sich verschoben werden können, haben die Regelschraubenflächen sogar lauter kongruente Schmiegestreifen 2. Ordnung, vgl. Satz 5 S. 133. Da die von den Regelschraubenflächen verschiedenen Flächen aus Satz 9 durch Drehung um die z -Achse und Streckung aus O in sich übergehen, so leuchtet es auch hier unmittelbar geometrisch ein, daß diese Flächen lauter ähnliche Schmiegestreifen 2. Ordnung besitzen.

Ein weiterer Sonderfall von Satz 9 ist das Rotationshyperboloid, das wir eingangs ausgeschlossen haben.

Die Flächen von Satz 9 besitzen wegen $\alpha = \text{const.}$ für $\alpha \neq 0$ einen Drehkegel als Richtkegel. Daß diese Flächen ($\alpha \neq 0$) zugleich die einzigen sind, die lauter ähnliche Lie- F^2 und zugleich einen Drehkegel als Richtkegel besitzen, sieht man folgendermaßen ein.

Wenn Φ einen Drehkegel als Richtkegel haben soll, muß $k_3 = \text{const.}$ und von Null verschieden sein. Dies trifft nur in zwei Fällen zu: a) F_0 ist ein Rotationshyperboloid. Dann muß auch Φ ein solches sein, vgl. Satz 3 S. 121, und ist daher eine Fläche von Satz 9. b) F_0 ist ein allgemeines einschaliges Hyperboloid und es ist $\bar{v} = f(v) = \text{const.}$ Dann ist Φ eine der Flächen von Satz 9.

Also gilt

Satz 10. Eine Regelfläche mit lauter ähnlichen Lie- F^2 und einem Drehkegel als Richtkegel hat lauter ähnliche Schmiegestreifen 2. Ordnung.

Der entsprechende Satz für Flächen mit $\alpha = 0$ gilt wegen Satz 8, S. 145 nicht, nach dem alle geraden Konoide sowohl lauter ähnliche Lie- F^2 als auch eine Richtebene besitzen.

Die Regelflächen von Satz 9 haben noch eine bemerkenswerte Eigenschaft. Läßt man die Lie- F^2 an einer dieser Regelflächen entlanggleiten, so bewegt sich der (starre) Asymptotenkegel der Lie- F^2 ebenfalls. Da dieser jedoch ständig den festen Richtdrehkegel von Φ oskulieren muß, ist seine Bewegung eine Drehung um die Achse des Richtdrehkegels. Von diesem Sachverhalt wird in 11. und 12. Gebrauch gemacht. Entsprechendes gilt, wenn $\alpha = 0$ ist.

9. Eine Konstruktion der Lie- F^2 bei Regelschraubenflächen

Die Grundinvarianten der allgemeinen Regelschraubenfläche (Abb. 14 S. 156)

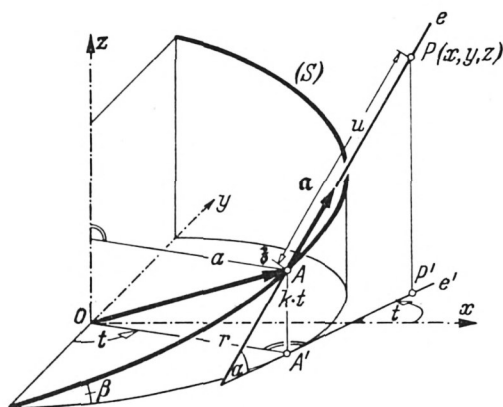


Abb. 14

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin t + u \cos \alpha \cos t, & r \geq 0, 0 \leq |\alpha| \leq \frac{\pi}{2} \\
 y &= -r \cos t + u \cos \alpha \sin t, \\
 z &= kt + u \sin \alpha, & k > 0
 \end{aligned}
 \tag{137}$$

sind nach (40), (41), (45) und (46) S. 125–126

$$\begin{aligned}
 k_1 &= k - r \operatorname{tg} \alpha. \\
 k_2 &= k \operatorname{tg} \alpha + r \\
 k_3 &= \operatorname{tg} \alpha.
 \end{aligned}
 \tag{138}$$

Daraus folgt

$$k'_1 = 0. \tag{139}$$

Da alle k_i , k'_i Konstante sind, haben die Regelschraubenflächen nicht nur lauter kongruente Lie- F^2 , sondern auch lauter kongruente Schmiegestreifen 2. Ordnung. Aus (139) und (81) S. 140 bzw. (88) S. 141 bzw. (98) S. 144 folgt weiter, daß es sich um den Schmiegestreifen einer Scheitelerzeugenden von F_0 handelt. Die Schmiegestreifen 2. Ordnung einer Regelschraubenfläche berühren diese also längs einer Scheitelerzeugenden. Dies kann man auch geometrisch wie folgt einsehen.

Ist e die Berührerzeugende von Φ und F_0 (Abb. 14), A ihr Kehlpunkt und a das Lot von A auf die Schraubachse z , so geht Φ

bei der Umwendung um a in sich über. Also muß auch F_0 bei der Umwendung in sich übergehen. Dies bedeutet, daß F_0 in A einen Scheitel hat, daß e Scheitelerzeugende von F_0 ist und daß a eine Symmetrieachse von F_0 bildet.

Die Lie- F^2 einer allgemeinen Regelschraubenfläche Φ längs einer Erzeugenden e läßt sich nach Lage und Größe auf Grund der folgenden geometrischen Überlegungen konstruieren.²⁴

Da F_0 und Φ in jedem Punkt der Berührerzeugenden e die Dupinsche Indikatrix gemeinsam haben, so besitzen sie in jedem Punkt von e auch gemeinsame Haupttangente. Die von e verschiedenen Haupttangente längs e bilden daher die eine Schar der Erzeugenden von F_0 .²⁵ Die Lie- F^2 von Φ längs e soll nun mit Hilfe der Haupttangente von Φ längs e bestimmt werden.²⁶

Es ist zweckmäßig, dabei die folgenden Fälle zu unterscheiden.

I. Schiefe, nichtabwickelbare Regelschraubenfläche

a) Offene, schiefe, nichtabwickelbare Regelschraubenfläche

$$\left(r \neq 0, \operatorname{tg} \alpha \neq 0 \text{ und } \operatorname{tg} \alpha \neq \frac{k}{r} \right),$$

b) Geschlossene schiefe Regelschraubenfläche

$$(r = 0, \operatorname{tg} \alpha \neq 0),$$

II. Gerade Regelschraubenfläche

a) Offene gerade Regelschraubenfläche

$$(r \neq 0, \operatorname{tg} \alpha = 0),$$

b) Geschlossene gerade Regelschraubenfläche

$$(r = 0, \operatorname{tg} \alpha = 0),$$

III. Abwickelbare Regelschraubenfläche

$$\left(r \neq 0, \operatorname{tg} \alpha = \frac{k}{r} \right).$$

²⁴ Da F_0 durch ähnliche Deformation und eine Bewegung im Raum in die Lie- F^2 übergeht, so werde diese gelegentlich ohne Gefahr einer Verwechslung ebenfalls mit F_0 bezeichnet.

²⁵ Es wird als bekannt vorausgesetzt, daß die Haupttangente einer Regelfläche 2. Ordnung ihre Erzeugenden sind.

²⁶ Die Berührerzeugende e sei jeweils durch $t = 0$ festgelegt. Die Grundrißebene sei $z = 0$, die Aufrißebene sei parallel zu $y = 0$.

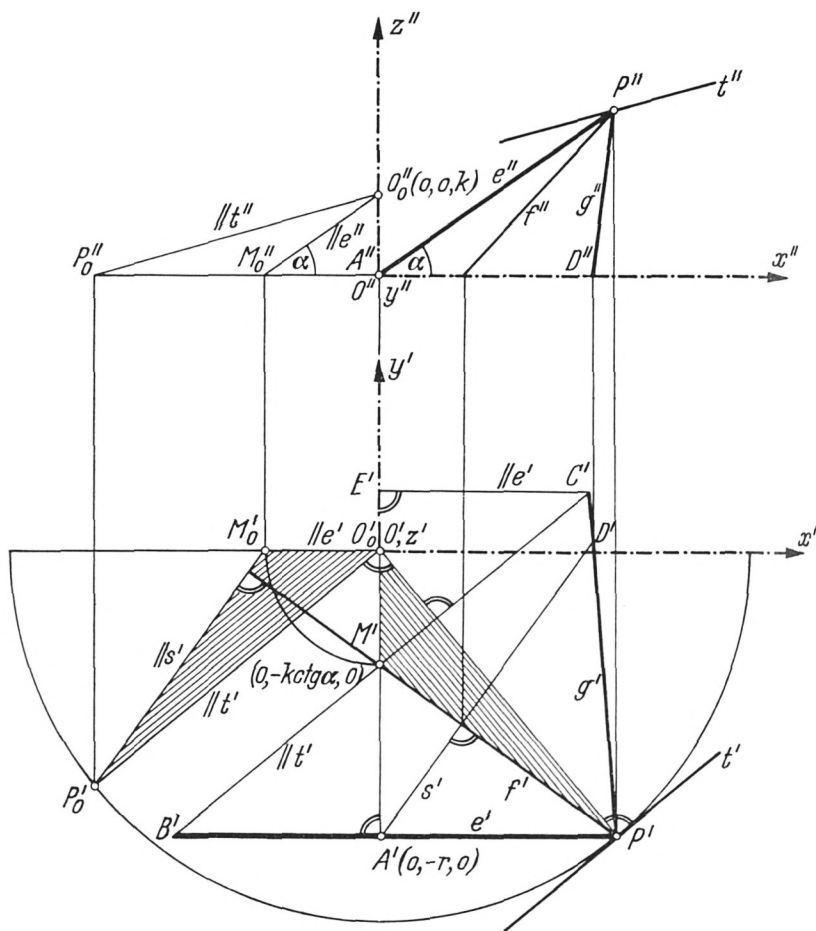


Abb. 15

Fall I (Abb. 15), ($r \neq 0$, $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$ und $\operatorname{tg} \alpha \neq \frac{k}{r}$ oder $r = 0$, $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$). Die Tangentialebene ε von Φ im Punkt P von e ($t = 0$) wird durch die Erzeugende e und die Tangente t der durch P gehenden Schraubenlinie (Achse z) bestimmt. Es seien M_0 bzw. P_0 die Spurpunkte der Parallelen zu e bzw. t durch $O_0(0, 0, k)$. Dann ist $O'P'_0 = O'P'$, und M_0P_0 ist parallel zur Spur s der Tangentialebene ε , deren Falllinie f sich daher im Grundriß senkrecht zu $M'_0P'_0$ projiziert. Die beiden Dreiecke $O'M'_0P'_0$

und $O' M' P'$ kommen durch Drehung um O durch $\frac{\pi}{2}$ zur Dekkung. Daher ist

$$(140) \quad O' M' = O' M'_0 = k \operatorname{ctg} \alpha$$

unabhängig von der Lage des Punktes P auf e . Der Grundriß f' von f geht also für alle Punkte P auf e durch den festen Punkt M' ($0, -k \operatorname{ctg} \alpha, 0$).

Es gilt nun

Satz 11. Die Fallinie f der Tangentialebene ε im Punkt P der Regelschraubenfläche Φ und die Schraubtangente t des Punktes P sind konjugierte Richtungen in bezug auf Φ .

Beweis. Die Regelschraubenfläche Φ wird längs der durch P gehenden Schraubenlinie (Achse z) von einer abwickelbaren Schraubenfläche berührt. Diese hat mit Φ im Punkt P die Tangentialebene ε gemeinsam. Die Fallinie f von ε in P ist daher zugleich Erzeugende der abwickelbaren Schraubenfläche und deshalb zur Tangente t konjugiert.²⁷

Da in einem hyperbolischen Flächenpunkt P zwei konjugierte Richtungen von den Asymptotenrichtungen harmonisch getrennt werden, ist die zweite Haupttangente g von P durch die konjugierten Richtungen f und t , die erste Haupttangente e und das Doppelverhältnis

$$(141) \quad (f t e g) = -1$$

festgelegt. Ebenso gilt für den Grundriß g' von g

$$(142) \quad (f' t' e' g') = -1.$$

Zur Konstruktion von g' werde $M' E' = A' M'$ abgetragen und durch E' die Parallele zu e' gezogen, vgl. Abb. 15. Ihr Schnittpunkt C' mit der Parallele zu t' durch M' ist ein weiterer Punkt von g' , denn wegen $B' M' = M' C'$ und $B' C' \parallel t'$ gilt (142). Weiter stellt das Lot s' von A' auf f' die Spur der Tangential-

²⁷ Satz von Dupin: Wird eine Fläche Φ längs einer Flächenkurve (C) von einer abwickelbaren Fläche berührt, dann sind die Tangenten von (C) und die Erzeugenden der abwickelbaren Fläche in den Punkten von (C) konjugiert.

ebene ε von P im Grundriß dar, da A' Spurpunkt von e ist. Der Schnittpunkt D' von s' und g' ist daher Spurpunkt von g und damit ein Punkt des Grundschnittes von F_0 . Läßt man P auf e ins Unendliche rücken, dann gehen B' in A' , C' in E' , g' in die Parallele zu e' durch E' , s' in die y -Achse und schließlich D' in E' über. Da die y -Achse das Lot a von A auf die z -Achse bildet, ist die y -Achse Symmetrieachse von F_0 . Daher ist $A'E'$ eine Hauptachse und M' der Mittelpunkt von F_0 . Da $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$ ist, liegt M' nach (140) im Endlichen. Daher ist F_0 ein einschaliges Hyperboloid (wie auch aus $\bar{k}_3(\bar{v}) = k_3(v) = \operatorname{tg} \alpha \neq 0$ folgt), und die Ebene $y = -k \operatorname{ctg} \alpha$ ist eine Symmetrieebene für F_0 .

Wird $P = A$, so fällt D mit P und A zusammen. Die zweite Haupttangente g_A von A ist daher in dieser Weise nicht zu bestimmen.

Im Fall Ia) ($r \neq 0$, $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$ und $\operatorname{tg} \alpha \neq \frac{k}{r}$) erhält man die zweite Haupttangente g_A von A im Aufriß (Abb. 16). Ist t_A die Tangente der Kehlschraubenlinie in A , so ist die zu t_A

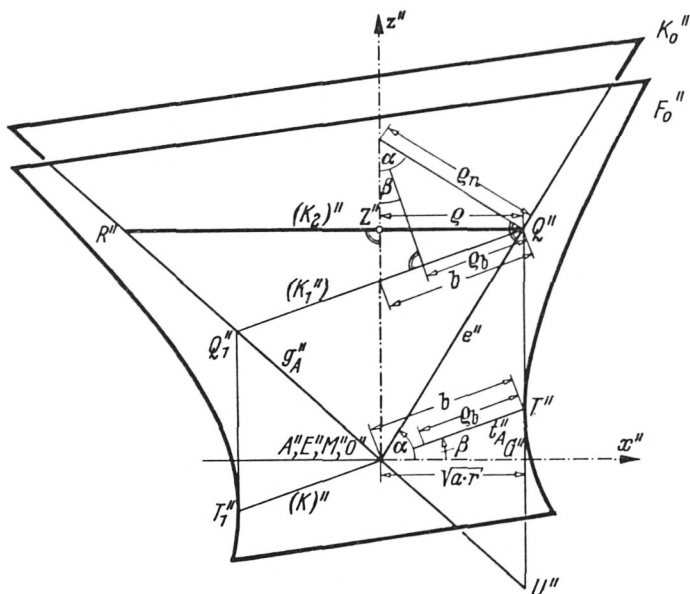


Abb. 16

konjugierte Richtung die z -Richtung, denn der erstprojizierende Zylinder der Kehlschraubenlinie berührt längs dieser die Regelschraubenfläche Φ , vgl. Fußnote 27 S. 159. Daß t_A und z konjugierte Richtungen haben, kann man auch so einsehen: Beim Grenzübergang $P \rightarrow A$ wird die Tangentialebene ε in P vertikal aufgerichtet. Ihre Fallinie f wird dabei ebenfalls vertikal. Gemäß (141) gilt jetzt im Aufriß

$$(143) \quad (z'' t_A'' e'' g_A'') = -1.$$

Zur Konstruktion von g_A'' ist in Abb. 16 $U'' T'' = T'' Q'' \parallel z''$ und $g_A'' = A'' U''$. Im Fall Ib ($r = 0$, $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$) ist $g_A = z$, weil die z -Achse auf Φ liegt und daher Haupttangente von Φ ist. Da $y = -k \operatorname{ctg} \alpha$ Symmetrieebene von F_0 ist, so liegt auch die Gerade $y = -2k \operatorname{ctg} \alpha$, $x = 0$ auf F_0 . Ihr Grundriß ist der Punkt E' . Die durch e gehende Geradenschar von F_0 geht durch die Gerade $y = -2k \operatorname{ctg} \alpha$, $x = 0$, weil diese eine Gerade der anderen Schar von F_0 ist. Also ist der Grundriß der durch e gehenden Geradenschar und damit der Grundriß der zweiten Haupttangente von Φ längs e ein Geradenbüschel durch den Punkt E' ($0, -2k \operatorname{ctg} \alpha, 0$).²⁸

Durch die Achse $A'E'$ und den Punkt D' ist der Schnitt $z = 0$ von F_0 festgelegt. Jeder Schnitt $z = \operatorname{const.}$ von F_0 ist dadurch bestimmt, daß er zum Schnitt $z = 0$ ähnlich ist, die Ebene $y = -k \operatorname{ctg} \alpha$ als Symmetrieebene hat und durch die Schnittpunkte der Geraden e und g_A mit $z = \operatorname{const.}$ geht. Damit ist jedoch F_0 nach Lage und Größe bestimmt. Es gilt demnach

Satz 12. Die Lie- F^2 von Φ längs e ist im Fall Ia und Ib ein einschaliges Hyperboloid, das bestimmt ist durch die Achse $A'E'$, den Punkt D' und die Erzeugenden e und g_A .

Unter dem Richtkegel K_0 von F_0 werde der Kegel mit der Spitze O verstanden, dessen Mantellinien zu den Geraden von F_0 parallel sind. Da F_0 im Fall Ia und Ib die Symmetrieebene $y = -k \operatorname{ctg} \alpha$ besitzt, hat auch K_0 eine Symmetrieebene, nämlich $y = 0$, Abb. 16. Für den Richtkegel K_0 von F_0 gilt der

²⁸ Diesen Sachverhalt hat Wiener [26] S. 560 von de la Gournerie [6] S. 143 übernommen, der ihn auf dem Weg über die Bestimmung der Tangenten der Eigenschattengrenze gewonnen hat.

Satz 13. Ein beliebiger Horizontalschnitt (K_2) von K_0 ($z \neq 0$) besitzt in dem Scheitel, der auf der zu e parallelen Mantellinie liegt, einen Scheitelkrümmungskreis, dessen Mittelpunkt auf der z -Achse liegt.

Beweis von Satz 13 für den Fall Ia (Abb. 16).

Die Kehlschraubenlinie von Φ hat die Steigung

$$(144) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{k}{r}.$$

Der Schnitt (K) der Ebene $z = x \operatorname{tg} \beta$ mit F_0 geht durch die Hauptachse $A'E'$ von F_0 . Daher hat (K) ebenfalls die Hauptachse $A'E'$, also die Halbachse

$$(145) \quad A'M' = a = r - k \operatorname{ctg} \alpha^{29}$$

(Abb. 15 S. 158), die sich in Abb. 16 als O'' projiziert. Außerdem hat (K) im Scheitel A mit der Kehlschraubenlinie den Krümmungskreis mit dem Radius

$$(146) \quad \varrho_a = \frac{r}{\cos^2 \beta}$$

gemeinsam. Die Länge b der zweiten Halbachse von (K) ist damit

$$(147) \quad b = \sqrt{a \varrho_a} = \frac{\sqrt{ar}}{\cos \beta}.$$

In Abb. 16 ist $O''T'' = O''T_1'' = b$ und

$$(148) \quad O''G'' = b \cos \beta = \sqrt{ar}.$$

Der Krümmungskreis von (K) im Scheitel T ist

$$(149) \quad \varrho_b = \frac{a^2}{b} = \frac{a^2 \cos \beta}{\sqrt{ar}}.$$

²⁹ Dasselbe folgt auch aus (98) S. 144 und (138) S. 156 mit $\bar{v} = 0$, $\bar{k}_1 = k_1$, $\bar{k}_3 = k_3$. Es ergibt sich $a = -\bar{k}_1 : \bar{k}_3 = r - k \operatorname{ctg} \alpha$. In gleicher Weise lassen sich auch die beiden anderen Halbachsen von F_0 bestimmen; die folgenden geometrischen Überlegungen erübrigen dies jedoch.

K_0 besitzt einen zu (K) parallelen und kongruenten Schnitt (K_1) , dessen Aufriß $(K_1)''$ die Strecke $Q''Q_1''$ ist. Die Projektionen Q'' und Q_1'' der Scheitel liegen auf den Umrißmantellinien von K_0 im Aufriß, die mit e'' bzw. g_A'' zusammenfallen. Dabei entsprechen sich die Scheitel T von (K) und Q von (K_1) , desgleichen ihre Krümmungsmittelpunkte K'' und K_1'' . Nach dem Satz von Meusnier ist der Krümmungsradius ϱ_n des Normalschnittes von K_0 in $Q \perp e$

$$(150) \quad \varrho_n = \frac{\varrho_b}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Der Krümmungsradius ϱ des Horizontalschnittes (K_2) in seinem Scheitel Q hat den Wert

$$(151) \quad \varrho = \varrho_n \sin \alpha.$$

Aus (149), (150), (151) folgt

$$(152) \quad \varrho = \frac{a^2 \cos \beta \sin \alpha}{\sqrt{ar} \sin(\alpha - \beta)}.$$

Nach dem Additionstheorem erhält man

$$(153) \quad \varrho = \frac{a^2}{\sqrt{ar}} \cdot \frac{1}{1 - \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Mit $\operatorname{tg} \beta = \frac{k}{r}$ (144) folgt

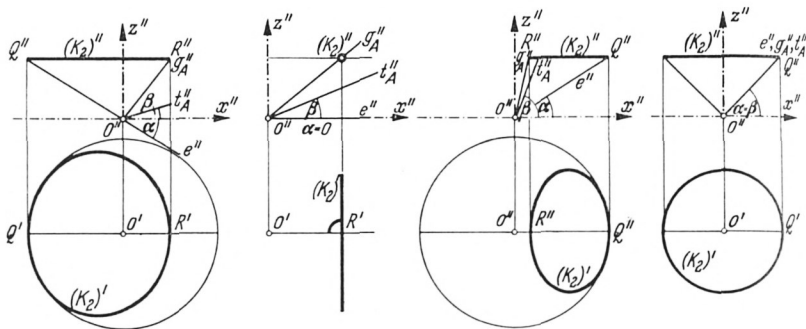
$$(154) \quad \varrho = \frac{a^2}{\sqrt{ar}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{k}{r} \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{a^2 r}{\sqrt{ar} (r - k \operatorname{ctg} \alpha)}$$

und schließlich mit (145)

$$(155) \quad \varrho = \sqrt{ar} = Z''Q''.$$

Da $Z''Q'' = O''G'' = \sqrt{ar}$ ist, liegt der Krümmungsmittelpunkt Z von Q auf der z -Achse, und dies gilt wegen der Ähnlichkeit bezüglich O für alle Horizontalschnitte (K_2) mit $z \neq 0$. Da $y = 0$ Symmetrieebene von K_0 und damit auch von (K_2) ist, so ist die Schnittgerade der Ebene $y = 0$ und der Ebene von (K_2) Hauptachse QR des Kegelschnittes (K_2) . Aus dem Aufriß (Abb. 16) ist ersichtlich, daß der Scheitel Q wegen $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$ im Endlichen liegt. Der Scheitel R liegt im Endlichen, wenn g_A nicht parallel zur x -Achse ist, wenn also $\operatorname{tg} \alpha \neq 2 \frac{k}{r}$ ist. Dann ist

(K_2) ein Mittelpunktskegelschnitt. Es können dabei die in Abb. 17 angegebenen Fälle 1, 3, 5, 7 auftreten. Ist $\operatorname{tg} \alpha = 2 \frac{k}{r}$, so wird g_A nach Abb. 17, Fall 6 waagrecht; daher wird R uneigentlich. (K_2) ist in diesem Fall eine Parabel.

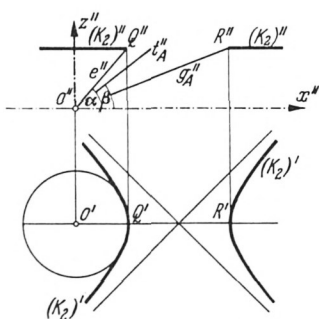


1) $r \neq 0, -\infty < \operatorname{tg} \alpha < 0$

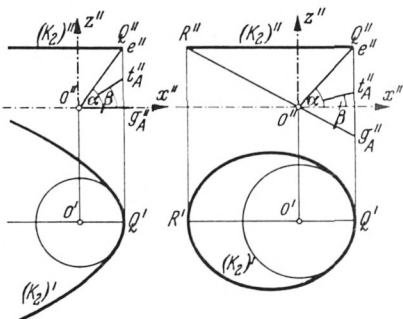
2) $r \neq 0, \operatorname{tg} \alpha = 0$

3) $r \neq 0, 0 < \operatorname{tg} \alpha < \frac{k}{r}$

4) $r \neq 0, \operatorname{tg} \alpha = \frac{k}{r}$

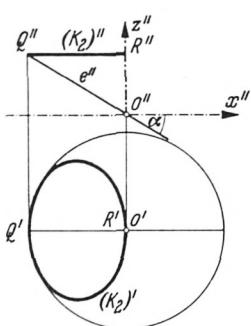


5) $r \neq 0, \frac{k}{r} < \operatorname{tg} \alpha < 2 \frac{k}{r}$

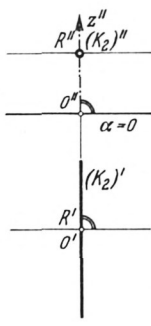


6) $r \neq 0, \operatorname{tg} \alpha = 2 \frac{k}{r}$

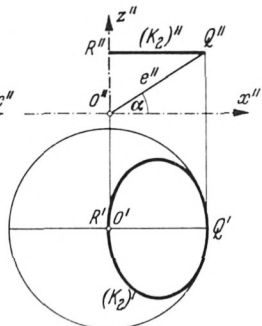
7) $r \neq 0, 2 \frac{k}{r} < \operatorname{tg} \alpha < \infty$



8) $r = 0, -\infty < \operatorname{tg} \alpha < 0$



9) $r = 0, \operatorname{tg} \alpha = 0$



10) $r = 0, 0 < \operatorname{tg} \alpha < \infty$

Abb. 17

Beweis von Satz 13 für den Fall Ib (Abb. 17, Fall 8, 10)

Läßt man bei festem $\alpha \neq 0$ $r \rightarrow 0$ streben, so geht F_0 stetig in die Grenzlage für $r = 0$ über. Dasselbe gilt für K_0 . Daher gilt Satz 13 auch für $r = 0$. Da $g_A = z$ ist, liegt der Scheitel R von (K_2) auf der z -Achse. Es ist daher $R' = O'$.

Fall II ($r \geq 0$, $\operatorname{tg} \alpha = 0$).

Wegen $\operatorname{tg} \alpha = 0$ ist nach (129) S. 152 $\bar{k}_3(\bar{v}) = k_3(v) = 0$. Daher ist F_0 ein hyperbolisches Paraboloid, wie auch aus Fußnote 4 S. 112 hervorgeht. Die beiden Geradenscharen von F_0 sind je zu einer die Symmetrieachse y enthaltenden Ebene parallel. Die eine Ebene ist $z = 0$ (Richtebene von Φ). Die andere Ebene ist bestimmt durch die y -Achse und die Gerade g_A , die man für $r \neq 0$ wie im Fall Ia nach Abb. 16 erhält, und die für $r = 0$ wie im Fall Ib die z -Achse ist. Ihre Gleichung lautet $rz - 2kx = 0$. Ist γ der Winkel der beiden Scheiteltangenten, so ist also für $r \neq 0$

$$(156) \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{2k}{r}.$$

Damit ist das hyperbolische Paraboloid F_0 im Fall IIa bis auf Ähnlichkeit bestimmt. Der Maßstabsfaktor p in (83) S. 141 ergibt sich durch Vergleich der Grundinvarianten von F_0 und Φ . Nach (138) S. 156 ist nämlich

$$(157) \quad k_1 = k.$$

Da $\bar{k}_1 = k_1$ und $\bar{v} = 0$ ist, ergibt sich aus (88) S. 141 und (157)

$$(158) \quad p = \frac{2k}{\operatorname{tg} \gamma}.$$

Aus (156) und (158) folgt

$$(159) \quad p = r.$$

Ist $r = 0$, dann ist $\gamma = \frac{\pi}{2}$, und F_0 ist ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid. Aus (81) S. 140 und (157) folgt mit $\bar{k}_1 = k_1$ und $\bar{v} = 0$

$$(160) \quad p = \frac{k}{2}.$$

Damit ist F_0 im Fall II a und b vollständig bestimmt. Der Richtkegel von F_0 artet im Fall II zum Ebenenpaar

$$(161) \quad z(rz - 2kx) = 0$$

aus. Ein Horizontalschnitt (K_2) von K_0 ($z \neq 0$) besteht demnach aus einer zur y -Achse parallelen Geraden und aus der uneigentlichen Geraden der Ebene $z = \text{const.}$ (Abb. 17, Fall 2, 9).

Fall III $\left(r \neq 0, \operatorname{tg} \alpha = \frac{k}{r}\right)$.

Die Regelschraubenfläche Φ ist in diesem Fall abwickelbar, weil ihre Erzeugenden zugleich Tangenten der innersten Schraubenlinie sind. Dieser Fall werde nur der Vollständigkeit halber angeführt. Unter F_0 soll jetzt der Drehkegel verstanden werden, dessen Spitze auf der Gratlinie von Φ liegt, dessen Achse parallel zur Schraubachse z ist und für den die Erzeugende e eine Mantellinie bildet. Dieser Kegel heißt Krümmungskegel von Φ längs e ³⁰ und oskuliert Φ längs e , weil er als Grenzlage einer durch drei Erzeugende e_i bestimmten Regelfläche 2. Ordnung entstehen kann. Der Richtkegel K_0 des Krümmungskegels F_0 entsteht im vorliegenden Fall durch Parallelverschiebung von F_0 . Da die Mantellinien von F_0 bzw. K_0 alle dieselbe Neigung haben, ist K_0 zugleich Richtkegel der Torse Φ . Die Horizontalschnitte (K_2) von K_0 ($z \neq 0$) sind Kreise, deren Mittelpunkte auf der z -Achse liegen, Abb. 17 Fall 4. Satz 13 S. 162 ist demnach auch im Fall III gültig.

10. Umrißspitzen

Bei der (schiefen oder senkrechten) Parallelprojektion einer Fläche F ³¹ auf eine Ebene hat man die Aufgabe, den wahren Umriß von F (in dessen Punkten die Fläche F von den Projek-

³⁰ Vgl. Müller-Krames [18] S. 86.

³¹ Sofern nicht anders bemerkt wird, soll F mit der Gleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ in allen Punkten eines Bereiches ($u_a \leq u \leq u_b, v_a \leq v \leq v_b$) eine eindeutige Normale und entweder durchweg endliche positive oder durchweg endliche negative Gaußsche Krümmung besitzen.

tionsstrahlen berührt wird) und seine Projektion, den scheinbaren Umriß von F , zu konstruieren. Dieser Aufgabe kommt die andere gleich, bei Parallelbeleuchtung einer Fläche F die Eigenschattengrenze und ihre Projektion, die Schlagschattengrenze, zu konstruieren.

Nach einem bekannten Satz von Dupin gilt (Fußnote 27 S. 159): Wird eine Fläche F längs einer Flächenkurve (C) von einer abwickelbaren Fläche berührt, dann sind die Tangenten von (C) und die Erzeugenden der abwickelbaren Fläche in den Punkten von (C) konjugiert.

Ist die abwickelbare Fläche ein zur Projektionsrichtung l paralleler Zylinder, dann ist (C) der wahre Umriß von F für die Projektionsrichtung l . Die Projektion von (C) ist dann der scheinbare Umriß von F bei Parallelprojektion in Richtung l .

Die Projektion einer regulären Raumkurve³² hat genau dann eine Spitze, wenn ein Projektionsstrahl Tangente der Raumkurve ist. Setzt man den wahren Umriß (C) von F als regulär voraus, dann folgt, daß der scheinbare Umriß einer Fläche genau dann eine Spitze hat, wenn ein Projektionsstrahl mit einer Tangente des wahren Umrisses zusammenfällt. Da der Projektionsstrahl und die Tangente an (C) jedoch konjugierte Richtungen auf der Fläche F bilden, so liegen zwei zusammenfallende konjugierte Richtungen vor. Daraus folgt, daß es sich um eine Asymptotenrichtung handelt. Der Projektionsstrahl einer Umrißspitze ist also Haupttangente der Fläche und umgekehrt: Ist ein Projektionsstrahl Haupttangente der Fläche, dann bestimmt er eine Umrißspitze (von singulären Fällen abgesehen). Da nur Flächenstücke mit negativem Krümmungsmaß (hyperbolisch gekrümmte Flächenstücke) reelle Asymptotenlinien haben, können (reelle) Umrißspitzen nur bei der Projektion von Flächenstücken mit negativem Krümmungsmaß auftreten.³³

Wegen dieses Zusammenhanges lassen sich die Asymptotenrichtungen in einem (hyperbolischen) Punkt P einer Fläche anschaulich aufzeigen. Dazu muß die durch ein Modell dargestellte

³² Eine Raumkurve $\eta = \eta(t)$ heiße regulär im Intervall $t_a \leq t \leq t_b$, wenn sie im ganzen Intervall von Null verschiedene endliche Krümmung und Torsion besitzt.

³³ Dupin [3] S. 51, Hachette [7] S. 298, Mannheim [14] S. 309.

Fläche zum Auge des Betrachters derart liegen, daß P auf dem Umriß liegt. Dann geht die Tangentialebene des Punktes P der Fläche durch das Auge des Betrachters. Wird nun die Fläche um die festgehaltene Flächennormale des Punktes P gedreht, so geht die Tangentialebene in P fortwährend durch das Auge, so daß P immerzu als ein Punkt des sich dabei ändernden scheinbaren Umrisses beobachtet wird. Sobald der scheinbare Umriß im Punkt P dem Betrachter eine Spitze darbietet, ist nach den oberen Ausführungen der Sehstrahl eine Haupttangente der Fläche im Punkt P .

11. Konstruktion der bei Parallelprojektion von Φ möglicherweise auftretenden Spitzen des scheinbaren Umrisses

Die Bestimmung der Spitzen des scheinbaren Umrisses einer Fläche bei Parallelprojektion ist nach 10. gleichwertig mit der Ermittlung der Haupttangenten dieser Fläche parallel zu einer vorgegebenen Richtung. Bei den Regelflächen Φ , deren sämtliche Lieschen Schmieglflächen 2. Ordnung zu einer vorgegebenen Regelfläche 2. Ordnung ähnlich sind, kann dies in folgender Weise besonders einfach und übersichtlich geschehen.

Im einfachsten Fall ist der Projektionsstrahl l eine Erzeugende e der Regelfläche. Der scheinbare Umriß der Regelfläche verhält sich in der Geraden-Umgebung des Spurpunktes $\bar{S}$ von e wie der scheinbare Umriß der Lie- F^2 längs e . Für diesen ist der Spurpunkt $\bar{S}$ von e jedoch ein isolierter Punkt (abwickelbare Regelflächen seien wieder ausgeschlossen). Daher ist $\bar{S}$ auch ein isolierter Punkt des scheinbaren Umrisses der Regelfläche. Ist F_0 ein einschaliges Hyperboloid, so besitzt F_0 eine zu e parallele Erzeugende g_E . Diese gehört zur Schar der Haupttangenten von Φ längs e und bildet die Grenzlage dieser Haupttangenten, wenn der Schnittpunkt auf e ins Unendliche rückt. Die Projektion $\bar{E}$ von g_E ist daher im allgemeinen eine Spitze des scheinbaren Umrisses der Fläche Φ .

Es sei nun l zu keiner Erzeugenden der Regelfläche parallel. Ist O die Spitze des Richtkegels der Regelfläche und $l_0 \parallel l$ durch

O , so ist l_0 keine Mantellinie des Richtkegels. Die Haupttangente der Regelfläche längs einer Erzeugenden e bilden eine Geradenschar der Lie- F^2 der Regelfläche längs e . Verschiebt man diese Haupttangente alle parallel durch O , so bilden sie einen Kegel, der „Haupttangentenkegel von e “ heißen soll. Er ist zugleich der Richtkegel K_0 der Lie- F^2 und daher kongruent zum Asymptotenkegel der Lie- F^2 ; er geht in diesen durch Parallelverschiebung über. Jede Erzeugende von Φ bestimmt einen solchen Haupttangentenkegel.

Es muß nun festgestellt werden, ob l_0 Mantellinie auf einem dieser Haupttangentenkegel ist. Trifft dies zu, dann gibt es auf der zu diesem Kegel gehörenden Erzeugenden e der Regelfläche einen Punkt S mit einer zu l_0 parallelen Haupttangente l . Die Projektion $\bar{S}$ von S ist eine Spitze des scheinbaren Umrisses der Regelfläche. Haben mehrere Erzeugende e einen Haupttangentenkegel, auf dem l_0 Mantellinie ist, so gilt das Gesagte für jede von ihnen. Ist dagegen l_0 auf keinem dieser Kegel eine Mantellinie, so hat der scheinbare Umriß der Regelfläche keine Spitze.

Die Regelflächen Φ mit lauter ähnlichen Lie- F^2 haben lauter kongruente Haupttangentenkegel. Wenn die Lie- F^2 alle Lagen auf Φ durchläuft, dann führt der (starre) Haupttangentenkegel eine sphärische Bewegung um den Punkt O aus, während l_0 fest bleibt. In einem mit dem bewegten Haupttangentenkegel mitgeführten System beschreibt l_0 einen allgemeinen Kegel mit derselben Spitze O . Haben diese beiden Kegel eine gemeinsame Mantellinie, dann hat der scheinbare Umriß der Regelfläche eine Spitze, andernfalls dagegen nicht. Die Ermittlung der Umrißspitzen bei Regelflächen Φ mit lauter ähnlichen Lie- F^2 ist damit zurückgeführt auf die Bestimmung der gemeinsamen Mantellinien eines allgemeinen Kegels und eines Kegels 2. Ordnung mit der gemeinsamen Spitze O .

Bei den in 8. S. 151 behandelten Regelflächen mit lauter ähnlichen Schmiegestreifen 2. Ordnung ist die Bewegung des Haupttangentenkegels eine Drehung um die z -Achse, vgl. S. 155. Läßt man nun – anstatt den Haupttangentenkegel bei festgehaltenem Strahl l_0 zu bewegen – den Haupttangentenkegel fest und bewegt den Strahl l_0 , so beschreibt dieser als Umkehrbewegung einen Drehkegel mit der Achse z . Schneiden sich dieser Drehkegel und

der Haupttangentenkegel in einer Mantellinie m , so hat der scheinbare Umriß der Regelfläche eine Spitze, die folgendermaßen bestimmt werden kann.

Man dreht den bewegten Strahl l_0 aus der Lage m wieder in die alte Lage zurück und nimmt dabei den Haupttangentenkegel mit, der jetzt die Bewegung ausführt, die dem Wandern der Lie- F^2 längs der Regelfläche entspricht. Der Drehwinkel (auch vermehrt oder vermindert um Vielfache von 2π) legt eine Erzeugende e der Regelfläche Φ fest. Mit Hilfe der Lie- F^2 von Φ längs e läßt sich auf e der Punkt S bestimmen, der eine zu l_0 parallele Haupttangente l hat.

12. Eine Konstruktion der beim scheinbaren Umriß von Regelschraubenflächen möglicherweise auftretenden Spitzen

Im Sonderfall der Regelschraubenflächen erfährt die Konstruktion der Spitzen des scheinbaren Umrisses eine weitere Vereinfachung.

Der wahre Umriß (U) von Φ sei im Intervall $t_a \leq t \leq t_b$ (vgl. (137) S. 156) regulär und habe im Punkt S eine zu l parallele Tangente l_s . Nach 10. ist dann l_s Haupttangente von Φ , und die Projektion $\bar{S}$ von S ist eine Spitze des scheinbaren Umrisses ($\bar{U}$) von Φ . Es sei e_s die Erzeugende von Φ durch S , K_s der Haupttangentenkegel von e_s und endlich m_s die zu l_s parallele Mantellinie von K_s . Dann ist $m_s = l_0$. Bringt man e_s durch Verschraubung mit der Erzeugenden e durch A ($u = 0, t = 0$) zur Dekkung, so geht dabei K_s in den in Abb. 16 S. 160 dargestellten Richtkegel K_0 von F_0 und die Mantellinie m_s in eine gemeinsame Mantellinie m von K_0 und dem Drehkegel K_l über, der durch l_0 und die Drehachse z bestimmt wird.

Der Horizontalschnitt (K_2) von K_0 hat nach Satz 13 S. 162 einen Scheitelkrümmungskreis, dessen Mittelpunkt auf der z -Achse liegt. Derselbe Horizontalschnitt mit K_l ist ein Kreis (K_l), dessen Mittelpunkt ebenfalls auf der z -Achse liegt. Die Mantellinien m , die K_0 und K_l gemeinsam sind, ergeben sich daher aus den Schnittpunkten der Kurve 2. Ordnung (K_2) mit dem Kreis (K_l),

der zu einem Scheitelkrümmungskreis von (K_2) konzentrisch ist. Diese Aufgabe 4. Ordnung läßt sich wie folgt mit Zirkel und Lineal lösen.

Bei den in Abb. 17 S. 164 angegebenen Fällen 2 und 9 handelt es sich lediglich um den Schnitt eines Kreises mit einer Geraden.

Im Fall 4 (Abb. 17) ist Φ eine Torse. (K_2) und (K_l) haben entweder keinen gemeinsamen Punkt oder sie fallen zusammen. Im letzteren Fall gibt es zu jeder Mantellinie von K_l parallele Projektionsstrahlen, die Tangenten an die Gratlinie von Φ sind. Die Gratlinie wird dabei als eine zur gespitzten Zykloide im allgemeinen affine Kurve³⁴ projiziert, die zugleich den scheinbaren Umriß $(\bar{U})$ von Φ darstellt. Dessen Spitzen sind also die Spitzen der Projektion der Gratlinie von Φ .

In allen anderen Fällen werden zur Konstruktion der Schnittpunkte von (K_2) und (K_l) Hilfsflächen 2. Ordnung verwendet. Dadurch wird diese Konstruktion außerordentlich einfach.

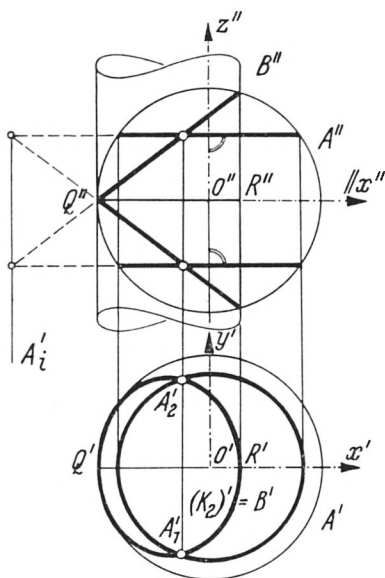


Abb. 18

³⁴ Die schiefe Parallelprojektion der Gratlinie von Φ in Richtung einer Tangente auf die Ebene $z = 0$ ist eine gespitzte Zykloide, vgl. Müller-Kruppa [19] S. 195–196.

Im Fall 1, 3, 8, 10 liegt (K_2) im Innern, im Fall 5, 6, 7 im Äußern des Scheitelkrümmungskreises mit Mittelpunkt O , vgl. Abb. 17. Die Fälle 1, 3, 8, 10 einerseits und 5, 6, 7 andererseits werden zweckmäßig gesondert behandelt.

Im Fall 1, 3, 8, 10 sei die eine Hilfsfläche die Kugel A , deren Äquator der Krümmungskreis von $(K_2)'$ in Q' ist (Mittelpunkt O) (Abb. 18). Die andere Hilfsfläche sei der vertikale Zylinder B durch (K_2) . Die Schnittlinie von A und B zerfällt in zwei Kreise, deren gemeinsamer Grundriß $(K_2)'$ ist; dies sieht man wie folgt ein. Jeder Kugelkreis, der den (horizontalen) Äquator in Q berührt, hat als Grundriß eine Ellipse, deren Krümmungskreis in Q' nach dem Satz von Meusnier mit dem Kugelumriß A' übereinstimmt. Zu jeder dieser Grundrißellipsen gehören wegen der Symmetrie zur Äquatorialebene zwei Kugelkreise. Ihr Aufriß ist ein zu $Q''O''$ symmetrisches Geradenpaar. Der Aufriß der beiden Breitenkreise, deren Grundriß $(K_l)'$ ist, besteht aus einem zu $Q''O''$ parallelen Geradenpaar. Von den vier reellen Schnittpunkten der beiden Geradenpaare im Aufriß führen in Abb. 18 zwei zu den gesuchten reellen Schnittpunkten A'_1, A'_2 von (K_2) und (K_l) im Grundriß; die anderen beiden sind sogenannte parasitische Punkte,³⁵ die als zusammenfallende Bilder von je einem Paar konjugiert komplexer Punkte der Schnittlinie von A und B anzusehen sind.³⁶ Damit hat man die

Konstruktion des Schnittes $(K_2) \times (K_l)$ im Fall 1, 3, 8, 10

(In Abb. 19 ist die obere Hälfte als Aufriß, die untere Hälfte als Grundriß aufzufassen).

Das Lot auf $Q'R'$ in R' schneidet den zu $(K_l)'$ konzentrischen Kreis durch Q' in A''_0 . Die vertikalen Tangenten von $(K_l)'$ schneiden diesen konzentrischen Kreis in C''_0 und C''_1 . Die Horizontale $C''_0C''_1$ schneidet $Q''A''_0$ in A''_1 . Das Lot auf $Q'R'$ in A''_1 schneidet $(K_l)'$ im gesuchten Punkt A'_1 und dem bezüglich $Q'R'$ symmetrischen Punkt.

³⁵ Siehe z. B. Krames [10] S. 94.

³⁶ Siehe z. B. Krames [10] S. 95, Wiener [26] S. 257 ff.

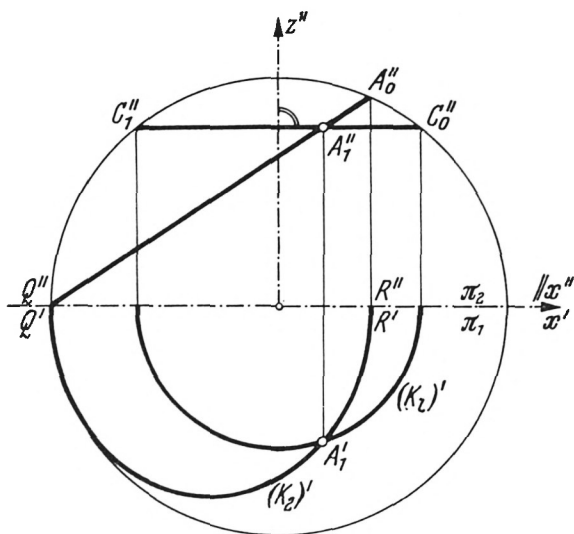


Abb. 19

Im Fall 5, 6, 7 lassen sich die Schnittpunkte A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) von (K_2) und (K_l) – soweit sie reell sind – in ebenso einfachen Konstruktionsschritten bestimmen. Die Hilfsflächen A und B sind dabei etwas anders zu legen als im angegebenen Fall 1, 3, 8, 10, vgl. Fußnote S. 111.

Sind alle Schnittpunkte A_i von (K_2) und (K_l) imaginär, so haben die Kegel K_0 und K_l keine gemeinsame reelle Mantellinie. Das bedeutet, daß Φ keine zur Projektionsrichtung parallele Haupttangente besitzt, und daß daher auch der scheinbare Umriß $(\bar{U})$ von Φ keine (reelle) Spitze haben kann.

Der Fall, daß sich (K_2) und (K_l) berühren, bedarf einer besonderen Untersuchung. Zunächst werde Q als Berührungspunkt angenommen (a), danach R (b).

a) (K_2) und (K_l) berühren sich in Q . Dann ist $l \parallel e$ ($t = 0$).

Bei einer schiefen offenen oder geschlossenen, nicht abwickelbaren Regelschraubenfläche (Fall I, $\tan \alpha \neq 0$, $\tan \alpha \neq \frac{k}{r}$) ist die Lie- F^2 längs e ein einschaliges Hyperboloid. Die Schar der Haupttangente längs e enthält eine zu e parallele Erzeugende g_E . Die Projektion von g_E ist ein Punkt, in dem $(\bar{U})$ eine Spitze $\bar{E}$

bildet (Abb. 20, Abb. 21 b). Die Sichtbarkeit der Regelfläche bei Projektion $\parallel e$ veranschaulicht Abb. 20, wobei ein die Striktionslinie enthaltendes Band eingezeichnet ist.

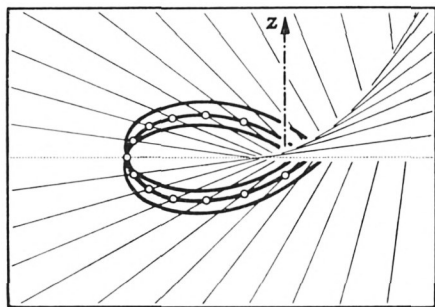


Abb. 20

In Abb. 21 S. 175 ist die (schiefe) Parallelprojektion einer schiefen, offenen Regelschraubenfläche auf die Ebene $z = k$ für drei verschiedene Projektionsrichtungen l_a, l_b, l_c dargestellt (die Erzeugenden sind durchgezogen, sofern sie nicht durch das dargestellte Flächenstück bzw. die z -Achse überdeckt sind. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die drei Projektionen in Richtung l'_a usw. verschoben). Bei a) ist l_a flacher als e , bei b) ist $l_b = e$ und bei c) ist l_c steiler als e . Läßt man l_a gegen e streben, so ziehen sich die beiden Umrißspitzen $\bar{S}_1, \bar{S}_2$ von Abb. 21 a zu der einen Umrißspitze von Abb. 21 b zusammen. Der scheinbare Umriß ($\bar{U}$) geht dabei in eine gemeine Zyклоide über.

Beachtet man noch die (einfacheren) Fälle II und III, dann läßt sich aussagen, daß bei Projektion $l \parallel e$ genau dann nicht ausgeartete Umrißspitzen auftreten, wenn Q ein eigentlicher Punkt ist.

b) (K_2) und (K_l) berühren sich in R . Dann ist $l \parallel g_A$, vgl. Abb. 17.

Im Fall $r = 0$ ist g_A die z -Achse. Als Projektion von Φ erhält man ein Geradenbüschel durch $\bar{O} = \bar{z}$. Der scheinbare Umriß von Φ ist daher zu einem Punkt ausgeartet.

Im Fall $r \neq 0$ kann das Verhalten von ($\bar{U}$) im Punkt $\bar{A}$ mittels Grenzübergang $l \rightarrow g_A$ untersucht werden. Die Krümmung von

(U) konvergiert dabei gegen null, vgl. Fußnote S. 111. In Abb. 22 ist eine gerade, offene Regelschraubenfläche in (schiefer) Pa-

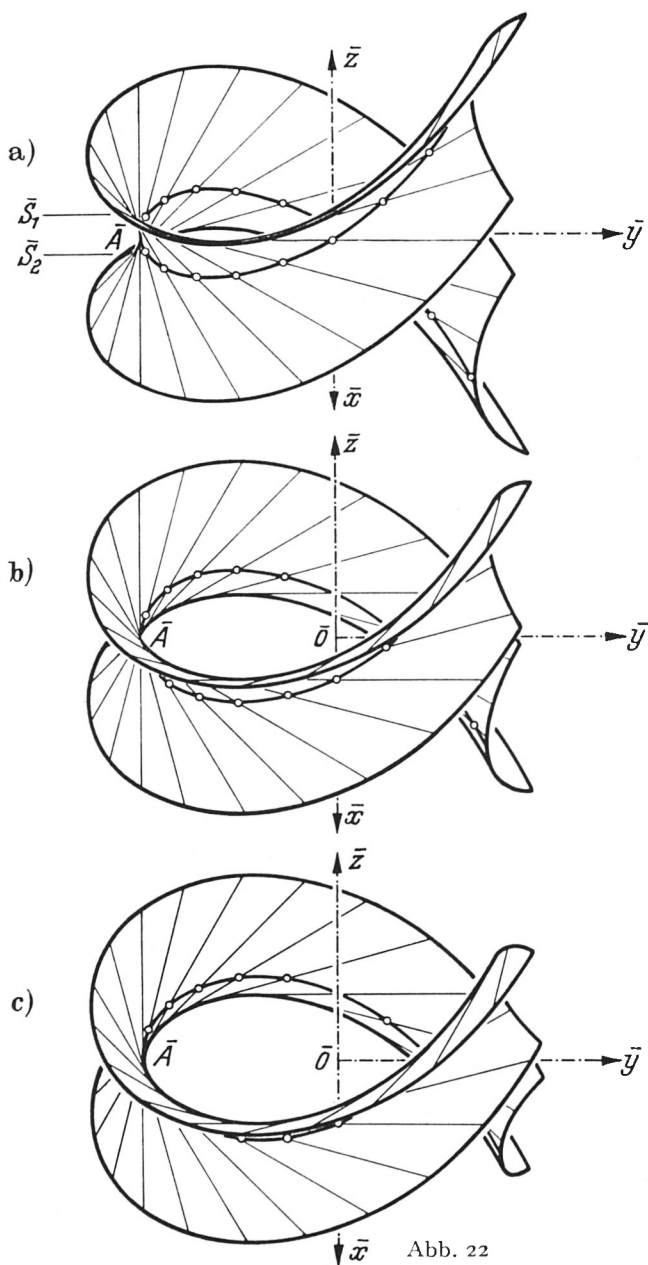


Abb. 22

Spitzen, wenn die Kurven 2. Ordnung (K_2) und (K_l) mindestens zwei gemeinsame reelle Punkte A_i besitzen oder sich im eigentlichen Punkt $Q = A_i$ berühren.

Als letzter Konstruktionsschritt müssen aus den Punkten A_i ($A_i \neq Q, R$) die Umrißspitzen $\bar{S}$ ermittelt werden. Dies geschieht in folgender Weise:

Fall 1, 3, 5, 6, 7, 8, 10 (Fall I), Abb. 23.

(Der Punkt A_i' in Abb. 23 ist nach der Methode von Fall 7 konstruiert, vgl. Fußnote S. 111.)

Es sei S_0 der Punkt von e ($t = 0$), der nach Verschraubung und Projektion parallel l eine Spitze $\bar{S}$ von $(\bar{U})$ liefert. Dann ist die den beiden Kegeln K_0 und K_l gemeinsame Mantellinie $m = OA_i$ parallel zu der von e verschiedenen Haupttangente g_0 in S_0 . Die von $OA_i \parallel g_0$ und $OQ \parallel e$ aufgespannte Ebene ist also parallel zur Tangentialebene von Φ in S_0 und hat die Spur QA_i . Der Grundriß f' der Fallinie f dieser Tangentialebene im Punkt S_0 geht nach Abb. 15 S. 158 durch M' . Da außerdem $f' \perp Q'A_i'$ ist, hat man folgende einfache

Konstruktion von S'_0 im Fall I (Abb. 23).

Das Lot f' von M' auf $Q'A_i'$ schneidet e' in S'_0 .

Fall 2 (Fall IIa), Abb. 24.

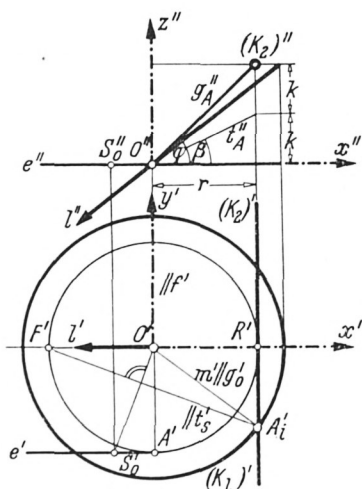


Abb. 24

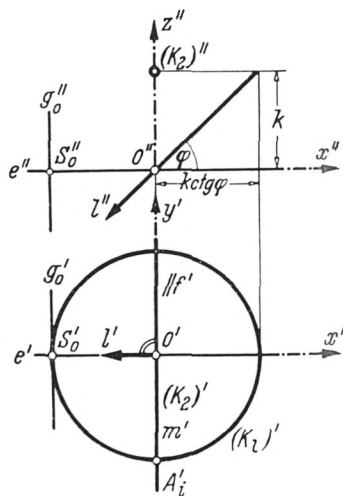


Abb. 25

Da e in der Grundrißebene liegt, ist die Falllinie f der Tangentialebene von Φ in S_0 senkrecht zu e . Daher ist f' parallel zu $R' A'_i$. Weiter ist $g'_0 \parallel O' A'_i$ und $e' \parallel O' R'$. Ist t_s die Tangente der Bahnschraubenlinie von S_0 , so ist $t'_s \perp S'_0 O'$. Für die Richtungen von f, t_s, e, g_0 gilt nach (141) S. 159 $(f t_s e g_0) = -1$.

Ist F' der Spiegelpunkt zu R' bezüglich O' , so folgt daraus $F' A'_i \parallel t'_s$. S'_0 liegt daher auf dem Lot von O' auf $F' A'_i$. Man hat damit die

Konstruktion von S'_0 im Fall IIa (Abb. 24).

Das Lot von O' auf $F' A'_i$ schneidet e' in S'_0 .

Fall 9 (Fall IIb), Abb. 25.

In diesem Fall wurde eine Konstruktion von $\bar{S}$ von J. L. Kramers [10] S. 141 angegeben. Diese Konstruktion ergibt sich aus den bisherigen Überlegungen so: Wegen $OA_i = m \perp e$ und $f \perp e$ fallen die Richtungen von f, g_0, t_s zusammen. Sie sind senkrecht zu e und haben dieselbe Neigung wie l . Wird diese mit $\text{tg } \varphi$ bezeichnet, so folgt aus dem Richtungskegel der Schraubenlinie mit derselben Neigung $\text{tg } \varphi$, daß $O' S'_0 = k \text{ctg } \varphi$ ist. Die

Konstruktion von S'_0 im Fall IIb (Abb. 25)

besteht lediglich in der Angabe des Punktes $(-k \text{ctg } \varphi, 0, 0)^{37}$.

Fall 4 (Fall III).

In diesem Fall ist Φ eine Torse. Der scheinbare Umriß $(\bar{U})$ besitzt nur für $\text{tg } \varphi = \pm \text{tg } \alpha$ eine Spitze $\bar{S}$, die sich als Spitze der Projektion der Gratlinie ergibt. Der Fall III werde nun wieder ausgenommen.

Schließlich muß noch angegeben werden, wie sich die Spitzen $\bar{S}$ des scheinbaren Umrisses aus den Punkten S'_0 ermitteln lassen. Dies kann für alle Fälle in einheitlicher Weise wie folgt geschehen.

Konstruktion von $\bar{S}$ aus den Punkten S'_0 .

Die Spitzen $\bar{S}$ von $(\bar{U})$ (Abb. 26 S. 180) ergeben sich aus den Punkten S'_0 durch Vor- bzw. Zurückschrauben um den Winkel

³⁷ Es kann auch der Punkt $(k \text{ctg } \varphi, 0, 0)$ gewählt werden.

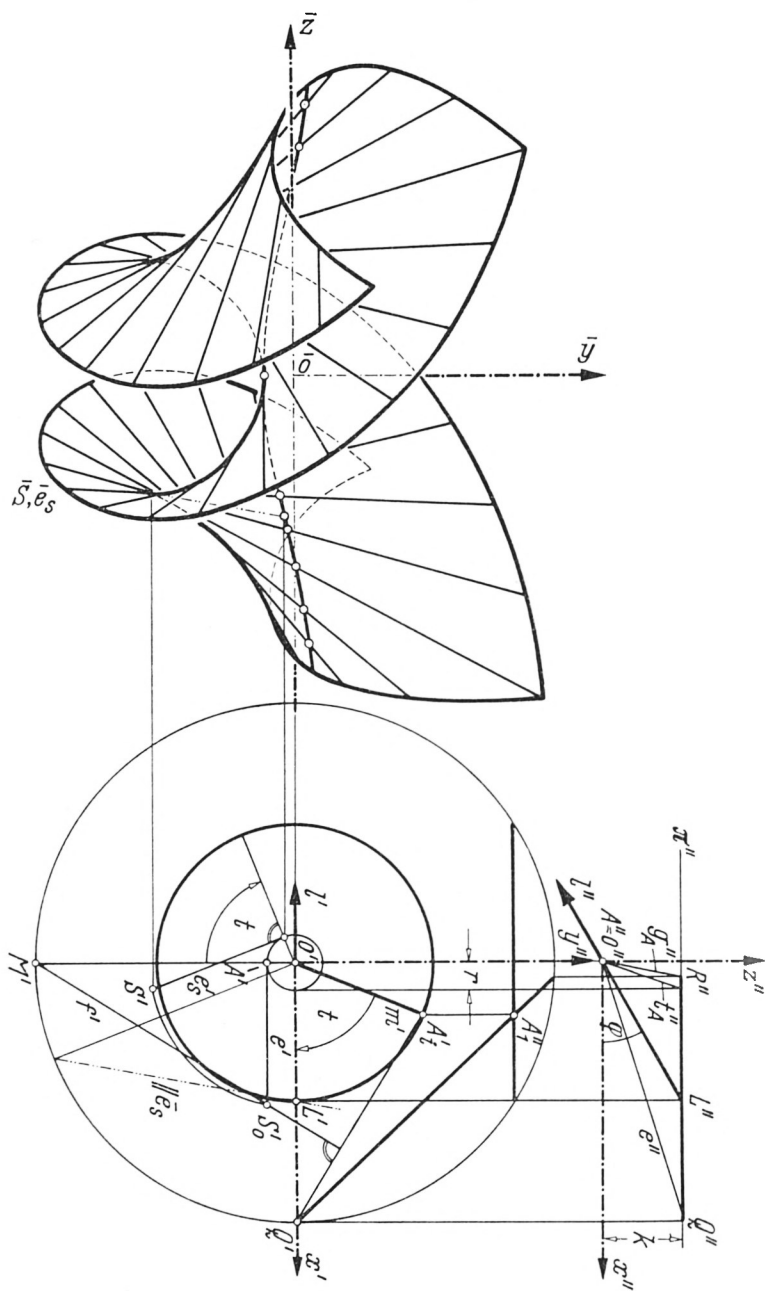


Abb. 26

$t = \angle Q' O' A'_i + 2\pi n$ (n ganz) und anschließender Projektion. Beim Verschrauben wird OA_i und damit g_0 parallel zu l , und der mitverschraubte Punkt S_0 projiziert sich als Spitze $\bar{S}$. Die mitverschraubte Tangentialebene von S_0 ist parallel zu l und projiziert sich wie verlangt als eine Gerade; diese bildet die Spizentangente von $\bar{S}$. Man erhält sie am einfachsten als Projektion $\bar{e}$, der mitverschraubten Erzeugenden e . Dazu wird zweckmäßig der Richtkegel von Φ und dessen Projektion benutzt. In Abb. 26 ist die Projektion des Richtkegels im Fall einer schiefen, offenen Regelschraubenfläche in Richtung l auf die Ebene $\pi(z = k)$ zusammen mit dem Grundriß eingezeichnet. Der Kegelgrundkreis projiziert sich dabei in den Kreis um O' mit dem Radius $O'Q'$. Die Kegelspitze hat die Projektion L' .

Es ist damit eine Aufgabe der Darstellenden Geometrie gelöst, auf die zwar verschiedentlich hingewiesen wurde, von der jedoch eine Lösung bisher nicht bekannt war.

Die Konstruktion der Spitzen des scheinbaren Umrisses einer allgemeinen Regelschraubenfläche bei Parallelprojektion ist in Abb. 26 vollständig durchgeführt. Als Beispiel dient dabei eine schiefe, offene Regelschraubenfläche von Fall 3 S. 164 ($r \neq 0$, $0 < \operatorname{tg} \alpha < \frac{k}{r}$). Die Projektionsebene $\pi(z = k)$ ist dort aus Gründen der Übersichtlichkeit seitlich abgerückt. Die Projektion der Kehlschraubenlinie wurde als Radlinie konstruiert, vgl. z. B. Müller-Kruppa [19] S. 195–196.

Literaturverzeichnis

- [1] Blaschke W., Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I Berlin 1930, Bd. II Berlin 1923.
- [2] Burmester L., Kinematisch-geometrische Constructionen der Parallelprojektion der Schraubenflächen und insbesondere des Schattens derselben, Zeitschr. f. Math. u. Physik 18, Leipzig 1873, S. 195.
- [3] Dupin Ch., Développements de géometrie, Paris 1813.
- [4] Edlinger E., Über Regelflächen, deren sämtliche oskulierenden Hyperboloide Drehhyperboloide sind, Sitzungsber. Akad. Wien, math.-nat. Klasse Abt. IIa, Bd. 132 (1923) S. 343–351.

- [5] de la Gournerie, J. A. R., Mémoire sur les lignes d'ombre et de perspective des hélicoïdes gauches, Journal de l'Ecole Polyt. XXXIV, Paris 1851, Art. 46, 47.
- [6] de la Gournerie, J. A. R., Traité de géom. descr., Paris 1864.
- [7] Hachette J. N. P., Traité de géom. descr., 2. Aufl. 1828.
- [8] Janisch E., Tangentenkonstruktionen für die Unikursalkurven, welche als Orthogonalprojektionen der Selbstschattengrenzen von Regelschraubenflächen auf eine achsennormale Ebene auftreten. Archiv d. Math. u. Phys., 3. Reihe, 12 Bd., 1907, S. 41.
- [9] Kowalewski G., Allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen, Berlin und Leipzig 1931.
- [10] Krames J. L., Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer, Wien 1947.
- [11] Kruppa E., Analytische und konstruktive Differentialgeometrie, Wien 1957.
- [12] Löbell F., Zur Differentialgeometrie der Regelscharen, Jahresbericht d. dt. Math. Verein. 51 (1941) S. 29–41 (kursiv).
- [13] Mack K., Das Berührungsproblem für die allgemeine Regelschraubenfläche, Monatshefte f. Math. u. Phys., Bd. 17, 1906 S. 314.
- [14] Mannheim A., Cours de géom. descr., Paris 1880.
- [15] Monge G., Mém. sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes 1775.
- [16] Monge G., Mém. prés. p. div. Sav., Paris 1780, S. 382 ff.
- [17] Müller E., Lehrb. d. Darst. Geom. I, Leipzig-Berlin 1918.
- [18] Müller-Krames, Vorl. ü. Darst. Geometrie III, Leipzig-Wien 1931.
- [19] Müller-Kruppa, Lehrb. d. Darst. Geometrie, Wien 1948.
- [20] Pelz C., Zur Contourbestimmung windschiefer Schraubenflächen, Sitzber. Akad. Wien, nat. Kl. 2. Abt., 87. Bd., 1883, S. 473.
- [21] Procházka F., Ein Beitrag zur Schattenlehre, Archiv d. Math., 2. Reihe, 2. Teil, 1885, S. 101.
- [22] Rohn-Papperitz, Lehrb. d. Darst. Geometrie, Bd. I, Leipzig 1913.
- [23] Schmid Th., Darstellende Geometrie II, Berlin u. Leipzig 1923.
- [24] Tesař J., Kinematische Bestimmung der Contour einer windschiefen Schraubenfläche, Sitzber. Akad. Wien, nat. Kl. 2. Abt., 86. Bd., 1882, S. 377.
- [25] Tesař J., Die Contoureolute axialer Schraubenflächen, Sitzber. Akad. Wien, nat. Kl., 2. Abt., 94. Bd., 1886, S. 181.
- [26] Wiener Chr., Lehrb. d. Darst. Geometrie II, Leipzig 1887.
- [27] Wunderlich W., Formeln und Rechenbehelfe zur Abwicklung des Kegels 2. Ordnung, Österr. Ing.Archiv, Bd. 10 (1956).
- [28] Zindler K., Liniengeometrie II, Leipzig 1906.