

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1959

MÜNCHEN 1960

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Die geometrischen und physikalischen Daten des Normalsphäroides der Erde

Von Karl Ledersteger in Wien

Vorgelegt von Herrn Max Kneißl am 6. März 1959

Als Bestimmungsstücke der noch nicht definitiv festliegenden Normalfigur der Erde werden derzeit zumeist die numerischen Daten des sogenannten „Internationalen Näherungssystemes“ verwendet, welches bekanntlich auf dem Hayfordschen Ellipsoid und auf der internationalen Schwereformel beruht. Gegenwärtig wird es immer offensichtlicher, daß das Näherungssystem revisionsbedürftig ist. Diese Revision hat sich aber nicht allein auf die reinen Zahlenwerte des Systemes zu beschränken. Vielmehr soll auf Grund einer eingehenden Analyse der Nachweis erbracht werden, daß das Näherungssystem überhaupt eine physikalisch unmögliche Figur repräsentiert.

Das Theorem von Stokes besagt, daß die Kräftefunktion im Außenraum der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine feste Achse rotierenden Erde durch eine äußere Niveaufläche S eindeutig bestimmt ist. Dies muß nach entsprechender Regularisierung der Massenordnung des Erdkörpers auch für das „Normalsphäroid“ der Erde gelten, unter welchem wir eine noch genauer zu definierende heterogene Gleichgewichtsfigur zu verstehen haben. Notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, daß diese Normalfigur gleichzeitig freie Oberfläche und Niveaufläche der regularisierten rotierenden Erdmasse sein muß und die Schichten im Erdinnern sich im hydrostatischen Gleichgewicht befinden. Da es sich dabei jedenfalls um eine schwach abgeplattete Rotationsfigur handelt, kann diese Gleichgewichtsfigur bequem mit dem achsengleichen Rotationsellipsoid verglichen werden, von dem sie sich durch geringfügige Abweichungen unterscheidet, die durch den sogenannten Formparameter bestimmt sind. Es hat also vorerst den Anschein, daß das Normalsphäroid durch fünf Bestimmungsstücke charakterisiert

ist, nämlich die Erdmasse E , die Rotationsgeschwindigkeit ω , Achse a und Abplattung α des achsengleichen Rotationsellipsoides und schließlich durch den Formparameter f .

Eine kürzlich durchgeführte Untersuchung¹ der möglichen homogenen und heterogenen Gleichgewichtsfiguren der rotierenden Erdmasse hat jedoch gezeigt, daß es unter Zugrundelegung des Helmertschen Niveausphäroides 4. Ranges:

$$U_4 = \frac{k^2 E}{l} \left[1 + \frac{K}{2l^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{\omega^2 l^3}{2k^2 E} \cos^2 \varphi + \frac{D}{l^4} \left(\sin^4 \varphi - \frac{6}{7} \sin^2 \varphi + \frac{3}{35} \right) \right] = \text{const} \quad (1)$$

mit $K = (C - A)/E$; $\delta = \frac{D}{a^4}$

für die vorgegeben gedachte Erdmasse E eine dreifach unendliche Schar von Gleichgewichtsfiguren gibt, deren jede durch einen Punkt in dem „geometrischen“ Koordinatensystem mit den Achsen a , α und h_m repräsentiert ist, wobei die in der Breite 45° auftretende maximale Erhebung der Figur über das achsengleiche Ellipsoid: $h_m = af/4$ den Formparameter ersetzt. Zu jeder dieser Figuren gehört ein bestimmtes System von 9 physikalischen Größen, die mit der Erdmasse und mit den drei geometrischen Parametern durch das bekannte Helmertsche Formelsystem verknüpft sind, das insgesamt 8 Gleichungen umfaßt. Es sind dies folgende 9 weitere Größen: die Rotationsgeschwindigkeit ω , der Potentialwert W_0 , die statische Abplattung K/a^2 , die mittlere Dichte ϱ_m , das Verhältnis ε von Fliehkraft zur Schwere am Äquator, der Parameter δ und schließlich die drei Bestimmungsstücke der theoretischen oder normalen Schwereverteilung:

$$\gamma = \gamma_0 \left(1 + \beta \sin^2 \varphi - \frac{\beta_4}{4} \sin^2 2\varphi \right). \quad (2)$$

Das Helmertsche Formelsystem gilt für alle Niveausphäroide mit dem Potentialausdruck (1). Dieser Ausdruck beruht auf einer Kugelfunktionsentwicklung des Schwerepotentials W und auf der formalen Zerlegung $W = U + T$. Er gilt bei jeder denk-

¹ K. Ledersteger: „Die möglichen Gleichgewichtsfiguren der rotierenden Erdmasse“, Zeitschrift f. Vermessungswesen, Stuttgart, Heft 3, 1959, Seite 73-90.

baren Massenanordnung für die ganze Schar der Niveausphäroide $U = \text{const}$, deren jedes der Niveaufläche $W = \text{const}$ desselben Potentialwertes zugeordnet ist. Setzen wir Massenanordnungen voraus, für welche die Niveaufläche vom Potentialwert des natürlichen Geoides: $W = W_0$, das sogenannte „künstliche Geoid“, äußere Niveaufläche ist, so gehören die Gleichgewichtsfiguren zu jenen künstlichen Geoiden, die mit ihren eigenen Niveausphäroiden zusammenfallen, für die also die Restfunktion verschwindet. Darüber hinaus ist aber für die Gleichgewichtsfigur erforderlich, daß das künstliche Geoid gleichzeitig die freie Oberfläche darstellt, was nur durch eine zusätzliche Gleichgewichtsbedingung verbürgt werden kann. Diese neunte Gleichung läßt sich wohl für die homogenen MacLaurinschen Rotationsellipsoide, nicht aber für allgemeine, heterogene Gleichgewichtsfiguren hypothesenfrei aufstellen. Daher kommt es, daß das Helmertsche Gleichungssystem – 8 Gleichungen für insgesamt 13 Größen – 5 freie Parameter besitzt, während die Gleichgewichtsfiguren durch 4 freie Parameter und bei vorgegebener Erdmasse durch bloß drei freie Parameter bestimmt sind.

Das Helmertsche System ist auf schwach abgeplattete Figuren beschränkt. Die Parameter α , β , ε und K/a^2 sind Größen 2. O., δ und β_4 Größen 4. O., h_m eine Größe 5. O., während Größen 6. O., also Größen der Ordnung α^3 vernachlässigt sind:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad \alpha + \beta &= \frac{5}{2} \varepsilon - \alpha^2 - \frac{1}{2} \alpha \varepsilon + \frac{2}{7} \delta \\ 2. \quad \gamma_0 &= \frac{k^2 E}{a^2} \left[1 + \alpha - \frac{3}{2} \varepsilon - \alpha^2 - \frac{1}{2} \alpha \varepsilon + \frac{4}{7} \delta + \frac{9}{4} \varepsilon^2 \right] \\ 3. \quad \frac{K}{a^2} &= \frac{1}{3} \left[2\alpha - \varepsilon - 2\alpha^2 + \varepsilon\alpha + \frac{3}{2} \varepsilon^2 + \frac{2}{7} \delta \right] \\ 4. \quad W_0 &= \frac{k E}{a} \left[1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{2}{3} \alpha \varepsilon + \frac{2}{15} \delta \right] \\ 5. \quad \varepsilon &= \frac{\omega^2 a}{\gamma_0} \quad \text{oder} \quad \frac{\omega^2 a^3}{k^2 E} = \varepsilon \left(1 + \alpha - \frac{3}{2} \varepsilon \right) \\ 6. \quad \varrho_m &= \frac{3 E}{4 \pi} \frac{1}{a^3 (1 - \alpha)} \\ 7. \quad \beta_4 &= 3 \delta - 11 \alpha^2 + 10 \alpha \varepsilon \\ 8. \quad h_m &= \frac{a}{4} f = \frac{a}{4} \left(\frac{5}{2} \alpha^2 - \alpha \beta - \delta \right). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Selbstverständlich sind die 5 freien Parameter des Systems weder in ihren Zahlenwerten noch in ihrer Kombination absolut frei. Wir sprechen daher besser von „bedingt freien Parametern“. Soll überdies wie bei der Aufsuchung des Normalsphäroides eine physikalisch mögliche Gleichgewichtsfigur resultieren, so erfordert die Wahl des 5. Parameters, der zur Auflösung des Systemes (3) notwendig ist, eine ganz spezielle Untersuchung; denn dieser Parameter muß mit seinem numerischen Wert einen vollen Ersatz für die fehlende Gleichgewichtsbedingung bieten.

Wir haben oben betont, daß jede Gleichgewichtsfigur durch die Erdmasse und die drei geometrischen Parameter eindeutig mit allen ihren physikalischen Bestimmungsstücken festliegt. Beim Problem des Normalsphäroides ist jedoch gerade umgekehrt die geometrische Gestalt gesucht, d. h. es müßten etwa neben der Erdmasse drei physikalische Parameter gegeben sein. Wie üblich fordern wir für das Normalsphäroid die Rotationsgeschwindigkeit der tatsächlichen Erde und den Potentialwert W_0 des aktuellen Geoides. Da ferner die zur Herstellung des Gleichgewichtes erforderliche Regularisierung der Erdmasse den Drehimpuls ωC des Erdkörpers ungeändert lassen muß, muß auch das Hauptträgheitsmoment C erhalten bleiben. Wiewohl nun die Trägheitsmomente wesentlich von der Massenordnung abhängen, also die Berechnung von C zunächst ohne hypothetische Annahme über die Dichteverteilung im Erdinnern unmöglich erscheint, sind wir zu folgender Definition des Normalsphäroides gelangt:

„Das Normalsphäroid ist jene Gleichgewichtsfigur der rotierenden Erdmasse E , die mit dem tatsächlichen Erdkörper die Rotationsgeschwindigkeit ω und das Hauptträgheitsmoment C gemeinsam hat und überdies den Potentialwert W_0 des tatsächlichen Geoides besitzt. Das mit dem Normalsphäroid achsengleiche Rotationsellipsoid wird als das mittlere Erdellipsoid bezeichnet und dient als gemeinsame Bezugsfläche für die kontinentalen Triangulationen und für das irdische Schwerfeld.“

Bevor wir auf Grund dieser Definition das Normalsphäroid zu bestimmen versuchen, müssen wir die Mängel des internationalen Näherungssystems kritisch beleuchten. Man hat früher nicht an das Normalsphäroid gedacht, sondern an eine direkte

Approximation des mittleren Erdellipsoides auf astronomisch-geodätischem Wege, also nach der Methode der bestanschließenden Ellipsoide. War doch das mittlere Erdellipsoid nicht wie hier physikalisch, sondern im Sinne Helmerts rein geometrisch eben als bestanschließendes Ellipsoid für das ganze Geoid definiert. Die erwähnte, auf einem relativen Lotabweichungssystem beruhende Methode krankt daran, daß das Geoid über den Kontinenten im allgemeinen stärker gekrümmt ist als über den Weltmeeren, was sich in mittleren Breiten in einer Verkürzung der Achse auswirkt und überdies in niederen Breiten eine Vergrößerung, in hohen Breiten umgekehrt eine Verkleinerung der Abplattung zur Folge haben kann. Es war demnach ein wesentlicher Fortschritt in physikalischer Richtung, als Hayford² 1909/10 der Ausgleichung des nordamerikanischen geodätischen Materials isostatisch reduzierte Lotabweichungen zugrunde legte. Begünstigt wurde Hayfords Arbeit durch den Umstand, daß in Amerika die kontinentale Geoidkrümmung durch die Randgebirge abgeschwächt ist und daß nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung dort die Geoidundulationen auffallend klein sind. Dennoch haben neuere Bestimmungen den einwandfreien Beweis erbracht, daß die Achse des Hayfordschen „Internationalen Ellipsoides“ um rund 100 m zu groß ist. Die erste absolute Lotabweichungsausgleichung³ führte, getrennt für Europa und Amerika, in sehr guter Übereinstimmung auf $a = 6378284$ m, während Krassowskij und Isotow⁴ aus dem bisher umfangreichsten Material ein Rotationsellipsoid mit der Achse $a = 6378295$ m abgeleitet haben. Dieser Achsenwert dürfte sich wegen der mittleren Geoiderhebung in der UdSSR noch um schätzungsweise 5–10 m verringern. Wir werden daher später die Achse des Normalsphäroides mit $a = 6378290$ m annehmen.

² J. F. Hayford: „The Figure of the Earth and Isostasy from Measurements in the United States“ und „Supplementary Investigations in 1909 of the Figure of the Earth and Isostasy“, Washington 1909 u. 1910.

³ K. Ledersteger: „Die Bestimmung des mittleren Erdellipsoides und der absoluten Lage der Landestriangulationen“, Sonderheft 12 der Österr. ZfV, Wien 1951.

⁴ F. N. Krassowskij: „Handbuch der Höheren Geodäsie“, Bd. 2, Moskau 1942; A. A. Isotow: „Form und Dimensionen der Erde nach modernen Daten“, Lieferung 73, Moskau 1950.

Übrigens ergab die jüngste im Army Map Service (Washington, 1956) durchgeführte Berechnung den etwas kleineren Wert $a = 6378265$ m. Die Abplattung des Hayfordschen Ellipsoides hat sicherlich viel für sich, zumal alle neueren Bestimmungen auf astronomischer und geodätischer Grundlage auf Abplattungen führen, deren Reziprokwerte zwischen 296 und 298 liegen. Doch darf nicht übersehen werden, daß in der Reihe der „benachbarten Geoide“,¹ die durch die Konstanz von E und W_0 definiert ist, einer Achsenänderung $\Delta a = +24$ m bereits eine Verringerung des Reziprokwertes der Abplattung um eine ganze Einheit entspricht. Dies kann nur so gedeutet werden, daß entweder der soeben angeführten besten Achse eine Abplattung von etwa 1:301 entsprechen müßte, was äußerst unwahrscheinlich ist, oder daß die Werte für E und W_0 im internationalen Näherungssystem falsch sind.

Eine weitere Komplikation ist dadurch eingetreten, daß man sich mit der Approximation des mittleren Erdellipsoides durch das internationale Ellipsoid und dessen Empfehlung als einheitlicher Referenzfläche für die kontinentalen Großraumtriangulationen nicht zufrieden gab, sondern dieses Ellipsoid auch zur Bezugsfläche für das Schwerfeld deklarierte. Das aber heißt mit anderen Worten, daß das internationale Ellipsoid von der rein geodätischen zu einer physikalischen Bezugsfläche aufstieg, also als eine Approximation des Normalsphäroides angesehen wurde, was zwangsläufig zur Hypothese des Niveauellipsoides führte. Die Theorie des Niveauellipsoides wurde von Pizzetti und Somigliana⁵ begründet. Die zur Lösung des Stokesschen Problems für das Rotationsellipsoid herangezogene fiktive Massen-anordnung, bei der der Effekt der Inhomogenität durch eine äquivalente Flächenbelegung mit der Massensumme Null erfaßt wird, ist höchst geistreich und potentialtheoretisch völlig einwandfrei. Sie kann übrigens vermieden werden, wenn man mit Molodenskij⁶ die Reihenentwicklung des Schwerepotentials in rota-

⁵ C. Somigliana: „Teoria del campo gravitazionale dell'ellissoide di rotazione“, Milano 1929, und: „Sul campo gravitazionale esterno del geoide ellissoidico“, Rend. Lincei, 1930.

⁶ M. S. Molodenskij: „Grundbegriffe der geodätischen Gravimetrie“, deutsche Übersetzung eines in Moskau 1945 erschienenen Originals, Berlin 1958.

tionssymmetrischen Ellipsoidkoordinaten zur Lösung der ersten Randwertaufgabe für das Rotationsellipsoid heranzieht. Beide Male wird also einfach das Rotationsellipsoid als Gleichgewichtsfigur einer heterogenen Massenordnung postuliert, ohne die Frage nach der physikalischen Möglichkeit einer derartigen Lösung zu erörtern. Die Bedeutung dieses willkürlichen Postulates kommt klar zum Ausdruck, wenn man mit K. Jung⁷ die lineare Exzentrizität der Koordinatenellipsoide so gewählt denkt, daß eines von ihnen mit dem mittleren Erdellipsoid zusammenfällt. Dann aber ist das aus der Reihenentwicklung hervorgehende Niveausphäroid 4. Ranges gemäß obiger Definition mit dem Normalsphäroid, welches dann vollständig mit dem Erdellipsoid zusammenfällt, identisch, wenn eine bestimmte Massenfunktion 4. O. verschwindet. Auch hierin erkennt man die reine Willkür des Niveauellipsoides.

Man könnte einwenden, daß man sich des fiktiven Charakters der Lösung wohl bewußt ist und mit dem Niveauellipsoid nicht die Existenz einer heterogenen, ellipsoidischen Gleichgewichtsfigur behaupten will, sondern bloß eine praktisch brauchbare Referenzfläche anstrebt. Nun soll aber das internationale Ellipsoid als Niveauellipsoid jene Fläche darstellen, auf welcher die durch die internationale Schwereformel bestimmte theoretische Schwereverteilung gilt. Wie aber soll wirklich einwandfrei aus den Schwerebeobachtungen die Schwereverteilung auf einer fiktiven Niveaufläche abgeleitet werden, die nicht in streng potentialtheoretischem Zusammenhang mit dem gegebenen Schwerefeld steht? Sowohl für das Normalsphäroid wie auch für das fiktive Niveauellipsoid ist die Schwereverteilung in der Form (2) gegeben. Für ein Niveauellipsoid mit den Hayfordschen Abmessungen ist aber wegen $h_m = 0$ nach der 8. Gleichung des Systemes (3) $\delta = +1049 \cdot 10^{-8}$, welcher Wert nicht nur alle drei Koeffizienten der Schwereformel, sondern auch die statische Abplattung und den Potentialwert W_0 etwas verfälschen muß. Tatsächlich wurde bei der Konstruktion der internationalen Schwereformel β und β_4 unter Heranziehung der Hayfordschen Abplattung entsprechend der Fiktion des Niveauellipsoides gewählt und allein die Äquatorschwere γ_0 aus den reduzierten Schwerewerten im Ausgleichswege

⁷ K. Jung: „Figur der Erde“, Handbuch der Physik, Band 47, Berlin 1956.

ermittelt.⁸ In Strenge aber müßten die nach einheitlichem Gesichtspunkt auf irgendein künstliches Geoid reduzierten Schwerewerte entweder nach Kugelfunktionen entwickelt oder nach Formel (2) ausgeglichen werden, um die theoretische Schwereverteilung auf dem zugehörigen Niveausphäroid zu liefern. Nur im Zusammenhang mit der Lösung des Undulationsproblems könnte dann der Übergang auf das Normalsphäroid erfolgen⁹ und die Schwereverteilung auf diesem müßte anschließend mittels der Freiluftreduktion auf das mittlere Erdellipsoid übertragen werden.

Dem internationalen Näherungssystem liegt als einer Lösung des Helmertschen Formelsystems folgende Wahl für die bedingt freien Parameter zugrunde:

$$a = 6378\,388 \text{ m}; \alpha = 1:297,0; h_m = 0 \quad \text{oder} \quad (4)$$

$$\delta = +1049 \cdot 10^{-8}; \gamma_0 = 978,049 \text{ gal}; \omega = 7292116 \cdot 10^{-11} \text{ sec}^{-1}$$

Nach den bisherigen Betrachtungen dürfte es bereits klar sein, daß dies überhaupt eine physikalisch nicht berechnete Kombination von Parametern ist. Sieht man nämlich, was natürlich erlaubt ist, γ_0 als Ersatz der primär unbekannten Erdmasse an, so ist durch γ_0 , a , α und ω bereits vollständig eine heterogene Gleichgewichtsfigur bestimmt, deren Daten nur dann einwandfrei aus dem System (3) berechnet werden könnten, wenn die Wahl $\delta = +1049 \cdot 10^{-8}$ den notwendigen Ersatz für die fehlende Gleichgewichtsbedingung verbürgen könnte, was nach den Ergebnissen der eingangs erwähnten Untersuchung¹ keineswegs der Fall ist. Wäre aber umgekehrt durch die gegebenen geometrischen Parameter ein homogenes MacLaurinsches Ellipsoid mit der durch γ_0 vermittelten Masse definiert, so resultiert für diese Figur eine beträchtlich größere Rotationsperiode als der Sterntag, nämlich 97603 sec. Mithin ist das internationale Näherungssystem eine

⁸ W. A. Heiskanen: „Ist die Erde ein dreiaxiges Ellipsoid?“, Gerlands Beiträge zur Geophysik, Band 19, 1928, und Astronomische Nachrichten, Band 234, Nr. 5562, 1928.

⁹ K. Ledersteger: „Die gravimetrische Methode zur Bestimmung der Erdfigur“, Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., Seite 117–136, München 1959.

rein mathematische Lösung, der aber keine physikalische Realität zukommt:

$$\begin{aligned} E &= 5976,505 \cdot 10^{24} \text{ g}; W_0 = 62639783 \cdot 10^4 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2}; \\ K/a^2 &= 109207 \cdot 10^{-8}, \text{ also } K = 44429,6 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2; \\ \varrho_m &= 5,517; \varepsilon = 346783 \cdot 10^{-8}; \delta = +1049 \cdot 10^{-8} \\ \omega &= 7292116 \cdot 10^{-11} \text{ sec}^{-1}; \omega^2 = 5317496 \cdot 10^{-15} \text{ sec}^{-2} \\ \gamma_0 &= 978,049 \text{ gal}; \beta = 528840 \cdot 10^{-8}; \beta_4 = +2352 \cdot 10^{-8} \\ a &= 6378388 \text{ m}; a = 1:297,0 = 336700 \cdot 10^{-8}; h_m = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Im Hinblick auf obige Definition des Normalsphäroides haben wir in dieses, in sich geschlossene Näherungssystem noch das Hauptträgheitsmoment C einzubeziehen, wozu wir von Bullards¹⁰ Wert für die aus der Präzession empirisch ableitbare dynamische Abplattung:

$$d = [C - (A + B)/2] : C = 1:305,59 = 0,00327236 \quad (6)$$

ausgehen. Mit

$$(C - A) = KE = 265,533727 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2$$

folgt sofort

$$\begin{aligned} C &= 81144,45 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2 \\ A &= 80878,92 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Nachdem so die Mängel des internationalen Näherungssystems aufgezeigt sind, erhebt sich die Frage, ob wir auch ohne streng gravimetrische Bestimmung der Abplattung des Normalsphäroides derzeit in der Lage sind, ein besseres und vor allem physikalisch einwandfreies Näherungssystem für die Normalfigur der Erde aufzustellen. Dies ist tatsächlich der Fall, weil der numerische Wert des Parameters β_4 aus der schon oben erwähnten Reihe der heterogenen benachbarten Geoide mit hoher Sicherheit abgeleitet werden kann und weil das Trägheitsmoment C zumindest mit großer Annäherung, wenn nicht strenge, eine Stokesche Konstante ist.

¹⁰ E. C. Bullard: "The Figure of the Earth", Monthly Not. Royal Astr. Soc., Suppl. Vol. V, Nr. 6, 1948.

An Stelle der Erdmasse wird wieder die Äquatorschwere eingeführt, die wohl bis auf wenige mgal sicher ist. Dabei soll sofort der Fehler des Potsdamer Schweresystems korrigiert werden. Nach Kasanskij¹¹ beträgt die Korrektion $-11,55$ mgal, nach Berroth¹² $-12,7$ mgal. Wir werden daher $\gamma_0 = 978,037$ mgal ansetzen. Ferner verwenden wir die Äquatorachse $a = 6378290$ m. Zusammen mit der Rotationsgeschwindigkeit kann dann ε berechnet werden:

$$\varepsilon = 346782 \cdot 10^{-8}. \quad (8)$$

Dank der gleichzeitigen Verminderung von a und γ_0 ändert sich also ε gegenüber seinem Wert im internationalen Näherungssystem bloß um eine Einheit der 8. Dezimale. Da sich überdies ε wegen der Beziehung:

$$\varepsilon - \frac{5}{2} \varepsilon^2 = \frac{\omega^2 (k^2 E)^2}{W_0^3} \quad (9)$$

in der ganzen, aus der gegebenen Erdmasse E gebildeten Reihe der heterogenen benachbarten Geoide, die durch die Konstanz von ω und W_0 ausgezeichnet ist, nur um eine Größe 6. O. ändern kann, ist der mit den internationalen Näherungswerten für E und W_0 für die nähere Umgebung des Normalsphäroides berechnete Wert von β_4 trotz der Fehler der Ausgangswerte bereits als definitiv anzusehen:

$$\beta_4 = +2752 \cdot 10^{-8}. \quad (10)$$

Wie in den beiden zitierten Arbeiten^{9,1} näher ausgeführt wurde, ändert sich β_4 in der Reihe der benachbarten Geoide vom homogenen MacLaurinschen Ellipsoid bis zum Sphäroid der größten Massenkonzentration nur um 117 Einheiten der 8. Dezimale, also um eine Größe 5. O. Dies sowie die Untersuchung anderer heterogener Figurenreihen beweist, daß β_4 fast ausschließlich von ω abhängt. Dementsprechend ist der linear interpolierte Wert (10)

¹¹ I. A. Kasanskij: „Überlegungen zur Feststellung des Mittelwertes der absoluten Schwerkraft für die gravimetrische Weltaufnahme“, Lieferung 51, Moskau 1948.

¹² A. Berroth: „Das Fundamentalsystem der Schwere im Lichte der neueren Reversionspendelmessungen“, Bull. géod. Nr. 12, Paris 1949.

weitgehend unabhängig von der Massenkonfiguration und daher tatsächlich auch ohne Kenntnis der Gleichgewichtsbedingung für das Normalsphäroid gültig.

Für die eindeutige Auflösung des Helmertschen Formelsystems fehlt somit nur mehr ein einziger physikalischer Parameter. Die einzige Größe in diesem System, die noch der direkten Beobachtung zugänglich ist, ist die statische Abplattung K/a^2 . Sie kann empirisch aus den Störungen in der Bewegung des Mondes bestimmt werden. Denn der abgeplattete Erdkörper übt auf den Mond eine andere Anziehungskraft aus als eine homogene oder geschichtete Kugel, deren Masse im Mittelpunkt vereinigt gedacht werden darf. Hierdurch erfährt die Mondbahn Abweichungen von der idealen Kepler-Bewegung und die Ungleichheiten der Mondbewegung in Breite und Länge gestatten einen Rückschluß auf die Differenz der Hauptträgheitsmomente der Erde. Nach Tisserand¹³ ist die Wirkung von K/a^2 auf die Länge des Mondes durch

$$\Delta\lambda_{\zeta} = + 6540'' (K/a^2) \sin \Omega \quad (11a)$$

und auf seine Breite durch

$$\Delta\beta_{\zeta} = - 7439'' (K/a^2) \sin \lambda_{m\zeta} \quad (11b)$$

gegeben; erstere hat eine Periode von rund $18\frac{1}{3}$ Jahren, letztere von etwa 27 Tagen. Somit kann die Störung in Breite sicherer bestimmt werden als die in Länge, weshalb P. A. Hansen¹⁴ allein aus der beobachteten Breitenstörung auf Grund seiner eigenen theoretischen Entwicklungen für die Mondbewegung 1865 den Wert

$$K/a^2 = 0,001070 \quad (12a)$$

ableitete, dem die Abplattung 1:299,95 des Niveauellipsoides entspricht. Ähnlich folgt aus der Störung in Länge

$$K/a^2 = 0,001103 \text{ und } a = 1:295,56 \quad (12b)$$

¹³ F. Tisserand: "Traité de Mécanique Céleste", Tome II, Paris 1892, S. 357.

¹⁴ P. A. Hansen: „Darlegungen der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen“, Abh. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, 1864 und 1865.

Helmert¹⁵ erschließt aus der Diskussion der Hansenschen Werte im Mittel

$$K/a^2 = 0,0010865, \quad (12c)$$

welchem Wert die Abplattung 1:297,74 des Niveauellipsoides entspricht. Nach den neueren Entwicklungen für die Mondbewegung von G. W. Hill¹⁶ und E. W. Brown¹⁷ ist die statische Abplattung 0,001105, während K. Jung¹⁸ als derzeit besten astronomischen Wert

$$K/a^2 = 0,001106 \pm 0,00001 \quad (12d)$$

angibt, einem Niveauellipsoid der Abplattung $1:(295,17 \pm 1,30)$ zugehörig. Wir sehen also, daß der empirische Wert für die statische Abplattung leider ziemlich unsicher ist, jedoch ist zu hoffen, daß die künstlichen Erdsatelliten in naher Zukunft ein verlässlicheres Resultat vermitteln werden. Es scheint dies deshalb von fundamentaler Bedeutung, weil die Differenz der Trägheitsmomente $(C - A)$ vom Dichtegesetz im Innern unabhängig ist, wie bereits Stokes¹⁹ gezeigt hat. Diese Differenz ist also eine „Stokessche Konstante“, worunter Wavre²⁰ jede Größe versteht, die durch die Erdmasse, die Rotationsgeschwindigkeit und eine äußere Niveaufläche, im speziellen die freie Oberfläche einer Gleichgewichtsfigur, eindeutig bestimmt ist.

In der eingangs zitierten Untersuchung¹ ergab sich mit den internationalen Näherungswerten für E und K in der Schnittfigur der beiden homogenen Reihen (ω) und (K) für das Trägheitsmoment um die Rotationsachse der Wert $C = 81\,034 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2$, der sich nicht einmal um $1,4^0/_{00}$ vom Wert (7) unterscheidet.

¹⁵ F. R. Helmert: „Die mathem. u. physikal. Theorien der Höheren Geodäsie“, Band II, Leipzig 1884, Seite 472.

¹⁶ G. W. Hill: „Determination of the Inequalities of the Moons Motion which are Produced to the Figure of the Earth“, Astr. Pap. 3, 1884 = Works 2.

¹⁷ E. W. Brown, Astr. Soc. Not. 74, 1914, S. 563 und 75, 1915, S. 508.

¹⁸ K. Jung: „Schwerkraft und Erdfigur“, in Landoldt-Börnstein, Zahlenwerte u. Funktionen aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik u. Technik, 6. Aufl., Bd. 3, S. 262, Berlin 1952.

¹⁹ G. G. Stokes, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 8, (1849), S. 672, und Mathem. and Phys. Papers, Vol. II, S. 131–171.

²⁰ R. Wavre: „Figures Planétaires et Géodésie“, Paris 1932.

Es liegt demnach der Gedanke sehr nahe, daß sich die homogenen Figurenreihen (ω) , (C) , (ωC) und (K) streng in einem Punkt schneiden müssen und daß von dieser homogenen Schnittfigur eine Reihe heterogener Figuren zum Normalsphäroid führt, in welcher ω , K und C konstant sind. Damit aber würde sich die Möglichkeit eröffnen, das Trägheitsmoment C der Normalfigur der Erde ohne irgendwelche Annahme über die Dichteverteilung im Erdinnern aus der homogenen Ausgangsfigur der heterogenen Figurenreihe (ω, K) zu berechnen. Nicht nur die Differenz der Trägheitsmomente, sondern auch diese selbst wären Stokesche Konstante. Die Konstanz von ω und K würde gleichzeitig die Konstanz des Drehimpulses garantieren, die in unserer Definition des Normalsphäroides wesentlich verankert ist. Die Auffassung, daß die Trägheitsmomente A und C Stokessche Konstante sind, wird auch durch die Theorie nahegelegt; konnte doch bereits 1885 Radau²¹ mit seiner bekannten Transformation den Nachweis erbringen, daß die Trägheitsmomente und damit die dynamische Abplattung in guter Annäherung vom Dichtegesetz unabhängig sind. Das empirische nahe Zusammenfallen der Schnittpunkte der vier genannten homogenen Figurenreihen kann als Bestätigung des Radauschen Ergebnisses gedeutet werden. Damit aber eröffnet sich die Möglichkeit, die empirisch ziemlich unsichere statische Abplattung durch die wesentlich genauer bekannte dynamische Abplattung zu ersetzen.

Für die dynamische Abplattung verwendete Poincaré den Wert 1:305,31, Helmert 1:305,6, während K. Jung¹⁸ den Wert 1:305,8 angibt. Wir wollen wie schon weiter oben mit dem Wert von Bullard 1:305,59 rechnen, weil dieser ein gutes Mittel darstellt. Für die homogenen MacLaurinschen Ellipsoide gelten folgende Beziehungen:

(13)

$$\left(\frac{C-A}{C}\right) = a - \frac{a^2}{2}; \quad \frac{\omega^2 a^3}{k^2 E} = \frac{4}{5} a + \frac{22}{35} a^2 + \frac{2}{5} a^3; \quad K = \frac{a^2}{5} (2a - a^2)$$

Demnach gehört zur dynamischen Abplattung (6) die geometrische Abplattung $a_h = 327773 \cdot 10^{-8}$. Mit dem internationalen

²¹ R. R. Radau: «Sur la loi des densités à l'intérieur de la terre», Acad. Sciences, Paris, Comptes rendus, Bd. C, 1885, S. 972.

Näherungswert $E = 5976,505 \cdot 10^{24}$ g liefert die zweite Gleichung $a_h = 5819461$ m und die dritte Gleichung $K = 44328,9 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2$, woraus sich mit $a = 6378290$ m für die statische Abplattung des Normalsphäroides $108963 \cdot 10^{-8}$ ergibt. Zusammen mit (8) und (10) folgt aus der 3. und 7. Gleichung des Helmertschen Formelsystems (3) leicht

$$\delta = +1177 \cdot 10^{-8}; \alpha = 336313 \cdot 10^{-8}$$

und schließlich aus der 2. Gleichung mit $\gamma_0 = 978,037$ gal als 2. Näherung für die Erdmasse

$$E = 5976,2665 \cdot 10^{24} \text{ g.}$$

Die Wiederholung der ganzen Rechnung mit diesem Wert liefert:

$$K = 44327,7 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2; K/a^2 = 108960 \cdot 10^{-8}; \delta = +1177 \cdot 10^{-8}; \\ \alpha = 336309 \cdot 10^{-8} = 1:297,346; E = 5976,2668 \cdot 10^{24} \text{ g,}$$

so daß eine weitere Näherung überflüssig ist. Damit wurde mit Hilfe des Rückganges auf die homogene Ausgangsfigur der Reihe (ω, K) aus der gegebenen dynamischen Abplattung als letzter freier Parameter für das Normalsphäroid $K = 44327,7 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2$ gewonnen. Die weitere Auflösung des Helmertschen Systems führt auf das in sich geschlossene System für die geometrischen und physikalischen Daten des Normalsphäroides:

$$E = 5976,267 \cdot 10^{24} \text{ g}; W_0 = 62638091 \cdot 10^4 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2} \\ K = 44327,7 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2; K/a^2 = 108960 \cdot 10^{-8}; \\ q_m = 5,5168; \varepsilon = 346782 \cdot 10^{-8}; \delta = +1177 \cdot 10^{-8}; \\ \omega = 7292116 \cdot 10^{-11} \text{ sec}^{-1}; \omega^2 = 5317496 \cdot 10^{-15} \text{ sec}^{-2}; \\ \gamma_0 = 978,037 \text{ gal}; \beta = 529268 \cdot 10^{-8}; \beta_4 = +2752 \cdot 10^{-8} \\ a = 6378290 \text{ m}; \alpha = 1:297,346 = 336309 \cdot 10^{-8}; h_m = -2,06 \text{ m,}$$

zu denen noch tritt:

$$d = (C - A) : C = 1:305,59; C = 80955,1 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2; \quad (14a) \\ A = 80690,2 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2; (C - A) = 264,9 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2.$$

Die theoretische Schwere auf dem Normalsphäroid ist durch

$$\gamma = 978,037 (1 + 0,00529268 \sin^2 \varphi - 0,00000688 \sin^2 2\varphi) \quad (15)$$

gegeben.

Als gemeinsame Bezugsfläche für die kontinentalen Großraumvermessungen und für das irdische Schwerfeld gilt das achsengleiche mittlere Erdellipsoid. Die zugehörige Schwereformel erhält man, wenn man die Schwereverteilung (15) auf dem Normalsphäroid wie in freier Luft wegen der Erhebungen des Normalsphäroides über das Erdellipsoid reduziert:

$$- 0,3086 \cdot 2,06 \sin^2 2\varphi = - 0,6357 \sin^2 2\varphi \text{ mgal},$$

also

(15a)

$$\gamma = 978,037 (1 + 0,00529268 \sin^2 \varphi - 0,00000753 \sin^2 2\varphi) \text{ gal}.$$

Das System (14) für das Normalsphäroid beruht, wie es für eine Gleichgewichtsfigur sein muß, in Wahrheit auf nur vier freien Parametern, nämlich:

$$\begin{aligned} a &= 6378290 \text{ m}; \quad \omega = 7292116 \cdot 10^{-11} \text{ sec}^{-1}; \\ \gamma_0 &= 978,037 \text{ gal}; \quad C/(C-A) = 305,59. \end{aligned} \quad (16)$$

Die Rotationsgeschwindigkeit darf als fehlerfrei gelten. Der Einfluß der Fehler in den drei übrigen empirischen Bestimmungsstücken kann durch folgende Differentialformeln erfaßt werden:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varepsilon &= 54 \cdot 10^{-13} \Delta a - 355 \cdot 10^{-8} \Delta \gamma_0 \\ \Delta E &= + 1,88 \cdot 10^{19} \Delta a + 6,08 \cdot 10^{24} \Delta \gamma_0 - 498 \cdot 10^{25} \Delta d \\ \Delta K &= + 0,93 \cdot 10^6 \Delta a + 30,1 \cdot 10^{10} \Delta \gamma_0 + 22,55 \cdot 10^{16} \Delta d \\ \Delta (K/a^2) &= - 11 \cdot 10^{-13} \Delta a + 74 \cdot 10^{-8} \Delta \gamma_0 + 0,557 \Delta d \\ \Delta W_0 &= + 989 \Delta a + 636 \cdot 10^6 \Delta \gamma_0 - 348 \cdot 10^9 \Delta d \\ \Delta \beta &= + 125 \cdot 10^{-13} \Delta a - 820 \cdot 10^{-8} \Delta \gamma_0 - 0,835 \Delta d \\ \Delta a &= + 10 \cdot 10^{-13} \Delta a - 67 \cdot 10^{-8} \Delta \gamma_0 + 0,835 \Delta d. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Selbst bei vorsichtiger Schätzung wird $|\Delta a| \leq 30 \text{ m} = 3 \cdot 10^3$, $|\Delta \gamma_0| \leq 0,02 \text{ gal}$ und $|\Delta d| \leq 2 \cdot 10^{-6}$ bleiben.

Es dürfte keinem Zweifel unterliegen, daß diese auf dem Studium der möglichen Gleichgewichtsfiguren der rotierenden Erd-

masse beruhende Lösung dem bisherigen internationalen Näherungssystem vorzuziehen ist. Denn

1. konnte das fiktive Niveauellipsoid, d. h. die willkürliche und physikalisch gar nicht zu rechtfertigende Wahl des Parameters $\delta = +1049 \cdot 10^{-8}$ durch den mit hoher Präzision und vollständig hypothesenfrei aus der heterogenen Figurenreihe (ω, W_0) der „benachbarten“ künstlichen Geoide abgeleiteten Parameter $\beta_4 = +2752 \cdot 10^{-8}$ ersetzt werden;

2. dient nicht mehr die Abplattung eines wenn auch auf isostatischer Grundlage berechneten, so dennoch bloß bestanschließenden Ellipsoides als freier Parameter. Die Abplattung der Normalfigur der Erde muß vielmehr streng physikalisch, d. h. rein gravimetrisch ermittelt werden, wofür in dem sub 9) zitierten Aufsatz ein hypothesenfreier Weg gewiesen wurde, oder aber sie muß wie hier aus der dynamischen Abplattung abgeleitet werden;

3. wurde die zu große Äquatorachse des Internationalen Ellipsoides durch einen wesentlich besseren Wert ersetzt;

4. ging aus der heterogenen Figurenreihe (ω, K) hervor, daß in dieser Reihe nicht nur die Differenz der Trägheitsmomente, sondern auch die beiden Trägheitsmomente selbst zumindest mit sehr guter Annäherung konstant sind. Diese Erkenntnis ermöglichte:

a) die überaus wichtige, bisher jedoch gänzlich übersehene Forderung nach der Erhaltung des Drehimpulses für das Normalsphäroid der Erde,

b) die Ableitung der statischen Abplattung aus der empirisch wesentlich sicherer bekannten dynamischen Abplattung mit Hilfe des einfachen Rückganges auf die homogene Ausgangsfigur der Reihe (ω, K) , die einen rund 560 km kleineren Äquatorradius besitzt. Damit ist ein völlig neuer Zusammenhang zwischen der dynamischen, statischen und geometrischen Abplattung aufgezeigt, unabhängig von irgendwelcher hypothetischen Annahme über die Dichteverteilung im Erdinnern und ohne die Notwendigkeit einer schwierigen Integration.

Sämtliche Daten des Normalsphäroides beruhen nur mehr auf den drei neben der Rotationsgeschwindigkeit empirisch am

sichersten zu gewinnenden Größen: astronomisch – geodätisch auf der Äquatorachse, die am korrektesten aus einer absoluten Lotabweichungsausgleichung hervorgeht; gravimetrisch auf der aus dem gesamten Schwerematerial abzuleitenden Äquatorschwere γ_0 ; rein astronomisch auf der aus der Präzession ermittelten dynamischen Abplattung. Trotzdem darf die Lösung noch nicht als völlig hypothesenfrei gelten. Denn der Nachweis, daß die vier homogenen Figurenreihen (ω) , (C) , (ωC) und (K) nur einen einzigen Schnittpunkt haben, steht noch aus. Weil aber das Hauptträgheitsmoment C theoretisch und empirisch mit sehr guter Approximation eine Stokessche Konstante ist, ist das berechnete System sicherlich eine sehr brauchbare Näherung.

Ganz besonderes Interesse verdient die Reihe (ω, K) von heterogenen Figuren, namentlich dann, wenn wirklich in aller Strenge auch die Trägheitsmomente in ihr konstant sind. Dann muß nämlich die zunehmende Massenkonzentration gegen den Mittelpunkt mit einer beträchtlichen Expansion verbunden sein, wobei auf dem weiten Weg von der homogenen Ausgangsfigur bis zum Normalsphäroid die geometrische Abplattung trotz der gewaltigen Achsenzunahme von 560 km bloß von 1:305,09 auf 1:297,35 ansteigt. Es scheinen sich hier Aspekte von weittragender geophysikalischer und kosmogonischer Bedeutung zu eröffnen.