

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1957

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Dreifach-Winkelkorrelationen bei der Coulombanregung von Atomkernen

Von Wolfgang Wild in München

Mit 5 Figuren

Vorgelegt von Herrn Heinz Maier-Leibnitz am 10. Mai 1957

Übersicht

1. Einleitung	191
2. Mathematische Formulierung des Problems	192
3. Berechnung von $E^{(1)}(m, m')$	195
4. Differentieller und totaler Wirkungsquerschnitt	199
5. Berechnung von $E^{(2)}(m, m')$	199
6. Berechnung der Korrelationsfunktion $W(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$	201
7. Die halbklassische Theorie	203
Literaturverzeichnis	208
Figuren	209

1. Einleitung

In den letzten Jahren hat sich die Coulombanregung als ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung der niedrigen Anregungsniveaus schwerer Kerne, insbesondere der Rotationsniveaus, erwiesen [1]. So lassen sich von Kernmodellen unabhängige Aussagen über die Drehimpulse angeregter Zustände durch Beobachtung der Aussendungswahrscheinlichkeit sekundärer γ -Quanten in Abhängigkeit vom Winkel ϑ gegenüber der Einfallsrichtung der Beschußteilchen gewinnen. Die Winkelkorrelation kann dabei in der Form dargestellt werden:

$$W(\vartheta) \sim 1 + \sum_{\nu} C_{2\nu} P_{2\nu}(\cos \vartheta)$$

Einer genauen Beobachtung der $C_{2\nu}$ sind aber experimentelle Grenzen gesetzt. Insbesondere ist der Koeffizient C_4 , der bei

Quadrupolstrahlung, die meistens vorliegt, auftritt, sehr klein und daher nur mit relativ großem Fehler bekannt. Dies führt in vielen Fällen dazu, daß innerhalb der experimentellen Meßfehler mehrere Spinzuordnungen für die angeregten Niveaus vertretbar sind.

Eine Möglichkeit, hier Entscheidungen zu treffen, bietet die Beobachtung der Dreifach-Winkelkorrelationen, d. h. neben der Einfallrichtung des Beschußteilchens wird dessen Ausfallrichtung in Koinzidenz mit der Emissionsrichtung des γ -Quants gemessen. Man erhält dann, wie im folgenden gezeigt wird, mehrere ziemlich große und damit relativ genau bestimmbare Anisotropiekoeffizienten, so daß normalerweise nur eine konsistente Spinzuordnung getroffen werden und außerdem bei gemischter Strahlung das Mischungsverhältnis genauer bestimmt werden kann. Zusätzliche Aussagen, die über das mit der Zweifachkorrelation prinzipiell Erreichbare hinausgehen, liefert die Dreifachkorrelation jedoch nicht.

2. Mathematische Formulierung des Problems

Ein Teilchen mit der Ordnungszahl Z_1 wird auf einen Kern geschossen, der die Ordnungszahl Z_2 besitzt. Die Einfallenergie des Projektils $\frac{m_1}{2} v_i^2$ soll nicht ausreichen, um dieses mit merklicher Wahrscheinlichkeit in den Bereich der Kernkräfte eindringen zu lassen.

Durch die elektromagnetische Wechselwirkung wird der Atomkern aus einem Zustand mit dem Gesamtdrehimpuls j_i angeregt in einen Zustand mit dem Gesamtdrehimpuls j , um von da durch γ -Emission bzw. innere Konversion in einen Zustand mit dem Gesamtdrehimpuls j_f überzugehen. Innere Konversionselektronen mögen unbeobachtet bleiben. Dagegen soll die Einfallrichtung des Projektils $\vec{k}_1$, dessen Ausfallrichtung $\vec{k}_2$ und die Emissionsrichtung des γ -Quants $\vec{k}_3$ festgestellt werden.

Wir machen zur Vereinfachung der Berechnung folgende Annahmen:

1. Das einfallende Teilchen habe keinen Spin, bzw. der Effekt seines Spins sei vernachlässigbar. – Diese Annahme ist vorzüg-

lich gerechtfertigt, solange man keine Retardierung in Betracht ziehen muß, da die dann vorherrschende elektrische Multipolwechselwirkung kaum spinabhängig ist.

2. Das Projektil soll als Elementarteilchen behandelt werden können, von einer Berücksichtigung seiner inneren Struktur kann abgesehen werden. – Für Protonen gilt diese Annahme streng, für α -Teilchen ist sie vorzüglich gerechtfertigt, da die niedrigsten Niveaus so hoch liegen, daß sie bei den für Coulombanregung brauchbaren Energien nicht angeregt werden können. Je schwerer das Projektil ist, desto schlechter ist die Näherung.

3. Die Retardierungsanteile der Wechselwirkung können vernachlässigt werden. – Da die verwendeten Teilchengeschwindigkeiten bis etwa $\frac{1}{10}$ der Lichtgeschwindigkeit betragen können, ist diese Annahme nur bei mäßigen Genauigkeitsansprüchen brauchbar.

4. Das ganze Problem kann mit einer nichtrelativistischen Theorie behandelt werden. – Bei den verwendeten Energien (< 10 MeV) ist dies ausgezeichnet gerechtfertigt, es sei denn, man verwendet Elektronen als Beschußteilchen.

5. Von der Wirkung der Atomhülle kann abgesehen werden. – Die Annahme ist beim Einzelprozeß sehr gut erfüllt. Bei Verwendung dicker targets jedoch muß eine Korrektur für Primärenergie und Einfallsrichtung angebracht werden, bevor Experiment und Theorie verglichen werden können.

6. Labor- und Schwerpunktsystem sollen – wenigstens für die Dauer der intensiven Wechselwirkung – praktisch zusammenfallen. – Die Annahme ist sehr gravierend und auch für sehr schwere target-Kerne und sehr leichte Projektile nur näherungsweise erfüllt. Sie wirkt sich zwar auf die Struktur der Formeln nicht aus und beeinträchtigt die Berechnung der differentiellen Wirkungsquerschnitte der Coulombanregung nicht, wenn man die reduzierte Masse verwendet und in üblicher Weise die Formeln vom Schwerpunkts- auf das Laborsystem umrechnet. Für die nachfolgende γ -Strahlung jedoch enthält die Theorie die Multipolmomente bezogen auf den Schwerpunkt von Projektil und Kern, statt wie üblich auf den Kernmittelpunkt. Diese Multipolmomente sind keine universellen Kerneigenschaften, wenn

nicht unsere Annahme gültig ist; ihre Umrechnung auf die üblichen Multipolmomente bringt u. a. das Auftreten von Dipolmomenten mit sich [2].

7. Von Kernkraftwechselwirkungen kann abgesehen werden. – Dies ist, wie schon erwähnt, die Basisvoraussetzung für alle Reaktionen vom Typ der Coulombanregung und gut erfüllt, wenn

$$\frac{m_1}{2} v_i^2 \ll \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_1 + R_2}.$$

Wir rechnen im folgenden im Schwerpunktssystem mit dem Schwerpunkt als Ursprung. Die z -Achse soll in die Einfallsrichtung weisen. Dann hat die Korrelationsfunktion die Form [3]:

$$W(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) \sim \sum_{m_a} \sum_{m'_a} \sum_{m_n} \sum_{m'_n} E^{(1)}(m_a, m'_a) \cdot S(m_a, m'_a; m_n, m'_n) E^{(2)*}(m_n, m'_n), \quad (1)$$

wobei bei ungestörtem Zwischenzustand

$$S(m_a, m'_a; m_n, m'_n) = \delta(m_a, m_n) \delta(m'_a, m'_n) \quad (2)$$

ist und

$$\begin{aligned} E^{(1)}(m_a, m'_a) &= S_1 \sum_{m_i} \langle j_i m_i \mathbf{f}_1 | V_{Coul} | j_a m_a \mathbf{f}_2 \rangle^* \\ &\quad \cdot \langle j_i m_i \mathbf{f}_1 | V_{Coul} | j_a m'_a \mathbf{f}_2 \rangle \\ E^{(2)}(m_n, m'_n) &= S_2 \cdot \sum_{m_f} \langle j_f m_f | H(\mathfrak{M}_{\mathbf{f}_3}) | j_n m_n \rangle^* \\ &\quad \cdot \langle j_f m_f | H(\mathfrak{M}_{\mathbf{f}_3}) | j_n m'_n \rangle \end{aligned} \quad (3)$$

bedeutet.

Dabei ist unter V_{Coul} die Coulomb'sche Wechselwirkung zwischen Projektil und Kern, unter $H(\mathfrak{M}_{\mathbf{f}_3})$ die Wechselwirkung des emittierten Lichtquants mit dem Kern zu verstehen. S_1 und S_2 sind Summationen über unbeobachtete Eigenschaften. Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt haben wir die Beziehung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{v_f}{v_i} \left(\frac{m_1}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{2j_i + 1} \sum_m E^{(1)}(m, m), \quad (4)$$

v_f und v_i sind die End- bzw. Anfangsgeschwindigkeit des Projektils, m_1 die reduzierte Masse, die praktisch unter unseren Voraussetzungen gleich der Masse des Projektils ist.

Alle genannten Formeln beruhen auf der 1. Näherung der Dirac'schen Störungsrechnung und gelten, da wir es mit der schwachen elektromagnetischen Wechselwirkung zu tun haben, in ausgezeichnete Näherung.

3. Berechnung von $E^{(1)}(m, m')$

a) Wechselwirkung.

Da $r > r_0$, dürfen wir das Coulombpotential entwickeln:

$$\begin{aligned} V_{Coul} &= \sum_{\varrho=1}^{Z_2} \frac{Z_1 e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\varrho|} = \frac{Z_2 e^2}{r} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\varrho=1}^{Z_1} \left(\frac{r_\varrho}{r} \right)^\lambda P_\lambda(\cos \angle \mathbf{r} \mathbf{r}_\varrho) \quad (5) \\ &= \frac{4\pi Z_1 e^2}{r} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{+\lambda} \sum_{\varrho=1}^{Z_2} \left(\frac{r_\varrho}{r} \right)^\lambda \frac{1}{2\lambda+1} Y_{\lambda\mu}^*(\vartheta_\varrho, \varphi_\varrho) Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi). \end{aligned}$$

ϑ, φ sind die Koordinaten des Projektils, $\vartheta_\varrho, \varphi_\varrho$ die der Nukleonen des Kerns in unserem Bezugssystem.

b) Coulombeigenfunktionen.

Die Eigenfunktionen im Coulombfeld sind [4]

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}\rangle &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} (4\pi(2l+1))^{1/2} e^{i(b_l - b_0)} i^l D_{m0}^l(\mathbf{f}) \\ &\quad \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \frac{F_l(\eta, kr)}{kr}. \end{aligned} \quad (6)$$

Hierbei ist

$$D_{m0}^l(\mathbf{f}) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} (-1)^m Y_{lm}(\vartheta_f, \varphi_f)$$

eine Rotationsmatrix,

$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}$$

der sogenannte Coulombparameter,

$$k = \sqrt{\frac{2 m E}{\hbar^2}}$$

die Wellenzahl,

$$b_l = \arg \Gamma(l+1+i\eta)$$

die Coulombphase und

$$F_l(\eta, kr) = \frac{2^l e^{-\frac{\pi}{2}\eta} |\Gamma(l+1+i\eta)|}{(2l+1)!} (kr)^{l+1} e^{i kr} \cdot {}_1F_1(l+1+i\eta, 2l+2, -2i kr)$$

im wesentlichen eine konfluente hypergeometrische Funktion.

c) Reduzierte Matrixelemente.

Setzen wir die Entwicklung des Coulombpotentials (5) in (3 a) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} E^{(1)}(m, m') &= S_1 \cdot 16 \pi^2 Z_1^2 e^2 \sum_{m_i} \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)} \langle j_i m_i | \mathfrak{M}_e(\lambda, \mu) | j m \rangle^* \right. \\ &\langle j_i m_i | \mathfrak{M}_e(\lambda', \mu') | j m' \rangle \langle \mathfrak{f}_1 \left| \frac{Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi)}{r^{\lambda+1}} \right| \mathfrak{f}_2 \rangle^* \\ &\cdot \left. \langle \mathfrak{f}_1 \left| \frac{Y_{\lambda'\mu'}(\vartheta, \varphi)}{r^{\lambda'+1}} \right| \mathfrak{f}_2 \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Hierbei haben wir in üblicher Weise gesetzt:

$$\mathfrak{M}_e(\lambda, \mu) = \sum_{\varrho=1}^{Z_2} e r_{\varrho}^{\lambda} Y_{\lambda\mu}^*(\vartheta_{\varrho}, \varphi_{\varrho}). \quad (8)$$

Nach dem Eckart-Theorem gilt aber

$$\langle j_i m_i | \mathfrak{M}_e(\lambda, \mu) | j m \rangle = C(j_i \lambda j; m_i \mu) \cdot \langle j_i || A_e(\lambda) || j \rangle, \quad (9)$$

wobei $\langle j_i || A_e(\lambda) || j \rangle$ ein sogenanntes reduziertes Matrixelement ist, das nicht mehr von den magnetischen Quanten-

zahlen abhängt. C ist ein Clebsch-Gordan-Koeffizient in der üblichen Notierung [5].

d) Auswertung der Coulombintegrale.

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{F}_1 | r^{-\lambda-1} Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi) | \mathbb{F}_2 \rangle &= 16\pi^2 \sum_{l_1 l_2} \sum_{m_1 m_2} \\ &\cdot \frac{1}{k_1 k_2} \int_0^\infty F_{l_1}^*(\eta_1, k_1 r) F_{l_2}(\eta_2, k_2 r) r^{-\lambda-1} dr \\ &\cdot \int Y_{l_1 m_1}^*(\vartheta, \varphi) Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\vartheta, \varphi) d\Omega \\ &\cdot (-1)^{m_1+m_2} e^{i(b_{l_2}-b_{l_1})} i^{l_2-l_1} Y_{l_2 m_2}(\vartheta_{t_2}, \varphi_{t_2}) Y_{l_1 m_1}^*(\vartheta_{t_1}, \varphi_{t_1}). \end{aligned} \quad (10)$$

Bei unserer Wahl des Koordinatensystems ist $\vartheta_{t_1} = 0$ und damit

$$Y_{l_1 m_1}(\vartheta_{t_1}, \varphi_{t_1}) = \sqrt{\frac{2l_1+1}{4\pi}} \delta_{m_1 0}.$$

Das Winkelintegral kann in bekannter Weise ausgewertet werden [5]:

$$\begin{aligned} &\int Y_{l_1 m_1}^*(\vartheta, \varphi) Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\vartheta, \varphi) d\Omega \\ &= \sqrt{\frac{(2\lambda+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l_1+1)}} C(\lambda l_2 l_1; 00) C(\lambda l_2 l_1; \mu m_2) \delta_{\mu+m_2, m_1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Für das Radialintegral verwenden wir die Abkürzung

$$M_{l_2 l_1}^{-\lambda-1} = \frac{1}{k_2 k_1} \int_0^\infty F_{l_1}^*(\eta_1, k_1 r) F_{l_2}(\eta_2, k_2 r) r^{-\lambda-1} dr. \quad (12)$$

Diese Radialintegrale sind von Alder und Winther [4, 6] sowie Biedenharn, McHale und Thaler [2] ausgewertet worden.

Man erhält:

$$\begin{aligned} M_{l_2 l_1}^{-\lambda-1} &= \frac{| \Gamma(l_1+1+i\eta_1) | | \Gamma(l_2+1+i\eta_2) |}{(2l_1+1)! (2l_2+1)!} \\ &\cdot (l_2+l_1-\lambda+1)! i^{l_1+l_2-\lambda+2} x^{l_2} y^{l_1} e^{-\frac{\pi}{2}(\eta_1+\eta_2)} (k_2-k_1)^{\lambda-2} \\ &\cdot F_2(l_1+l_2-\lambda+2, l_2+1-i\eta_2, l_1+1+i\eta_1, 2l_2+2, \\ &2l_1+2; x, -y) \end{aligned} \quad (13)$$

mit $x = \frac{2\eta_1}{\xi}$ und $y = \frac{2\eta_2}{\xi}$,
 wobei $\xi = \eta_1 - \eta_2$ und $\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}$ ist.

Die Appel-Funktion F_2 ist definiert durch

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{m+n} \beta_m \beta'_n}{\gamma_m \gamma'_n m! n!} x^m y^n,$$

wobei

$$\alpha_m = \frac{\Gamma(\alpha + m)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + m - 1)$$

ist. Die Funktion konvergiert nur für

$$|x| + |y| \leq 1,$$

doch läßt sie sich analytisch fortsetzen. Bezüglich geeigneter Relationen zur numerischen Berechnung vgl. man die Arbeiten von Alder und Winther [4, 6].

e) Explizite Gestalt von $E^{(1)}(m, m')$.

Wenn wir die obigen Ergebnisse benutzen und noch bedenken, daß

$$\begin{aligned} Y_{l_2 m_i - m}^* (\partial_{k_2}, \varphi_{k_2}) Y_{l_2' m_i - m'} (\partial_{k_2}, \varphi_{k_2}) &= (-1)^{m_i - m} Y_{l_2 m - m_i} Y_{l_2' m_i - m'} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{m_i - m} \sqrt{\frac{(2l_2 + 1)(2l_2' + 1)}{4\pi(2l + 1)}} C(l_2 l_2' \bar{l}; 00) \\ &\quad C(l_2 l_2' \bar{l}; m - m_i, m_i - m') \cdot Y_{l m - m_i} (\partial_{k_2}, \varphi_{k_2}) \end{aligned}$$

ist, so folgt:

$$\begin{aligned} E^{(1)}(m, m') &= 256 \pi^4 Z_1^2 e^2 \cdot S_1 \cdot \sum_{m_i} \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \sum_{l_1 l_1'} \sum_{l_2 l_2'} \sum_l \\ &\cdot \left[\left[\langle j_i \| A_e(\lambda) \| j \rangle^* \langle j_i \| A_e(\lambda') \| j \rangle \cdot M_{l_2 l_1}^{-\lambda-1*} \cdot M_{l_2' l_1'}^{-\lambda'-1} \right. \right. \\ &\cdot e^{i(b_{l_1} - b_{l_1'})} e^{i(b_{l_2} - b_{l_2'})} i^{l_1 - l_1' + l_2' - l_2} \cdot \left. \frac{(2l_2 + 1)(2l_2' + 1)}{\sqrt{4\pi \cdot (2l + 1)(2\lambda + 1)(2\lambda' + 1)}} \right] \\ &\cdot [(-1)^{m_i + m'} Y_{l m - m'} (\partial_{k_2}, \varphi_{k_2}) \\ &\cdot C(j_i \lambda j; m_i m - m_i) C(j_i \lambda' j; m_i m' - m_i) \\ &\cdot C(\lambda l_2 l_1; 00) C(\lambda l_2 l_1; m - m_i m_i - m) \\ &\cdot C(\lambda' l_2' l_1'; 00) C(\lambda' l_2' l_1'; m' - m_i m_i - m') \\ &\cdot C(l_2 l_2' \bar{l}; 00) C(l_2 l_2' \bar{l}; m - m_i m_i - m')] \Big]. \end{aligned} \quad (14)$$

Die Summation über m_i könnte ausgeführt werden, doch ist es nicht zweckmäßig, dies an dieser Stelle zu tun.

4. Differentieller und totaler Wirkungsquerschnitt

Durch Einsetzen von (14) in (4) erhalten wir unmittelbar den differentiellen Wirkungsquerschnitt, indem wir über m_i und $\mu = m - m_i$ summieren.

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & \frac{v_f}{v_i} \frac{16\pi Z_1^2 e^2 m_1^2}{\hbar^4} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{2j+1}{2j_i+1} \frac{|\langle j_i \| A_e(\lambda) \| j \rangle|^2}{(2\lambda+1)^3} \\ & \cdot \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l P_l(\cos \vartheta_{k_2}) (2\bar{l}+1) \cdot \sum_{l_1 l'_1=0}^{\infty} \sum_{l_2 l'_2=0}^{\infty} \right. \\ & (2l'_1+1)(2l'_2+1) \sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)} M_{l_2 l_1}^{-\lambda-1*} M_{l'_2 l'_1}^{-\lambda-1} i^{l_1-l'_1+l'_2-l_2} \\ & e^{i(b_{l_1}-b_{l'_1}+b_{l'_2}-b_{l_2})} C(l_1 l_2 \lambda; 00) C(l'_1 l'_2 \lambda; 00) C(l'_2 \bar{l} l_2; 00) \\ & \left. C(l'_1 \bar{l} l_1; 00) W(\lambda l'_1 l_2 \bar{l}; l'_2 l_1) \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

W ist ein Racahkoeffizient in der üblichen Bezeichnungsweise. Integration über $d\Omega_{k_2}$ ergibt den bekannten totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{v_f}{v_i} \frac{64\pi^2 Z_1^2 e^2 m_1^2}{\hbar^4} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{2j+1}{2j_i+1} \frac{|\langle j_i \| A_e(\lambda) \| j \rangle|^2}{(2\lambda+1)^3} \\ & \cdot \left\{ \sum_{l_1 l_2=0}^{\infty} (2l_1+1)(2l_2+1) |M_{l_2 l_1}^{-\lambda-1}|^2 C^2(l_1 l_2 \lambda; 00) \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

5. Berechnung von $E^{(2)}(m, m')$

Eine ebene elektromagnetische Welle hat die Multipolentwicklung [5]

$$\begin{aligned} \vec{e} e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}} = & \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sum_{L M} \sum_{P=\pm 1} i^L \sqrt{(2L+1)} e^{-iP\Phi} D_{MP}^L(\mathbf{f}_3) \\ & \{ \mathfrak{A}_{LM}(m) + i P \mathfrak{A}_{LM}(e) \}. \end{aligned} \quad (17)$$

$\mathfrak{U}_{LM}(m, e)$ sind die Vektorpotentiale der magnetischen bzw. elektrischen 2^L -Pol-Strahlung mit Nebenindex M . D_{MP}^L ist eine Rotationsmatrix.

Der Polarisationsvektor

$$\vec{\varepsilon} = u_1 \cos \Phi + u_2 \sin \Phi$$

gibt die Richtung der Linearpolarisation bezüglich eines Achsenkreuzes u_1 und u_2 an, das mit $\frac{\mathbf{i}}{|\mathbf{k}|}$ eine rechtshändige orthogonale Basis bildet.

Wenn man bedenkt, daß $H(\mathfrak{U}_\gamma)$ linear in $\mathfrak{U}_\gamma$ ist, so folgt:

$$\begin{aligned} E^{(2)}(m, m') &= \frac{\pi^2}{2} S_2 \sum_{m_f} \sum_{LM} \sum_{L'M'} V(2L+1)(2L'+1) \\ &\quad C(jLj_f; m M) C(jL'j_f; m' M') \\ &\quad \cdot \{ \langle j_f \| H(\mathfrak{U}_L^L(m)) \| j \rangle^* \langle j_f \| H(\mathfrak{U}_{L'}(m)) \| j \rangle F_{LL'}^{MM'}(m) \\ &\quad + \langle j_f \| H(\mathfrak{U}_L(e)) \| j \rangle^* \langle j_f \| H(\mathfrak{U}_{L'}(e)) \| j \rangle F_{LL'}^{MM'}(e) \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \langle j_f \| H(\mathfrak{U}_L(m)) \| j \rangle^* \langle j_f \| H(\mathfrak{U}_{L'}(e)) \| j \rangle F_{LL'}^{MM'}(e, m) \}. \end{aligned} \quad (18)$$

Die $\langle j_f \| H(\mathfrak{U}_L(m)) \| j \rangle$ usw. sind wieder reduzierte, von magnetischen Quantenzahlen unabhängige Matrixelemente.

Die $F_{LL'}^{MM'}$ haben die Bedeutung:

$$\begin{aligned} F_{LL'}^{MM'}(m) &= i^{L'-L} \sum_{P, P' = \pm 1} e^{i(P-P')\Phi} D_{MP}^{L*}(\mathfrak{f}_3) D_{M'P'}^{L'}(\mathfrak{f}_3) \\ F_{LL'}^{MM'}(e) &= i^{L'-L} \sum_{PP' = \pm 1} P P' e^{i(P-P')\Phi} D_{MP}^{L*}(\mathfrak{f}_3) D_{M'P'}^{L'}(\mathfrak{f}_3) \\ F_{LL'}^{MM'}(e, m) &= i^{L'+1-L} \sum_{PP' = \pm 1} P' e^{i(P-P')\Phi} D_{MP}^{L*}(\mathfrak{f}_3) D_{M'P'}^{L'}(\mathfrak{f}_3). \end{aligned} \quad (19)$$

Wenn über alle Polarisationsrichtungen gemittelt wird, dann lassen sich die Produkte von Rotationsmatrizen sehr vereinfachen und man erhält

$$\begin{aligned} F_{LL'}^{MM'}(m) &= F_{LL'}^{MM'}(e) = i^{L'-L} (-1)^{M'+1} \cdot 2 \sum_{\nu} C(LL' \nu; M-M') \\ &\quad \cdot C(LL' \nu; 1-1) \sqrt{\frac{4\pi}{2\nu+1}} Y_{\nu M'-M}(\vartheta_\gamma, \varphi_\gamma) \end{aligned} \quad (20)$$

und

$$F_{LL'}^{MM'}(e, m) = i^{L'+1-L} (-1)^{M'+1} \sum_{\nu} C(LL' \nu; M-M') \\ C(LL' \nu; 1-1) \sqrt{\frac{4\pi}{2\nu+1}} Y_{\nu M'-M}(\vartheta_{\nu}, \varphi_{\nu}).$$

6. Berechnung der Korrelationsfunktion $W(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3)$

Durch Einsetzen von (19) und (18) in (1) und Ausführung der Summation über die magnetischen Quantenzahlen nach der Standardtechnik folgt:

$$W(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3) \sim \sum_{\lambda\lambda'} \sum_{LL'} \sum_{l_1 l_1'} \sum_{l_2 l_2'} \sum_{\alpha} \sum_{\nu} \sum_{\bar{l}} \quad (21) \\ \cdot \left\{ \langle j_i \| A_e(\lambda) \| j \rangle^* \langle j_i \| A_e(\lambda') \| j \rangle K(LL'; jj_f) \right. \\ \left. (M_{l_2 l_1}^{-\lambda-1})^* M_{l_2 l_1}^{-\lambda'-1} e^{i(b_{l_1} - b_{l_1'} + b_{l_2} - b_{l_2'})} i^{l_1 - l_1' + l_2 - l_2'} \right] \\ \cdot \left[\frac{(2l_1+1)(2l_1'+1)(2l_2+1)(2l_2'+1)}{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)} \sqrt{\frac{(2L+1)(2L'+1)(2\alpha+1)}{(2\nu+1)}} \right] \\ \cdot \left[\sum_q Y_{\bar{l}}^{q*}(\vartheta_{k_2}, \varphi_{k_2}) Y_{\nu}^q(\vartheta_{\nu}, \varphi_{\nu}) (-1)^{j_f + j_i + 1 + \lambda' + \lambda + \nu} \right. \\ C(LL' \nu; 1-1) W(jj LL'; \nu j_f) W(jj \lambda \lambda'; \nu j_i) \\ W(\lambda' l_1' l_2 \bar{l}; l_2' \alpha) W(\lambda l, \lambda' \alpha; l_2 \nu) C(l_1 l_2 \lambda; 00) \\ C(l_1' l_2' \lambda; 00) C(l_2 l_2' \bar{l}; 00) C(l_1' \bar{l} \alpha; 0-q) \\ \left. C(l_1 \alpha \nu; 0q) \right] \Bigg\}$$

dabei sei:

$$K(LL'; jj_f) = \{ \langle j_f \| H(\mathfrak{A}_L(m)) \| j \rangle^* \langle j_f \| H(\mathfrak{A}_{L'}(m)) \| j \rangle i^{L'-L} \\ + \langle j_f \| H(\mathfrak{A}_L(e)) \| j \rangle^* \langle j_f \| H(\mathfrak{A}_{L'}(e)) \| j \rangle i^{L'-L} \\ + 2 \operatorname{Re} \langle j_f \| H(\mathfrak{A}_L(m)) \| j \rangle^* \langle j_f \| H(\mathfrak{A}_{L'}(e)) \| j \rangle i^{L'+1-L} \}. \quad (22)$$

Schließlich führen wir noch die Abkürzungen ein

$$G_v(LL'; j'j) = (-1)^{j+j'+1} (2j+1)^{1/2} \sqrt{(2L+1)(2L'+1)} \\ C(LL'v; 1-1) W(jjLL'; vj'). \quad (23)$$

Dabei ist $G_0 = \delta_{LL'}$.

Damit können wir endgültig schreiben:

$$W(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) \sim \sum_{\lambda\lambda'} \frac{\langle j_i \| A_e(\lambda) \| j \rangle^* \langle j_i \| A_e(\lambda') \| j \rangle}{[(2\lambda+1)(2\lambda'+1)]^{3/2}} \quad (24) \\ \sum_{vq} A_v \cdot a_{vq} Y_v^q(\vartheta_\gamma, \varphi_\gamma).$$

Hierbei ist

$$A_v = G_v(\lambda\lambda'; j_i j) \sum_{LL'} G_v(LL'; j_f j) K(LL'; j_f j) \quad (25)$$

ein Faktor, der bei allen Winkelkorrelationen mit einem sekundären γ -Quant auftritt, während

$$a_{vq} = \sum_l \sum_{l'_1 l'_2} \sum_{l_2 l'_2} \sum_{\alpha} \frac{(-1)^{v+\lambda+\lambda'+1}}{C(\lambda\lambda'v; 1-1)} (M_{l_2 l_1}^{-\lambda-1})^* M_{l'_2 l'_1}^{-\lambda'-1} \quad (26) \\ e^{i(b_{l_1}-b_{l'_1})} e^{i(b_{l'_2}-b_{l_2})} i^{l_1-l'_1} i^{l'_2-l_2} (2l_1+1) (2l'_1+1) \\ (2l_2+1) (2l'_2+1) \sqrt{\frac{2\alpha+1}{2v+1}} C(l_1 l_2 \lambda; 00) C(l'_1 l'_2 \lambda'; 00) \\ C(l_2 l'_2 \bar{l}; 00) C(l'_1 \bar{l} \alpha; 0-q) C(l_1 \alpha v; 0q) \\ \cdot W(\lambda' l'_1 l_2 \bar{l}; l'_2 \alpha) W(\lambda l_1 \lambda' \alpha; l_2 v) Y_l^q(\vartheta_{\mathbf{l}_2}, \varphi_{\mathbf{l}_2})$$

für die Coulombanregung charakteristisch ist.

Wenn man über $\mathbf{f}_2$ mittelt, so ergibt sich $\bar{l} = 0$ $q = 0$ und wir erhalten

$$a_v = \sum_{l_1 l'_1} \sum_{l_2} \frac{(-1)^{\lambda'+1+l'_1}}{C(\lambda\lambda'v; 1-1)} (M_{l_2 l_1}^{-\lambda-1})^* M_{l_2 l_1}^{-\lambda-1} \quad (27) \\ e^{i(b_{l_1}-b_{l'_1})} i^{l_1-l'_1} (2l_1+1) (2l'_1+1) (2l_2+1) \frac{1}{\sqrt{2v+1}} \\ C(l_1 l_2 \lambda; 00) C(l'_1 l_2 \lambda'; 00) C(l_1 l'_1 v; 00) \\ W(l_1 l_2 v \lambda'; \lambda l'_1).$$

Dies stimmt überein mit früher berechneten Ausdrücken, insbesondere ergeben sich im Spezialfall der reinen Quadrupolanregung $\lambda = \lambda' = 2$ genau die explizit von Alder und Winther [4] u. a. angegebenen Ausdrücke (bis auf den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\nu+1}}$, der von der Normierung der Kugelfunktionen herrührt).

7. Die halbklassische Theorie

Eine außerordentliche Vereinfachung der oben dargestellten Theorie ergibt sich, wenn man das Projektil nicht durch eine Wellenfunktion beschreibt, sondern als klassisches, am Coulombpotential gestreutes, eine Hyperbelbahn durchlaufendes Teilchen [1].

Die Bedingung für die Anwendbarkeit dieser klassischen Beschreibungsweise ist

$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \gg 1.$$

Für ein Teilchen mit dem Stoßparameter ϱ tritt an die Stelle des bisherigen $E^{(1)}(m, m')$ die Größe

$$E_{kl}^{(1)}(m, m') = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{m_i} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \langle j_i m_i | V(t) | j m' \rangle e^{\frac{i E_i - E}{\hbar} t} dt \right)^* \quad (28)$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \langle j_i m_i | V(t) | j m' \rangle e^{\frac{i E_i - E}{\hbar} t} dt \right),$$

wobei

$$V(t) = Z_1 e^2 \sum_{p=1}^{Z_2} \frac{1}{|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_p|} \quad (29)$$

ist.

Als Koordinatensystem für unsere Auswertung wollen wir im Gegensatz zu früher ein System nehmen, bei dem die z -Achse senkrecht auf der Bahnebene des Projektils steht und die x -Achse die große Achse der Hyperbel ist.

In diesem Koordinatensystem hat die Bahnkurve die Parameterdarstellung[1]

$$\begin{aligned} x &= a(\cos u + \varepsilon) & y &= a \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sin u \\ r &= a(\varepsilon \cos u + 1) & t &= \frac{a}{v} (\varepsilon \sin u + u) \end{aligned} \quad (30)$$

mit

$$a = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{m_1 v^2}$$

und

$$\varepsilon = \sqrt{1 + p^2/a^2} = 1/\sin \frac{\Theta}{2},$$

wobei Θ der Streuwinkel ist.

Um physikalische Größen zu bekommen, müssen wir noch den Stoßparameter mit dem richtigen Gewicht versehen.

Es ergibt sich etwa der differentielle Wirkungsquerschnitt zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4} \sin^{-4} \frac{\Theta}{2} \frac{1}{2j_i + 1} \sum_m E_{ke}^{(1)}(m, m). \quad (31)$$

Wie bei der quantenmechanischen Behandlung ist es zweckmäßig, das Wechselwirkungspotential nach Kugelfunktionen zu entwickeln:

$$\begin{aligned} & \int \langle j_i m_i | V(t) | j m \rangle e^{i\omega t} dt \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2\lambda+1} Z_1 e \sum_{\mu} \langle j_i m_i | \mathfrak{M}_e(\lambda, \mu) | j m \rangle \\ & \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r_{\lambda+1}(t)} Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi) e^{i\omega t} dt \end{aligned} \quad (32)$$

mit

$$\omega = \frac{E_i - E}{\hbar}.$$

Da $\vartheta = 90^\circ$ und

$$e^{i\varphi(t)} = \frac{x(t) + iy(t)}{r(t)}$$

ist, können wir schreiben

$$\begin{aligned}
& \int \langle j_i m_i | V(t) | j m \rangle e^{i\omega t} dt \\
&= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{4\pi Z_1 e}{2\lambda+1} C(j_i \lambda j; m_i m - m_i) \langle j_i || A_e(\lambda) || j \rangle \\
&\quad \cdot Y_{\lambda m - m_i} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x(t) + i y(t))^{m - m_i}}{r(t)^{\lambda+1+m - m_i}} e^{i\omega t} dt.
\end{aligned} \quad (33)$$

Dieses letzte Integral formen wir um:

$$dt = \frac{a}{v} (\varepsilon \coth u + 1) du = \frac{r}{v} du \quad (34)$$

und damit

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r^{\lambda+1}} Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi) e^{i\omega t} dt = Y_{\lambda\mu} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \frac{1}{a^{\lambda} v} \\
& \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi(\varepsilon \sin u + u)} (\coth u + \varepsilon + i \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sin u)^{\mu}}{(\varepsilon \coth u + 1)^{\lambda+\mu}} du
\end{aligned} \quad (35)$$

mit

$$\xi = \frac{E_i - E}{\hbar v} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{m_1 v^2} = \frac{\Delta E}{2E} \eta. \quad (36)$$

Wir kürzen im folgenden ab

$$J_{\lambda\mu} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi(\varepsilon \sin u + u)} (\coth u + \varepsilon + i \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sin u)^{\mu}}{(\varepsilon \coth u + 1)^{\lambda+\mu}} du. \quad (37)$$

Diese Integrale sind neuerdings von Alder und Winther [7] numerisch ausgewertet und bis $\lambda = 4$ tabelliert worden.

Für $E_{kl}^{(1)}(m, m')$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
E_{kl}^{(1)}(m, m') &= \frac{16 \pi^2 Z_1^2 e^2}{\hbar^2 v^2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\infty} \sum_{m_i} \frac{\langle j_i || A_e(\lambda) || j \rangle^* \langle j_i || A_e(\lambda') || j \rangle}{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)a^{\lambda+\lambda'}} \\
&\quad \cdot Y_{\lambda m - m_i}^* \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) Y_{\lambda' m' - m_i} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) J_{\lambda m - m_i}^* J_{\lambda' m' - m_i} \\
&\quad C(j_i \lambda j; m_i m - m_i) \cdot C(j_i \lambda' j; m_i m' - m_i).
\end{aligned} \quad (38)$$

Für den differentialen Wirkungsquerschnitt haben wir auszuwerten

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4} \varepsilon^4 \frac{1}{(2j_i+1)} \sum_m E_{kl}^{(1)}(m, m). \quad (39)$$

Statt über m_i und m summieren wir wieder über m_i und $\mu = m - m_i$. Die Summe über m_i liefert einfach $\frac{2j+1}{2\lambda+1} \delta_{\lambda\lambda'}$ wie früher. Damit

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2 \cdot 4\pi Z_1^2 e^2}{\hbar^2 v^2} \sin^{-1} \frac{\Theta}{2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{+\lambda} \frac{|\langle j_i \| A_e(\lambda) \| j \rangle|^2}{(2\lambda+1)^3 a^{2\lambda}} \frac{2j+1}{2j_i+1} \left| Y_{\lambda\mu} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \right|^2 |J_{\lambda\mu}(\Theta, \xi)|^2. \quad (40)$$

Unter Verwendung der errechneten Ausdrücke für $E_{kl}^{(1)}(m, m')$ und $E^{(2)}(m, m')$ erhalten wir

$$\begin{aligned} W(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) &\sim \frac{16\pi^2 Z_1^2 e^2}{\hbar^2 v^2} \frac{a^2}{4} \varepsilon^4 \sum_m \sum_{m'} \sum_{\lambda\lambda'} \sum_{m_i} \\ &\cdot \frac{\langle j_i \| A_e(\lambda) \| j \rangle^* \langle j_i \| A_e \| (\lambda') \| j \rangle}{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)a^{\lambda+\lambda'}} Y_{\lambda m - m_i}^* \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) Y_{\lambda' m' - m_i} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \\ &J_{\lambda m - m_i}^*(\Theta, \xi) J_{\lambda' m' - m_i}(\Theta, \xi) C(j_i \lambda j; m_i m - m_i) \\ &C(j_i \lambda' j; m_i m' - m_i) \sum_{m_f} \sum_{MM'} \sum_{LL'} V(2L+1)(2L'+1) K(LL'; jj_f) \\ &C(jLj_f; mM) C(jL'j_f; m'M') (-1)^{M'+1} \sum_v \sqrt{\frac{4\pi}{2v+1}} Y_{v M' - M}^*(\vartheta_v, \varphi_v) \\ &C(LL' v; M - M') C(LL' v; 1 - 1). \end{aligned} \quad (41)$$

Führen wir die Summation über m und M aus und kürzen wir ab.

$$\begin{aligned} G_v(LL'; j'j) &= (-1)^{j+j'+1} (2j+1)^{1/2} \sqrt{(2L+1)(2L'+1)} \\ &C(LL' v; 1 - 1) W(jjLL'; vj'), \end{aligned} \quad (42)$$

so folgt:

$$\begin{aligned}
 W(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) &\sim \frac{16\pi^2 Z_1^2 e^2}{\hbar^2 v^2} \frac{a^2}{4} \sin^{-4} \frac{\Theta}{2} \sum_{\lambda\lambda'} \sum_{LL'} \sum_{\mu q} \sum_{\nu} \quad (43) \\
 &(-1)^{\mu+q+1} (2j_f+1) \sqrt{\frac{4\pi}{2\nu+1}} Y_{\nu}^q(\vartheta_{\gamma}, \varphi_{\gamma}) \langle j_i \| A_e(\lambda) \| j \rangle^* \\
 &\quad \langle j_i \| A_e(\lambda') \| j \rangle \\
 &\frac{Y_{\lambda\mu}^*(\frac{\pi}{2}, 0) J_{\lambda\mu}^*(\Theta) Y_{\lambda'\mu+q}(\frac{\pi}{2}, \Theta) J_{\lambda'\mu+q}(\Theta)}{[(2\lambda+1)(2\lambda'+1)]^{3/2} a^{\lambda+\lambda'}} K(LL'; jj_f) \\
 &G_{\nu}(LL'; j_f j) G_{\nu}(\lambda\lambda'; j_i j) \frac{C(\lambda\lambda'\nu; -\mu\mu+q)}{C(\lambda\lambda'\nu; 1-1)}.
 \end{aligned}$$

Für den Spezialfall reiner Quadrupolanregung haben wir

$$\lambda = \lambda' = 2$$

mit den Abkürzungen

$$A_{\nu} = \sum_{LL'} G_{\nu}(22; j_i j) G_{\nu}(LL'; j_f j) K(LL'; jj_f) \quad (44)$$

und

$$\begin{aligned}
 a_{\nu q} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu+q+1} \frac{C(22\nu; -\mu\mu+q)}{C(22\nu; 1-1)} J_{2\mu}^*(\Theta) Y_{2\mu}^*\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \\
 J_{2\mu+q}(\Theta) Y_{2\mu+q}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)
 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
 W_2(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) &\sim \sin^{-4} \frac{\Theta}{2} |\langle j_i \| A_e(2) \| j \rangle|^2 \quad (46) \\
 &\sum_{\nu q} A_{\nu} a_{\nu q} P_{\nu}^q(\cos \vartheta_{\gamma}) e^{iq\varphi_{\gamma}}.
 \end{aligned}$$

Im einzelnen ergeben sich die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 a_{00} &= \frac{1}{2} \left\{ J_{20}^2 + \frac{3}{2} J_{22}^2 + \frac{3}{2} J_{2-2}^2 \right\} \\
 a_{20} &= \left\{ J_{20}^2 - \frac{3}{2} J_{22}^2 - \frac{3}{2} J_{2-2}^2 \right\} \\
 a_{40} &= -\frac{3}{4} \left\{ J_{20}^2 + \frac{1}{4} J_{22}^2 + \frac{1}{4} J_{2-2}^2 \right\} \quad (47) \\
 a_{22} &= a_{2-2} = \frac{1}{2} \{ J_{20} J_{22} + J_{20} J_{2-2} \} \\
 a_{42} &= a_{4-2} = \frac{1}{16} \{ J_{20} J_{22} + J_{20} J_{2-2} \} \\
 a_{44} &= a_{4-4} = -\frac{1}{64} \{ J_{22} J_{2-2} \},
 \end{aligned}$$

alle anderen sind 0.

In den nachfolgenden Figuren ist das Verhältnis dieser Anisotropiekoeffizienten zu a_{00} für verschiedene Werte von ξ als Funktion von Θ aufgetragen.

Literaturverzeichnis

- [1] K. Alder, A. Bohr, T. Huus, B. Mottelson u. A. Winther, Rev. Mod. Phys. 28, 432 (1956). Dort auch zahlreiche weitere Literaturhinweise.
- [2] Biedenharn, McHale u. Thaler, Phys. Rev. 100, 376 (1955).
- [3] L. C. Biedenharn u. M. E. Rose, Rev. Mod. Phys. 25, 729 (1953).
- [4] K. Alder u. A. Winther, Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat. fys. Medd. 29, No. 19 (1955).
- [5] M. E. Rose, Multipole Fields, Wiley, New York 1955.
- [6] K. Alder u. A. Winther, Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat. fys. Medd. 29, No. 18 (1955).
- [7] K. Alder u. A. Winther, Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat. fys. Medd. 31, No. 1 (1956).

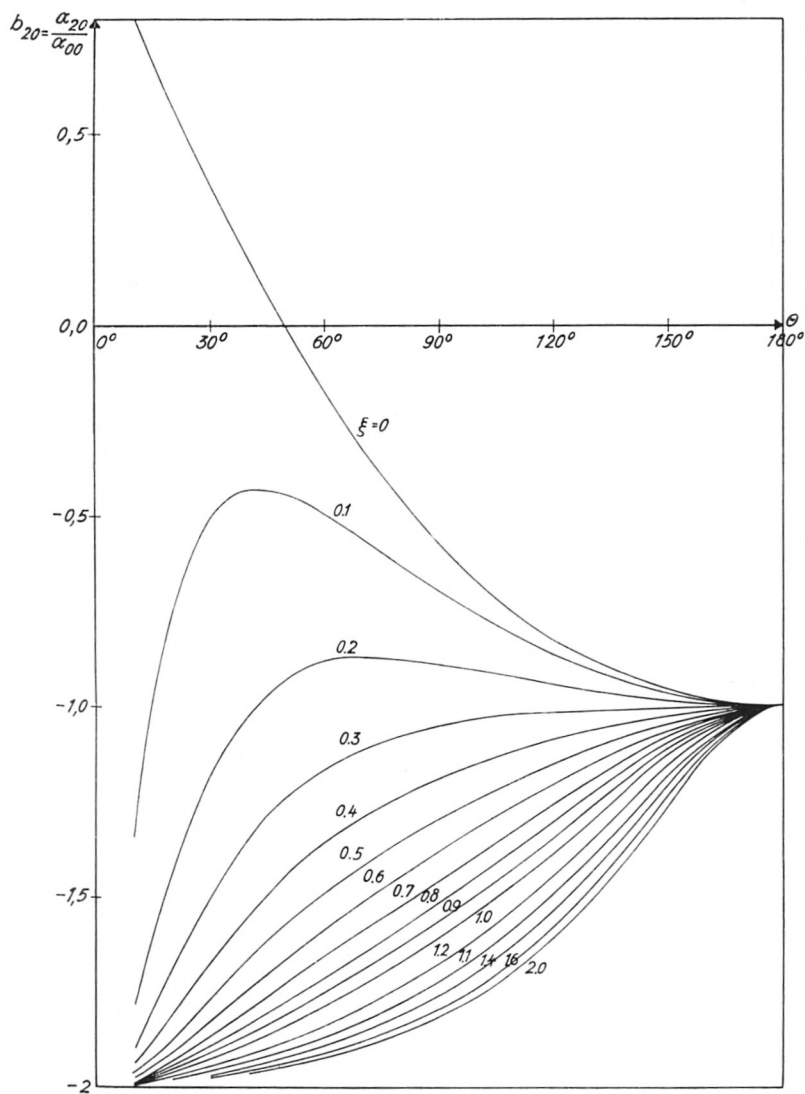


Fig. 1. Anisotropiekoeffizient b_{20} als Funktion des Streuwinkels Θ und mit $\xi = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar c} \left(\frac{c}{v_i} - \frac{c}{v_f} \right)$ als Parameter

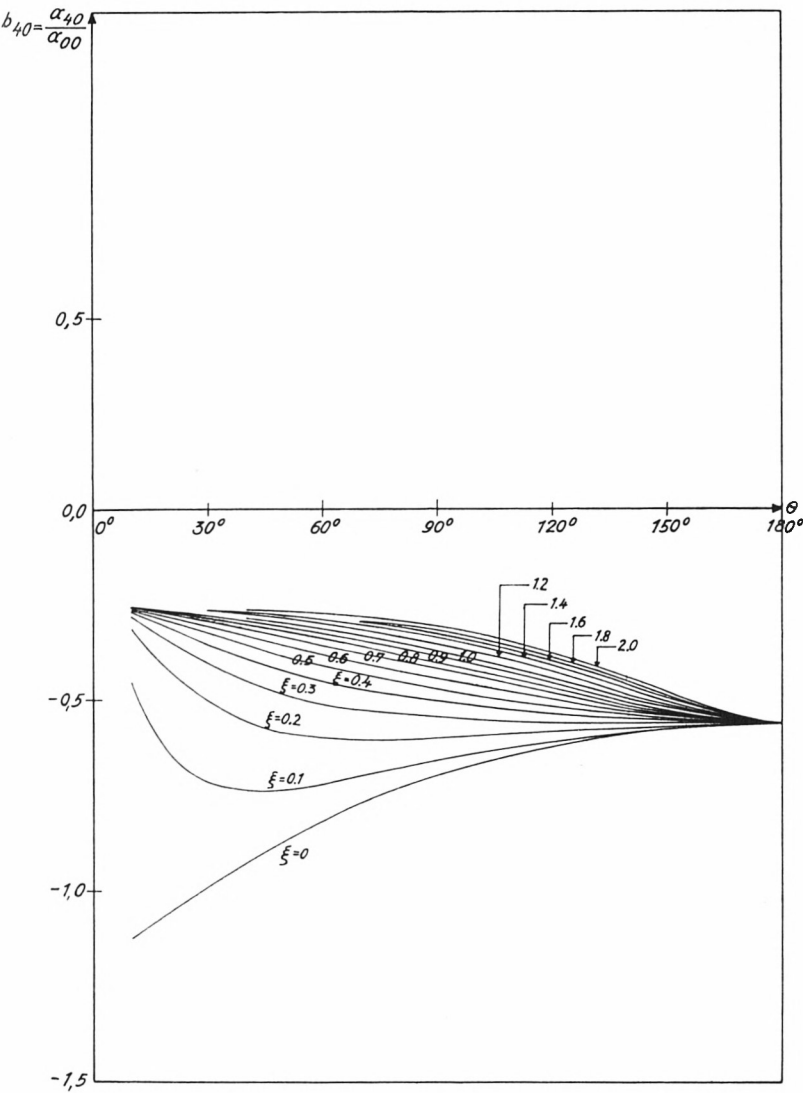
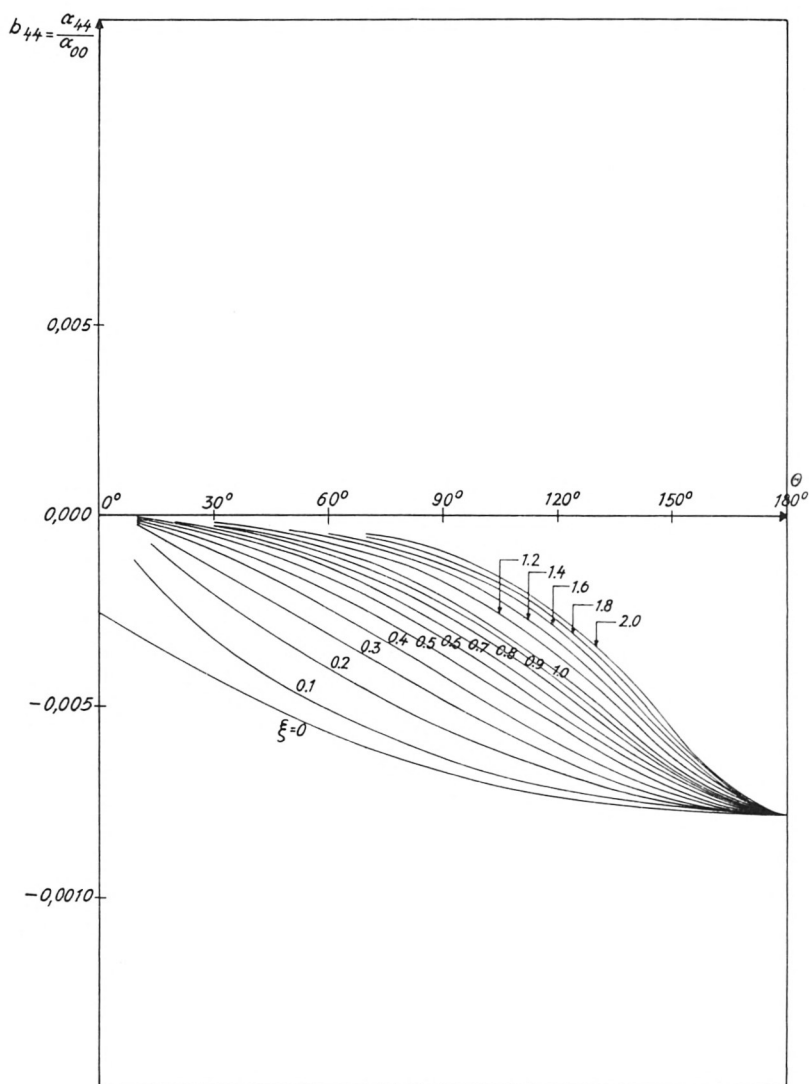


Fig. 4. Anisotropiekoeffizient b_{40} gegen θ

Fig. 5. Anisotropiekoeffizient b_{44} gegen θ