

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1956

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Ein Satz über Massenmomente n -ter Ordnung

Von Rudolf Albrecht in München

Vorgelegt von Herrn Josef Lense am 1. Juni 1956

C. A. Laisant beweist folgenden Satz: Ist M_0M ein Bogen der Bahn, die ein Massenpunkt unter dem Einfluß einer Zentralkraft mit dem Zentrum O beschreibt, X der Schwerpunkt des Bogens M_0M , wenn er umgekehrt proportional der Geschwindigkeit des Massenpunktes mit Masse belegt ist und R der Schwerpunkt der Sektorfläche OM_0M , so liegen die drei Punkte O , R , X auf einer Geraden und $OX = \frac{3}{2} OR$.

Diese Aussage ist Spezialfall eines allgemeineren und ziemlich trivialen Satzes über Massenmomente n -ter Ordnung: Es sei $\mathbf{r}(P)$ der Ortsvektor vom Punkte O zum Punkt P eines Bereiches B , $\mathbf{r}(P)$ stetig differenzierbar bezüglich seiner Parameter, $\varrho(P)$ die stetig veränderliche Massendichte und $d\omega$ ein Linien-, Flächen- bzw. Raumelement von B . Das vektorielle Moment n -ter Ordnung bezüglich des Punktes O der Massenverteilung von B ist

$$\int_B \mathbf{r}_1 |\mathbf{r}|^n \varrho d\omega, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} |\mathbf{r}|^{-1}.$$

Es gibt einen Mittelwert $\mathfrak{R}$, so daß

$$\mathfrak{R}_1 |\mathfrak{R}|^n \int_B \varrho d\omega = \int_B \mathbf{r}_1 |\mathbf{r}|^n \varrho d\omega, \quad \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R} |\mathfrak{R}|^{-1},$$

ist. Wir betrachten folgende zwei Fälle:

a) Der Bereich B sei die ebene oder Kegel-Fläche

$$\mathbf{r}(s, t) = s \mathfrak{r}(t), \quad 0 \leq s \leq 1, \quad t_a \leq t \leq t_b,$$

wobei durch $\mathfrak{r}(t)$ eine offene oder auch geschlossene Kurve dargestellt werden mag. Dann ist

$$d\omega = |\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t| ds dt = s |\mathfrak{r}_s \times \mathfrak{r}_t| ds dt$$

und wir haben für $\varrho(P) = \text{const}$, $n > -2$, $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}|\mathfrak{r}|^{-1}$

$$\int_B \mathfrak{r}_1 |\mathfrak{r}|^n d\omega = \frac{1}{n+2} \int_{t_a}^{t_b} \mathfrak{r}_1 |\mathfrak{r}|^n |\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_t| dt,$$

$$\mathfrak{R}_1 |\mathfrak{R}|^n \int_{t_a}^{t_b} |\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_t| dt = \frac{2}{n+2} \int_{t_a}^{t_b} \mathfrak{r}_1 |\mathfrak{r}|^n |\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_t| dt.$$

Das Ergebnis ist für $n = 0$ und $n = 1$ evident. Wird z. B. durch $\mathfrak{r}(t)$ eine geschlossene bezüglich des Punktes O sternige Kurve in der x, y -Ebene dargestellt, so gilt für den Schwerpunkt $\mathfrak{R} = (x_S, y_S)$ des von dieser Kurve begrenzten Bereiches mit der Fläche F

$$2F = \int_{t_a}^{t_b} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt,$$

$$x_S F = \frac{1}{3} \int_{t_a}^{t_b} x(x\dot{y} - y\dot{x}) dt = - \int_{t_a}^{t_b} xy\dot{x} dt = \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} x^2 \dot{y} dt,$$

letzteres durch partielle Integration, und Entsprechendes für y_S .

Nehmen wir an, die Kurve $\mathfrak{r}(t)$ sei mit Masse belegt und

$$\varrho(P) \sim \frac{|\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_t|}{|\mathfrak{r}|^2} |\mathfrak{r}|^{-r} = |\mathfrak{r}|^{-r+1} |\sin(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_t)|.$$

Für das Moment m -ter Ordnung, $m = n + r > -2$, gilt mit dem Mittelwert $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A}_1 |\mathfrak{A}|^m \int_{t_a}^{t_b} |\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_t| |\mathfrak{r}|^{-r} dt = \int_{t_a}^{t_b} \mathfrak{r}_1 |\mathfrak{r}|^n |\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_t| dt$$

oder

$$\mathfrak{A}_1 |\mathfrak{A}|^m = \frac{n+2}{2} \mathfrak{R}_1 |\mathfrak{R}|^n \frac{\int_{t_a}^{t_b} |\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_t| dt}{\int_{t_a}^{t_b} |\mathfrak{r}|^{-r} |\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_t| dt}.$$

Deshalb liegt der Mittelwert m -ter Ordnung $\mathfrak{X}$ des in der angegebenen Weise belegten Bogens und der Mittelwert n -ter Ordnung $\mathfrak{R}$ der Fläche auf einer Geraden durch O . Ist speziell $r = 0$, so hat man

$$\mathfrak{X}_1 |\mathfrak{X}|^n = \frac{n+2}{2} \mathfrak{R}_1 |\mathfrak{R}|^n.$$

Für $n = 1$ erhält man hieraus das Ergebnis von Laisant, wobei ein Massenpunkt sich unter dem Einfluß einer Zentralkraft durch O auf der Kurve $\mathfrak{r}(t)$ bewegt, so daß $|\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_t| = \text{const}$ wird und $\varrho \sim \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{r}_t^2}}$ zu wählen ist.

b) Wir erhöhen die Dimension um 1 und betrachten den räumlichen Bereich B

$$\mathfrak{r}(s, t, u) = s \mathfrak{r}(t, u); \quad 0 \leq s \leq 1; \quad t, u \in G;$$

wobei durch $\mathfrak{r}(t, u)$ eine offene oder auch geschlossene Fläche dargestellt werden mag. Dann ist

$$d\omega = |\mathfrak{r}_s [\mathfrak{r}_t \times \mathfrak{r}_u]| ds dt du = s^2 |\mathfrak{r} [\mathfrak{r}_t \times \mathfrak{r}_u]| ds dt du$$

und wir haben für $\varrho(P) = \text{const}$, $n > -3$, $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r} |\mathfrak{r}|^{-1}$

$$\mathfrak{R}_1 |\mathfrak{R}|^n \int_G |\mathfrak{r} [\mathfrak{r}_t \times \mathfrak{r}_u]| dt du = \frac{3}{n+3} \int_G \mathfrak{r}_1 |\mathfrak{r}|^n |\mathfrak{r} [\mathfrak{r}_t \times \mathfrak{r}_u]| dt du.$$

Nimmt man wieder an, die Fläche $\mathfrak{r}(t, u)$ sei mit Masse belegt und

$$\varrho(P) \sim \frac{|\mathfrak{r} [\mathfrak{r}_t \times \mathfrak{r}_u]|}{|\mathfrak{r}_t \times \mathfrak{r}_u|} |\mathfrak{r}|^{-r} = |\mathfrak{r}|^{-r+1} |\cos(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_t \times \mathfrak{r}_u)|,$$

dann gilt für das Moment m -ter Ordnung, $m = n + r > -3$, mit dem Mittelwert $\mathfrak{X}$

$$\mathfrak{X}_1 |\mathfrak{X}|^m = \frac{n+3}{3} \mathfrak{R}_1 |\mathfrak{R}|^n \frac{\int_G |\mathfrak{r} [\mathfrak{r}_t \times \mathfrak{r}_u]| dt du}{\int_G |\mathfrak{r}|^{-r} |\mathfrak{r} [\mathfrak{r}_t \times \mathfrak{r}_u]| dt du}.$$

Die Punkte $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{R}$ liegen auf einer Geraden durch O , für $r = 0$ ist

$$\mathfrak{X}_1 |\mathfrak{X}|^n = \frac{n+3}{3} \mathfrak{R}_1 |\mathfrak{R}|^n.$$

Die Ergebnisse lassen sich natürlich für einen a -dimensionalen Bereich $\mathfrak{r}(s, t_1, t_2, \dots, t_{a-1}) = s \mathfrak{x}(t_1, t_2, \dots, t_{a-1})$ erweitern, wobei aus der Funktionaldeterminante der Faktor s^{a-1} heraustritt.

Setzt man für die vorkommenden Einheitsvektoren 1 , so erhält man entsprechende Aussagen über skalare Momente n -ter Ordnung.

Man beachte, daß in der gegebenen Darstellung mehrfach zählende Bereichselemente auftreten, falls der Bereich B nicht sternig bezüglich O ist.

Literatur

- C. A. Laisant: Une propriété des orbites fermées correspondant à des forces centrales. *Compt. Rend.* 136 (1903) S. 880.
 C. A. Laisant: Sur une propriété des mouvements dus à une force centrale. *Bull. Soc. Math. de France* 31 (1903) S. 156.
 E. T. Whittaker: *Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper.* Berlin 1925, S. 118.