

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1930. Heft II

Mai-Julisitzung

München 1930

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München



Auswertung weitwinkliger Luftaufnahmen.

Von **S. Finsterwalder** in München.

Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1930.

Schon Ende des vorigen Jahrhunderts wurden Kammern für weitwinkliger Luftaufnahmen gebaut und zwar fast gleichzeitig um das Jahr 1898 von Thiele in Moskau, Cailletet in Paris und Scheimpflug in Wien¹⁾. Sie hatten den Zweck von einem Luftstandpunkt aus einen möglichst großen Teil des dort sich bietenden Gesichtsfeldes gleichzeitig photographisch zu erfassen, was nur durch die starre Vereinigung einer größeren Zahl von Einzelkammern mit dem üblichen für rasche Momentaufnahmen zulässigen Gesichtsfeld ($< 60^\circ$) möglich war. Scheimpflug hatte auch das große Verdienst, die verschiedenen gerichteten Einzelaufnahmen zu einem Gesamtbild mit einheitlicher Perspektive zusammenzufassen und geeignete Entzerrungsgeräte zur wirklichen Ausführung dieser einheitlichen Perspektive zu bauen. Zu einer praktischen Auswertung solcher Aufnahmen ist es kaum gekommen, da die entscheidenden Versuche infolge eines Brandunglückes, das das dabei verwendete Pralluftschiff erfuhr, nicht zum Abschluß gelangten. Im Kriege unterblieben weitere Versuche, da das verwickelte Gerät mit den vielen Einzelplatten, die zu einer weitwinkligen Aufnahme gehörten, weder Aufnahmen in genügend kurzen Zwischenzeiten gestattete, noch auch eine genügend rasche Auswertung zuließ. Nun hatte schon am Schlusse des Krieges H. Cranz in Stuttgart²⁾ den Versuch gemacht, die Herstellung

1) Die Geschichte dieser Kammern findet man ausführlich in dem (russischen) Werke von R. F. Thiele, Die Phototopographie in ihrer gegenwärtigen Entwicklung. Band III. Die lufttopographische Aufnahme, St. Petersburg 1909, S. 67.

2) R. Hegershoff und H. Cranz, Grundlagen der Photogrammetrie aus Luftfahrzeugen, Stuttgart 1919 (insb. die Figurentafel). Vgl. auch R. Hegershoff, Photogrammetrie und Luftbildwesen, Wien 1930, S. 150.

und Auswertung der vielen Einzelaufnahmen dadurch zu vereinfachen, daß man sie auf eine einzige lichtempfindliche Platte macht, was durch Vorsetzen geeigneter Prismen vor die Linsen der Seitenkammern geschehen kann. Hierbei wird der Strahlengang vor der Linse so verändert, daß sie ihr Bild auf die gemeinsame Plattenebene entwerfen kann. Es gelang aber Cranz nicht die Schwierigkeiten zu überwinden, die in gegenseitiger Einschränkung der Gesichtsfelder der Einzellinsen durch die Prismen bedingt waren. Hier setzte die Arbeit von Herrn Dipl. Ing. Cl. Aschenbrenner ein, der in Gemeinschaft mit der Firma C. A. Steinheil Söhne und der G. m. b. H. Photogrammetrie in München¹⁾ ein weitwinkliges Aufnahmegerät schuf, das neun Einzelaufnahmen (eine mittlere und acht seitliche) auf eine Platte im Ausmaße 17×17 cm bei 5 cm Bildweite liefert. Ein besonderes Umbildgerät entzerzt die acht Seitenaufnahmen lückenlos auf eine mit dem mittleren Bild gemeinsame Perspektive, die ein Quadrat von 28 cm Seitenlänge deckt und ein Gesichtsfeld von $2 \times 70^\circ$ umfaßt. Das Aufnahmegerät läßt Aufnahmen in Zeitabständen unter einer Minute zu und das Umbildgerät liefert die einheitliche Perspektive innerhalb eines Bruchteils von einer Stunde.

Die erste Absicht beim Bau des Aufnahmegerätes ging dahin, es zu einer weitmaschigen Nadirtriangulation in annähernd ebenem Gelände zu verwenden, wozu es sehr geeignet war, da die damit erzielten Aufnahmen, deren Hauptachse annähernd senkrecht nach unten gerichtet ist, wegen ihrer Weitwinkligkeit die Nadire vieler Nachbaraufnahmen mit umfassen, auch wenn diese fünf und mehr Kilometer auseinanderliegen. Besondere Ausmeßgeräte erleichtern diese Verwendung. Zur Herstellung des Grundrisses weiterer Punkte und Linien des Geländes war der Bau eines automatischen Gerätes geplant, das ihre Aufzeichnung in kleinen Kartenmaßstäben (1:25000 — 1:200000) bewirken sollte, wie es für topographische Aufnahmen in neu zu erschließenden Gebieten wünschenswert erscheint. Bei der stereoskopischen Betrachtung sich überdeckender Aufnahmen stellte sich nun eine unerwartet starke Raumwirkung des entstehenden Bildes heraus,

¹⁾ Cl. Aschenbrenner, Neue Geräte und Methoden für die photogrammetrische Erschließung unerforschter Gebiete. Bildmessung und Luftbildwesen. 4. Jahrgang 1929, S. 30.

dessen Tiefenabmessungen stark übertrieben erschienen und eine Einstellung der „wandernden Marke“ auf einzelne Meter Höhenunterschied bei einem Maßstab des Bildes unter 1:50000 zuließen. So entstand der Wunsch nach einem automatischen Gerät, das auch die Höhenverhältnisse des Geländes in Schichten wiedergibt. Die optischen und mechanischen Schwierigkeiten, die der Erfüllung dieses Wunsches etwa in Anlehnung an den Bau schon vorhandener Auswertegeräte, entgegenstehen, erscheinen sehr groß. Umso bemerkenswerter ist es, daß sich ein Weg finden läßt, auf dem man unter Benützung der schon vorhandenen Auswertegeräte zum Ziele kommt. Dazu ist die Erweiterung der Nadirtriangulation, die praktisch bisher nur auf Lagemessungen angewendet wurde, auf Höhenbestimmung erforderlich. Diese habe ich grundsätzlich schon vor neun Jahren an dieser Stelle in der gleichen Abhandlung auseinandergesetzt, welche den Anstoß zur praktischen Anwendung der Nadirtriangulation durch Herrn Cl. Aschenbrenner gegeben hat¹⁾. Nur ist diese Erweiterung für die üblichen Luftaufnahmen kleinen Gesichtsfeldes von untergeordneter Bedeutung und wirkt sich praktisch erst bei weitwinkligen Aufnahmen aus. In der Tat sind die Weitwinkelaufnahmen die ideale Vereinigung von Senkrecht- und Schrägaufnahmen und ihre Einführung macht den einst so lebhaften Streit, ob die einen oder die andern für die Ausübung der Luftphotogrammetrie günstiger seien, überflüssig.

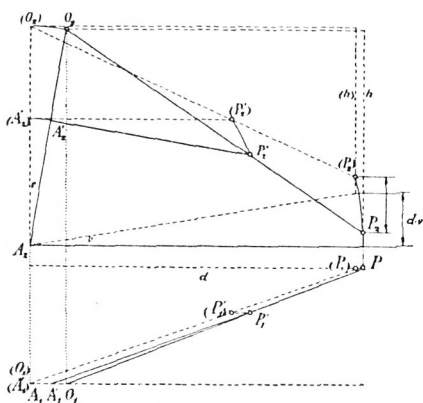
1. Abschnitt.

Die Ermittlung angenähert richtiger Nadire der gegebenen Aufnahmen.

Es sei vorausgesetzt, daß die Aufnahmebedingungen für eine Nadirtriangulation der Lage nach einigermaßen erfüllt seien, daß also z. B. von einem Gelände mit Höhenunterschieden unter 100 m zwei Aufnahmen vorliegen, deren Richtung nur wenige Grade vom Lote abweicht und deren Bildmitten gegenseitig abgebildet sind. Man kann dann unter Benützung der Strahlenbüschel, welche von der Bildmitte eines jeden Bildes nach dem Bilde der Bildmitte des zweiten Bildes und nach sonstigen entsprechenden Bildpunkten der gleichen Geländepunkte laufen, eine rohe z. B.

¹⁾ Diese Sitz.-Berichte 1921 S. 9.

graphische Nadirtriangulation vornehmen, welche außer den beiden Bildmitten noch mindestens zwei weitere Geländepunkte, in der Regel aber noch mehrere über den Rand des von beiden Bildern gemeinsam gedeckten Geländeabschnittes verteilte Punkte in beliebigem Maßstab umfaßt. Wenn die Aufnahmehöhe einige Kilometer beträgt, werden diese Punkte in Entfernungen von fünf,



Figur 1

zehn und mehr Kilometern auseinanderliegen, gegenüber welchen Entfernungen die Höhenunterschiede des Geländes unbedeutend sind. Man verschafft sich nun einen Überblick über die Höhenverhältnisse und die Aufnahmerichtungen indem man zu allen auf einem Bilde befindlichen Triangulationspunkten (mit Ausnahme der Bildmitte selbst) nach folgender einfacher Näherungsformel:

$h = \frac{sf}{q}$, Höhen h vom Aufnahmepunkt nach unten gezählt, rechnet. Dabei bedeutet f die Bildweite und q die Entfernung des Bildpunktes P' von der Bildmitte A' in mm und s die Entfernung der betreffenden Geländepunkte P und A im Maßstab der Nadirtriangulation. Die benützte Formel ist streng richtig, wenn die Aufnahme senkrecht nach unten stattgefunden hat, sonst gilt sie nur genähert, was jedoch für den gewollten Zweck ausreicht.

In der Figur 1 ist der wahre Standpunkt O der Geländepunkt A , der sich in die Bildmitte A' abbildet und ein weiterer Geländepunkt P , der sich in P' abbildet in Grund- und Aufriß (unterschieden durch die Zeiger 1 und 2) dargestellt. Die Höhen von A und P seien wenig verschieden, die Aufnahmerichtung OA weicht um den kleinen Winkel ν von der Senkrechten ab, die Ebene des Winkels ν ist parallel zum Aufriß. $A_1 P_1$ ist gleich s , der wagrechten Entfernung von A und P im Plane. Die in der Bildebene gelegene Strecke $A' P'$ ist gleich q . Die aus dem Aufriß zu entnehmende Höhendifferenz von O und P gleich h . Denken

wir uns nun das Aufnahmestrahlenbündel mitsamt den darauf befindlichen Punkten P und P' um eine durch A gehende in der Figur zur Aufrißtafel senkrecht gedachte Achse so um den kleinen Winkel ν gedreht, daß die vorher schief gelegene Bildebene $A' P'$ wagrecht wird, so gehen die Punkte $O A' P P'$ in die eingeklammerten Lagen $(O) (A') (P) (P')$ über. Bei dieser kleinen Drehung verschiebt sich der Grundriß von P nur um die kleine Größe 2. Ordnung $P_1 (P_1)$ und $A_1 (P_1)$ bleibt bis auf eine solche Größe gleich $A_1 P_1 = s$. Die Strecke $A' P'$ ist durch die Drehung wagrecht geworden und deshalb ist $(A_1) (P_1) = \varrho$. Die Hebung die O bei der Drehung erfahren hat, ist nur von der 2. Ordnung und jene die P erfahren hat, bis auf Größen 2. Ordnung gleich $d \cdot \nu$, wo d der Abstand des Punktes P_1 von der Drehachse ist.

Wird nun die Formel $\frac{fs}{\varrho}$ angewandt, so liefert sie, wie aus der gedrehten Figur ohne weiteres ersichtlich ist, nicht die Höhe h des Geländepunktes P unterhalb O , sondern die Höhe h' des gedrehten Geländepunktes (P) unterhalb (O) und zwar auf kleine Größen 2. Ordnung genau. So liefert die Anwendung dieser Näherungsformel für die Bildpunkte einer wenig geneigten Aufnahme ein System von Höhen, die von einer durch den Aufnahmestandpunkt O gehenden, zur Bildebene parallelen Ebene aus gezählt werden.

Die Weiterverwendung der mittels der Näherungsformel errechneten Höhen geschieht dann in folgender Art. Man schreibt in dem Triangulationsplan die so ermittelten Höhen (h) zu den Punkten und überzeugt sich, daß diese angenähert in einer Ebene liegen, die aber meist nicht wagrecht ist, da das Bild eben nicht genau senkrecht aufgenommen wurde. Die Abweichung vom Lote findet man nun dadurch, daß man im Triangulationsplan unter der Voraussetzung, daß die Geländepunkte in einer Ebene liegen, eine Gerade einschaltet, die Punkte gleicher Höhe h_m verbindet. Diese gibt die Richtung der Spurlinie der geneigten Geländeebene und ihre Neigung $\text{tg } \nu$ wird durch die Höhenunterschiede $h - h_m$ der übrigen Punkte gegenüber der gleichen Höhe h_m und ihren Abstand d von jener Geraden bestimmt. Diese Neigung $\text{tg } \nu = \frac{h - h_m}{d}$ muß sich für alle Punkte annähernd gleich heraus-

stellen, wodurch die Voraussetzung der genäherten Ebenheit des Geländes geprüft wird.

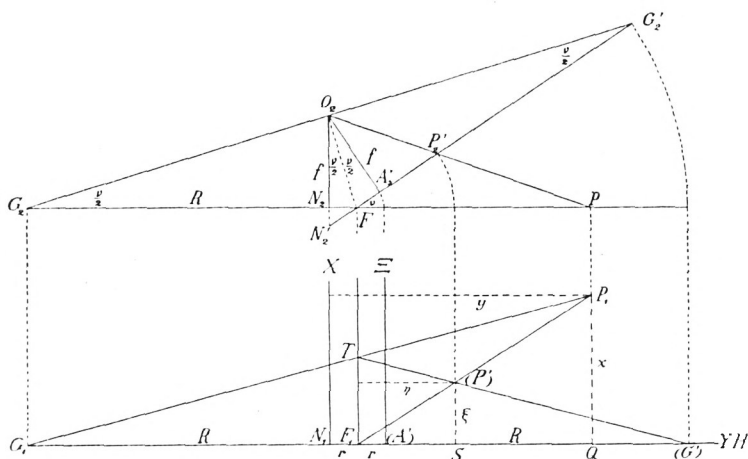
Nun ermittelt man eine genäherte Lage des Nadirs gegenüber der Bildmitte, indem man von ihr aus in der Richtung senkrecht zu jener Geraden um eine Strecke weiter geht, die gleich dem Produkt $f \operatorname{tg} \nu$ aus der durchschnittlichen Neigung $\operatorname{tg} \nu$ der gefundenen Geländeebene und der Bildweite f ist. Der Erfolg dieser Maßnahme beruht darauf, daß die Höhenunterschiede infolge der Schrägstellung der gefundenen Geländeebene, die von der nichtsenkrechten Aufnahmerichtung herrührt, die Unebenheiten des Geländes und die Fehler der benützten Näherungsformel für die Höhen h bei weitem überdecken. Wenn das von beiden Bildern gemeinsam gedeckte Gebiet eine Ausdehnung von etwa 10 Kilometern hat, bewirkt ein Fehler der Aufnahmerichtung von 1° bereits Höhenunterschiede von nahe 200 m. Bei der Ausführung zeigt sich, daß die so ermittelte Lage des Nadirs auf $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}^\circ$ genau ist und wenn man ihn einer zweiten Nadirtriangulation zugrunde legt, diese der Lage nach praktisch fehlerfrei wird.

2. Abschnitt.

Die Verfeinerung der Nadirtriangulation mittels der genaueren Nadire.

Zur Ausführung der zweiten genaueren Nadirtriangulation ist nun nicht etwa eine Entzerrung der Aufnahme auf den gefundenen neuen Nadir verbunden mit einer Neumessung der Geländebildpunkte auf der entzerrten Aufnahme erforderlich. Die wenigen Punkte einer Aufnahme, die zur Nadirtriangulation nötig sind, lassen sich weit einfacher und genauer aus den ursprünglichen Koordinaten umrechnen. Die dazu dienlichen Formeln lassen sich aus der Figur 2 folgendermaßen ableiten. Die ursprünglichen Punkte seien auf ein Koordinatensystem ξ, η mit der Ξ -Achse Bildmittelpunkt-Nadir in der geneigten Aufnahme bezogen und sollen auf die fast wagrechte Ebene die den Nadir als Bildmittelpunkt hat unter Beibehaltung der Bildweite f und der Ξ - bzw. X -Richtung umgerechnet werden.

Man benützt dabei die Fokalfunkte F und $G'G'$ beider Ebenen, deren Strahlenbündel bei der perspektivischen Beziehung beider Ebenen aufeinander kongruent, bzw. symmetrisch ineinander



Figur 2 (Grund- und Aufriß sind durch die Zeiger 1 und 2 unterschieden).

abgebildet werden. Die schiefe Ebene wird dabei um die gemeinsame durch F gehende Gerade in die wagrechte Ebene herabgeklappt. In der dabei entstehenden Figur ist die Ähnlichkeit der Dreiecke $F_1S(P') \sim F_1Q P_1$ und $G_1P_1Q \sim (G')(P')S$ augenscheinlich. Daraus folgt unter Benützung von:

$$r = F_1(A') = F_2A_2 = f \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} \quad \text{und} \quad R = NG = A'G' = f \operatorname{ctg} \frac{\nu}{2}$$

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta + r}{y - r} \quad \text{und} \quad \frac{\xi}{x} = \frac{R - \eta}{R + y}$$

woraus sich die Beziehungen:

$$x = \xi \frac{\frac{R+r}{2}}{\frac{R-r}{2} - \eta}, \quad y = \frac{\eta \frac{R-r}{2} + Rr}{\frac{R-r}{2} - \eta}$$

$$\text{und:} \quad \xi = x \frac{\frac{R+r}{2}}{\frac{R-r}{2} + y}, \quad \eta = \frac{y \frac{R+r}{2} - Rr}{\frac{R-r}{2} + y}$$

ergeben, die auch als Differenzenformeln:

$$x - \xi = \xi \frac{\frac{\eta + r}{R - r} - \eta}{2}, \quad y - \eta = 2r + \frac{(\eta + r)^2}{\frac{R - r}{2} - \eta} \quad \text{und}$$

$$\xi - x = -x \frac{\frac{y - r}{R - r} + y}{2}, \quad \eta - y = -2r - \frac{(y - r)^2}{\frac{R - r}{2} + y}$$

geschrieben werden können, in welcher Form sie sich zum Rechnen mit dem Schieber eignen, während sie in der ersten Gestalt für das Rechnen mit Logarithmen bequemer sind. Für die Verwertung der umgerechneten Koordinaten $x y$ zur Nadirtriangulation kommt es darauf an, wie weit sich der umgerechnete Bildmittelpunkt A' vom neuen Bildmittelpunkt N unterscheidet. Ist dieser Unterschied bedeutend (wenn r z. B. 3° überschreitet), so tut man gut anstelle der alten Bildmittelpunkte und ihrer Bildpunkte auf den andern Aufnahmen, den neu ermittelten Nadirpunkt und seine entsprechenden Bilder auf den andern Aufnahmen der Nadirtriangulation zugrunde zu legen, was allerdings dann noch neue Messungen auf den Originalbildern erfordert. Mit den so umgerechneten Koordinatenwerten $x y$ wird nun die Nadirtriangulation endgültig gerechnet und nötigenfalls ausgeglichen, wobei sie der Lage nach praktisch keine Fehler mehr zeigt, da ihre Aufnahmen von ganz geringer Abweichung von der wagrechten Ebene zugrunde liegen.

3. Abschnitt.

Die Höhentriangulation und ihr Anschluss an gegebene Festpunkte.

Bei der Höhenbestimmung machen sich die geringen Abweichungen der umgeformten Bildebenen von der Wagerechten noch geltend. Rechnet man nun mit den aus der genauen Nadirtriangulation entnommenen Geländeentfernungen s und mit den aus der Umrechnung hervorgegangenen entsprechenden Bildentfernungen ϱ nach der Formel $h = \frac{sf}{\varrho}$ erneut Höhen h unterhalb des Luftstandpunktes, so sind diese, trotzdem die Formel jetzt viel genauer gilt als früher, nicht richtig; sie beziehen sich nicht auf die Abstände von einer streng wagrechten Ebene durch den

Luftstandpunkt, sondern von einer leicht geneigten, die für jeden Luftstandpunkt etwas verschieden ist. Wenn es auch ohne weitere Kenntnis von Geländehöhen nicht möglich ist, die auf verschiedene fast wagrechte Ebenen bezogenen Höhen auf eine streng wagrechte Bezugsebene umzurechnen, so kann man sie doch auf parallel gestellte fast wagrechte Ebenen umrechnen, falls sich je zwei Aufnahmen genügend überdecken und auf dem doppelt überdeckten Gebiet die Bilder dreier günstig gelegener Punkte zu finden sind, die in die Nadirtriangulation einbezogen sein müssen. Um die Höhen der zweiten Aufnahme mit denen der ersten in Übereinstimmung zu bringen, schreibt man in den Triangulationsplan die Unterschiede der Höhen beider Aufnahmen ein. Diese Höhenunterschiede müssen eine lineare Funktion der Geländepunktkoordinaten bilden, was bei drei Punkten immer der Fall ist und bei mehr Punkten ein Kennzeichen dafür bildet, daß grobe Fehler vermieden und die kleinen Fehler der Näherungsformel unerheblich sind. Schaltet man in den Triangulationsplan eine Gerade gleichen Höhenunterschiedes ein, so gibt diese die Richtung der Drehachse an, um die man das System der aus der zweiten Aufnahme bestimmten Punkte drehen muß, um sie dem aus der ersten Aufnahme hervorgegangenen parallel zu stellen, so daß sie nur mehr einen konstanten Höhenunterschied aufweisen. Der kleine Betrag der Drehung, die nötig ist, läßt sich aus dem Unterschied der größten und kleinsten Höhenunterschiedes beider Aufnahmen und aus der Projektion der wagrechten Entfernung beider den Extremunterschieden zugehöriger Geländepunkte auf die Senkrechte zur Richtung der Drehachse bestimmen, ganz ähnlich wie bei der Ermittlung von $\operatorname{tg} \nu$ im 1. Abschnitt. Werden nur drei Höhen beider Aufnahmen verglichen, so ist die Bestimmung der Drehgröße eindeutig, bei mehr Höhen muß eine Ausgleichung eintreten. Mit dieser Drehung, welche die aus der zweiten Aufnahme bestimmten Punkte mit den aus der ersten hervorgegangenen bis auf eine Parallelverschiebung in der Lotrichtung zur Deckung bringt, geht eine entsprechende Verschiebung des Nadirs der zweiten Aufnahme einher, die senkrecht zur Drehachse und um einen Betrag gleich dem Produkt aus Bildweite mal Drehwinkel erfolgt. Auf solche Weise können alle an die erste Aufnahme entweder unmittelbar oder durch Vermittelung einer Zwischen-

aufnahme angeschlossenen Aufnahmen auf gemeinsamen Nadir gebracht werden; das heißt man findet auf allen diesen Aufnahmen die Punkte, in welchen ein zur genäherten Senkrechten der ersten Aufnahme durch den jeweiligen Standpunkt parallel gezogener Strahl die schiefe Originalbildebene schneidet. Hat man auf solchem Wege ein erweitertes Netz von Höhen auf die gleiche fast wagrechte Ausgangsebene bezogen, so ist die Möglichkeit dieses durch Vergleich mit bekannten richtigen Höhen auf eine streng wagrechte Ausgangsebene zu beziehen in weiterem Maße vorhanden. Diese Beziehung geschieht durch Drehung des Höhennetzes, wobei die Drehgrößen wieder analog gefunden werden wie vorhin. Aus ihnen folgen dann gemeinsame Verschiebungen aller genäherten Nadire der Aufnahmen auf jene Stelle, die dem richtigen Lot entspricht.

Sind die bekannten Höhen so reichlich vorhanden, daß auf das von einer Aufnahme gedeckte Gelände mindestens drei günstig gelegene treffen, so kann der Nadir jeder Aufnahme für sich nach dem vorhin auseinandergesetzten Verfahren gefunden werden und es erübrigt sich der Umweg über das Zusammenstimmen der Höhen übergreifender Nachbaraufnahmen. Wegen der großen räumlichen Ausdehnung des schon von einer einzigen weitwinkligen Aufnahme gedeckten Geländes, muß man beachten, daß sich die gebräuchlichen Höhenangaben nicht auf eine Ausgangsebene, sondern auf das Geoid, also mit der für unsere Zwecke genügenden Näherung auf eine Ausgangskugel beziehen. Vor der Verwendung der Höhenangaben zur Bestimmung der Nadire muß man sie auf eine einheitliche Ausgangsebene umrechnen, deren Lotrichtung auch für die Bestimmung der Nadire maßgebend ist und auf die sich dann die sämtlichen photogrammetrisch ermittelten Höhen beziehen. Man kann letztere dann schließlich wieder auf Geoidhöhen zurückführen.

4. Abschnitt.

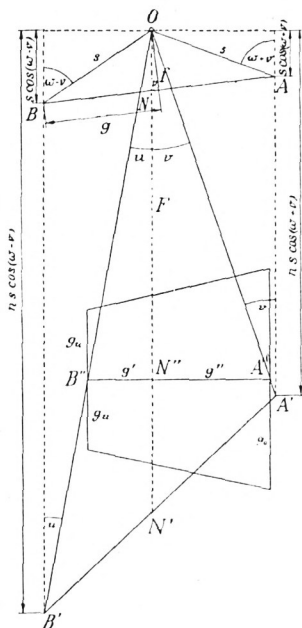
Die Umbildung der Aufnahmen für die Benützung des Auswertegerätes.

Sind die Nadire zweier übergreifender weitwinkliger Luftaufnahmen ermittelt, so erhebt sich die Frage nach der Auswertung des von ihnen gemeinsam gedeckten Geländes mittels Höhen-

schichten. Eine unmittelbare Auswertung auf einem der üblichen Geräte (Aerokartograph, Stereoplanigraph usw.) ist wegen des mäßigen Gesichtsfeldes ihrer Projektionskammern nicht möglich. Man denkt sich nun anstelle eines ähnlichen Modelles des betreffenden Geländes und der zugehörigen Luftstandpunkte ein in der Lotrichtung (etwa zehnfach) affin verzerrtes Modell, dessen Höhenschichten mit denen des ähnlichen Modelles deckungsgleich sind. In diesem verzerrten Modell sind die bilderzeugenden Strahlenbündel nicht mehr weitwinklig und können daher von den Projektionskammern eines Auswertegerätes aufgenommen werden. Wären die Weitwinkelaufnahmen genau senkrecht nach unten aufgenommen, so würde eine ähnliche Verkleinerung, die die mehrfach verzerrte Bildweite der Aufnahmen jener des Auswertegerätes anpaßt, genügen, um sie im Auswertegerät zu verarbeiten. Da das im Allgemeinen nicht der Fall ist, muß eine entsprechende schräge Umbildung mittels eines Entzerrungsgerätes vorgenommen werden, die naturgemäß den Wirkungsbereich dieses Gerätes nicht überschreiten darf, was bei der

Umbildung der weitwinkligen geneigten Originalaufnahme in eine gleich weitwinklige wagrechte Aufnahme immer der Fall wäre. Bei der Umbildung in eine wagrechte Aufnahme mäßigen Gesichtsfeldes fällt diese Schwierigkeit fort.

Um die für die Einstellung des Entzerrungsgerätes nötigen Angaben zu berechnen, denken wir uns die Originalaufnahme von der Bildweite f mit einem Quadrat von der halben Seitenlänge $g = f \operatorname{tg} \tilde{\omega}$ überzogen, dessen Mittelpunkt mit dem Bildmittelpunkt zusammenfällt und dessen eines Seitenpaar der Verbindungslinie Bildmittelpunkt-Nadir parallel ist. Der Winkel $\tilde{\omega}$ entspricht dabei dem halben Bildfeld der Aufnahme, sodaß das Quadrat den



Figur 3

Hauptteil der Aufnahme einschließt. Ist nun F die Bildweite des Auswertegerätes und v die Abweichung der Aufnahmerichtung von der Senkrechten, so lassen sich die Ausmaße des Paralleltapezes, in welches das Quadrat umgebildet werden muß, damit die mitumgebildete Aufnahme in das Auswertegerät paßt, durch einfache Formeln ausdrücken. In umstehender Figur 3 bedeuten: AB die weitwinklge Aufnahme mit der Bildweite f , $A'B'$ die n fach affin verzerrte und $A''B''$ die für die Bildweite F des Auswertegerätes auf eine wagrechte Ebene umgebildete Aufnahme.

$$g' = F \operatorname{tg} u = F \frac{s \sin (\tilde{\omega} - v)}{n s \cos (\tilde{\omega} - v)} = \frac{F}{n} \operatorname{tg} (\tilde{\omega} - v)$$

$$g'' = F \operatorname{tg} v = F \frac{s \sin (\tilde{\omega} + v)}{n s \cos (\tilde{\omega} + v)} = \frac{F}{n} \operatorname{tg} (\tilde{\omega} + v)$$

$$\frac{g_u}{g} = \frac{OB''}{OB'} = \frac{F}{n s \cos (\tilde{\omega} - v)} = \frac{F \cos \tilde{\omega}}{n g \cos (\tilde{\omega} - v)}$$

$$g_u = \frac{F \cos \tilde{\omega}}{n \cos (\tilde{\omega} - v)} \quad \text{ebenso} \quad g_0 = \frac{F \cos \tilde{\omega}}{n \cos (\tilde{\omega} + v)}$$

In dem aus dem Quadrat umgebildeten Paralleltapez spielt der Punkt N'' die Rolle des Bildmittelpunktes, der hier auch Nadir ist und dementsprechend ist die im Entzerrungsgerät umgebildete Aufnahme in die Projektionskammer des Auswertegerätes einzusetzen. Bei der weiteren Einstellung des Auswertegerätes auf Stereoeffekt ist zu beachten, daß nur mehr die Verkantung und die Lage der Projektionsstandpunkte zu ändern sind, was eine erhebliche Vereinfachung gegenüber dem Einstellen beliebig geneigter Aufnahmen bedeutet.

5. Abschnitt.

Praktische Durchführung eines Beispiels. Lagentriangulation.

Wenn die in den vorigen Abschnitten grundsätzlich auseinander gesetzten Methoden in der üblichen Weise auf eine Reihe übergreifender Flugaufnahmen, wie sie sich bei einem Einzelflug ergeben, angewendet werden, so wird man zwar gegenüber den Luftaufnahmen kleinen Gesichtsfeldes die Vorteile der Weitwink-

lichkeit in Bezug auf Raschheit und Genauigkeit der Arbeit angenehm verspüren, aber sie noch lange nicht ausschöpfen. Dazu ist eine netzförmige Anordnung der Flugstandpunkte erforderlich, wie sie sich aus dem Zusammenschluß paralleler Einzelflüge ergibt. Wir wollen annehmen, die Flüge wären so angeordnet, daß die Aufnahmepunkte annähernd die Ecken eines Quadratnetzes besetzen, dessen Seiten an die doppelte Flughöhe über dem Gelände heranreichen, womit erzielt wird, daß auf einer Aufnahme die Nadire von acht Nachbaraufnahmen zur Abbildung gelangen und das Gelände vierfach mit Aufnahmen gedeckt ist. Bei den Aufnahmemastäben, um die es sich hier handelt (1:25000 — 1:100000) bedeutet das keine Verschwendung von Plattenmaterial. Es soll nun an einem Rechenbeispiel gezeigt werden, wie groß der Rechenaufwand für die Aufsuchung der Nadire von den vier Aufnahmen über den Ecken eines Quadrates ist und welche Genauigkeit von den Entfernungen und Höhen des wiederhergestellten Geländes erwartet werden kann. Die Abweichungen der Aufnahmerichtungen vom Lot sei kleiner als 3° vorausgesetzt, die Höhenunterschiede des Geländes sollen 100 m nicht sehr überschreiten, die Flughöhen zwischen 5000 und 6000 m liegen. Die Bildweite der auf einheitliche Perspektive gebrachten Aufnahmen sei 50 mm, die Punkte seien auf 0,01 mm ausgemessen; das Koordinatensystem (x) , (y) sei beliebig orientiert.

Die Punkte a_1 bis a_4 sind die Bildmitten der vier Aufnahmen, bzw. deren Bilder, die Punkte $i e b c h m p o$ können als Bilder der Bildmitten von acht um die vier Punkte a_1 bis a_4 herumliegenden Aufnahmen oder auch sonstige ähnlich gelegene Geländepunkte sein. Bei einer systematischen Aufnahme wird das erstere

1. Zahlentafel.

1. Aufnahme		2. Aufnahme		3. Aufnahme		4. Aufnahme	
(x)	(y)	(x)	(y)	(x)	(y)	(x)	(y)
i — 46,83	38,13	i — 71,08	— 63,65	b 15,91	— 99,15	o — 9,96	— 104,76
e — 100,16	0,74	e — 4,76	— 73,41	c 58,56	— 46,86	h 8,72	88,44
o 53,35	38,35	b 66,90	2,46	h 42,67	46,39	m — 45,12	37,38
p 109,64	— 12,48	c 72,46	61,98	m — 20,48	85,44	p — 61,17	— 50,07
a_1 0,00	0,00	a_1 — 74,49	0,82	a_1 — 104,26	— 16,58	a_1 45,37	— 62,60
a_2 — 56,94	— 55,67	a_2 0,00	0,00	a_2 — 44,33	— 60,36	a_2 95,03	— 9,71
a_3 — 4,69	— 119,18	a_3 3,06	67,96	a_3 0,00	0,00	a_3 45,66	40,49
a_4 48,57	— 67,00	a_4 — 58,41	71,66	a_4 — 49,44	37,36	a_4 0,00	0,00

der neuen H -Achse wird der genäherte Nadir in der Entfernung $f \operatorname{tg} \nu = 2,45 \text{ mm}$ angenommen. Die ξ und η Koordinaten der Punkte können dann aus den (x) und (y) umgerechnet werden. Man kann auch so verfahren, daß man die früher nötigen Maße graphisch einem Papierabdruck entnimmt und die genaue Ausmessung erst im System $\mathcal{E}H$ vornimmt, dessen Lage aus der vorläufigen Bestimmung hervorgeht. Hat sich dabei eine größere Verschiebung des Nadirs gegenüber der Bildmitte herausgestellt, so ändert man besser den Punkt a in den gefundenen Nadir, womit sich natürlich auch die entsprechenden Änderungen in den drei Bildern des Punktes a auf den übrigen drei Aufnahmen ergeben. Das Ergebnis der Umrechnung (ohne Änderung der Punkte a) ist in nachstehender Zahlentafel zusammengestellt.

Ganz entsprechend wurden die drei übrigen Aufnahmen behandelt, wobei sich Drehungen des ursprünglichen XY Systems um $-5^\circ 0'$, $-6^\circ 10'$ und $-1^\circ 0'$, sowie die Beträge von $\operatorname{tg} \nu$ zu 0,0395, 0,0430, 0,0360 ergaben.

2. Zahlentafel.

Stand I $x = \xi \frac{1021,5}{1020,3 - \eta} \quad y = \frac{2500 + 1020,3 \eta}{1020,3 - \eta}$

	ξ	η	x	y
i	44,284	41,060	46,196	45,334
e	99,905	7,173	100,730	9,691
o	55,703	34,843	57,740	38,612
p	108,613	19,497	106,702	16,727
a_1	0,000	0,000	0,000	2,450
a_2	60,399	51,897	57,544	47,054
a_3	12,336	118,635	11,064	104,083
a_4	44,167	69,983	41,381	63,199

Stand III $x = \xi \frac{1171,7}{1170,6 - \eta} \quad y = \frac{2500 + 1170,6 \eta}{1170,6 - \eta}$

	ξ	η	x	y
b	26,469	96,866	24,469	87,490
c	63,256	40,298	61,209	36,892
h	37,438	50,705	39,171	55,233
m	29,540	82,744	31,817	91,338
a_1	101,876	27,683	99,616	24,957
a_2	37,590	64,773	35,653	59,353
a_3	0,000	0,000	0,000	2,136
a_4	53,168	31,834	54,706	34,921

Stand II $x = \xi \frac{1266,7}{1265,7 - \eta} \quad y = \frac{2500 + 1265,7 \eta}{1265,7 - \eta}$

	ξ	η	x	y
i	65,263	69,605	61,911	64,104
e	1,656	73,547	1,566	67,643
b	66,431	8,282	66,922	10,324
c	66,783	68,058	70,635	74,012
a_1	74,280	5,676	74,007	3,684
a_2	0,000	0,000	0,000	1,975
a_3	2,874	67,967	3,040	73,912
a_4	64,434	66,298	68,052	72,048

Stand IV $x = \xi \frac{1389,8}{1388,5 - \eta} \quad y = \frac{2500 + 1388,5 \eta}{1388,5 - \eta}$

	ξ	η	x	y
o	8,132	104,920	7,567	95,876
h	7,176	88,580	7,673	96,540
m	45,767	36,588	47,049	39,427
p	60,288	51,130	58,201	47,579
a_1	46,456	61,799	44,517	57,443
a_2	95,185	8,049	94,724	6,213
a_3	44,947	41,280	46,367	44,401
a_4	0,000	0,000	0,000	1,800

Aus den Werten von $\operatorname{tg} \nu$ rechnen sich die Konstanten in den Formeln, die über dem Kopfe der zweiten Zahlentafeln stehen. Diese Formeln dienen zur Überführung der gedrehten Koordinaten $\xi \eta$ der Originalaufnahmen in jene $x y$, welche zu einer fast wagrechten Bildebene gehören. Mit den letzteren Koordinaten werden nun die für die Berechnung der Nadirtriangulation der Lage nach erforderlichen vier Richtungssätze ermittelt und daraus das Netz der zwölf Punkte $a_1 a_2 a_3 a_4 i e b c h m o p$ ausgeglichen und berechnet. Der mittlere Winkelfehler betrug im Viereck $a_1 - a_4$ $0,8'$, die größte Winkelverbesserung erreichte eben $1'$. Wurde mit den ausgeglichenen Winkeln die Figur unter der Voraussetzung berechnet, daß den Punkten i und m die Koordinaten $X_i = -4000$ m $Y_i = -11000$ m $X_m = -4000$ m $Y_m = 11000$ m zukommen, so ergab sich folgende Koordinatentafel für die zwölf Punkte:

3. Zahlentafel.

	X	Y		X	Y		X	Y		X	Y
a_1	-4692	-4191	i	-4000	-11000	h	5000	10997	a_1	-4691	-4191
a_2	3499	-4281	e	2998	-12000	m	-4000	11000	a_2	3500	-4279
a_3	3859	3710	b	11000	-4004	o	-11999	-2998	a_3	3859	3712
a_4	3358,5	4141	c	12001	2997	p	-12000	5002	a_4	-3358	4142

Vergleicht man diese Koordinaten mit den Ausgangswerten, die der Berechnung der fingierten Bilder zu Grunde lagen und bei den Punkten $i e . . o p$ auf 1000 m abgerundete Zahlen, bei den Punkten $a_1 - a_4$ die in der letzten Reihe wiedergegebenen Werte waren, so findet man einen mittleren Koordinatenunterschied von $\pm 1,7$ m. Dieser ist selbst für den Maßstab 1:25000 noch bedeutungslos¹⁾.

¹⁾ Die Abweichungen von den Ausgangswerten beruhen in der Hauptsache darauf, daß von dem S. 190 empfohlenen Ersatz der ursprünglichen Bildmittelpunkte durch die ermittelten genäherten Nadire kein Gebrauch gemacht wurde. Es bleiben dann Fehlerreste in den Richtungssätzen, die davon herrühren, daß die allerdings sehr flach geneigten Verbindungslinien der triangulierten Geländepunkte nicht genau senkrecht, sondern unter einer bis zu 3° gegen das Lot geneigten Richtung auf die wagrechte Ebene projiziert wurden. Bei der Benützung der genäherten Nadire hätte die Abweichung der Projektionsrichtung von dem Lote nur 15–20 Min. betragen.

6. Abschnitt.

Fortsetzung des Beispiels. Höhentriangulation und Umbildung der Aufnahmen für die Auswertung.

Diese Koordinaten bzw. die bei ihrer Berechnung angefallenen Seiten des Dreiecksnetzes der bestimmten zwölf Punkte werden nun der Höhentriangulation zu Grunde gelegt. Man rechnet die Höhen der Punkte unterhalb des jeweiligen Luftstandpunktes nach der einfachen Formel $h = \frac{s}{\varrho} f$, wobei die ϱ aus den in der 2. Zahlentafel enthaltenen auf fast wagrechte Bildebene umgerechneten Bildkoordinaten $x y$ entnommen werden. Das Ergebnis ist in der 4. Zahlentafel zusammengestellt.

4. Zahlentafel.

Stand I

a_4	p	o	i	e	a_2	a_3
5436,6	5416,5	5433,9	5429,1	5426,0	5395,6	5434,9

Stand II

a_1	i	e	b	c	a_3	a_4
5518,1	5559,9	5554,2	5564,9	5546,4	5554,1	5559,0

Stand III

a_2	b	c	h	m	a_4	a_1
5626,3	5657,2	5629,5	5590,0	5659,6	5668,6	5638,7

Stand IV

a_3	h	m	p	o	a_1	a_2
5741,6	5687,0	5717,8	5689,3	5720,4	5693,2	5711,8

Es sollen nun die Höhen der vier Stände auf Ebenen bezogen werden, die der Bildebene des Standes II parallel sind. Der Stand II hat mit III folgende vier Punkte gemeinsam, deren Höhenunterschiede folgende sind:

	b	c	a_1	a_4
II	5564,9	5546,4	5518,1	5559,0
III	5657,2	5629,5	5638,7	5668,6
III - II	92,3	83,1	120,6	109,6

Schreibt man in den Plan die Höhenunterschiede III—II zu den vier Punkten, so kann man die Gerade II III dazwischen einschalten, welche dem Höhenunterschied 100 m entspricht und in Figur 4 eingetragen ist. Sie gibt die Richtung der Drehachse an, durch Drehung, um welche das System der Höhen unter dem

Stand II dem unter dem Stand III bis auf eine konstante Differenz nahe gebracht wird. Die Größe der nötigen Drehung errechnet sich aus dem Bruch, in dessen Zähler die Summe der mit positiven Vorzeichen genommenen Höhenunterschiede der vier Punkte gegen den Höhenunterschied 100 der Drehachse ($7,7 + 16,9 + 20,6 + 9,6 = 51,8$ m) steht, während der Nenner aus den senkrechten Abständen der vier Punkte von der Geraden II III ist ($3,80 + 8,10 + 10,00 + 4,60 = 26,50$ km). $\operatorname{tg} \nu = 51,8 \text{ m} : 26,50 \text{ km} = 2,06\text{‰}$. Mit diesem Wert von $\operatorname{tg} \nu$ und den Abständen der Punkte *i e* und a_3 werden nun für die Höhen dieser Punkte ab II die Unterschiede gegen die entsprechenden Höhen ab III zu 126,4, 114,8 und 97,3 m bestimmt und damit die sieben Höhen ab II auf Höhen ab III umgerechnet, wie sie in der ersten Zeile der 5. Zahlentafel verzeichnet stehen.

In ganz ähnlicher Weise werden mittels der gemeinsamen Punkte *h m a₁ a₂* die Höhen der sieben Punkte *h m p o a₁ a₂ a₃*, die zum Stand IV gehören, auf solche des Standes III übergeführt. Die Richtung der Drehachse ist durch die Gerade IV III gegeben, die der Höhendifferenz 70 m entspricht. $\operatorname{tg} \nu = (27,0 + 11,8 + 15,5 + 15,5 \text{ m}) : (6,30 + 2,68 + 4,10 + 4,10 \text{ km}) = 4,06\text{‰}$.

Die übergeführten Höhen sind in der zweiten Zeile der 5. Zahlentafel verzeichnet. Nimmt man zu ihnen die in der dritten Zeile angegebenen Höhen der sieben Punkte *b c h m a₁ a₂ a₄*, die unmittelbar von Stand III ab bestimmt sind, so hat man bereits für alle zwölf Punkte einheitliche Höhen, deren Mittel in der vierten Zeile der 5. Zahlentafel stehen.

Mit den Mittelwerten der Höhen der sieben Punkte *i e p o a₂ a₃ a₄* werden nun die Höhen derselben Punkte ab Stand I verglichen und letztere durch Drehung um die Gerade I III, die der Höhendifferenz 240 m entspricht, den Mittelhöhen ab III angepaßt. $\operatorname{tg} \nu = (17,2 + 3,0 + 7,3 + 22,1 + 9,9 + 22,1 + 8,0 \text{ m}) : (6,20 + 1,12 + 3,10 + 7,86 + 3,34 + 8,78 \text{ km}) = 2,65\text{‰}$. Die angepaßten Höhen stehen in der fünften Zeile der Zahlentafel.

Die sechste Zeile enthält die Mittel der Zeilen eins, zwei, drei und fünf, die als endgiltige Höhen der zwölf Punkte ab Stand III gelten können.

Nehmen wir nun an, daß von den vier Punkten *i b h* und *p* die wahren (von der Erdkrümmung befreiten) Höhen mit 60,

10, 100 und 120 m bekannt seien, so können schließlich alle zwölf Höhen auf dieses wahre System gebracht werden. Nach den Zahlen der sechsten Zeile der 5. Zahlentafel liegt der Ausgangspunkt der neuen Höhenzählung bei i 5745,9 m, bei b 5667,1 m, bei h 5690,7 m und bei p 5784 m unterhalb des Standes III. Diese Zahlen müßten einander gleich sein, wenn die Bildebene bei Stand III wagrecht gewesen wäre. Wieder werden die obigen Zahlen in den Triangulationsplan eingetragen und die Richtung der Drehachse mit der Höhe 5700 m eingeschaltet. Der Drehwinkel ergibt sich zu $\text{tg } \nu = 5,55/_{00}$, wobei sich herausstellt, daß das System der Höhen ab Stand III mit den gegebenen Höhen nur mehr auf Beträge zusammengestimmt werden kann, die bis 1,8 m ansteigen. Werden schließlich alle Höhen ab III auf wahre Höhen umgerechnet, so erhält man die Zahlen der siebenten Zeile.

5. Zahlentafel.

	a_1	a_2	a_3	a_4	i	e	b	c	h	m	p	o
1) aus II	5638,7	—	5651,4	5668,5	5686,3	5669,0	5657,0	5629,7	—	—	—	—
2) aus IV	5639,8	5625,2	5652,1	—	—	—	—	—	5591,1	5658,7	5663,8	5696,0
3) III	5638,7	5626,3	—	5668,6	—	—	5657,2	5629,5	5590,0	5659,6	—	—
4) Mittel aus 1) 2) 3)	5639,1	5625,7	5651,8	5668,6	5686,3	5669,0	5657,1	5629,6	5590,7	5659,1	5663,8	5696,0
5) aus I	—	5625,7	5651,7	5667,7	5685,5	5669,0	—	—	—	—	5664,7	5694,7
6) Mittel aus 1) 2) 3) 5)	5639,1	5625,7	5651,7	5668,3	5685,9	5669,0	5657,1	5629,6	5590,7	5659,1	5664,3	5695,3
7) wahre Höhen	42,3	28,4	79,3	90,4	109,2	79,8	48,3	68,9	61,3	8,8	100,4	118,2
8) Ab- weichung	+ 2,3	- 1,6	- 0,7	+ 0,4	- 0,8	- 1,2	- 1,7	- 1,1	+ 1,3	- 1,2	+ 0,4	- 1,8m

Ihre Abweichungen von den runden Ausgangshöhen, nach denen die Koordinaten der Bildpunkte gerechnet waren, sind in der achten Zeile verzeichnet und ergeben einen quadratischen Mittelwert von $\pm 1,5$ m.

Der nächste Schritt besteht in der Aufsuchung der Nadirpunkte auf den Originalbildern, die für die Entzerrung auf wagrechte Bildebenen notwendig sind. Überträgt man das XY-Koordinatensystem des Triangulationsplanes auf die Originalbilder, so sind die Koordinaten des jeweiligen genäherten Nadirpunktes, wie er aus der ersten Zurechtrichtung hervorgegangen ist, bei Bild I $x_1 = 1,618$ mm $y_1 = 1,840$ mm, bei Bild II $- 0,172 - 1,968$,

bei Bild III 0,993 — 1,907 und bei Bild IV — 1,295 — 1,250 mm. Bei den weiteren Drehungen, die zur Wagrechtstellung der Bildebenen nötig waren, entstanden Verschiebungen der genäherten Nadirpunkte senkrecht zur jeweiligen Drehachse um Beträge $f \operatorname{tg} \nu$. Auf diese Weise rechnen sich die Nadirkoordinaten der vier Bilder folgendermaßen:

6. Zahlentafel.

	Bild I		Bild II		Bild III		Bild IV	
	x	y	x	y	x	y	x	y
Genähert:	1,618	1,810	— 0,172	— 1,968	0,993	— 1,907	— 1,295	— 1,250 mm
Drehung III	— 0,107	— 0,079	— 0,090	— 0,051	—	—	— 0,203	— 0,008
Schlußdrehung	0,262	0,021	0,262	0,021	0,262	0,021	0,262	0,021
	1,773	1,782	0,000	— 1,998	1,255	— 1,886	— 1,236	— 1,237
soll:	1,768	1,768	0,000	— 2,000	1,246	— 1,873	— 1,237	— 1,237
Diff.:	0,005	0,014	0,000	0,002	0,009	— 0,013	0,001	0,000
$\operatorname{tg} \nu$	50,30/00 statt 50,0		45,50/00 statt 45,0		39,960/00 statt 40,0		34,960/00 statt 35,0	

Mit den am Schlusse errechneten Werten von $\operatorname{tg} \nu$ sind die Paralleltrapezseiten zu bestimmen, die zur Umbildung im Entzerrungsgerät nötig sind, damit die umgebildeten Aufnahmen für die Auswertung im Planigraphen taugen.

Es sei die Bildweite des Planigraphen $F' = 200$ mm und der Affinitätsfaktor $n = 10$, dann ergeben die Formeln auf S. 194 für ein auf die Originalaufnahme I gezeichnetes Quadrat von 2×115 mm Seitenlänge folgende Abmessungen des Trapezes: $g' = 40,33$ $g'' = 53,16$ $g_0 = 52,09$ $g_u = 41,26$ mm. Für die andern Bilder sind die Abweichungen des Trapezes von einem Quadrat noch geringer.

7. Abschnitt.

Systematische Ausgleichung der Höhentriangulation.

In dem Gang der Höhen- und Nadirrechnung, der bisher eingeschlagen wurde, steckt natürlich allerlei Willkür, die das Ergebnis beeinflußt. Statt die Aufnahmen I, II und IV auf III zu beziehen, hätte man auch anders verfahren können. Man entgeht solchen Einwänden, wenn man statt des schrittweisen Zusammenstimmens der von den einzelnen Standpunkten aus gerechneten Höhen eine Gesamtausgleichung vornimmt, bei der es allerdings nicht ohne Einführung von zwölf Unbekannten abgeht.

Es wird jedes der vier den einzelnen Standpunkten entsprechenden Höhenfelder um eine in der mittleren Geländeebene unterhalb des Standpunktes gelegene wagrechte Achse gedreht und gleichzeitig parallel gehoben, bis alle Bedingungen erfüllt sind, das heißt, daß die Höhen von $i b h p$ die vorgegebenen sind und die verschiedenen Höhen ein und desselben Geländepunktes einander gleich werden. Die Drehungen werden dabei in je zwei den Achsenrichtungen parallele Komponenten u und v zerlegt und die Parallelverschiebungen mit w bezeichnet. Für die vier Standpunkte gibt das zwölf Unbekannte. Die Zahl der zu erfüllenden Bedingungen ist 20, nämlich: je zwei der vier Höhen für die vier Festpunkte müssen vorgegebene Werte haben (acht Bedingungen), je zwei der Höhen der Punkte $e c m o$ müssen einander gleich werden (vier Bedingungen) und je drei der Höhen der Punkte $a_1 a_2 a_3 a_4$ müssen übereinstimmen (acht Bedingungen). Werden die Koordinaten der Punkte i usw. mit $X_i Y_i$, die der Punkte a_1 usw. mit $X_1 Y_1$ und die Höhen unter den jeweiligen Standpunkten mit H_{i1}, H_{11} usw. bezeichnet, so liefert die Bedingung, daß die Höhe von i nach den Drehungen und Verschiebungen den vorgegebenen Wert Z_i erhält, die Gleichung: $(X_i - X_1)u_1 + (Y_i - Y_1)v_1 - w_1 + Z_i + H_{i1} = 0$. Die Bedingung, daß die beiden von Stand I und Stand II aus gerechneten Höhen von e einander gleich werden, führt auf folgende Gleichung:

$$(X_e - X_1)u_1 + (Y_e - Y_1)v_1 - w_1 - (X_e - X_2)u_2 - (Y_e - Y_2)v_2 + w_2 + H_{e1} - H_{e2} = 0.$$

Endlich führt die Bedingung, daß die von den Ständen II, III und IV aus gerechneten Höhen von a_1 einander gleich werden, zu folgenden zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} -(X_1 - X_3)u_3 - (Y_1 - Y_3)v_3 + w_3 + (X_1 - X_4)u_4 + (Y_1 - Y_4)v_4 - w_4 + H_{14} - H_{13} &= 0 \\ (X_1 - X_2)u_2 + (Y_1 - Y_2)v_2 - w_2 - (X_1 - X_3)u_3 - (Y_1 - Y_3)v_3 + w_3 + H_{12} - H_{13} &= 0. \end{aligned}$$

Da man mit den zwölf Unbekannten die 20 Gleichungen nicht erfüllen kann, wählt man sie so, daß die Summe der Quadrate der verbleibenden Fehlerreste möglichst klein wird, was dann zu umstehendem System von 20 Fehlergleichungen führt, in die man vor der Bildung und Auflösung der Normalgleichungen passende Näherungswerte des Unbekannten, insbesondere für $w_1 w_2 w_3$ und w_4 , welche die Flughöhen der vier Standpunkte ergeben, einführen wird.

	u_1	v_1	w_1	u_2	v_2	w_2	u_3	v_3	w_3	u_4	v_4	w_4	$l = v$
i	$\left\{ \begin{array}{l} X_i - X_1 \\ Y_i - Y_1 \end{array} \right\}$	-1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$Z_i - H_{i1} = v_1$
b	$\left\{ \begin{array}{l} X_b - X_2 \\ Y_b - Y_2 \end{array} \right\}$	$-$	$X_i - X_2$	$Y_i - Y_2$	-1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$Z_i - H_{i2} = v_2$
b	$\left\{ \begin{array}{l} X_b - X_3 \\ Y_b - Y_3 \end{array} \right\}$	$-$	$X_b - X_3$	$Y_b - Y_3$	-1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$Z_b - H_{b2} = v_3$
b	$\left\{ \begin{array}{l} X_b - X_3 \\ Y_b - Y_3 \end{array} \right\}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$X_b - X_3$	$Y_b - Y_3$	-1	$-$	$-$	$-$	$Z_b - H_{b3} = v_4$
h	$\left\{ \begin{array}{l} X_h - X_3 \\ Y_h - Y_3 \end{array} \right\}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$X_h - X_3$	$Y_h - Y_3$	-1	$-$	$-$	$-$	$Z_h - H_{h3} = v_5$
h	$\left\{ \begin{array}{l} X_h - X_4 \\ Y_h - Y_4 \end{array} \right\}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$X_h - X_4$	$Y_h - Y_4$	-1	$Z_h - H_{h4} = v_6$
p	$\left\{ \begin{array}{l} X_p - X_1 \\ Y_p - Y_1 \end{array} \right\}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$X_p - X_4$	$Y_p - Y_4$	-1	$Z_p - H_{p4} = v_7$
p	$\left\{ \begin{array}{l} X_p - X_1 \\ Y_p - Y_1 \end{array} \right\}$	-1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$Z_p - H_{p1} = v_8$
e	$X_e - X_1$	$Y_e - Y_1$	-1	$X_2 - X_e$	$Y_2 - Y_e$	1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$H_{e1} - H_{e2} = v_9$
c	$-$	$-$	$-$	$X_c - X_2$	$Y_c - Y_2$	-1	$X_3 - X_c$	$Y_3 - Y_c$	1	$-$	$-$	$-$	$H_{c2} - H_{c3} = v_{10}$
m	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$X_m - X_3$	$Y_m - Y_3$	-1	$X_4 - X_m$	$Y_4 - Y_m$	1	$H_{m3} - H_{m4} = v_{11}$
o	$X_1 - X_0$	$Y_1 - Y_0$	1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$X_0 - X_4$	$Y_0 - Y_4$	-1	$H_{o4} - H_{o1} = v_{12}$
a_1	$\left\{ \begin{array}{l} X_1 - X_3 \\ Y_1 - Y_3 \end{array} \right\}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$X_3 - X_1$	$Y_3 - Y_1$	1	$X_1 - X_4$	$Y_1 - Y_4$	-1	$H_{14} - H_{13} = v_{13}$
a_2	$\left\{ \begin{array}{l} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \end{array} \right\}$	$-$	$-$	$X_1 - X_2$	$Y_1 - Y_2$	-1	$X_3 - X_1$	$Y_3 - Y_1$	1	$-$	$-$	$-$	$H_{12} - H_{13} = v_{14}$
a_3	$\left\{ \begin{array}{l} X_3 - X_1 \\ Y_3 - Y_1 \end{array} \right\}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$X_4 - X_2$	$Y_4 - Y_2$	1	$H_{24} - H_{23} = v_{15}$
a_3	$\left\{ \begin{array}{l} X_3 - X_1 \\ Y_3 - Y_1 \end{array} \right\}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$X_2 - X_3$	$Y_2 - Y_3$	-1	$X_4 - X_2$	$Y_4 - Y_2$	1	$H_{23} - H_{24} = v_{16}$
a_3	$\left\{ \begin{array}{l} X_3 - X_1 \\ Y_3 - Y_1 \end{array} \right\}$	1	$X_3 - X_2$	$Y_3 - Y_2$	-1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$H_{32} - H_{31} = v_{17}$
a_4	$\left\{ \begin{array}{l} X_4 - X_1 \\ Y_4 - Y_1 \end{array} \right\}$	$-$	$-$	$X_2 - X_4$	$Y_2 - Y_4$	1	$X_4 - X_3$	$Y_4 - Y_3$	-1	$X_3 - X_4$	$Y_3 - Y_4$	-1	$H_{34} - H_{31} = v_{18}$
a_4	$\left\{ \begin{array}{l} X_4 - X_1 \\ Y_4 - Y_1 \end{array} \right\}$	-1	$X_3 - X_2$	$Y_3 - Y_2$	-1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$H_{43} - H_{42} = v_{19}$
a_4	$\left\{ \begin{array}{l} X_4 - X_1 \\ Y_4 - Y_1 \end{array} \right\}$	-1	$X_3 - X_2$	$Y_3 - Y_2$	-1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$H_{41} - H_{42} = v_{20}$

Die Auflösung der zugehörigen Normalgleichungen liefert folgende Werte der Unbekannten:

$$\begin{array}{ll}
 u_1 = 3,13 \pm 0,085^{0/00} & u_2 = 3,41 \pm 0,087^{0/00} \\
 v_1 = -1,28 \pm 0,085 & v_2 = -0,73 \pm 0,087 \\
 w_1 = 5500,85 \pm 0,64 \text{ m} & w_2 = 5599,31 \pm 0,62 \text{ m} \\
 u_3 = 5,20 \pm 0,085^{0/00} & u_4 = 1,26 \pm 0,080^{0/00} \\
 v_3 = 0,44 \pm 0,085 & v_4 = 0,25 \pm 0,080 \\
 w_3 = 5700,71 \pm 0,62 \text{ m} & w_4 = 5798,74 \pm 0,62 \text{ m}
 \end{array}$$

Dabei bedeuten die w die Flughöhen der jeweiligen Standpunkte, die bei der Berechnung der Bildpunktkoordinaten als auf 100 m abgerundete Zahlen angenommen waren, und somit auf nahe 1 m genau aus der Ausgleichung hervorgehen. Bildet man aus den Drehkomponenten u und v die Gesamtdrehung und vergleicht man sie mit den Ergebnissen der graphischen Auswertung, so erhält man

	Stand I		Stand II		Stand III		Stand IV	
graph.:	3,17—1,56	3,50 ^{0/00}	3,44—0,60	3,49 ^{0/00}	5,24	0,42	5,26 ^{0/00}	1,18—0,26
ausgegl.:	3,13—1,28	3,38 ^{0/00}	3,41—0,73	3,49 ^{0/00}	5,20	0,44	5,22 ^{0/00}	1,26—0,25

Werden die ausgeglichenen Drehkomponenten mit der Bildweite $f = 50 \text{ mm}$ der Aufnahmekammer multipliziert, so ergeben sich die Verschiebungen und Endlagen der Nadirpunkte gegenüber der ersten Näherung wie folgt:

	Bild I		Bild II		Bild III		Bild IV	
	x	y	x	y	x	y	x	y
Genähert	1,618	1,840	-0,172	-1,968	0,993	-1,907	-1,295	-1,250 mm
korrigiert	0,156	-0,064	0,171	-0,036	0,260	0,022	0,063	0,013
Endlage	1,774	1,776	-0,001	-2,004	1,253	-1,885	-1,232	-1,237
soll	1,768	1,768	0,000	-2,000	1,246	-1,873	-1,237	-1,237

Die nach der Ausgleichung übrigbleibenden v haben nachstehende Werte:

$$\begin{array}{llllll}
 v_1 = 0,8, & v_2 = -0,1, & v_3 = 0,3, & v_4 = 1,0, & v_5 = -1,6, \\
 v_6 = 0,5, & v_7 = 1,0, & v_8 = -0,1, & v_9 = 0,4, & v_{10} = -0,1, \\
 v_{11} = 1,1, & v_{12} = -0,3, & v_{13} = 0,6, & v_{14} = 0,8, & v_{15} = 0,9, \\
 v_{16} = 0,6, & v_{17} = 0,5, & v_{18} = -1,2, & v_{19} = 0,8, & v_{20} = -0,4 \text{ m}
 \end{array}$$

Werden die Höhen der Zahlentafel 4 mittels der ausgeglichenen u und v Werte umgerechnet und von den jeweiligen w Werten ab-

gezogen, so ergeben sich folgende Höhen der Geländepunkte aus den einzelnen Aufnahmen.

7. Zahlentafel.

a_1	a_2	a_3	a_4	i	e	l	c	h	m	o	p	
—	79,4	49,1	70,7	60,7	40,5	—	—	—	—	91,4	119,2	m ab Stand I
109,3	—	49,9	69,9	60,0	41,6	9,1	29,2	—	—	—	—	ab Stand II
109,8	79,8	—	69,4	—	—	9,9	29,3	101,6	78,8	—	—	ab Stand III
109,3	80,3	48,1	—	—	—	—	—	99,5	80,0	91,1	120,2	ab Stand IV
109,5	79,8	49,0	70,0	60,3	41,0	9,5	29,3	100,5	79,4	91,2	119,7	Mittel
-0,5	-0,2	-1,0	0,0	0,3	1,0	-0,5	-0,7	0,5	-0,6	1,2	-0,3	m Abweichung

Die Abweichungen in der letzten Zeile beziehen sich auf die Ausgangshöhen, aus denen die Bilder berechnet wurden, welche hiernach auf etwa 1 m genau aus den ausgeglichenen Werten hervorgehen.

Zur Beantwortung der naheliegenden Frage, inwieweit sich die mehr systematische Ausgleichung gegenüber der schrittweisen verlohnt, sei erwähnt, daß die Aufstellung der 20 Fehlergleichungen und die Berechnung und Auflösung der zwölf Normalgleichungen 32 Arbeitsstunden eines geübten Rechners in Anspruch nahm, während zur schrittweisen Bestimmung der Höhen der vierte Teil dieser Zeit ausreichte. Die Bestimmung der 66 Gewichtskoeffizienten und der mittleren Fehler der Unbekannten erforderte freilich noch weitere 45 Rechenstunden, aber, wie gerade das Beispiel zeigt, ist diese nicht in jedem Fall nötig, da bei der annähernd symmetrischen Anordnung der Flugaufnahmen die mittleren Fehler der acht Drehkomponenten u v und die der vier Flughöhen w praktisch gleich groß ausfallen und mit genügender Sicherheit aus der Summe der Fehlerquadratreste zu schätzen sind. So kann die rein rechnerische Ausgleichung unter Umständen der halbgraphischen vorzuziehen sein.

Zum Schlusse seien noch einige Einwände gegen das vorgetragene System der Aufnahmen gewürdigt. Der Umstand, daß dabei alles Gelände vierfach mit Aufnahmen überdeckt wird, könnte leicht als Überfluß erscheinen. In der Tat würde sich eine ausreichende Lagentriangulation schon mit einer Anordnung erzielen lassen, bei der jede Aufnahme die Nadire von nur vier Nachbaraufnahmen enthält und man würde dabei die doppelte

Fläche mit der gleichen Zahl von Aufnahmen decken können. Es wird aber die zugehörige Höhentriangulation ganz wesentlich unsicherer, sodaß man viel mehr Punkte einzubeziehen hätte, um die richtigen Nadire ebenso genau zu bekommen. Der Umstand, daß bei der reichlichen Überdeckung jeder Geländeteil aus mehreren (bis zu sechs) Paaren von Aufnahmen ausgewertet werden kann, ist nur als Vorteil zu buchen; er ist ein Schutz gegen falsche stereoskopische Auffassung. Schwerer wiegt der Einwand, daß die hier mitgeteilten Berechnungen insofern zu optimistisch sind, als sie eine Meßgenauigkeit von 0,01 mm allenthalben voraussetzen. Für die Mitten der umgebildeten und entzerrten Aufnahmen mag diese Genauigkeit ohne weiteres zutreffen, aber für die Ränder, die bei der Überführung auf die einheitliche Perspektive in radialer Richtung auf den zwei- bis dreifachen Betrag auseinandergezerrt werden, erscheint sie zweifelhaft, ja unwahrscheinlich. Hier können natürlich nur Versuche entscheiden, die den Gültigkeitsbereich des hier vorggeführten Rechenexperimentes begrenzen müssen. Es genüge auf die grundsätzliche Einfachheit der rechnerischen Höhentriangulation und ihre Tragweite bei weitwinkligen Aufnahmen hingewiesen zu haben. Mit besonderem Dank erwähne ich schließlich noch die geschickte und sichere Beihilfe, die mir Herr Dipl. Ing. Karl Reicheneder bei der Durchführung der Zahlenrechnungen zu teil werden ließ.
