Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1928. Heft III

November-Dezembersitzung

München 1928

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über die Primidealzerlegung der Hauptideale eines Integritätsbereichs.

Von **Friedrich Karl Schmidt**, Erlangen.

Vorgelegt von G. Faber in der Sitzung am 10. November 1928.

In einer vor kurzem im Crelleschen Journal erschienenen Abhandlung[1]) stellt Herr H. Hasse die Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß in einem Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ jedes Element eindeutig als Potenzprodukt von Primelementen darstellbar ist. Anknüpfend an einen Gedanken Zermelos gibt Herr Hasse selbst in der gleichen Arbeit eine hinreichende Bedingung an, die jedoch nicht zugleich notwendig ist, durch die vielmehr die engere Klasse aller derjenigen Integritätsbereiche charakterisiert wird, in denen jedes Ideal Hauptideal ist. Bereits der Integritätsbereich der Polynome in mehr als einer Unbestimmten mit Koeffizienten aus einem Körper entzieht sich daher dieser hinreichenden Bedingung und die ursprüngliche Hassesche Frage bleibt offen.

In der vorliegenden Mitteilung beschäftige ich mich mit einer Erweiterung der Hasseschen Frage, die sich idealtheoretisch vollständig erledigen läßt. Die so gewonnenen Ergebnisse erfassen gleich die Gesamtheit aller arithmetisch bedeutsamen Integritätsbereiche und stellen daher im Gegensatz zu den Hasseschen Untersuchungen für die Integritätsbereiche mit eindeutiger Primelementzerlegung nur notwendige Bedingungen dar.

Die angedeutete Erweiterung der Hasseschen Fragestellung wird durch die arithmetische Theorie der algebraischen Größen

[1]) H. Hasse, Über eindeutige Zerlegung in Primelemente oder in Primhauptideale in Integritätsbereichen, Journ. f. d. r. u. a. Math. 159 (1928), S. 3—12.

nahegelegt. Dort ist ja nicht mehr jedes Element eindeutig als Potenzprodukt von Primelementen, wohl aber jedes Hauptideal als Potenzprodukt von Primidealen darstellbar, und diese Darstellung ist stets eindeutig, wie sich unmittelbar aus der Definition des Primideals ergibt. Ich stelle mir daher die Aufgabe, *notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufzusuchen, daß in einem Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ jedes Hauptideal einem Potenzprodukt von Primidealen gleich ist.* Die Klasse der Integritätsbereiche, deren Charakterisierung damit erstrebt wird, enthält sämtliche Integritätsbereiche mit eindeutiger Primelementzerlegung, denn bei Eindeutigkeit der Primelementzerlegung ist das aus einem Primelement abgeleitete Ideal stets Primideal. Sie umfaßt aber auch andererseits alle Integritätsbereiche, deren Teilbarkeitsverhältnisse mit denen der ganzen algebraischen Zahlen übereinstimmen, in denen also *jedes* Ideal einem Potenzprodukt von Primidealen gleich ist, und die E. Noether[1]) in ihrer Annalen-Arbeit untersucht hat.

Unter Heranziehung von Gedanken, die Herr W. Krull in die Idealtheorie eingeführt hat, gelange ich zu folgendem Ergebnis:

Satz. Damit in einem Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ jedes Hauptideal als Potenzprodukt von Primidealen darstellbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß

1) jede mit einem Hauptideal beginnende Idealquotientenkette im Endlichen abbricht,

2) $\mathfrak{J}$ ganz abgeschlossen ist[2]).

Dabei verstehe ich unter einer mit einem Hauptideal beginnenden Idealquotientenkette eine Reihe von Idealen

$$\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{a}_i, \ldots,$$

bei der $\mathfrak{a}_0$ Hauptideal, $\mathfrak{a}_i$ echter Teiler von $\mathfrak{a}_{i-1}$ und $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_{i-1} : \mathfrak{b}_i$ aus $\mathfrak{a}_{i-1}$ durch Quotientenbildung mit Hilfe eines geeigneten Ideals $\mathfrak{b}_i$ erzeugbar ist. Die Endlichkeitsbedingung 1) ist weit

[1]) E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Ann. 96 (1926), S. 26—61.

[2]) Zum Begriff des ganz abgeschlossenen Integritätsbereichs vergl. bei W. Krull, Zur Theorie der allgemeinen Zahlringe, Math. Ann. 99 (1928), S. 51—70, die Definition auf S. 60.

schwächer als der Noethersche Teilerkettensatz, der ja z. B. im Bereich der Polynome in unendlich vielen Unbestimmten nicht mehr gilt, während 1) dort erfüllt ist.

Die soeben skizzierten Ergebnisse, deren ausführliche Begründung an anderer Stelle gegeben wird, stellen einen Ausschnitt aus allgemeineren Betrachtungen dar. Dabei handelt es sich um die Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit der Hauptsätze der allgemeinen Idealtheorie in möglichst weitgehender Fassung. Von diesen Überlegungen, die an die entsprechenden Arbeiten von E. Noether[1]) und W. Krull[2]) anknüpfen, soll eine weitere Mitteilung berichten.

Erlangen, Mathemat. Seminar, Ende Oktober 1928.

---

[1]) Vergl. o. S. 286, Anm. 1.

[2]) Vergl. o. S. 286, Anm. 2.