

Eine

Grundaufgabe der Photogrammetrie

und
ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen.

Von
S. Finsterwalder.

(Mit 2 Tafeln.)

Grundriss der Photogrammetrie

und
ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen.

Von
S. Finsterlin.

(Mit 2 Tafeln.)

Verlag von Julius Springer, Berlin.

Die Entwicklung der Photogrammetrie hat sich bisher im engsten Anschluss an die Methoden der Geodäsie vollzogen. Zumeist werden die Standpunkte, von welchen aus die Photographien aufgenommen sind, geodätisch festgelegt. Die Photographien liefern dann Bündel von Visierstrahlen, deren Orientierung ebenfalls auf geodätischem Wege durch Anpassung an vorher eingemessene Richtungen erfolgt. Manchmal werden auch die Standpunkte aus den Photographien auf dem Wege des Rückwärtseinschneidens nach gegebenen Fixpunkten bestimmt und damit auch die Orientierung der aus den Photographien hervorgehenden Visierstrahlenbündel gewonnen. Die einzelnen auf mehreren Photographien dargestellten Objektpunkte werden alsdann auf dem Wege des Vorwärtseinschneidens von mindestens zwei photographischen Standpunkten aufgefunden, wobei sich eine Reihe von Kontrollen, die sogenannten Höhenkontrollen, von selbst einstellt. Bestimmt man nämlich in der üblichen Weise erst den Grundriss des Objektpunktes, so kann man mit Hilfe desselben aus jeder Photographie, die den Punkt enthält, einen Wert für die Höhe des Punktes finden und aus der Uebereinstimmung der verschiedenen Höhenzahlen auf die Richtigkeit der Konstruktion schliessen.

Solange die Bestimmung der Standpunkte und der Orientierung der Bilder als nahezu fehlerfrei angesehen werden kann, fallen etwaige Missstimmigkeiten in den Kontrollen der photogrammetrischen Arbeit zur Last, wenn aber diese Voraussetzung nicht mehr zutrifft, kann man sich die Aufgabe stellen durch Verbesserung der angenommenen Standpunkte und Orientierungen ein möglichst günstiges Stimmen der Kontrollen herbeizuführen, ja man wird sich sogar die Frage vorlegen, ob denn die in beliebig grosser Anzahl zu bildenden Bedingungen der Höhenkontrollen nicht ausreichen, um unabhängig von jeder Kenntnis der Standpunkte und der Orientierung das Objekt und die Lage der Standpunkte gegenüber dem Objekt zu bestimmen. Wie sich im Nachfolgenden zeigen wird, ist die soeben gestellte Frage im Wesentlichen bejahend zu beantworten und die Durchführung der

Antwort schliesst die Lösung der in der Ueberschrift genannten Grundaufgabe der Photogrammetrie in sich. Um sie genauer zu begrenzen, setzen wir voraus, dass von den zu benützenden Bildern die innere Orientierung, das heisst die Lage des perspektivischen Zentrums gegenüber dem Bild (gegeben durch Bildweite und Hauptpunkt) bekannt sei. Wie ich schon vor Jahren gezeigt habe,¹⁾ reichen dann zwei solcher Bilder aus um die auf beiden zugleich dargestellten Teile des Objektes samt den dazu gehörigen Standpunkten bis auf den Masstab und die äussere Orientierung, worunter die Lage des Objektes im Raum und die Stellung zu den Himmelsrichtungen zu verstehen ist zu bestimmen.

Die Durchführung der Bestimmung geschieht mittelst der von Herrn Guido Hauck eingeführten „gegnerischen Kernpunkte“. Es sind dies die Bilder des einen Standpunktes vom andern aus gesehen. Es be-

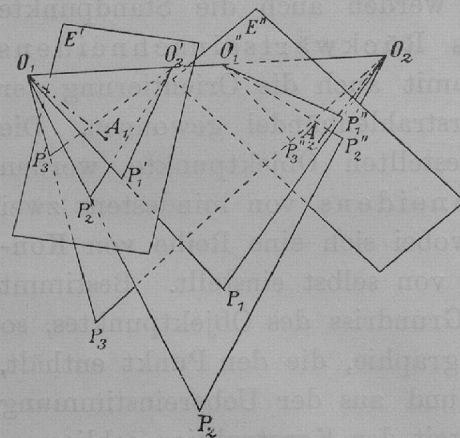


Fig. 1.

zeichnen (Fig. 1) O_1 und O_2 die beiden Standpunkte, E' und E'' die zugehörigen Bildebenen in derselben Lage wie bei der Aufnahme. Jeder Punkt P des Objektes bildet sich dann von O_1 und O_2 aus in die Bildpunkte P' auf E' und P'' auf E'' ab. Bezeichnen wir nun das Bild von O_2 auf der Ebene E' mit O_2' und das von O_1 auf der Ebene E'' mit O_1'' , so sind O_2' und O_1'' die gegnerischen Kernpunkte. Sie ergeben sich als Schnittpunkte der Verbindungslinie (Standlinie) der beiden Standpunkte O_1, O_2 mit den Bildebenen E' und E'' . Legt man durch die Standlinie $O_1 O_2$ und eine Reihe von Objektpunkten $P_1, P_2, P_3, \dots$ Ebenen, so bilden diese das Kernebenenbüschel. Dieses schneidet die Ebenen E' und E'' in Kernstrahlenbüscheln, welche die Kernpunkte O_2' bzw. O_1'' als Mittelpunkte haben und deren entsprechende Strahlen nach den Bildpunkten $P_1', P_2', P_3', \dots$ bzw. $P_1'', P_2'', P_3'', \dots$ laufen. Kernebenenbüschel und Kernstrahlenbüschel liegen perspektiv und sind daher projektiv aufeinander bezogen. Denkt man sich jeden Standpunkt mit seiner Bildebene starr verbunden und die Bildebenen aus ihrem Zusammenhange gelöst, so kann man, sobald die Kernpunkte bekannt sind, in jeder Bildebene

¹⁾ Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 6. Bd, S. 15.

das Kernstrahlenbündel und durch Verbindung mit dem perspektivischen Zentrum auch das zugehörige Kernebenenbüschel finden. Erstere müssen projektiv, letztere kongruent sein und die Rekonstruktion des Objektes geschieht dadurch, dass zunächst die kongruenten Kernebenenbüschel zur Deckung gebracht werden. In einer Kernebene desselben liegen dann nicht nur entsprechende Kernstrahlen, wie $O_2'P'$ und $O_1''P''$, sondern auch die Visierstrahlen O_1P' und O_2P'' , die sich im Objektpunkte P schneiden. So kann das Objekt mittels der Kernpunkte Punkt für Punkt wiedergefunden werden und hiebei bleibt nur die Länge der Standlinie O_1O_2 willkürlich, die den Masstab der Rekonstruktion bestimmt.

Die nachfolgende Untersuchung gliedert sich demnach in vier Abschnitte. Im ersten werden die Methoden zur Auffindung der Kernpunkte besprochen, im zweiten wird die Wiederherstellung des Objektes sammt den beiden Standpunkten bis auf den Masstab und die äussere Orientierung gelehrt und im dritten Abschnitte wird gezeigt, wie sich das soweit gefundene Objekt durch Wahl eines geeigneten Masstabes und Drehung im Raum den zur Orientierung gemachten Angaben über das Original möglichst gut anpassen lässt. Wesentliche geometrische Ergebnisse der beiden ersten Abschnitte sind bereits in meinen früheren Veröffentlichungen über Photogrammetrie enthalten und wenn die Photogrammetrie gleich andern geometrischen Lehrgebäuden sich damit begnügen würde, einen Weg anzugeben, der nach einer endlichen Zahl ausführbarer Vornahmen zum Ziele führt, so könnte Vieles in den folgenden Darlegungen unterbleiben. Weil aber die wirkliche Durchführung der Konstruktion das zu erstrebende Ziel der Photogrammetrie ist, muss auch das Mass der aufzuwendenden äusseren Mittel und die zu erreichende Genauigkeit erkannt werden. Zu dieser Erkenntnis soll die nachfolgende Untersuchung an der Hand eines praktischen Beispiels, dem der vierte Abschnitt gewidmet ist, beitragen. Obwohl die zu besprechenden Methoden auch für die gewöhnliche Terrain- und Architekturaufnahme von Bedeutung sind, habe ich als Beispiel eine Ballonaufnahme gewählt, weil hier die grosse Schwierigkeit der unmittelbaren Bestimmung der Standpunkte auf der Hand liegt und somit die Berechtigung einer mittelbaren Bestimmung derselben ohne weiteres einleuchtet. Zudem treten hiebei noch allerlei Besonderheiten auf, welche eine nähere Besprechung notwendig machen.

Zur Verwendung kamen drei Photographien,¹⁾ welche die Umgebung des Marktes Gars am Inn aus ungefähr 2000 m Höhe gesehen darstellen, und von

¹⁾ Vergleiche Tafel I, welche zwei davon in Lichtdruck reproduciert darstellt.

Herrn Privatdocent Dr. R. Emden gelegentlich einer Fahrt des Münchener Vereins für Luftschiffahrt im Vereinsballon „Sohncke“ aufgenommen wurden. Zur Erbauung dieses Ballons hat die k. b. Akademie der Wissenschaften reiche Mittel gespendet, wofür ihr auch an dieser Stelle bestens gedankt sei. Der zu den Aufnahmen verwendete Apparat ist ebenfalls Eigentum des genannten Vereins und eigens für photogrammetrische Zwecke gebaut. Er besteht aus einer sehr stabilen Holzkamera, an deren Rückwand ein genau rechteckiger Metallrahmen von den Seitenlängen 102,62 und 141,75 mm angebracht ist. Seine Ebene ist vom hinteren Knotenpunkte des Objectives 149,0 mm entfernt und das Lot von diesem Punkte auf die Ebene des Rahmens trifft bis auf $\pm 0,1$ mm genau in den Mittelpunkt des Rahmens. Die photographischen Platten im Format 120×160 mm sind in einer Wechselkassette untergebracht und ihre Ebene liegt beim normalen Funktionieren der Kassette während der Aufnahme in der „Bildweite“ von 151,57 mm hinter dem genannten Knotenpunkt und ist parallel zur Rahmenebene. Der Rahmen bildet sich auf den Platten in der Grösse $104,4 \times 144,2$ mm ab.¹⁾ Kleine Störungen im Gange der Wechselvorrichtung, welche die Bildweite und den Parallelismus von Rahmen- und Plattenebene beeinflussen, verraten sich in der Grösse und Form des Rahmenbildes und können aus ihm leicht bestimmt werden.²⁾ Die Wechselkassette fasst 12 Platten. Es wurden „Perorto“-Platten aus der Fabrik von O. Perutz hier verwendet. Dieselben vereinigen Empfindlichkeit und richtige Wiedergabe der Farben in zufriedenstellender Weise. Die Entwicklung besorgte in dankenswerter Weise Herr Dr. Emden. Als Objectiv diente ein „Orthostigmat“ von Steinheil, ein Geschenk des Herrn Dr. Rudolf Steinheil an den Münchener Verein für Luftschiffahrt. Innerhalb eines Bildfeldes von 60° überschreiten die Abweichungen dieser Linse von der perspektivischen Zeichnung kaum den Betrag von einer Bogenminute. Das Objectiv wurde auf $\frac{1}{12}$ der Brennweite abgeblendet und zeichnete das Rahmenformat mit durchaus genügender Schärfe. Bei der grossen Oeffnung, die zur Erzeugung eines kontrastreichen Negatives bei kurzer Belichtung unerlässlich ist, tritt eine allen Weitwinkelaufnahmen gemeinsame Vignettierung, die in einer Unterbelichtung der Ränder bei normaler Belichtung der Mitte des Negatives besteht, auf, welcher beim Kopieren durch Vorsetzen einer entsprechend abgestuften durchscheinenden Maske entgegengewirkt werden muss. Der Momentverschluss System „Bruns“ liegt dicht hinter dem Objectiv und besitzt nach eingehenden Untersuchungen

¹⁾ Nach diesen Massen sind die Dimensionen der Lichtdrucke auf Tafel I zu beurteilen.

²⁾ Vergleiche: Finsterwalder. Ueber die Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. Sitzungsbericht der math.-phys. Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften, 30. Bd. (1900), S. 160.

des Herrn K. v. Bassus¹⁾ im ungebremsten Zustande eine Belichtungsdauer von 0,02 Sekunden. Sie darf nicht wesentlich überschritten werden, ohne dass eine Unschärfe der erzielten Bilder zu gewärtigen ist. Die 3 Platten zeigen sehr nahe die normale Grösse der Rahmenbilder, so dass die richtige Stellung im Moment der Aufnahme gesichert ist. Leider sind sie nicht besonders eben, was sich u. a. auch in der Krümmung der Rahmenbilder um 0,1—0,15 mm kenntlich macht. Die Messung der Punktkoordinaten geschah auf den Negativen mittels eines in $\frac{1}{2}$ Millimeter geteilten Metallmasstabes, dessen Nullstrich an den zu messenden Punkt angelegt wurde, während am Rahmenbilde die Ablesung mittels der Lupe geschah. Das Mittel aus zwei, an den beiderseitigen parallelen Rahmenbildern gewonnenen Messungsergebnissen wurde in die Rechnung eingeführt; es dürfte bis auf annähernd 0,05 mm genau sein. Den graphischen Konstruktionen wurden ähnlich gewonnene Abmessungen auf Papierpositiven, die in Bezug auf Papiereingang korrigiert waren, zu grunde gelegt.

1. Die Bestimmung der Kernpunkte.

Die Auffindung der Kernpunkte begegnet einer Reihe von theoretischen und praktischen Schwierigkeiten, die es erklärlich machen, dass die hier zu behandelnde Grundaufgabe der Photogrammetrie bisher so wenig Beachtung fand. Es zeigt sich, dass eine in allen Fällen praktisch durchführbare Methode zur Ermittlung der Kernpunkte noch nicht gefunden ist und man sich zur Zeit mit Näherungsmethoden, die in wichtigen Fällen wirklich zum Ziele führen, begnügen muss. Wir unterscheiden zwei Gruppen von Bestimmungsweisen, je nachdem man von der inneren Orientierung der benützten Photographien absieht oder nicht. Die ersteren sind theoretisch ausgebildeter, aber praktisch unvollkommen, bei letzteren ist es umgekehrt.

Die Aufsuchung der Kernpunkte ohne Zuhilfenahme der inneren Orientierung beruht auf dem Satze, dass die Kernstrahlenbüschel in beiden Bildebenen projektiv sind.²⁾ Zu ihrer Konstruktion bedarf man der Kenntnis der Bilder von sieben Objektpunkten $P_1, P_2, \dots P_7$. Die Aufgabe, zwei Punkte O_2' und O_1'' so zu finden, dass O_2' ($P_1', P_2', \dots P_7'$) projektiv zu O_1'' ($P_1'', P_2'', \dots P_7''$) ist, wurde ursprünglich von Chasles gestellt. Sie fand

¹⁾ Prüfung von photographischen Momentverschlüssen. Illustr. aéron. Mittel., Bd. 6, 1902, S. 76. Dort ist der Apparat mit C V bezeichnet.

²⁾ Vergl. S. 226.

durch O. Hesse¹⁾ eine analytische und durch R. Sturm²⁾ eine geometrische Lösung. Es gibt drei solcher Punktpaare. Beide Lösungen sind praktisch kaum brauchbar, denn die Bildung der in Form einer dreireihigen Determinante erscheinenden Gleichung 3. Grades bei O. Hesse setzt die Ausrechnung von 14 siebenreihigen Determinanten voraus, während R. Sturm die gesuchten Punkte als Schnittpunkte zweier Kurven 3. Ordnung mit sechs bestimmten Schnittpunkten findet, welche letztere aber erst durch die sechsmalige Wiederholung der Konstruktion des vierten Schnittpunktes zweier Kegelschnitte mit drei bekannten Schnittpunkten ermittelt werden müssen. In dem wichtigen Falle, dass die Objektpunkte alle genau oder nahezu in einer Ebene liegen, ist die Bestimmung auf diesem Wege unmöglich, da dann irgend zwei entsprechende Bildpunkte die definierende Eigenschaft der Kernpunkte haben. Ist einer der beiden Kernpunkte bekannt, so ist der zweite mittels fünf Bildpunktpaaren jederzeit linear bestimmt. Die Konstruktion der Kernpunkte ohne Hinzuziehung der inneren Orientierung wird dann sehr einfach, wenn die Bilder von vier Objektpunkten, P_1, P_2, P_3, P_4 , die in einer Ebene liegen und noch von zwei weiteren, P_5, P_6 , bekannt sind.³⁾ Sucht man nämlich in der Ebene E'' einen Punkt Q_5'' , so dass die Figur $P_1'', P_2'', P_3'', P_4'', Q_5''$ projektiv zu $P_1' P_2' P_3' P_4' P_5'$ ist, so geht die Verbindungslinie $P_5'' Q_5''$ durch den Kernpunkt O_1'' , sie ist nämlich das Bild von $O_1 P_5$. Gleichermassen ergibt sich in $P_6'' Q_6''$ ein zweiter Ort für O_1'' . Auf ähnlichem Wege findet man O_2' . Leider sind nur selten die Bedingungen für eine zweckentsprechende Anwendung dieses Verfahrens gegeben.

Werden zur Aufsuchung der Kernpunkte die Elemente der inneren Orientierung (Hauptpunkt und Bildweite) benützt, so legt man folgende Definition der Kernpunkte zu grunde: Die Ebenenbüschel, welche die Verbindungslinien $O_1 O_2'$ bzw. $O_2 O_1''$ der Kernpunkte mit den zugehörigen perspektivischen Zentren als Axen haben und deren entsprechende Ebenen nach Bildern $P_1', P_2' \dots$ bzw. $P_1'', P_2'' \dots$ derselben Punkte laufen, sind kongruent. Zur Festlegung der Kernpunkte genügt hier bereits die Kenntnis der Bilder von fünf Punkten. Es schliessen nämlich die zugehörigen Ebenen in den Büscheln vier unabhängige Winkel ein, deren Gleichsetzung in beiden Büscheln gerade so viel Gleichungen liefert als Koordinaten zur Festlegung

¹⁾ Die kubische Gleichung, von welcher die Lösung eines Problems der Homographie von M. Chasles abhängt. J. f. reine u. angew. Math., Bd. 62, S. 188, Ges. Werke, S. 507.

²⁾ Ueber das Problem der Projektivität. Math. Annalen, Bd. 1, S. 533.

³⁾ Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. Jahresbericht des Deutschen Math. Ver., Bd. 6, S. 10.

der Kernpunkte in ihren Bildebenen nötig sind. Die sich auf diesem Wege ergebenden vier Gleichungen sind sehr verwickelt, sie steigen in jeder der Koordinaten bis zum vierten, insgesamt bis zum achten Grade an.¹⁾ Hingegen wird nun die Bestimmung der Kernpunkte nicht mehr illusorisch, wenn das Objekt eben ist. Es sind nämlich in diesem Falle die beiden Strahlenbündel, die von den Centren der Photographien nach den entsprechenden Bildpunkten gehen, projektiv und die Aufsuchung der Kernpunkte kommt darauf hinaus, in zwei projektiven Strahlenbündeln die entsprechenden kongruenten Ebenenbündel (deren Axen eben nach den Kernpunkten laufen) zu ermitteln. Zu diesem Zwecke bringt man die Strahlenbündel in perspektive Lage, wozu man die Kenntnis von 4 Paaren entsprechender Strahlen d. h. von vier Paaren entsprechender Bildpunkte braucht. Die Lösung dieser Aufgabe gibt H. Schröter.²⁾ Sie führt wiederum auf eine Gleichung dritten Grades, durch welche die entsprechenden Tripel unter einander senkrechter Strahlen und Ebenen beider Bündel definiert werden. In entsprechenden Ebenen jener Tripel liegen die gesuchten Axen. Ihre Konstruktion oder Berechnung ist noch überaus mühsam und entspricht gar nicht den praktischen Bedürfnissen.

Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse bei einem nichtebenen Objekt, von dem aber bekannt ist, dass vier seiner Punkte in einer Ebene liegen. Selbst die Aufgabe, den Kernpunkt der zweiten Ebene zu finden, wenn jener der ersten Ebene bekannt ist, lässt hier wohl keine direkte Lösung zu. Es genügt zwar die Kenntnis dreier entsprechender Punktepaare, aber die Auffindung des zweiten Kernpunktes führt dann auf das, wie es scheint, bisher noch nicht gelöste Pothenot'sche Problem auf der Kugel. Denkt man sich nämlich um die beiden perspektivischen Zentra Kugeln vom Radius Eins gelegt und schneidet man sie mit den Strahlen nach den Bild- und Kernpunkten, so sind die sphärischen Winkel einander gleich, unter denen

¹⁾ Dass die Aufsuchung der Kernpunkte auf diesem Wege nicht minder schwierig, wie auf dem früheren ist, lässt auch folgende Betrachtung erkennen. Denkt man sich die beiden aus fünf Ebenen bestehenden kongruenten Bündel so zur Deckung gebracht, dass auch die perspektivischen Centren sich decken und hierauf die ganze Figur durch eine um den gemeinsamen Punkt der letzteren geschlagene Kugel geschnitten, so entstehen auf der Oberfläche derselben zwei perspektivische Kugelfünfecke, für welche die geodätischen Verbindungslinien entsprechender Punkte sich schneiden. Umgekehrt kommt auch die Aufsuchung der Kernpunkte darauf hinaus, zwei sphärische Fünfecke auf der Kugel perspektivisch zu legen. Lässt man die Kugel in die Ebene ausarten, so haben wir den Specialfall, zwei ebene Fünfecke in der Ebene perspektivisch zu legen. Diese Aufgabe kommt aber auf die Chasles'sche (S. 229 u. 230) zurück, wenn man die beiden Fünfecke durch Hinzunahme der imaginären Kreispunkte zu Siebenecken ergänzt und die projektive Definition der Winkel einführt. Es ist hiernach die Bestimmung der Kernpunkte aus fünf Punktepaaren mit Hinzuziehung der inneren Orientierungselemente theoretisch sicher nicht einfacher, als jene aus sieben Punktepaaren ohne die letztere.

²⁾ Theorie der Oberflächen 2. Ordnung. Leipzig 1880, S. 377 u. 384.

von den Schnittpunkten der Kernstrahlen aus die entsprechenden Seiten der sphärischen Dreiecke, die von den Schnittpunkten der Bildstrahlen gebildet werden, erscheinen. Diese Winkel können aus der einen sphärischen Figur, in welcher der Kernstrahl bekannt ist, gerechnet werden, in der zweiten Figur wird dann der unbekannte Kernstrahl mit Hilfe der gerechneten Winkel nach dem Pothenot'schen Problem auf der Kugel gefunden.

So bleibt denn zur Auffindung der Kernpunkte unter Benutzung der inneren Orientierungselemente, die man im Interesse der Genauigkeit nicht entraten kann, nur der Ausweg übrig, das Vorhandensein gewisser Lagenbeziehungen am Objekte und äussere Orientierungselemente als bekannt vorzusetzen. Es soll mit Rücksicht auf die spätere Verwendung angenommen werden, man kenne die Orientierung des photographischen Apparates gegen die Vertikale (also den Neigungswinkel der optischen Axe desselben gegen die Lotrichtung und die Lage der Hauptvertikalen, nämlich des Schnittes der Vertikalebene durch die optische Axe mit der Bildebene) und wisse, dass eine auf beiden Bildern wiedergegebene Strecke PQ horizontal ist. Aus diesen Angaben lässt sich die Lage der beiden Aufnahmepunkte O_1 und O_2 gegenüber der willkürlich in einer Horizontalebene angenommenen Basis PQ ermitteln und daraus die Lage der Kernpunkte O_2 und O_1'' in den Bildebenen finden. In den Figuren 2^a — 2^c ist die Konstruktion für einen bestimmten Fall durchgeführt. Bezüglich der Bezeichnung ist zu bemerken, dass die Grundrisse der mit grossen Buchstaben bezeichneten Punkte den Index 1, die Aufrisse den Index 2 tragen. So ist z. B. O_{21} der Grundriss und O_{22} der Aufriss des Punktes O_2 .

Es sei (Fig. 2^a) E' die erste Bildebene mit dem Hauptpunkte A_1 ; N' sei der Nadir des Standpunktes oder der Fluchtpunkt der Vertikalen, der sich entweder direkt entnehmen oder aus der äusseren Orientierung der Aufnahme gegen die Vertikale leicht ermitteln lässt.¹⁾ $N'A_1$ ist die Hauptvertikale, P' und Q' seien die Bilder der Basisenden PQ . Die rechtwinkligen Koordinaten von P' und Q' auf Hauptvertikale und Senkrechte durch den Hauptpunkt hiez zu bezogen seien $x'_1 y'_1, x'_2 y'_2$. Fig. 2^b gibt den kombinierten Grund- auf Aufriss der Bildebene und des Visierstrahlenbündels, wobei die Aufrissebene durch die Hauptvertikale angenommen ist. Man zeichnet erst das rechtwinklige Dreieck $O_1 A_{12} N_2'$ aus der Bildweite $O_1 A_{12}'$ und der aus Fig. 2^a entnommenen

¹⁾ Als Mittel hiez dienen bei Ballonaufnahmen Lotleinen, die vom Aequator des Ballon herabhängen und sich auf den Photographien mit abbilden. Der Schnitt der Bilder der Lotlinien ist der Nadir. Vergl. S. Finsterwalder: Ortsbestimmungen im Ballon. Illust. aeronaut. Mitteilungen. Bd. 3, 1899, S. 31. Auf anderem Wege hat Herr K. v. Bassus denselben Zweck zu erreichen gesucht, wobei die Störung durch den Wind fortfällt. Ebenda Bd. 4, 1900, S. 83.

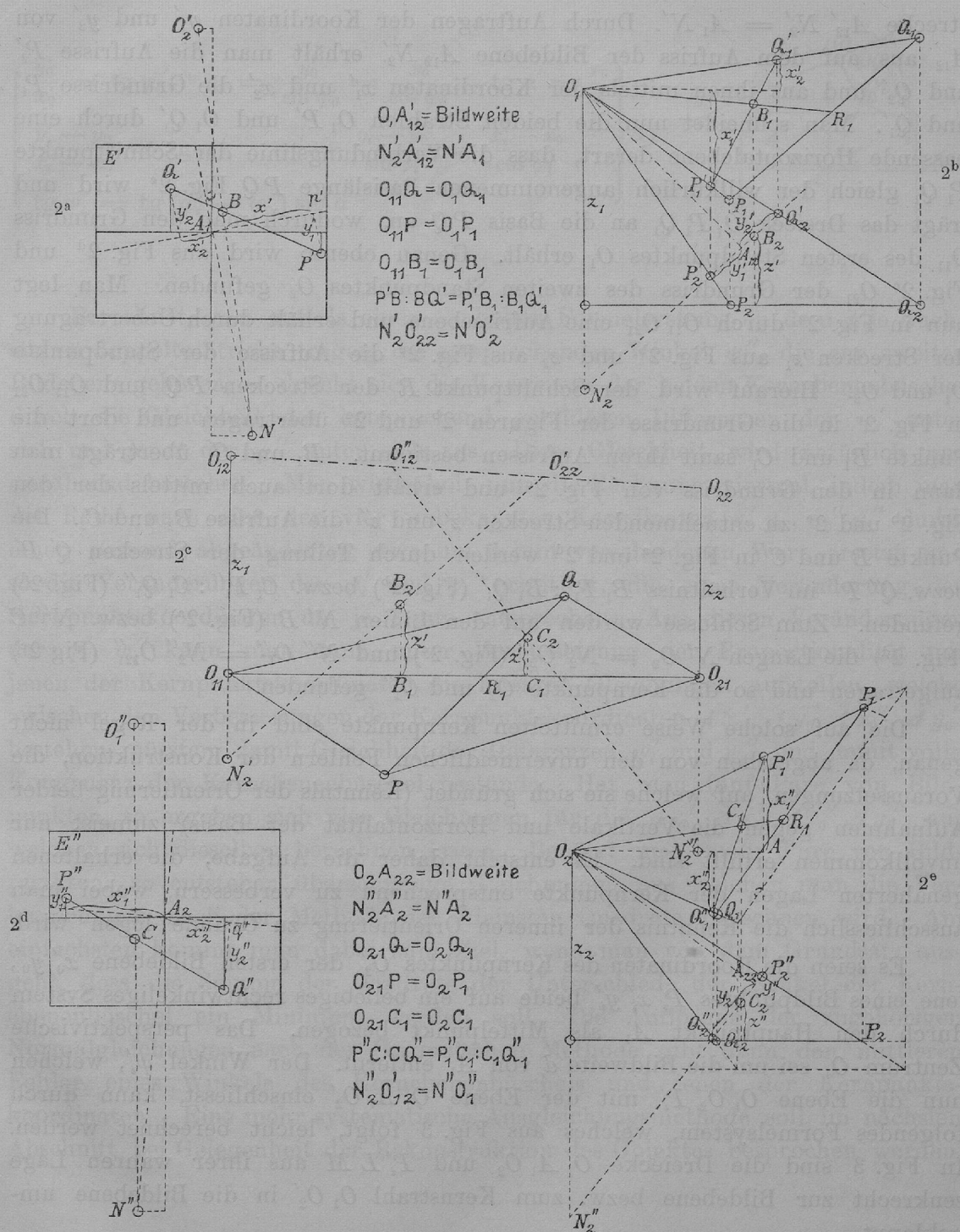


Fig. 2.

Strecke $A_{12}' N_2' = A_1 N'$. Durch Auftragen der Koordinaten y_1' und y_2' von A_{12} aus auf dem Aufriss der Bildebene $A_{12} N_2'$ erhält man die Aufrisse P_2' und Q_2' und aus ihnen mittels der Koordinaten x_1' und x_2' die Grundrisse P_1' und Q_1' . Man schneidet nun die beiden Strahlen $O_1 P'$ und $O_1 Q'$ durch eine passende Horizontalebene derart, dass die Verbindungslinie der Schnittpunkte $P_1 Q_1$ gleich der willkürlich angenommenen Basislänge PQ Fig. 2^c wird und trägt das Dreieck $O_1 P_1 Q_1$ an die Basis PQ an, wodurch man den Grundriss O_{11} des ersten Standpunktes O_1 erhält. Genau ebenso wird aus Fig. 2^d und Fig. 2^e O_{21} der Grundriss des zweiten Standpunktes O_2 gefunden. Man legt nun in Fig. 2^c durch $O_{11} O_{21}$ eine Aufrissebene und erhält durch Uebertragung der Strecken z_1 aus Fig. 2^b und z_2 aus Fig. 2^e die Aufrisse der Standpunkte O_1 und O_2 . Hierauf wird der Schnittpunkt R der Strecken PQ und $O_{11} O_{21}$ in Fig. 2^c in die Grundrisse der Figuren 2^b und 2^e übertragen und dort die Punkte B_1 und C_1 samt ihren Aufrissen bestimmt. B_1 und C_1 überträgt man dann in den Grundriss von Fig. 2^c und erhält dort auch mittels der den Fig. 2^b und 2^e zu entnehmenden Strecken z' und z'' die Aufrisse B_2 und C_2 . Die Punkte B und C in Fig. 2^a und 2^d werden durch Teilung der Strecken $Q' P'$ bzw. $Q'' P''$ im Verhältniss $B_1 P_1' : B_1 Q_1'$ (Fig. 2^b) bzw. $C_1 P_1'' : C_1 Q_1''$ (Fig. 2^d) gefunden. Zum Schlusse werden auf den Linien $N' B$ (Fig. 2^a) bzw. $N'' C$ (Fig. 2^d) die Längen $N' O_2' = N_2' O_{22}'$ (Fig. 2^e) und $N'' O_1'' = N_2'' O_{12}''$ (Fig. 2^c) aufgetragen und so die Kernpunkte O_2' und O_1'' gefunden.

Die auf solche Weise ermittelten Kernpunkte sind in der Regel nicht genau, da abgesehen von den unvermeidlichen Fehlern der Konstruktion, die Voraussetzungen, auf welche sie sich gründet (Kenntnis der Orientierung beider Aufnahmen gegen die Vertikale und Horizontalität der Basis) zumeist nur unvollkommen erfüllt sind. Es entsteht daher die Aufgabe, die erhaltenen genäherten Lagen der Kernpunkte entsprechend zu verbessern, wobei man ausschliesslich die Kenntnis der inneren Orientierung zu Grunde legen wird.

Es seien die Koordinaten des Kernpunktes O_2' der ersten Bildebene $x_0' y_0'$, jene eines Bildpunktes $P_i' x_i' y_i'$ beide auf ein beliebiges rechtwinkeliges System durch den Hauptpunkt A_1 als Mittelpunkt bezogen. Das perspektivische Zentrum O_1 sei um die Bildweite d von A_1 entfernt. Der Winkel ψ_i' , welchen nun die Ebene $O_1 O_2' P_i'$ mit der Ebene $O_1 A_1 O_2'$ einschliesst, kann durch folgendes Formelsystem, welches aus Fig. 3 folgt, leicht berechnet werden. In Fig. 3 sind die Dreiecke $O_1 A_1 O_2'$ und $P_i' L M$ aus ihrer wahren Lage senkrecht zur Bildebene bzw. zum Kernstrahl $O_1 O_2'$ in die Bildebene umgeklappt.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y'_0}{x'_0} = \operatorname{tg} \varphi'_0, \quad r'_0 = \frac{y'_0}{\sin \varphi'_0} = \frac{x'_0}{\cos \varphi'_0}, \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{r'_0}{d} \\ \frac{y'_i - y'_0}{x'_i - x'_0} = \operatorname{tg} \varphi'_i, \quad r'_{i0} = \frac{y'_i - y'_0}{\sin \varphi'_i} = \frac{x'_i - x'_0}{\cos \varphi'_i} \\ \operatorname{tg} \psi'_i = \operatorname{tg} (\varphi'_i - \varphi'_0) \sin \alpha' \end{array} \right\} 1)$$

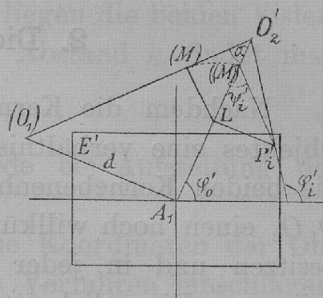


Fig. 3.

Berechnet man mittels eines ähnlichen Formelsystems, in dem alle Buchstaben doppelte Striche tragen, die entsprechenden Winkel ψ''_i , die zur zweiten Bildebene gehören, so drückt sich die Kongruenz der beiden Kernebenenbüschel durch die Gleichheit der entsprechend gebildeten Differenzen der ψ'_i unter sich und jener der ψ''_i unter sich aus. Diese Gleichheit wird natürlich nur annähernd bestehen. Man wiederholt nun die Rechnung viermal, indem man der Reihe nach eine der vier unbekannten Koordinaten x'_0, y'_0, x''_0, y''_0 durch einen passend abgeänderten etwa um 1 mm verschiedenen Wert ersetzt und so die Veränderungen der ψ'_i und ψ''_i ermittelt, die einer Veränderung der Kernpunktskoordinaten um je 1 mm entsprechen. Aus diesen Veränderungen der ψ'_i, ψ''_i kann man dann unter Voraussetzung der Proportionalität mit jenen der Kernpunktskoordinaten die linearen Gleichungen aufstellen, welche zwischen den Verbesserungen der Kernpunktskoordinaten $\Delta x'_0, \Delta y'_0, \Delta x''_0, \Delta y''_0$ bestehen müssten, damit Gleichheit der Differenzen ψ'_i und ψ''_i und damit volle Kongruenz der Kernebenenbüschel bestünde. Hat man fünf Paare von Bildpunkten, so ergeben sich vier Gleichungen für die $\Delta x'_0, \Delta y'_0, \Delta x''_0, \Delta y''_0$, aus welchen sich dieselben berechnen lassen. Benützt man mehr Paare von Bildpunkten, so entstehen überschüssige Gleichungen, aus welchen man die Verbesserungen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnen wird. Am einfachsten kommt man dabei zum Ziel, wenn man von dem Grundsatz ausgeht, dass die Summe der Quadrate der Unterschiede der Winkel der Kernebenenbüschel ein Minimum werden soll. Die Auflösung der zugehörigen Normalgleichungen nach der Gauss'schen Methode gibt dann den mittleren Fehler eines Winkels des Kernebenenbüschels und jenen der Kernpunktskoordinaten. Eine mehr systematische Ausgleichungsmethode soll im nächsten Abschnitt bei Gelegenheit der Rekonstruktion des Objektes besprochen werden.

2. Die Wiederherstellung des Objektes.

Nachdem die Kernpunkte bestimmt sind, ist die Wiederherstellung des Objektes eine verhältnissmässig einfache Sache. Es handelt sich nur darum, die beiden Kernebenenbüschel so zur Deckung zu bringen, dass die Punkte $O_1 O_2$ einen noch willkürlich gewählten Abstand etwa gleich der Längeneinheit besitzen und in jeder der Kernebenen die Visierstrahlen zum Schnitte zu bringen. Diese Schnitte sind dann die gesuchten Objektpunkte. Man wird also zunächst mit den verbesserten Kernpunktskoordinaten das Formelsystem I und das entsprechende mit den doppelt gestrichenen Buchstaben neu durchrechnen. Man erhält so eine Reihe von Winkeln: $\psi_1', \psi_2', \psi_3' \dots \psi_i' \dots$ und eine zweite: $\psi_1'', \psi_2'', \psi_3'' \dots \psi_i'' \dots$, deren Differenzen, die Winkel in den beiden Kernebenenbüscheln, nahezu übereinstimmen. Um die beiden Büschel möglichst zur Deckung zu bringen, bildet man aus diesen Reihen neue $\chi_i' \chi_i''$, die aus den Differenzen ihrer Glieder gegen das arithmetische Mittel einer derselben gebildet wird. Es wird demnach $\chi_i' = \psi_i' - \frac{\sum \psi_i'}{n}$ und $\chi_i'' = \psi_i'' - \frac{\sum \psi_i''}{n}$. Diese neuen Reihen stimmen bis auf die unvermeidlichen Beobachtungsfehler überein und mit den Winkeln $\chi_i = \frac{\chi_i' + \chi_i''}{2}$ als Winkel der Kernebenenbüschel soll nun weiter gerechnet werden. Zunächst wählt man ein Koordinatensystem zur Festlegung der Objektpunkte, dessen Ursprung in den Punkt O_1 , und dessen Y -Axe in die Richtung $O_1 O_2$ fällt. Als YZ -Ebene sei jene Kernebene gewählt, welche dem Winkel $\chi_i = 0$ zugehört.

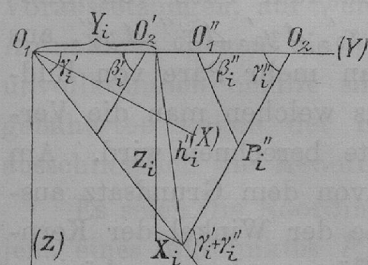


Fig. 4.

Bezeichnet man (Fig. 4) mit γ_i' und γ_i'' die Winkel, welche die Visierstrahlen von O_1 und O_2 mit der Verbindungslinie $O_1 O_2$ einschliessen, so berechnen sich dieselben aus den schon in Fig. 3 eingeführten Winkeln α' und $\varphi_i' - \varphi_0'$ durch folgende Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta_i' &= \cos \alpha \cos (\varphi_i' - \varphi_0') \\ \sin \gamma_i' &= \sin \beta_i' \frac{r_{i0}'}{d_i'}; \quad d_i' = \sqrt{d^2 + x_i'^2 + y_i'^2}, \end{aligned} \right\} \quad 2)$$

denen ähnliche, bei welchen die Buchstaben doppelte Striche tragen, beizugesellen sind. Wird die Länge $O_1 O_2$ gleich Eins gewählt und bezeichnen wir die Höhe des Dreieckes $O_1 P_i O_2$ mit h_i , so berechnen sich die Koordinaten $X_i Y_i Z_i$ von P_i folgendermassen:

$$h_i = \frac{\sin \gamma_i' \sin \gamma_i''}{\sin (\gamma_i' + \gamma_i'')}; \quad X_i = h_i \sin \chi_i; \quad Y_i = h_i \operatorname{ctg} \gamma_i'; \quad Z_i = h_i \cos \chi_i \quad 3)$$

Wegen der Verschiedenheit der Winkel χ'_i und χ''_i liegen die beiden Visierstrahlen nicht genau in einer Ebene. Ihren kürzesten Abstand k_i findet man aus der Formel:

$$k_i = h_i (\chi_i - \chi''_i) \quad 4)$$

Der Mittelpunkt dieses kürzesten Abstandes wurde bei Aufstellung des Formelsystemes 3 als Punkt P_i angenommen.

Anstatt auf die eben auseinandergesetzte Weise die Koordinaten der Objektpunkte zu berechnen, kann man noch ein anderes Verfahren einschlagen, wobei man die Ausgleichungsrechnung zur schärferen Bestimmung der Kernpunkte vermeidet und statt derselben eine Schlussausgleichung einführt, für welche sich fertige Formeln angeben lassen.

Auf Grund der genäherten Koordinaten der Kernpunkte führt man die Berechnung der Koordinaten der Objektpunkte und der kürzesten Abstände der zugehörigen Visierstrahlen mittels der soeben entwickelten Formeln 3 und 4 durch. Dann dreht man die beiden Visierstrahlenbündel um die Punkte O_1 und O_2 solange, bis die Summe der Quadrate der kürzesten Abstände entsprechender Visierstrahlen ein Minimum wird.

Zur Ableitung der entsprechenden Formeln bedienen wir uns mit Vorteil der Methoden der Vektoranalysis. Der Vektor von O_1 aus auf den Visierstrahl nach P_i gerechnet bis zum Fusspunkt des kürzesten Abstandes der entsprechenden Visierstrahlen sei $\mathfrak{A}_i$, der entsprechende Vektor von O_2 aus $\mathfrak{B}_i$. Der Drehvektor¹⁾ des Visierstrahlenbündels von O_1 aus sei $\mathfrak{U}$, jener des entsprechenden von O_2 aus $\mathfrak{B}$. Die Faktoren des inneren (skalaren) Produkts mögen durch den Punkt als Multiplikationszeichen getrennt werden, während für das äussere (vektorielle) Produkt das Kreuz verwendet wird.²⁾ Die um die Vektoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ gedrehten Vektoren $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B}_i$ sind dann: $\mathfrak{A}_i + \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}_i + \mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B}$. Ist $\mathfrak{C}$ der Vektor von O_1 nach O_2 , so ist der kürzeste Abstand der Visierstrahlen nach dem Punkte P_i :

$$\mathfrak{C} + \mathfrak{B}_i + \mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B} - \mathfrak{A}_i - \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{U}$$

Die Summe der Quadrate dieser kürzesten Abstände soll ein Minimum sein, also:

$$S = \sum_i (\mathfrak{C} + \mathfrak{B}_i + \mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B} - \mathfrak{A}_i - \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{U})^2 = \text{Minimo}^3) \quad 5)$$

Die Aenderung dieses Ausdruckes bei Aenderung von $\mathfrak{U}$ um $d\mathfrak{U}$ und von $\mathfrak{B}$ um $d\mathfrak{B}$ muss daher verschwinden. Das gibt die Bedingungsgleichungen:

¹⁾ Unter Drehvektor verstehen wir eine gerichtete Grösse, welche die Richtung der Drehaxe und die (in unserm Falle kleine) Länge gleich der Grösse des Drehwinkels hat.

²⁾ Vergl. Wilson-Gibbs: Vektor-Analysis. New-York 1901.

³⁾ Die Summe erstreckt sich auf die Zahl n der zur Bestimmung benützten Objektpunkte.

$$\left. \begin{aligned} -2 \sum_i (\mathfrak{C} + \mathfrak{B}_i + \mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B} - \mathfrak{A}_i - \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{U}) \cdot (\mathfrak{A}_i \times d\mathfrak{U}) &= 0 \\ 2 \sum_i (\mathfrak{C} + \mathfrak{B}_i + \mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B} - \mathfrak{A}_i - \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{U}) \cdot (\mathfrak{B}_i \times d\mathfrak{B}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 6)$$

Durch Umstellung des Punkt-Kreuzproduktes, wobei $d\mathfrak{U}$, bzw. $d\mathfrak{B}$ an den Anfang kommen, erkennt man, dass die folgenden Faktoren verschwinden müssen, da ein inneres Produkt nur dann für alle Werte des einen Faktors (hier $d\mathfrak{U}$, bzw. $d\mathfrak{B}$) verschwindet, wenn der andere Faktor gleich Null ist. Daher wird:

$$\left. \begin{aligned} \sum_i \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{C} + \mathfrak{B}_i - \mathfrak{A}_i + \mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B} - \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{U}] &= 0 \\ \sum_i \mathfrak{B}_i \times [\mathfrak{C} + \mathfrak{B}_i - \mathfrak{A}_i + \mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B} - \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{U}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 7)$$

Der kürzeste Abstand der Visierstrahlen von $\mathfrak{B}_i$ nach $\mathfrak{A}_i$ gerechnet ist:

$$\mathfrak{R}_i = \mathfrak{C} + \mathfrak{B}_i - \mathfrak{A}_i$$

Durch Ausmultiplikation erhält man dann die Bedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sum \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{R}_i + \sum \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B}] - \sum \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{U}] &= 0 \\ \sum \mathfrak{B}_i \times \mathfrak{R}_i + \sum \mathfrak{B}_i \times [\mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B}] - \sum \mathfrak{B}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{U}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 8^*)$$

In diesen Gleichungen stellen die 3 Summanden kleine Vektoren von der Ordnung der kürzesten Abstände vor. Ersetzt man überall $\mathfrak{B}_i$ durch $\mathfrak{A}_i - \mathfrak{C}$, was bis auf $\mathfrak{R}_i$ richtig ist, so vernachlässigt man nur Grössen zweiter Ordnung. Es wird dann:

$$\left. \begin{aligned} \sum \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{R}_i + \sum \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{B} - \mathfrak{U}] - \sum \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{C} \times \mathfrak{B}] &= 0 \\ \sum \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{R}_i + \sum \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{B} - \mathfrak{U}] - \sum \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{C} \times \mathfrak{B}] + \\ + \mathfrak{C} \times [-\sum \mathfrak{R}_i - \sum \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{B} - \mathfrak{U}] + n[\mathfrak{C} \times \mathfrak{B}]] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 9)$$

wobei die drei ersten Summanden der zweiten Gleichung infolge der ersten verschwinden.

Benützen wir ferner die Formel: $\mathfrak{A} \times [\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}] = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C} \mathfrak{B} - \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \mathfrak{C}$, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \sum \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{R}_i + \sum \mathfrak{A}_i \cdot (\mathfrak{B} - \mathfrak{U}) \mathfrak{A}_i - (\mathfrak{B} - \mathfrak{U}) \sum (\mathfrak{A}_i)^2 - \mathfrak{C} \sum \mathfrak{A}_i \cdot \mathfrak{B} + \mathfrak{B} \sum \mathfrak{A}_i \cdot \mathfrak{C} &= 0 \\ -\mathfrak{C} \times \sum \mathfrak{R}_i - \sum \mathfrak{C} \cdot (\mathfrak{B} - \mathfrak{U}) \mathfrak{A}_i + (\mathfrak{B} - \mathfrak{U}) \sum \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A}_i + n \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{B} \mathfrak{C} - n(\mathfrak{C})^2 \mathfrak{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 10)$$

Gehen wir zu den Koordinaten über und setzen wir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_i &= X_i \mathfrak{i} + Y_i \mathfrak{j} + Z_i \mathfrak{k}, \quad \mathfrak{U} = U_1 \mathfrak{i} + U_2 \mathfrak{j} + U_3 \mathfrak{k}, \quad \mathfrak{B} = V_1 \mathfrak{i} + V_2 \mathfrak{j} + V_3 \mathfrak{k}, \\ \mathfrak{C} &= \mathfrak{j} \text{ und } \mathfrak{R}_i = -\mathfrak{i} k_i \cos \chi_i + \mathfrak{k} k_i \sin \chi_i. \end{aligned}$$

so folgen aus der ersten Gleichung 10) drei gewöhnliche Gleichungen, aus der zweiten zwei solche, nämlich:

*) Da sich die Σ ausschliesslich auf den Index i erstrecken, wurde dieser weiterhin fortgelassen.

$$\begin{aligned}
& -(V_1 - U_1) \sum (Y_i^2 + Z_i^2) + (V_2 - U_2) \sum X_i Y_i + (V_3 - U_3) \sum X_i Z_i + V_1 \sum Y_i \\
& \quad = -\sum Y_i k_i \sin \chi_i \\
& (V_1 - U_1) \sum X_i Y_i - (V_2 - U_2) \sum (X_i^2 + Z_i^2) + (V_3 - U_3) \sum Y_i Z_i - V_1 \sum X_i \\
& \quad - V_3 \sum Z_i = \sum k_i (Z_i \cos \chi_i + X_i \sin \chi_i) \\
& (V_1 - U_1) \sum X_i Z_i + (V_2 - U_2) \sum Y_i Z_i - (V_3 - U_3) \sum (X_i^2 + Y_i^2) + V_3 \sum Y_i \\
& \quad = \sum Y_i k_i \cos \chi_i \\
& (V_1 - U_1) \sum Y_i - (V_2 - U_2) \sum X_i - n V_1 = -\sum k_i \cos \chi_i \\
& \quad -(V_2 - U_2) \sum Z_i + (V_3 - U_3) \sum Y_i - n V_3 = \sum k_i \sin \chi_i
\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & -(V_1 - U_1) \sum (Y_i^2 + Z_i^2) + (V_2 - U_2) \sum X_i Y_i + (V_3 - U_3) \sum X_i Z_i + V_1 \sum Y_i \\ & \quad = -\sum Y_i k_i \sin \chi_i \\ & (V_1 - U_1) \sum X_i Y_i - (V_2 - U_2) \sum (X_i^2 + Z_i^2) + (V_3 - U_3) \sum Y_i Z_i - V_1 \sum X_i \\ & \quad - V_3 \sum Z_i = \sum k_i (Z_i \cos \chi_i + X_i \sin \chi_i) \\ & (V_1 - U_1) \sum X_i Z_i + (V_2 - U_2) \sum Y_i Z_i - (V_3 - U_3) \sum (X_i^2 + Y_i^2) + V_3 \sum Y_i \\ & \quad = \sum Y_i k_i \cos \chi_i \\ & (V_1 - U_1) \sum Y_i - (V_2 - U_2) \sum X_i - n V_1 = -\sum k_i \cos \chi_i \\ & \quad -(V_2 - U_2) \sum Z_i + (V_3 - U_3) \sum Y_i - n V_3 = \sum k_i \sin \chi_i \end{aligned}} \right\} 11)$$

Es sind dies fünf lineare Gleichungen für die Unbekannten $V_1 - U_1$, $V_2 - U_2$, $V_3 - U_3$, V_1 , V_3 . Dass V_2 und U_2 nur in der Verbindung $V_2 - U_2$ eingehen, liegt in der Natur der Sache, da eine gleich grosse Drehung beider Visierstrahlenbündel um die Linie $O_1 O_2$ an den kürzesten Abständen entsprechender Visierstrahlen nichts ändert. Hat man die Gleichungen aufgelöst, so kann man die durch die Drehungen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ geänderten Vektoren $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B}_i$ berechnen. Der Vektor $\mathfrak{D}_i$ nach dem Mittelpunkt des kürzesten Abstandes beider nach der Drehung wird:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_i &= \frac{1}{2} (\mathfrak{A}_i + \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{U} + \mathfrak{C} + \mathfrak{B}_i + \mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B}) \\
\text{Oder: } \mathfrak{D}_i &= \mathfrak{A}_i + \frac{\mathfrak{C} + \mathfrak{B}_i - \mathfrak{A}_i + \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{U} + \mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B}}{2} \\
&= \mathfrak{A}_i + \frac{\mathfrak{R}_i + \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} + \mathfrak{B}] - \mathfrak{C} \times \mathfrak{B}}{2}, \quad 12)
\end{aligned}$$

wenn man wieder genähert $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_i - \mathfrak{C}$ setzt.

Geht man wieder zu Koordinaten über und setzt man $\mathfrak{D}_i = \zeta_i \mathfrak{i} + \eta_i \mathfrak{j} + \xi_i \mathfrak{k}$, so erhält man die verbesserten Koordinaten folgendermassen:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_i &= X_i + \frac{1}{2} (-k_i \cos \chi_i + Y_i (U_3 + V_3) - Z_i (U_2 + V_2) - V_3) \\ \eta_i &= Y_i + \frac{1}{2} (Z_i (U_1 + V_1) - X_i (U_3 + V_3)) \\ \xi_i &= Z_i + \frac{1}{2} (k_i \sin \chi_i + X_i (U_2 + V_2) - Y_i (U_1 + V_1) + V_1) \end{aligned} \right\} 13)$$

Die Quadratsumme der übrig bleibenden kürzesten Abstände lässt noch eine einfache Umformung zu:

$$\begin{aligned}
S &= \sum (\mathfrak{C} + \mathfrak{B}_i - \mathfrak{A}_i + \mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B} - \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{U})^2 \\
&= \sum (\mathfrak{R}_i + \mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B} - \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{U}) \cdot (\mathfrak{R}_i + \mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B} - \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{U}) \\
&= \sum (\mathfrak{R}_i)^2 + \mathfrak{B} \cdot (\sum \mathfrak{R}_i \times \mathfrak{B}_i) - \mathfrak{U} \cdot (\sum \mathfrak{R}_i \times \mathfrak{A}_i) \\
&- \mathfrak{B} \cdot (\sum \mathfrak{B}_i \times [\mathfrak{R}_i + \mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B} - \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{U}]) + \mathfrak{U} \cdot (\sum \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{R}_i + \mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B} - \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{U}]) \\
&= \sum (\mathfrak{R}_i)^2 - \mathfrak{B} \cdot (\sum \mathfrak{B}_i \times \mathfrak{R}_i) - \mathfrak{U} \cdot (\sum \mathfrak{R}_i \times \mathfrak{A}_i),
\end{aligned}$$

da infolge der Minimumbedingungen 7) die übrigen Glieder fortfallen. Ersetzt man $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_i - \mathfrak{C}$, so wird:

$$S = \sum (\mathfrak{R}_i)^2 - (\mathfrak{U} - \mathfrak{B}) \cdot (\sum \mathfrak{R}_i \times \mathfrak{A}_i) - \mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{C} \times \sum \mathfrak{R}_i) \quad 14)$$

Mit dem Verschwinden der Grössen $\sum \mathfrak{R}_i \times \mathfrak{A}_i$ und $\sum \mathfrak{R}_i$ verschwinden, wie die Gleichungen 10) lehren, auch die Drehungen $\mathfrak{B} - \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ und, wie aus eben entwickelter Gleichung 14) zu ersehen ist, wird auch $S = \sum (\mathfrak{R}_i)^2$. Wenn demnach die Gleichungen: $\sum \mathfrak{R}_i = 0$ und $\sum [\mathfrak{R}_i] \times [\mathfrak{A}_i] = 0$ erfüllt sind, so befinden sich die beiden Visierstrahlenbündel um O_1 und O_2 in solcher Lage, dass die Summe der Quadrate der Abstände entsprechender Strahlen ein Minimum ist. Die eben entwickelten Bedingungen lassen eine einfache mechanische Deutung zu. Denkt man sich die $\mathfrak{R}_i$ als Kräfte, welche zwischen zusammengehörigen Visierstrahlen wirken und dem kürzesten Abstand nach Länge und Richtung entsprechen, so sagt die erste Gleichung aus, dass die Resultante der Kräfte gleich Null ist und die zweite, dass die Summe der Drehmomente um den Punkt O_1 verschwindet. Die Kräfte bilden dann ein Gleichgewichtssystem. Es lässt sich daher folgender Satz aussprechen:

Wenn zwei Bündel entsprechender Visierstrahlen so gegeneinander liegen, dass die Summe der Quadrate der Abstände entsprechender Visierstrahlen ein Minimum wird, so bilden diese kürzesten Abstände als Kräfte aufgefasst ein Gleichgewichtssystem.

3. Festlegung der äusseren Orientierung und des Masstabes des rekonstruierten Objektes.

Hat man nach den Regeln des vorigen Abschnittes die gegenseitige Lage der Objektpunkte und der Standpunkte ermittelt, so erübrigt es noch, durch Vergleichung mit Messungen am Objekt den Masstab und die Orientierung des rekonstruierten Objektes zu bestimmen. Zu diesem Zwecke denken wir uns die Koordinaten einer Anzahl von Punkten des Originals gegeben und bestimmen dann die Verschiebung, Drehung und Masstabänderung, durch welche das rekonstruierte Objekt mit dem Original möglichst zur Deckung gebracht wird.

Es lässt sich sehr leicht einsehen, dass, wenn wir zwei Punkthaufen durch Parallelverschiebung möglichst nahe zur Deckung bringen wollen, ihre Schwerpunkte zusammenfallen müssen. Es seien von demselben Ursprung aus gerechnet $\mathfrak{A}_i$ die Vektoren nach den gemessenen Punkten des Originals und $\mathfrak{B}_i$ jene nach den entsprechenden Punkten der Rekonstruktion. Erteilen

wir nun der Rekonstruktion eine Parallelverschiebung um den Vektor $\mathfrak{X}$, so ist der Abstand entsprechender Punkte durch $\mathfrak{U}_i - (\mathfrak{B}_i + \mathfrak{X})$ gegeben. Die Summe der Quadrate der Abstände ist dann:

$$S = \sum (\mathfrak{U}_i - (\mathfrak{B}_i + \mathfrak{X}))^2 \quad 15)$$

Damit S ein Minimum wird, muss für alle Werte von $d\mathfrak{X}$ folgender Ausdruck verschwinden:

$$- \sum 2 (\mathfrak{U}_i - \mathfrak{B}_i - \mathfrak{X}) \cdot d\mathfrak{X} = - 2 d\mathfrak{X} \cdot \sum (\mathfrak{U}_i - \mathfrak{B}_i - \mathfrak{X}) = 0 \quad 16)$$

woraus folgt:

$$\sum (\mathfrak{U}_i - \mathfrak{B}_i - \mathfrak{X}) = 0 = \sum \mathfrak{U}_i - \sum \mathfrak{B}_i - n\mathfrak{X},$$

wo n die Zahl der verglichenen Punkte ist. Es wird also:

$$\mathfrak{X} = \frac{\sum \mathfrak{U}_i}{n} - \frac{\sum \mathfrak{B}_i}{n} \quad 17)$$

$\frac{\sum \mathfrak{U}_i}{n}$ und $\frac{\sum \mathfrak{B}_i}{n}$ sind die Vektoren nach den Schwerpunkten der verglichenen Punkthaufen und der Vektor $\mathfrak{X}$ entspricht der Verbindungslinie der Schwerpunkte beider Haufen. Wird der zweite Haufen um diese Strecke verschoben, so decken sich die beiden Schwerpunkte.

Nun wird der rekonstruierte Punkthaufen durch Drehung um den gemeinsamen Schwerpunkt und Masstabänderung mit dem Originale möglichst vereinigt. Zu diesem Zwecke beziehen wir ihn auf ein Koordinatensystem. Der Vektor $\mathfrak{B}_i$ habe im alten System die Koordinaten X_i, Y_i, Z_i , der Vektor $\mathfrak{U}_i$: x_i, y_i, z_i . Im neuen System seien die Koordinaten: von $\mathfrak{B}_i$: $\xi_i = \alpha_{11} X_i + \alpha_{12} Y_i + \alpha_{13} Z_i$; $\eta_i = \alpha_{21} X_i + \alpha_{22} Y_i + \alpha_{23} Z_i$; $\xi_i = \alpha_{31} X_i + \alpha_{32} Y_i + \alpha_{33} Z_i$. 18)

Bringen wir das neue Koordinatensystem durch Drehung mit dem alten zur Deckung, so sind die Koordinatendifferenzen zwischen dem Endpunkt des gedrehten Vektors $\mathfrak{B}_i$ und jenem des unveränderten Vektor $\mathfrak{U}_i$ folgende:

$$\alpha_{11} X_i + \alpha_{12} Y_i + \alpha_{13} Z_i - x_i; \quad \alpha_{21} X_i + \alpha_{22} Y_i + \alpha_{23} Z_i - y_i; \quad \alpha_{31} X_i + \alpha_{32} Y_i + \alpha_{33} Z_i - z_i.$$

Dabei sollen unter den Grössen $\alpha_{11} \dots \alpha_{33}$ nicht direkt die Richtungs-cosinus der Axen gegeneinander darstellen, sondern diese Grössen mit einem konstanten Faktor multipliziert, welcher dann gleichzeitig der Masstabänderung der Vektoren $\mathfrak{B}_i$ Rechnung trägt.

Wir bilden nun die Summe der Quadrate obenstehender Differenzen, um das Quadrat der Entfernung entsprechender Punkte nach der Drehung zu erhalten und summieren über alle Punkte des Haufens. Die Gesamtsumme S soll dann zu einem Minimum werden.

$$S = \sum ((\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2) X_i^2 + (\alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2) Y_i^2 + (\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2) Z_i^2 - \\ - 2\alpha_{11} X_i x_i - 2\alpha_{12} Y_i x_i - 2\alpha_{13} Z_i x_i - 2\alpha_{21} X_i y_i - 2\alpha_{22} Y_i y_i - 2\alpha_{23} Z_i y_i - \\ - 2\alpha_{31} X_i z_i - 2\alpha_{32} Y_i z_i - 2\alpha_{33} Z_i z_i + x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \text{Minimo} \quad 19)$$

Statt der neun Grössen $\alpha_{11} \dots \alpha_{33}$ führt man nun die vier unabhängigen Quaternionengrössen a, b, c, d , welche mit jenen folgendermassen zusammenhängen:¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= d^2 - a^2 - b^2 - c^2 & \alpha_{12} &= 2(ab - cd) & \alpha_{13} &= 2(ac - bd) \\ \alpha_{21} &= 2(ab + cd) & \alpha_{22} &= d^2 - a^2 + b^2 - c^2 & \alpha_{23} &= 2(bc - ad) \\ \alpha_{31} &= 2(ac - bd) & \alpha_{32} &= 2(bc + ad) & \alpha_{33} &= d^2 - a^2 - b^2 + c^2 \end{aligned} \right\} \quad 20)$$

Dieselben haben eine einfache geometrische Bedeutung. Sind α, β, γ die Richtungswinkel der Drehaxe und ist ω der Drehwinkel jener Rotation, welche zusammen mit einer Streckung im Verhältniss $T:1$ die alte Figur der $\mathfrak{B}_i$ in die neue überführt, so drücken sich die Quaternionengrössen folgendermassen durch die $\alpha, \beta, \gamma, T, \omega$ aus:

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{T} \sin \frac{\omega}{2} \cos \alpha, & b &= \sqrt{T} \sin \frac{\omega}{2} \cos \beta, & c &= \sqrt{T} \sin \frac{\omega}{2} \cos \gamma, & d &= \sqrt{T} \cos \frac{\omega}{2}, \\ T &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \end{aligned} \right\} \quad 21)$$

In den Quaternionengrössen geschrieben ergibt sich S wie folgt:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} S &= a^2 \sum (X_i x_i - Y_i y_i - Z_i z_i) + b^2 \sum (-X_i x_i + Y_i y_i - Z_i z_i) + c^2 \sum (-X_i x_i - Y_i y_i + Z_i z_i) \\ &+ d^2 \sum (X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i) + 2ab \sum (X_i y_i + Y_i x_i) + 2ac \sum (X_i z_i + Z_i x_i) \\ &+ 2ad \sum (-Y_i z_i + Z_i y_i) + 2bc \sum (Y_i z_i + Z_i y_i) + 2bd \sum (X_i z_i - Z_i x_i) \\ &+ 2cd \sum (-X_i y_i + Y_i x_i) - \frac{1}{2} T^2 \sum (X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2) - \frac{1}{2} \sum (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \\ &= \text{Minimo} \end{aligned} \quad 22)$$

Setzt man die Differentialquotienten nach a, b, c, d gleich Null und führt man die Abkürzungen $X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 = R_i^2$, $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = r_i^2$ ein, so erhält man folgende vier Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a(\sum (X_i x_i - Y_i y_i - Z_i z_i) - T \sum R_i^2) + b \sum (X_i y_i + Y_i x_i) - c \sum (X_i z_i + Z_i x_i) \\ + d \sum (Z_i y_i - Y_i z_i) &= 0 \\ a \sum (X_i y_i + Y_i x_i) + b(\sum (-X_i x_i + Y_i y_i - Z_i z_i) - T \sum R_i^2) + c \sum (Y_i z_i + Z_i y_i) \\ + d \sum (X_i z_i - Z_i x_i) &= 0 \\ a \sum (X_i z_i + Z_i x_i) + b \sum (Y_i z_i + Z_i y_i) + c(\sum (-X_i x_i - Y_i y_i + Z_i z_i) - T \sum R_i^2) \\ + d \sum (Y_i x_i - X_i y_i) &= 0 \\ a \sum (Z_i y_i - Y_i z_i) + b \sum (X_i z_i - Z_i x_i) + c \sum (Y_i x_i - X_i y_i) \\ + d(\sum (X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i) - T \sum R_i^2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 23)$$

¹⁾ Man vergleiche hiezu die klaren Auseinandersetzungen in F. Klein und A. Sommerfeld: Ueber die Theorie des Kreisels. Leipzig 1897, S. 56.

Durch Elimination von a, b, c, d erhält man nachstehende Gleichung 4. Grades für das Masstabverhältniss $T:1$.

$$0 = \left\{ \begin{array}{cccc} \Sigma_i - T \Sigma R_i^2 & \Sigma(X_i y_i + Y_i x_i) & \Sigma(X_i z_i + Z_i x_i) & \Sigma(Z_i y_i - Y_i z_i) \\ \Sigma(X_i y_i + Y_i x_i) & \Sigma_2 - T \Sigma R_i^2 & \Sigma(Y_i z_i + Z_i y_i) & \Sigma(X_i z_i - Z_i x_i) \\ \Sigma(X_i z_i + Z_i x_i) & \Sigma(Y_i z_i + Z_i y_i) & \Sigma_3 - T \Sigma R_i^2 & \Sigma(Y_i x_i - X_i y_i) \\ \Sigma(Z_i y_i - Y_i z_i) & \Sigma(X_i z_i - Z_i x_i) & \Sigma(Y_i x_i - X_i y_i) & \Sigma_4 - T \Sigma R_i^2 \end{array} \right\} \quad 24)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \Sigma(X_i x_i - Y_i y_i - Z_i z_i), & \Sigma_2 &= \Sigma(-X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i), \\ \Sigma_3 &= \Sigma(-X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i), & \Sigma_4 &= \Sigma(X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i). \end{aligned}$$

Dieselbe hat vier reelle Wurzeln. Jeder derselben entspricht ein System von Quaternionengrössen. Es gibt demnach vier verschiedene Lagen der beiden Punkthäufen gegeneinander, bei welchen die Variation von S verschwindet. Um zu erkennen, was aus der Summe S für jeden der Werte von T wird, multiplicieren wir die vier obigen Gleichungen 23) der Reihe nach mit a, b, c, d und addieren sie alsdann:

$$0 = -T^2 \Sigma R_i^2 - \frac{1}{2} S + \frac{1}{2} T^2 \Sigma R_i^2 + \frac{1}{2} \Sigma r_i^2 \text{ oder } S = \Sigma r_i^2 - T^2 \Sigma R_i^2$$

S würde offenbar zu Null gemacht werden können, wenn die beiden Punkthäufen ähnlich sind und das Aehnlichkeitsverhältnis $T_1 = \sqrt{\frac{\Sigma r_i^2}{\Sigma R_i^2}}$ gewählt wird. Man wird daher diesen Wert als Näherungswert bei der Auflösung der Gleichung 4. Grades für T benutzen und jene Wurzel derselben rechnen, die diesem Werte am nächsten kommt. Aus ihr ergeben sich dann mittels der vier linearen Gleichungen die Werte von a, b, c, d , aus diesen die Grössen $\alpha_{11} \dots \alpha_{33}$ und die Komponenten der gedrehten Vektoren $\mathfrak{B}_i$. Wendet man die so erhaltenen Koordinatentransformationsformeln auch auf die Koordinaten der Punkte O_1 und O_2 , die vorher auf den Schwerpunkt des zu vergleichenden Punkthaufens bezogen waren, an, so ergeben sich die beiden Standpunkte in ihrer Lage zu den Vergleichspunkten des Objectes.

Wenn in einem speziellen Falle die drei Summen: $\Sigma(Z_i y_i - X_i z_i)$, $\Sigma(X_i z_i - Z_i x_i)$, $\Sigma(Y_i x_i - X_i y_i)$ verschwinden, spaltet sich von der Gleichung 4. Grades der Faktor:

$$\Sigma(X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i) - T \Sigma R_i^2 = 0 \quad 25)$$

ab. Die Grössen a, b, c und damit auch der Drehwinkel ω verschwinden hiebei und es ist dann das rekonstruierte Objekt schon in jener Stellung, in welcher es durch geeignete Masstabsveränderung mit dem Original möglichst zur

Deckung gebracht werden kann. Jene 3 Summen sind die Komponenten des Vektors: $\sum \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{B}_i$. Es muss demnach die Summe der Vektorprodukte entsprechender, Vektoren beider Punkthaufen verschwinden, damit sie ohne Drehung durch blosse Masstabänderung möglichst nahe aneinander gebracht werden können.

Den vorstehenden Ausführungen lag die Voraussetzung zu grunde, dass es einer endlichen Drehung bedürfe, um die beiden Punkthaufen möglichst zu vereinigen. Wenn jedoch die Rekonstruktion des Objektes auf grund des Näherungsverfahrens (Seite 232 u. f.) eingeleitet wurde, so ist die Orientierung des Objektes gegen die Vertikale genähert bekannt und es hat keine Schwierigkeit, durch Drehung um die Vertikale eine annähernde Orientierung auch in der Horizontalebene herzustellen. Aehnlich einfach liegt die Sache, wenn das Objekt, wie z. B. eine Terrainfläche, nahezu eben und horizontal ist. In solchen Fällen ist es auch leicht, die Masstabänderung vor der Ausführung der Drehung zu berechnen. Zunächst werden beide Punkthaufen, soweit sie verglichen werden sollen, wieder mit den Schwerpunkten zur Deckung gebracht. Nach der Voraussetzung haben dann entsprechende Vektoren bereits annähernd dieselbe Richtung. Das Quadrat der Entfernung der Endpunkte beider setzt sich aus zwei Theilen zusammen, von welchen der erste von der Komponente der Verbindungsstrecke in der gemeinsamen Richtung der Vektoren herrührt, der zweite von der Komponente derselben Strecke senkrecht hiezu. Die Grösse des ersteren ist von der Drehung unabhängig und es genügt, also ihn durch Masstabänderung zu einem Minimum zu machen, um die ganze Summe möglichst klein zu erhalten. Ebenso wird dieselbe Masstabänderung, welche ohne Drehung die ganze Summe möglichst klein macht, dies auch mit Drehung bewirken. Wir machen daher:

$$S = \sum (\mathfrak{A}_i - T \mathfrak{B}_i)^2$$

zu einem Minimum. Dies führt zu der Gleichung:

$$- 2 \sum (\mathfrak{A}_i - T \mathfrak{B}_i) \cdot \mathfrak{B}_i = 0$$

$$\sum \mathfrak{A}_i \cdot \mathfrak{B}_i - T \sum (\mathfrak{B}_i)^2 = 0$$

Setzen wir wieder $\mathfrak{A}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}$, $\mathfrak{B}_i = X_i \mathbf{i} + Y_i \mathbf{j} + Z_i \mathbf{k}$, so wird:

$$T = \frac{\sum (X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i)}{\sum R_i^2},$$

wie vorhin (Formel 25).

Mit diesem Wert T sollen die Vektoren $\mathfrak{B}_i$ gestreckt und dann jene kleine Drehung vorgenommen werden, welche die Summe der Quadrate der

Entfernungen entsprechende Punkte zu einem Minimum macht. Bezeichnen wir der Einfachheit halber die gestreckten Vektoren $\mathfrak{B}_i$ mit $\mathfrak{C}_i$, und unterwerfen wir sie der durch den Vektor $\mathfrak{U}$ bestimmten kleinen Drehung, wodurch sie in $\mathfrak{C}_i + \mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U}$ übergehen, so muss sein:

$$S = \sum (\mathfrak{U}_i - \mathfrak{C}_i - \mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U})^2 = \text{Minimo} \quad (26)$$

Daraus folgt:

$$-2 \sum (\mathfrak{U}_i - \mathfrak{C}_i - \mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U}) \cdot (\mathfrak{C}_i \times d\mathfrak{U}) = 0$$

oder

$$d\mathfrak{U} \cdot (\sum \mathfrak{C}_i \times [\mathfrak{U}_i - \mathfrak{C}_i - \mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U}]) = 0$$

Da diese Gleichung für alle Werte von $d\mathfrak{U}$ gelten soll, wird:

$$\sum \mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U}_i - \sum \mathfrak{C}_i \times [\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U}] = 0 \quad (27)$$

Um diese Gleichung geometrisch zu deuten, setzen wir zuerst

$$\sum \mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U}_i = \mathfrak{M} \quad (28)$$

und betrachten sämtliche Vektoren $\mathfrak{U}$, die nachstehender Gleichung genügen:

$$\sum (\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U})^2 = \mathfrak{M}^2 \quad (29)$$

Ihre Endpunkte liegen auf einer Fläche 2. Grades, dem Trägheitsellipsoid des Punkthaufens der $\mathfrak{C}_i$, wenn man sich die Punkte alle mit der Masse Eins begabt denkt. Man kann nämlich die Gleichung auch so umformen, dass auf der linken Seite die Summe der Quadrate der Entfernungen der Endpunkte von $\mathfrak{C}_i$ multipliziert mit dem Quadrat der Länge des Vektors $\mathfrak{U}$ steht, nämlich:

$$\sum \{ (\mathfrak{C}_i)^2 (\mathfrak{U})^2 - (\mathfrak{C}_i \cdot \mathfrak{U})^2 \} = \mathfrak{M}^2. \quad (30)$$

Durch Differentiation der Flächengleichung ergibt sich:

$$-2 \sum (\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U}) \cdot (\mathfrak{C}_i \times d\mathfrak{U}) = 0,$$

oder:

$$d\mathfrak{U} \cdot \sum \mathfrak{C}_i \times [\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U}] = 0 \quad (31)$$

Ersetzt man hierin $d\mathfrak{U}$ durch $\mathfrak{X} - \mathfrak{U}$, so erhält man die Gleichung der Tangentialebene im Endpunkte von $\mathfrak{U}$, wobei der Endpunkt von $\mathfrak{X}$ ein beliebiger Punkt derselben ist.

$$(\mathfrak{X} - \mathfrak{U}) \cdot \sum \mathfrak{C}_i \times [\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U}] = 0 \quad (32)$$

$$\mathfrak{X} \cdot \sum \mathfrak{C}_i \times [\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U}] - \mathfrak{U} \cdot \sum \mathfrak{C}_i \times [\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U}] = 0$$

$$\mathfrak{X} \cdot \sum \mathfrak{C}_i \times [\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U}] - \sum (\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U})^2 = 0$$

$$\mathfrak{X} \cdot \sum \mathfrak{C}_i \times [\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U}] - \mathfrak{M}^2 = 0 \quad (33)$$

Wählt man den Vektor $\mathfrak{U}$ nach dem Berührungspunkt derart, dass er der Minimumsbedingung 27)

$$\sum \mathfrak{C}_i \times [\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U}] - \mathfrak{M} = 0$$

genügt, so liegt der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{M}$ auf der Tangentialebene, wie bei Ersetzung von $\mathfrak{X}$ durch $\mathfrak{M}$ in ihrer Gleichung 33) hervorgeht. Ausserdem steht aber dann die Tangentialebene senkrecht auf $\mathfrak{M}$, da sich aus vorstehenden Gleichungen 32) und 27) auch die folgende:

$$(\mathfrak{X} - \mathfrak{U}) \cdot \mathfrak{M} = 0$$

kombinieren lässt.

Demnach lässt sich der Drehvektor $\mathfrak{U}$, der den Punkthafen der $\mathfrak{C}_i$ möglichst nahe mit jenem der $\mathfrak{A}_i$ zusammenbringt, folgendermassen finden: Man errichtet im Endpunkte des Vektors $\mathfrak{M} = \sum \mathfrak{C}_i \times \mathfrak{A}_i$ eine zu $\mathfrak{M}$ senkrechte Ebene und ermittelt dasjenige, dem Trägheitsellipsoid des Punkthafens der $\mathfrak{C}_i$ ähnliche und konzentrische Ellipsoid, welches diese Ebene berührt. Der Vektor nach dem Berührungspunkte ist der gesuchte Drehvektor $\mathfrak{U}$. Derselbe führt jeden Vektor $\mathfrak{C}_i$ in den neuen Vektor: $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{C}_i + \mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U}$ über. Wendet man die durch $\mathfrak{U}$ bestimmte Drehung auf die Standpunkte O_1 und O_2 an, so erhält man die Lage derselben gegenüber dem Originalobjekt.

Durch die Drehung wird die Quadratsumme S der Abstände beider Punkthafen verringert. Den übrig bleibenden Betrag kann man leicht berechnen. Es ist nach 26):

$$\begin{aligned} S &= \sum (\mathfrak{A}_i - \mathfrak{C}_i - \mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U})^2 = \sum ((\mathfrak{A}_i - \mathfrak{C}_i)^2 - 2\mathfrak{A}_i \cdot (\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U}) + (\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U})^2) \\ &= \sum (\mathfrak{A}_i - \mathfrak{C}_i)^2 + 2\mathfrak{U} \cdot \sum \mathfrak{C}_i \times \mathfrak{A}_i + \sum (\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U})^2 \end{aligned}$$

Unter Hinzuziehung von Gleichung 28) und 29) wird:

$$S = \sum (\mathfrak{A}_i - \mathfrak{C}_i)^2 + 2\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{M} + (\mathfrak{M})^2$$

Die Minimumsbedingung 27):

$$\mathfrak{M} - \sum \mathfrak{C}_i \times [\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U}] = 0$$

wird durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{U}$:

$$\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{M} - \sum \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{C}_i \times [\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U}] = 0$$

oder

$$\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{M} + \sum (\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U})^2 = 0,$$

woraus

$$\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{M} = -(\mathfrak{M})^2$$

und

$$S = \sum (\mathfrak{A}_i - \mathfrak{C}_i)^2 - (\mathfrak{M})^2 \quad 34)$$

folgt.

Es vermindert sich demnach die Quadratsumme der Abstände durch die Drehung um das Quadrat der Länge des Vektors $\mathfrak{M}$. Verschwindet der Vektor $\mathfrak{M}$, so ist eine Verminderung von S durch die Drehung unmöglich,

es wird dann auch nach obiger Konstruktion $\mathfrak{U} = 0$. Diese Bemerkungen stehen in engem Zusammenhang mit jenen auf Seite 244; dort sahen wir, dass das Verschwinden desselben Vektors die Drehstreckung aufhebt.

Das Verschwinden des Vektors $\mathfrak{M}$ hat übrigens auch eine sehr einfache mechanische Bedeutung. Mit $\mathfrak{M}$ verschwindet auch die Summe: $\sum \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{B}_i - \mathfrak{A}_i]$ und umgekehrt. Die Vektoren $\mathfrak{B}_i - \mathfrak{A}_i$ sind aber die kürzesten Abstände entsprechender Punkte beider Haufen. Werden diese als Kräfte aufgefasst, so sagt das Verschwinden jener Summe aus, dass diese Kräfte den Punkthaufen der $\mathfrak{B}_i$ nicht mehr um den gemeinsamen Schwerpunkt zu drehen vermögen. Aus dem Umstande, dass die Schwerpunkte im Koordinatenursprung vereinigt liegen, folgt ausserdem: $\sum \mathfrak{A}_i = 0$, $\sum \mathfrak{B}_i = 0$ und daher auch $\sum (\mathfrak{A}_i - \mathfrak{B}_i) = 0$, was aussagt, dass die Kräfte den Haufen auch nicht zu verschieben im Stande sind. Wir haben daher den Satz: Wenn sich zwei Punkthaufen möglichst nahe liegen, bilden die kürzesten Abstände beider als Kräfte aufgefasst, ein Gleichgewichtssystem.¹⁾

Wir wollen nun noch die Minimumsbedingung zum Gebrauch der Koordinaten umformen. Es sei: $\mathfrak{A}_i = x_i \mathfrak{i} + y_i \mathfrak{j} + z_i \mathfrak{k}$, $\mathfrak{C}_i = X_i \mathfrak{i} + Y_i \mathfrak{j} + Z_i \mathfrak{k}$. Die Bedingung 27) lautet:

$$\begin{aligned} \sum \mathfrak{C}_i \times [\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U}] &= \mathfrak{M} = \sum \mathfrak{C}_i \times \mathfrak{A}_i \\ \sum \mathfrak{C}_i \cdot \mathfrak{U} \mathfrak{C}_i - \sum (\mathfrak{C}_i)^2 \mathfrak{U} &= \sum \mathfrak{C}_i \times \mathfrak{A}_i \end{aligned}$$

$$\sum (U_1 X_i + U_2 Y_i + U_3 Z_i) (X_i \mathfrak{i} + Y_i \mathfrak{j} + Z_i \mathfrak{k}) - \sum R_i^2 (U_1 \mathfrak{i} + U_2 \mathfrak{j} + U_3 \mathfrak{k}) = \sum \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ X_i & Y_i & Z_i \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix}$$

Hieraus folgen die Gleichungen für U_1 , U_2 , U_3 :

$$\left. \begin{aligned} -U_1 \sum (Y_i^2 + Z_i^2) + U_2 \sum X_i Y_i + U_3 \sum X_i Z_i &= \sum (Y_i z_i - Z_i y_i) \\ U_1 \sum X_i Y_i - U_2 \sum (X_i^2 + Z_i^2) + U_3 \sum Y_i Z_i &= \sum (Z_i x_i - X_i z_i) \\ U_1 \sum X_i Z_i + U_2 \sum Y_i Z_i - U_3 \sum (X_i^2 + Y_i^2) &= \sum (X_i y_i - Y_i x_i) \end{aligned} \right\} \quad 35)$$

Die Koordinaten der gedrehten Punkte folgen aus:

$$\mathfrak{B}_i = \zeta_i \mathfrak{i} + \eta_i \mathfrak{j} + \xi_i \mathfrak{k} = \mathfrak{C}_i + \mathfrak{C}_i \times \mathfrak{U} = X_i \mathfrak{i} + Y_i \mathfrak{j} + Z_i \mathfrak{k} + \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ X_i & Y_i & Z_i \\ U_1 & U_2 & U_3 \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_i &= X_i + Y_i U_3 - Z_i U_2 \\ \eta_i &= Y_i + Z_i U_1 - X_i U_3 \\ \xi_i &= Z_i + X_i U_2 - Y_i U_1 \end{aligned} \right\} \quad 36)$$

¹⁾ Nach den Ausführungen auf S. 244 gilt der Satz nicht nur, wenn die beiden Haufen annähernd gleiche Form und Grösse haben, sondern ganz allgemein.

Die Ausführungen dieses Abschnittes geben eine Erweiterung der Formeln, welche Herr F. R. Helmert¹⁾ für die Zusammenlegung zweier ebener in Masstab und Orientierung wenig verschiedener Dreiecksnetze entwickelt hat. Setzt man in den Gleichungen 23) Seite 242 Z_i und z_i gleich Null, so folgt aus den beiden ersten $a = 0$, $b = 0$, was auf $\cos \alpha = \cos \beta = 0$ hinausläuft. Für T erhält man aus den beiden letzten die Gleichung:

$$T^2 (\sum R_i^2)^2 = (\sum (X_i x_i + Y_i y_i))^2 + (\sum (Y_i x_i - X_i y_i))^2 \quad 37)$$

Aus denselben Gleichungen erhält man durch Multiplikation der ersten mit d und der zweiten mit $-c$ und Addition:

$$(d^2 - c^2) \sum (Y_i x_i - X_i y_i) - 2cd \sum (X_i x_i + Y_i y_i) = 0 \quad 38)$$

Da nun $c = \sqrt{T} \sin \frac{\omega}{2}$, $d = \sqrt{T} \cos \frac{\omega}{2}$, als $d^2 - c^2 = \sqrt{T} \cos \omega$ und $2dc = \sqrt{T} \sin \omega$ wird, so folgt: $\operatorname{tg} \omega = \frac{\sum (Y_i x_i - X_i y_i)}{\sum (X_i x_i + Y_i y_i)}$ oder auch:

$$T \cos \omega = \frac{\sum (X_i x_i + Y_i y_i)}{\sum (X_i^2 + Y_i^2)}; \quad T \sin \omega = \frac{\sum (Y_i x_i - X_i y_i)}{\sum (X_i^2 + Y_i^2)}, \quad 39)$$

welche mit den Helmert'schen Formeln übereinstimmen, sobald der Winkel ω wie dort klein angenommen wird. Die zweite Helmert'sche Formel für ($T = 1$) ergibt sich übrigens aus den Formeln 35) unmittelbar durch Nullsetzen der Z -Koordinaten.

4. Die Herstellung der Karte aus den Ballonaufnahmen.

Von den vorliegenden drei Ballonaufnahmen des Marktes Gars am Inn wurden jene ausgewählt, deren Standpunkte am weitesten von einander entfernt sind. Die dritte Aufnahme wurde nur aushilfsweise bei der Aufsuchung zusammengehöriger Punkte und bei der Zeichnung der Ortschaft benützt. Das Seite 232 auseinandergesetzte Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Kernpunkte konnte hier nicht direkt angewendet werden, da Lotleinen oder andere Behelfe zur Orientierung gegen die Vertikale fehlten. Es wurden daher genäherte Ballonorte auf dem Wege des räumlichen Rückwärtseinschneidens²⁾

¹⁾ Die europäische Längengradmessung im 52. Grad Breite von Greenwich bis Warschau. I. Heft. Veröffentl. der k. preuss. geod. Inst. u. Centralbureaus der intern. Erdm. Berlin 1893, S. 47.

²⁾ Das ziemlich umständliche Verfahren hierfür habe ich in dem Referat über die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 6. Bd., S. 26) auseinandergesetzt. Der in dem erwähnten Vorgange liegende Rekurs auf eine schon vorhandene Karte ist für das weitere Resultat ohne jede Bedeutung und etwa der Benützung einer Karte bei Anlage einer Triangulation an die Seite zu stellen. Die atmosphärische Strahlenbrechung blieb hierbei, sowie auch bei den späteren Rechnungen ausser Betracht.

nach 3 Punkten, deren Lage dem Blatt 78 Wasserburg Ost der bayerischen Generalstabskarte 1:50 000 entnommen waren, bestimmt und nach ihnen die Kernpunkte konstruiert. Ihre Koordinaten ergaben sich auf E' : $x_0' = -7,5$, $y_0' = 135,1$, auf E'' : $x_0'' = -19,0$, $y_0'' = 137,8$ mm. Hierauf suchte ich auf beiden Negativen die Bilder von 11 zusammengehörigen Punkten auf, wobei möglichst genaue Identifikation angestrebt wurde, während die Bedeutung der betreffenden Punkte ganz nebensächlich war. Die Messung der Koordinaten gab folgendes Resultat:

Tabelle I.

Nr.	Bildebene E'		Bildebene E''		Bemerkungen
	x'	y'	x''	y''	
1	-58,80	11,90	69,25	-17,95	Ackerecke
2	28,10	34,65	-59,40	-50,70	"
3	70,80	-15,35	-64,30	13,20	Ecke eines Gärtchens
4	-67,95	-51,25	34,85	23,85	Ackerecke
5	-7,50	-1,20	0,15	-3,15	Wegkreuzung
6	-26,60	27,10	39,45	-49,35	Ackerecke
7	31,15	-45,25	-27,15	23,80	"
8	7,37	9,57	-16,35	-14,55	Zwickel zwischen zwei Wegen
9	-42,90	-41,35	21,05	21,35	Ackerecke
10	-2,40	-52,25	-6,30	25,60	"
11	-5,05	29,00	1,70	-51,55	"

Wurden mit den angeführten Koordinaten der Kernpunkte die Winkel gerechnet, welche die Kernebenen nach den Punkten 1—11 mit einer mittleren Ebene einschliessen, so ergaben sich die Zahlen, welche in nachstehender Tabelle unter der Rubrik „Vor der Ausgleichung“ enthalten sind. Diese Rechnung wurde alsdann viermal wiederholt, wobei je eine der Kernpunktskoordinaten um 1 mm abgeändert wurde. Aus dem Vergleich dieser Rechnungen liessen sich sodann die 10 Bedingungsgleichungen für die 4 unbekannten Verbesserungen der Kernpunktskoordinaten finden, welche die Kongruenz der beiden Kernstrahlenbüschel aussagen. Aus ihnen bildete man in der üblichen Weise die 4 Normalgleichungen und löste sie unter Berechnung der Gewichtskoeffizienten für die Unbekannten auf. Das Resultat der Ausgleichung war:

$$\begin{aligned} x_0' &= -7,82 \pm 0,10 \text{ mm} & x_0'' &= -17,16 \pm 0,13 \text{ mm} \\ y_0' &= 134,56 \pm 0,19 \text{ mm} & y_0'' &= 137,75 \pm 0,20 \text{ mm} \end{aligned}$$

Der mittlere Fehler einer Kernebenenrichtung ergab sich zu

$$\pm 0,029 = 1,74'.$$

Tabelle II.

Nr.	Vor der Ausgleichung		Differenz	Nach der Ausgleichung		Differenz
	E'	E''		E'	E''	
1	29°609	— 29°455	0,154	29°671	— 29°672	— 0°001
2	— 24,769	25,124	0,355	— 24,898	24,899	0,001
3	— 34,522	34,522	0,000	— 34,537	34,558	0,021
4	24,096	— 24,200	— 0,104	24,163	— 24,117	0,046
5	0,938	— 0,948	0,010	0,928	— 0,911	0,017
6	14,144	— 13,890	— 0,254	14,137	— 14,136	0,001
7	— 15,197	14,912	— 0,285	— 15,179	15,182	0,003
8	— 8,152	8,114	— 0,038	— 8,155	8,137	— 0,018
9	15,830	— 16,051	— 0,221	15,882	— 15,903	— 0,021
10	— 1,148	0,788	— 0,360	— 1,113	1,087	— 0,026
11	— 0,832	1,085	0,253	— 0,900	0,871	— 0,029

Mit den ansgeglichenen Kernpunktskoordinaten wurden nochmals die Winkel der Kernebenenbüschel aus beiden Bildern E' und E'' gerechnet. Die Werte derselben sind im zweiten Teile obenstehender Tabelle unter der Rubrik „Nach der Ausgleichung“ enthalten. Wie man sieht, ist die Uebereinstimmung hier eine sehr befriedigende.

Wurden zur Berechnung der Kernpunktskoordinaten nur jene Bedingungs-
gleichungen benutzt, welche sich auf die am günstigst gelegenen Punkte 1—5 beziehen, so ergaben sich dieselben wenig verschieden, nämlich:

$$\begin{aligned} x_0' &= -7,73 \pm 0,12 \text{ mm} & x_0'' &= -17,16 \pm 0,16 \text{ mm} \\ y_0' &= 134,46 \pm 0,22 \text{ mm} & y_0'' &= 137,96 \pm 0,25 \text{ mm} \end{aligned}$$

Dabei wurden die mittleren Fehler unter Zugrundelegung einer Unsicherheit der Kernebenenrichtung von $\pm 0,029^\circ$ gerechnet. Wie man sieht, leistet die hier weit einfachere Rechnung annähernd dasselbe, wie die verwickeltere Ausgleichung mit den 6 überschüssigen Bedingungs-
gleichungen.

Nunmehr wurde aus den beiden Werten der Kernebenenwinkel das Mittel gezogen und dieses zur Berechnung der Koordinaten nach den Formeln 2) und 3) benützt. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt in O_1 , die Y -Axe geht durch O_2 und die YZ -Ebene fällt mit der mittleren Kernebene zusammen. Einheit ist die Länge $O_1 O_2$. Vergleiche nachstehende Tabelle III.

Die Zahlen der letzten Rubrik bedeuten die kürzesten Abstände zweier Strahlen nach dem Zusammenpassen.

Betrachtet man die Zahlen der letzten Rubrik als Kräfte, welche senkrecht zu den betreffenden durch die Y -Achse gehenden Kernebenen wirken, so müssten dieselben nach dem Satze auf Seite 240 ein Gleichgewichtssystem bilden. Untersucht man dies etwa auf graphischem Wege durch Bildung der Kräfte- und Seilpolygone, so findet man das Erwartete nur annähernd bestätigt. Der Grund liegt darin, dass das Ausgleichungsprinzip, nach welchem die Kernpunkte gefunden wurden, nämlich Minimum der Quadrate der Differenzen der Kernebenenwinkel, nicht gleichwertig ist mit jenem, das dem genannten Satze zu grunde liegt, bei welchem das Minimum der Quadrate der Abstände entsprechender Visierstrahlen angestrebt wurde.

Tabelle III.

Nr.	x	y	z	k
1	— 0,26961	0,63133	0,47324	— 0,00001
2	0,19073	0,74850	0,41093	0,00001
3	0,29468	0,38709	0,42801	0,00019
4	— 0,22253	0,29056	0,49654	0,00042
5	— 0,00474	0,51456	0,46344	0,00014
6	— 0,11593	0,75468	0,46028	0,00001
7	0,12442	0,28094	0,45856	0,00003
8	0,06496	0,58051	0,45380	— 0,00014
9	— 0,13745	0,31962	0,48280	— 0,00019
10	0,00913	0,26560	0,47143	— 0,00021
11	0,00693	0,75372	0,44833	— 0,00029
O_1	0,00000	0,00000	0,00000	—
O_2	0,00000	1,00000	0,00000	—

Um den photogrammetrisch ermittelten Punkthaufen zu orientieren und seinen Masstab zu bestimmen, waren Messungen im Gelände notwendig, da sich das vorhandene Kartenmaterial als durchaus unzulänglich erwies. Eine Höhenaufnahme des betreffenden Gebietes existiert zur Zeit überhaupt nicht und auf dem Lageplan in 1:5000, der in den Katastralblättern NO I 23 und NO II 23 niedergelegt ist, liessen sich die ermittelten Punkte nicht mit Sicherheit auffinden. Als ich mich etwa 2 Monate nach der Ballonfahrt in Begleitung des damaligen Assistenten an der technischen Hochschule Herrn

Dr. Gg. Faber¹⁾ in die Gegend von Gars begab, liessen sich die auf den Photographien markierten Punkte noch ohne besondere Mühe und mit genügender Schärfe auffinden. Weniger befriedigend gelang das Eintragen in die Katasterblätter, da die vorgesehenen Hilfsmittel infolge der ungenügenden Evidenz der Blätter zur Einmessung nicht voll ausreichten. So musste der Punkt Nr. 10 mangels passend gelegener Fixpunkte unbestimmt bleiben. Ganz unbefriedigend erwies sich die barometrische Höhenbestimmung der Punkte, obwohl sie mit zwei geprüften Bohné'schen Aneroiden und einem selbstschreibenden Standaneroid ausgeführt wurde. Erstere verdanke ich der Güte meines Kollegen Herrn Dr. Max Schmidt, letzteres Herrn Professor Dr. Peter Vogel an der Artillerie- und Ingenieurschule. Der Grund liegt an der unruhigen Wetterlage des betreffenden sehr heissen und gewitterhaften Tages. Nach den Eintragungen in die Katasterblätter wurden unter Berücksichtigung des Papiereinganges die Koordinaten der Punkte bezogen auf den linken und unteren Rand des Blattes NO I 23 entnommen. Sie ergaben sich folgendermassen:

Tabelle IV.

Nr.	x	y	z
1	1743,2	2885,6	512,9
2	2001,8	928,6	440,9
3	478,0	666,2	440,3
4	316,5	2861,4	511,5
5	1136,5	1873,0	438,7
6	2171,4	2198,3	433,1
7	118,6	1438,7	459,6
8	1372,4	1543,0	410,1
9	401,8	2494,0	504,6
10	—	—	480,8
11	2111,5	1694,0	407,8

Die Fehler der X - und Y -Koordinaten können auf 1—2 m, jene der Z -Koordinaten auf 2—3 m veranschlagt werden.

Durch den Vergleich entsprechender Längen beider Punkthaufen wurde nun eine genäherte Länge der Basis $O_1 O_2$ bestimmt und mit dieser der photogrammetrische Punkthaufen umgerechnet. Sodann wurden beide Haufen

¹⁾ Herrn Dr. Gg. Faber bin ich hiefür, sowie für die Durchführung der vorbereitenden Rechnungen zu grossem Danke verpflichtet.

(Punkt 10 ausgenommen) auf ihre Schwerpunkte bezogen und der photogrammetrische durch successive Drehungen um die drei Koordinatenachsen mit dem geodätischen annähernd zur Deckung gebracht. Nunmehr liess sich nach Formel 25) ein genauer Masstab bestimmen, aus welchem die Länge $O_1 O_2$ zu 4125,2 m folgt. Dann konnte die endgiltige Zusammenlegung beider Haufen nach den Formeln 35) und 36) geschehen, deren Resultat in nachstehender Tabelle V zusammengefasst ist.

In derselben sind die photogrammetrisch ermittelten Koordinaten mit aufrechten, die geodätisch ermittelten mit kursiven Ziffern angegeben.¹⁾

Tabelle V.

Nr.	x	y	z
	ζ	η	ξ
1	554,6	1027,2	515,9
	<i>558,0</i>	<i>1027,3</i>	<i>512,9</i>
2	824,5	— 930,1	445,9
	<i>816,6</i>	<i>— 927,7</i>	<i>440,9</i>
3	— 708,6	— 1180,2	439,9
	<i>— 707,2</i>	<i>— 1192,1</i>	<i>440,3</i>
4	— 867,8	1002,2	511,8
	<i>— 868,7</i>	<i>1003,1</i>	<i>511,5</i>
5	— 48,7	10,3	435,9
	<i>— 48,7</i>	<i>14,7</i>	<i>438,7</i>
6	986,7	341,5	430,9
	<i>986,2</i>	<i>340,0</i>	<i>433,1</i>
7	— 1067,0	— 424,1	461,5
	<i>— 1066,6</i>	<i>— 419,6</i>	<i>459,6</i>
8	187,8	— 318,6	407,6
	<i>187,2</i>	<i>— 315,3</i>	<i>410,1</i>
9	— 787,0	— 636,2	505,4
	<i>— 783,4</i>	<i>— 635,7</i>	<i>504,6</i>
10	— 1076,7	59,0	480,9
	—	—	<i>480,8</i>
11	925,8	— 163,6	404,5
	<i>926,3</i>	<i>— 164,3</i>	<i>407,8</i>
O_1	— 2026,2	— 92,4	2496,2
O_2	2061,1	— 535,8	2144,8

¹⁾ Das Koordinatensystem ist auf der Karte Tafel II eingetragen. Die Punkte sind durch rote Kreise und Höhenziffern bezeichnet.

Mit denselben Formeln wurden auch die Punkte O_1 und O_2 umgerechnet und damit die endgiltige Lage der Ballonorte bestimmt. Ihre Koordinaten im System der Katasterblattränder (Vergl. Tabelle IV.) sind

für O_1 : $x = -841,0$ m, $y = 1765,9$ m, $z = 2496,2$ m

für O_3 : $x = 2902,1$ m, $y = 1322,5$ m, $z = 2144,8$ m

Aus der Summe der Quadrate der Koordinatenunterschiede ergibt sich mit Berücksichtigung des Umstandes, dass $30 - 7 = 23$ überschüssige Differenzen vorhanden sind, ein mittlerer Koordinatenunterschied von $\pm 2,8$ m.

Die mittlere Entfernung zweier Punkte der beiden Haufen beläuft sich auf 5 m.

Dass ein nicht unbeträchtlicher Teil dieses Unterschiedes auf Rechnung der unsicheren geodätischen Punktbestimmung, namentlich der barometrischen Höhenmessung zu setzen ist, geht aus den früheren Bemerkungen, besonders aber auch daraus hervor, dass der mittlere Unterschied der X- und Y-Koordinaten nur 2,7 m, jener der Z-Koordinaten aber 3,0 m beträgt.

Nach dem Zusammenschluss der Visierstrahlenbündel wäre ein noch erheblich besseres Resultat zu erwarten gewesen. So beträgt der mittlere kürzeste Abstand zweier zusammengehöriger Strahlen nach Umrechnung der letzten Rubrik der Tabelle III in Metermass und Berücksichtigung des Umstandes, dass von den 11 Abständen 6 überschüssig sind, nur 1,1 m. Dazu kommt, dass die betreffenden Strahlen sich unter Winkeln kreuzen, die nur wenig von 90° abweichen. Sie liegen nämlich zwischen den Grenzen $85^\circ 685$ bei Punkt 5 und $99^\circ 384$ bei Punkt 4. Da diese Winkel selbst nur um einige Hundertstel des Grades unsicher sind, kann der mittlere Punktfehler eines photogrammetrischen Punktes sicher auf weniger als 2 m geschätzt werden.

Nach dem im Ganzen befriedigenden Ergebnis des Vergleiches des photogrammetrischen mit dem geodätischen Punkthaufen verlohnte es sich, die Zahl der rekonstruierten Punkte derart zu verdichten, dass sich aus ihnen eine Karte des auf beiden Photographien dargestellten Gebietes im Masstab 1:10 000 zeichnen liess.¹⁾ Der nächstliegende Weg, aus den Koordinaten der Bildpunkte mittels der Formeln 1), 2) und 3) die Koordinaten des Raumpunktes im System der Tabelle III zu rechnen und mittels passender Transformationsformeln zum System der Tabelle V überzugehen, war schon deshalb etwas umständlich, weil einheitliche Transformationsformeln dieser Art nicht vorlagen.²⁾ Ich schlug

¹⁾ Vergleiche für das Folgende Tafel II.

²⁾ Ich war damals noch nicht im Besitz der Formeln 23) und 24).

daher ein Verfahren ein, welches sich an das in den Sitzungsberichten der math.-phys. Klasse Bd. 30 (1900) S. 149 auseinandergesetzte unmittelbar anschliesst. Auf eine Vergleichsebene in der mittleren Terrainhöhe von 440 m denkt man sich zusammengehörige Bilder eines Punktes P_i von den zugehörigen Standpunkten O_1 bzw. O_2 projiziert. Die betreffenden Projektionspunkte seien Q_i' und Q_i'' . Ihre Verbindungslinie muss durch den Schnittpunkt O_0 gehen, in welchem die Verbindungslinie $O_1 O_2$ die Vergleichsebene trifft. Diese Punkte Q_i' und Q_i'' werden auf rechnerischem Wege, der alsbald auseinander gesetzt werden soll, ermittelt. Das Ziehen ihrer Verbindungslinie gibt eine Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung bzw. die Zusammengehörigkeit der Bildpunkte. Folgen die Punkte $Q_i' Q_i'' O_0$ in der gleichen Reihenfolge wie $O_1 O_2 O_0$ aufeinander, so liegt der Punkt P_i unterhalb der Vergleichsebene, im andern Falle oberhalb. Fallen Q_i' und Q_i'' zusammen, so liegt P_i gerade in der Vergleichsebene. Die Entfernung $Q_i' Q_i''$ wächst mit der Entfernung des Punktes P_i von der Vergleichsebene. Den Grundriss P_{i1} des Punktes P_i erhält man als Schnitt der Strahlen $Q_i' O_{11}$ und $Q_i'' O_{21}$, wobei O_{11} und O_{21} die Grundrisse der Standpunkte bedeuten. Analog ergibt sich der Aufriss. In unserem Falle wird der Schnitt im Grundriss sehr spitz, im Aufriss auf die YZ -Ebene dagegen nahezu rechtwinklig. Es wurde daher dieser Aufriss zuerst bestimmt und der Grundriss durch Herabloten gefunden.

Zur Berechnung der Punkte Q_i' (bzw. Q_i'') projiziert man zunächst vier passend gewählte Punkte der Bildebene E' (bzw. E'') auf die Vergleichsebene. Als solche wählt man am einfachsten die Mitten der Rahmenseiten. Dieselben begrenzen das Bildfeld in der Längs- und Querrichtung. Die zugehörigen Bildfeldwinkel rechnen sich aus den halben Rahmendimensionen von 52,2 und 72,1 mm, sowie der Bildweite von 151,57 mm zu $2 \times 19^{\circ}004$ bzw. $2 \times 25^{\circ}440$. Um die Projektionen der Rahmenmitten zu finden, muss erst die Orientierung der Rahmenseiten gerechnet werden. Das geschieht durch die Auflösung einer Reihe sphärischer Dreiecke, welche mit den zugehörigen Formeln kurz angeführt werden mögen. Dabei denkt man sich das Visierstrahlenbündel durch O_1 an die beiden Strahlen $O_1 O_2$ und $O_1 P_1$, deren Lage im Koordinatensystem der Tabelle V festliegt, angeschlossen. Es sind dann folgende Operationen auszuführen (Vergl. Fig. 5): 1) Berechnung der Nadirdistanzen ε und λ , sowie der Azimutdifferenz δ der Strahlen $O_1 O_2$ und $O_1 P_1$ aus den Koordinatendifferenzen ihrer Endpunkte. 2) Berechnung des von der nach unten gerichteten Senkrechten $O_1 N$ in O_1 und den genannten Strahlen gebildeten Dreikantes $O_1 (N O_2 P_1)$ aus den zwei Seiten ε und λ und dem eingeschlossenen Winkel δ mittels folgender Formel für die Winkel μ an $O_1 O_2$ und ν an $O_1 P_1$:

$$\operatorname{tg} \frac{\mu + \nu}{2} = \frac{\cos \frac{\lambda - \varepsilon}{2}}{\cos \frac{\lambda + \varepsilon}{2}} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}; \operatorname{tg} \frac{\mu - \nu}{2} = \frac{\sin \frac{\lambda - \varepsilon}{2}}{\sin \frac{\lambda + \varepsilon}{2}} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2},$$

$$\sin \gamma_1' : \sin \varepsilon = \sin \delta : \sin \nu.$$

Die dritte Seite γ_1' trat schon in den Formeln 2) auf (Kontrolle). 3) Rechnung des ausgeglichenen Kernebenenwinkels ψ_1' aus: $\psi_1' = \chi_1 + \frac{\sum \psi_i'}{n}$ (vgl. S. 236).

4) Auflösung des Dreikantes $O_1(N O_2 A_1)$, wobei $O_1 A$ die optische Axe der Bildebene E' ($=$ Senkrechte zu E' im Hauptpunkte A_1) bedeutet, aus den Seiten $N O_1 O_2 = \varepsilon$ und $O_2 O_1 A = \alpha$ (Formel 1) und dem eingeschlossenen Winkel an $O_1 O_2 = \mu - \psi_1'$:

$$\operatorname{ctg} \frac{\sigma - \tau}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha - \varepsilon}{2}}{\cos \frac{\alpha + \varepsilon}{2}} \operatorname{ctg} \frac{\mu - \psi_1'}{2}, \operatorname{ctg} \frac{\sigma + \tau}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha - \varepsilon}{2}}{\sin \frac{\alpha + \varepsilon}{2}} \operatorname{ctg} \frac{\mu - \psi_1'}{2},$$

$$\sin \varepsilon_1 : \sin \alpha = \sin (\mu - \psi_1') : \sin \sigma.$$

Dabei ist τ die Horizontalprojektion des Winkels $A O_1 O_2$ und σ der Winkel, welchen die Ebene $O_2 O_1 A$ mit der Vertikalebene durch die optische Axe $O_1 A_1$ einschliesst. ε_1 ist die Nadirdistanz der optischen Axe. 5) Auflösung des Dreikantes $O_1(N A B_1)$, wo B_1 die Mitte der oberen (unteren) Rahmen-seite bedeutet, aus den Seiten $N O_1 A = \varepsilon_1$, $A O_1 B_1 = \beta_1$ dem halben Bildfeldwinkel in der Längsrichtung und dem eingeschlossenen Winkel an $O_1 A = \sigma - \varphi_0$ (Formel 1)

$$\operatorname{tg} \frac{\tau' + \sigma'}{2} = \frac{\cos \frac{\varepsilon_1 - \beta_1}{2}}{\cos \frac{\varepsilon_1 + \beta_1}{2}} \operatorname{tg} \frac{\sigma - \varphi_0}{2}, \operatorname{tg} \frac{\tau' - \sigma'}{2} = \frac{\sin \frac{\varepsilon_1 - \beta_1}{2}}{\sin \frac{\varepsilon_1 + \beta_1}{2}} \operatorname{tg} \frac{\sigma - \varphi_0}{2},$$

$$\sin \varepsilon_1' : \sin \varepsilon_1 = \sin (\sigma - \varphi_0) : \sin \sigma'.$$

Dabei ist τ' die Horizontalprojektion des Winkels $A O_1 B_1$ und ε_1' die Nadirdistanz von $O_1 B_1$.

Ähnlich werden die entsprechenden Grössen für die Strahlen von O_1 nach den Mitten $B_2 B_3 B_4$ der drei anderen Rahmenseiten gefunden. Aus den Winkeln τ' , τ und dem Azimut von $O_1 O_2$ erhält man das Azimut von $O_1 B_1$. Zusammen mit der Nadirdistanz ε_1' bestimmt es die Koordinaten des Punktes C_1 , in welchem $O_1 B_1$ die Vergleichsebene trifft. Hat man so die Koordinaten der Punkte $C_1 C_2 C_3 C_4$, D_1 ermittelt, in welchen die Strahlen von O_1 nach $B_1 B_2 B_3 B_4$

und A_1 die Vergleichsebene treffen, so rechnet man die Stücke $D_1 C_1 = b$, $D_1 C_2 = a$, $D_1 C_3 = c_1$, $D_1 C_4 = d_1$. Sie sind die Perspektiven der Stücke $A_1 B_1 = b'$ und $A_1 B_2 = A_1 B_4 = a'$ des Axenkreuzes der Bildebene E' . Die Koordinatenachsen der ξ' und η' sowie jene der ξ'' und η'' , welche vom Bilde E'' herrühren, sind auf der Karte Tafel II eingetragen.

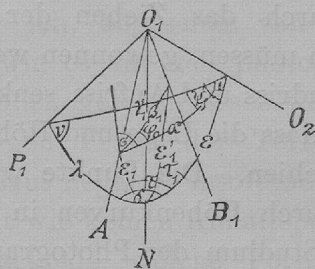


Fig. 5.

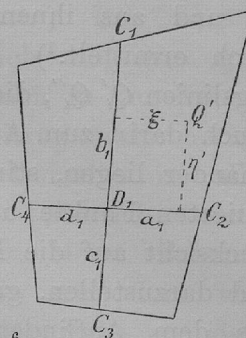
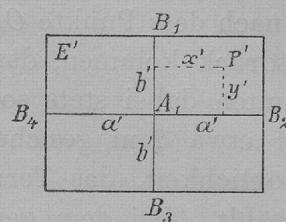


Fig. 6.

Man bezieht nun die Punkte Q_i' auf ein System schiefwinkliger Koordinaten, $\xi_i' \eta_i'$, deren Axen die Perspektiven der Axen in der Bildebene E' sind (Vergl. Fig. 6). Zwischen den Koordinaten $\xi_i' \eta_i'$ eines Punktes Q_i' und den $x_i y_i$ des Bildpunktes P_i' in E' bestehen dann lineare Beziehungen folgender Art:

$$\frac{1}{\xi'} = \alpha + \beta \frac{y'}{x'} + \gamma \frac{1}{x'}, \quad \frac{k}{\eta'} = \alpha \frac{x'}{y'} + \beta + \gamma \frac{1}{y'}.$$

Diese Gleichungen müssen für folgende zusammengehörige Werte $\xi' \eta' x' y'$ erfüllt sein:

ξ'	η'	x'	y'
a_1	0	a'	0
$-d_1$	0	$-a'$	0
0	b_1	0	b'
0	$-c_1$	0	$-b'$

Daraus ergeben sich folgende Gleichungen zur Bestimmung der α, β, γ, k :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} &= \alpha + \gamma \frac{1}{a'} & \frac{k}{b_1} &= \beta + \gamma \frac{1}{b'}, \\ -\frac{1}{d_1} &= \alpha - \gamma \frac{1}{a'} & -\frac{k}{c_1} &= \beta - \gamma \frac{1}{b'}, \end{aligned}$$

oder:

$$\gamma = \frac{a'(a_1 + d_1)}{2 a_1 d_1}, \quad \alpha = \frac{d_1 - a_1}{2 a_1 d_1}, \quad k = \frac{a' b_1 c_1 (a_1 + d_1)}{b' a_1 d_1 (b_1 + c_1)}, \quad \beta = \frac{a' (a_1 + d_1) (c_1 - b_1)}{2 b' a_1 d_1 (b_1 + c_1)}$$

Formeln derselben Art gestatten das Umrechnen der Koordinaten x_i'' , y_i'' eines Bildpunktes auf E'' in die Koordinaten ξ_i'' , η_i'' des entsprechenden Punktes Q_i'' der Vergleichsebene.

Mittels solcher Formeln, die sich mit dem Rechenschieber sehr bequem auswerten lassen, wurden die Koordinaten von 175 Punktepaaren Q_i' , Q_i'' bestimmt und aus ihnen Grundriss und Höhe des zugehörigen Punktes P_i graphisch ermittelt.¹⁾ Die Kontrollen, welche durch das Ziehen der Verbindungslinien Q_i' , Q_i'' , die nach dem Punkte O_0 laufen müssen, gewonnen werden, oder auch darin zum Ausdruck kommen, dass Grundriss und Aufriss senkrecht übereinander liegen, stimmten dabei stets so gut, dass die Lage und Höhe der konstruierten Punkte auf etwa 2 m gesichert erschien. Die Punkte wurden mit Rücksicht auf die Möglichkeit, das Terrain durch Höhenkurven in 10 m Abstand darzustellen, gewählt. Bei dem genauen Studium der Photographien, welches dem Auffinden zusammengehöriger Bildpunkte vorhergehen muss, gewannen die auf den ersten Blick so ausdruckslos und flach erscheinenden Bilder Formen und Plastik. Nicht Licht und Schatten heben dabei die ausgezeichneten Linien des Geländes hervor, sondern neben der Bepflanzung, welche die gröberen Formen ausdrucksvoll betont, sind es fast unmerkliche Abweichungen von der perspektivischen Verzerrung entsprechender Gebilde, die das geschulte Auge darauf hinweisen, dass unebene Formen zur Abbildung gelangt sind. Kaum messbare Wellungen in den scharfen Linien des Wegenetzes und der Bebauungsgrenzen lassen erkennen, ob das betreffende Gebilde in einer Horizontalebene oder einer Vertikalebene liegt oder räumlich gekrümmt ist. Letzterer Fall wird meistens daran erkannt, dass die Wendepunkte in beiden Bildern sich nicht entsprechen. Dort, wo das Gelände in beiden Bildern voll beleuchtet erscheint, wird man immer genügend Punkte zur ausdrucksvollen Darstellung der Formen finden, es sei denn, dass Waldbedeckung ein Hindernis bietet. Wolkenschatten, auch schon leichter Schleier, wirkt sehr störend auf die Reichhaltigkeit der Punktbestimmung. Die Zahl der bestimmten Punkte — im Ganzen 186, also etwa 31 auf den Quadratkilometer — reichte aus, um an der Hand der Photographien das Wegenetz und die Kulturgrenzen nach dem Augenmass mit einer für den gewählten Masstab von 1:10 000 genügenden Genauigkeit einzutragen. Auf gleiche Weise wurden auch die Gebäude bestimmt, die also hier kein höheres Mass von Richtigkeit beanspruchen können. Für die Darstellung der zahlreichen Gebäude des Marktes und Klosters Gars kam der Umstand zu gute, dass die-

¹⁾ Diese Punkte sind in der Karte Tafel II durch einen schwarzen Punkt mit Höhenzahl bezeichnet.

selben auf einer nahezu ebenen, in 435 m Höhe gelegenen Flussterrasse liegen. Eine dritte Photographie, deren Aufnahmeort sich zwischen den beiden Standpunkten O_1 und O_2 befindet und die Ortschaft in fast senkrechter Daraufrsicht zeigt, wurde mit einem Möbius'schen Netz, aus vier vorher bestimmten Punkten konstruiert, überzogen und das entsprechende Netz auf der Karte zur perspektivischen Umzeichnung der Gebäudekomplexe benützt.¹⁾ Das Gelände selbst stellte ich, abgesehen von den Höhenkurven, absichtlich möglichst genau so dar, wie es auf den photographischen Bildern und auch in der Natur selbst von oben gesehen erscheint. Ich hoffe damit einen Beitrag zu der noch immer strittigen Frage der Terrairdarstellung zu liefern. Derselbe ist allerdings durchaus negativ, insoferne es sich herausstellt, dass die natürliche Beleuchtung so gut wie keinen Anhaltspunkt für die Terrairdarstellung bietet. Beleuchtungsunterschiede, welche Formen charakterisieren könnten, sind dort, wo nicht gerade Sahlagschatten auftreten, nicht vorhanden. Man sieht von der Höhe aus keinerlei Formen, sondern ausschliesslich Farben, die durch die Vegetationsdecke bedingt sind. Die Formen kommen nur in den wechselnden perspektivischen Verzerrungen der Linien zum Ausdruck. Die immer noch bestehende Uebersichtlichkeit verdankt das Kartenbild in erster Linie dem Umstande, dass auch die Vegetationsdecke in hohem Masse von der Terrairform bedingt ist und dunkler Wald- oder Buschbestand die Steilhänge zum Ausdruck bringt. Will man das Gelände unabhängig von solchen zufälligen Umständen als reine Form wiedergeben, muss man notwendig zu schematischen künstlichen Mitteln greifen, deren Berechtigung nicht aus dem Anblick der Natur abgeleitet werden kann. Wenn solche Mittel, wie z. B. die sogenannte schiefe Beleuchtung des Terrains, dadurch, dass sie uns die mit ihrem Prinzip unvereinbaren Körper- und Schlagschatten vortäuscht, allgemein verständlich, also gewissermassen natürlich wirken, so ist das zweifellos ein Vorteil, der aber nicht etwa dadurch gesteigert werden kann, dass man möglichst Anschluss an die Natur sucht, im Gegenteil, je mehr man sich derselben nähert, umso sicherer verliert man die Anschaulichkeit, die ja dort gar nicht vorhanden ist. Jede Geländedarstellung, die ihrem Zwecke dienen soll, muss notwendig konventionell und bewusst unnatürlich sein.

Zum Schlusse sei noch kurz die Frage erörtert, inwieweit die vorliegende photogrammetrische Aufnahme vom Ballon aus typisch ist, oder nur zufällig

¹⁾ Vergl. hiezu: Ueber die Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. Sitzungsberichte der k. b. Akad. der Wiss. II. Cl. 1900. Tafel I.

Markt Gars a/Inn



Erste Aufnahme aus 2496,2 m Höhe.



Zweite Aufnahme aus 2144,8 m Höhe.



UMGEBUNG VON GARS _{AM} INN.

Masstab=1:10000, Aequidistanz 10m.

