

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1989

MÜNCHEN 1990

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Beispiele zur ordnungsgeometrischen Scheiteltheorie

von Georg Nöbeling

Es sei K die Klasse aller k -sekantenfreien, glatten (geschlossenen) Kurven C^1 im k -dimensionalen, reellen, projektiven Raum P^k ($k \geq 2$) mit endlicher linearer Ordnung $\text{ord}(C)$ ($:= \max |C \cap L|$, genommen über alle Hyperebenen L). K zerfällt in zwei Unterklassen: a) die Klasse K' aller $C' \in K$ mit $\text{ord}(C') = k, k+2, k+4, \dots$; b) die Klasse K'' aller $C'' \in K$ mit $\text{ord}(C'') = k+1, k+3, \dots$.^{2,3,4} Für jedes $C \in K$ sei $s(C)$ die Anzahl aller Scheitel von C (ein Punkt p von C heißt ein Scheitel von C , wenn in jeder Umgebung von p mindestens $k+1$ Punkte von C existieren, welche auf einer Hyperebene liegen). Wir behaupten:

Zu jedem $m = 0, 2, 4, \dots, \infty$ existiert a) in K' eine Kurve C'_m mit $s(C'_m) = m$ und $\text{ord}(C'_m) \leq 9k^2$, b) in K'' eine Kurve C''_m mit $s(C''_m) = k+1+m$ und $\text{ord}(C''_m) \leq 9k^2$.⁵

Beweis. 1. Wir verwenden mehrfach folgende Kriterien (A), (B), (C). Es seien $x_0, x_1, \dots, x_k$ homogene Koordinaten im P^k . Ein Stück einer Kurve C im P^k sei durch eine k -mal stetig differenzierbare Vektorfunktion $X(t) = (x_0(t), \dots, x_k(t))$ dargestellt. (A) Hat C an einer Stelle t einen Scheitel, so sind $X, X', \dots, X^{(k)}$ an dieser Stelle linear abhängig. – Nun sei speziell $x_0 = 1, x_i = t^{n_i} + o(t^{n_i})$ mit ganzen $n_i > 0$ für $i = 1, \dots, k$ und $n_1 < \dots < n_k$; an der Stelle $t = 0$ liege kein Häufungspunkt der Scheitel von C . (B) Sind $n_1, n_2 - n_1, \dots, n_{k-1} - n_{k-2}$ ungerade, so ist C an der Stelle $t = 0$ glatt. (C) Sind $n_1, n_2 - n_1, \dots, n_{k-1} - n_{k-2}$ ungerade, so hat C an der Stelle $t = 0$ einen Scheitel, wenn und nur wenn $n_k - n_{k-1}$ gerade ist.⁶

2. Als Muster für einen Teil der folgenden Überlegungen erledigen wir zunächst den Fall $m = 0$.

2a. Definition von C'_0 mittels lokaler Parameter t und u ($-\infty < t < \infty; -\infty < u < \infty; tu = 1$):

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, x_1 = t, \dots, x_{k-1} = t^{k-1}, x_k = t^k, \\ x_0 &= u^k, x_1 = u^{k-1}, \dots, x_{k-1} = u, x_k = 1. \end{aligned}$$

Angenommen, C'_0 hat eine k -Sekante S . Die Projektion π aus dem der Stelle $u = 0$ entsprechenden, „unendlich fernen“ Punkt p_∞ von C'_0 in den $P^{k-1} \subset P^k$ mit der Gleichung $x_k = 0$ bildet C'_0 schlicht ab auf die Kurve $\pi(C'_0)$, definiert durch $x_0 = 1, x_1 = t, \dots, x_{k-1} = t^{k-1}$. Enthielte S den Punkt p_∞ nicht, so wäre $\pi(S)$ eine Hyperebene im P^{k-1} ; ihre Gleichung sei $a_0 x_0 + \dots + a_{k-1} x_{k-1} = 0$; das Polynom $a_0 + a_1 t + \dots + a_{k-1} t^{k-1}$ hätte dann mindestens k reelle (nicht notwendig verschiedene) Nullstellen. Widerspruch. Also liegt p_∞ in S . Dann ist $\pi(S) = S \cap P^{k-1}$ und $\pi(S)$ eine $(k-1)$ -Sekante von $\pi(C'_0)$. Eine mehrfache Wiederholung dieser Überlegung führt zu dem Schluß, daß die Kurve im P^2 , definiert durch $x_0 = 1, x_1 = t, x_2 = t^2$ einen Doppelpunkt hat. Abermals Widerspruch. Also hat C'_0 keine k -Sekante. – Durch Entwicklung von $x_0, x_1, \dots, x_k$ nach $\bar{t} = t - t_0$ für eine beliebige Stelle t_0 mit $-\infty < t_0 < \infty$ und durch eine lineare Koordinatentransformation können wir an der Stelle $\bar{t} = 0$ die Situation der Kriterien (A), (B) und (C) herstellen. Sie ergeben, daß C'_0 an der Stelle $\bar{t} = 0$, d. h. an der Stelle t_0 glatt ist und dort keinen Scheitel hat. Analog für ein u_0 . – Für jedes $C \in K$ ist $\text{ord}(C) \geq k$. Weil jede Gleichung $a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k = 0$ mit reellen Koeffizienten höchstens k reelle Nullstellen hat, ist $\text{ord}(C'_0) \leq k$. Also ist $\text{ord}(C'_0) = k$.

2b. Für jedes reelle t sei $R(t) := (1 + t^2)^{-1}$. Für jedes ganze $n \geq 1$ ist die n -te Ableitung $R^{(n)}(t) = P_n(t) \cdot R^{n+1}(t)$, wobei P_n ein Polynom n -ten Grades ist. – Definition von C''_0 :

$$x_0 = 1, x_1 = t, \dots, x_{k-1} = t^{k-1}, x_k = R(t);$$

$$x_0 = u^{k-1}, x_1 = u^{k-2}, \dots, x_{k-1} = 1, x_k = u^{k+1} R(u).$$

Analog wie in 2a ergibt sich: C''_0 ist k -sekantenfrei und glatt. Wäre $\text{ord}(C''_0) < k + 1$, also $\text{ord}(C''_0) = k$, so gäbe es eine Gleichung $a_0(1 + t^2) + a_1 t(1 + t^2) + \dots + a_{k-1} t^{k-1}(1 + t^2) + a_k = 0$ mit reellen Koeffizienten, welche k reelle und eine nicht reelle Nullstelle hat; also ist $\text{ord}(C''_0) = k + 1$. Aus letzterem folgt (l. c.⁴), daß C''_0 an genau $k + 1$ Stellen einen Scheitel hat; es sind dies die k Nullstellen $t_1, \dots, t_k$ des Polynoms P_k und die Stelle $u = 0$.

3. Der Fall $0 < m = 2n < \infty$. 3a. Es sei $C_0^\star$ die folgendermaßen definierte „Basiskurve“:

$$x_0 = 1, x_1 = t, \dots, x_{k-1} = t^{k-1}, x_k = t^{k+2};$$

$$x_0 = u^{k+2}, x_1 = u^{k+1}, \dots, x_{k-1} = u^3, x_k = 1.$$

Analog wie in 2a ergibt sich, daß $C_\circ^*$ k -sekantenfrei und glatt ist und daß $C_\circ^*$ keinen Scheitel hat. Also ist $\text{ord}(C_\circ^*) = k^1$). Wir werden die Kurve C'_m gewinnen, indem wir aus der Basiskurve n kleine Stücke herausschneiden und durch Bogen B_i mit je zwei Scheiteln ersetzen.

Zunächst wählen wir n Zahlen $t_1, \dots, t_n$ im offenen Einheitsintervall der t -Geraden. Es seien $p_i = x(t_i)$, $i = 1, \dots, n$ die zugehörigen Punkte von $C_\circ^*$. Wegen $\text{ord}(C_\circ^*) = k$ existieren Umgebungen U_i der p_i (offen im P^k) mit folgender Eigenschaft: 1) Jede Hyperebene hat mit höchstens k der U_i einen Durchschnitt $\neq \emptyset$. Daher für hinreichend kleines $\varepsilon_i > 0$ und $\delta_i > 0$: 2) Jeder Punkt $(1, t, \dots, t^{k-1}, t^{k+2} + \tau)$ des P^k mit $|t - t_i| \leq \delta_i$ und $|\tau| \leq \varepsilon_i$ liegt in U_i . Für jedes $i = 1, \dots, n$ wählen wir nun ein $c_i > 0$, für welches wir zunächst nur dreierlei fordern: $c_i > 1$ und $c_i > 1/\delta_i$; das offene Intervall I_i mit dem Mittelpunkt t_i und der Länge $2/c_i$ ist $\subset I$; $I_i \cap I_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Sodann sei g die folgendermaßen definierte Funktion: $g(t) := 0$ für alle reellen t mit $|t| \geq 1$ und $g(t) := (1 - t^2)^{k+2}$ für $|t| \leq 1$. g ist $k+1$ -mal stetig differenzierbar und es ist $|g| \leq 1$.

Für ein δ_i und ein c_i , welche den vorstehenden Bedingungen genügen, definieren wir schließlich $f_i(t) := \varepsilon_i g(c_i(t - t_i))$. Es gilt: 3i) $|f_i| \leq \varepsilon_i$; 4i) f_i verschwindet identisch außerhalb von I_i ; 5i) f_i ist $k+1$ -mal stetig differenzierbar. Für jedes $r = 0, 1, \dots, k+1$ ist die r -te Ableitung $f_i^{(r)} = \varepsilon_i c_i^r g^{(r)}$. Daher können wir ε_i und c_i im Rahmen der bereits aufgestellten Forderungen so wählen, daß gilt: 6i) an genau zwei Stellen $t'_i, t''_i \in I_i$ ist $f_i^{(k)}(t) = t^2 \cdot (k+2)!/2$; 7i) an diesen beiden Stellen ist $f_i^{(k+1)}(t) \neq t \cdot (k+2)!$ (Denn es sei $M(\varepsilon_i, c_i) := \max f_i^{(k)} -$ es ist > 0 - und $t_i = t(\varepsilon_i, c_i)$ das kleinste $t \in I_i$ mit $f_i^{(k)}(t) = M(\varepsilon_i, c_i)$. Dann können wir ε_i (beliebig klein) und c_i (beliebig groß) so wählen, daß erstens $f_i^{(k)}(t_i) = t_i^2 \cdot (k+2)!/2$ ist und zweitens an jeder Stelle $t \neq t_i$ von I_i , an welcher $f_i^{(k)}$ ein lokales Maximum hat, dieses Maximum $< t^2 \cdot (k+2)!/2$ ist. In I_i existiert dann genau ein zweites, von t_i verschiedenes t'_i (es ist $< t_i$) mit $f_i^{(k)}(t'_i) = (t'_i)^2 \cdot (k+2)!/2$. Die beiden Stellen $t'_i := t_i$ und t''_i leisten das Verlangte.)

Jetzt sei $f := f_1 + \dots + f_n$. Dann folgt aus 3i)–7i), weil die Intervalle I_i fremd sind: 3) $|f| \leq \varepsilon_i$ auf I_i ; 4) f verschwindet identisch außerhalb von $I_1 \cup \dots \cup I_n \subset I$; 5) f ist $k+1$ -mal stetig differenzierbar; 6) an genau zwei Stellen $t'_i, t''_i \in I_i$ ist $f^{(k)}(t) = t^2 \cdot (k+2)!/2$; 7) an diesen Stellen ist $f^{(k+1)}(t) \neq t \cdot (k+2)!$

Definition der Kurve $C'_m \in K'$:

$$x_0 = 1, x_1 = t, \dots, x_{k-1} = t^{k-1}, x_k = t^{k+2} - f(t);$$

$$x_0 = u^{k+2}, x_1 = u^{k+1}, \dots, x_{k-1} = u^3, x_k = 1 \quad (|u| < 1).$$

Wie in 2a ergibt sich zufolge 3)–7): C'_m ist glatt und k -sekantenfrei; an den m Stellen $t'_1, \dots, t''_n$ und nur dort hat C'_m einen Scheitel. Weiter ist für jedes i der Bogen $B_i \subset C'_m$ über $\bar{I}_i$ streng konvex und hat nur zwei Scheitel; also ist $\text{ord}(B_i) \leq k+2$ zufolge l. c.²⁾, II. Ist nun L eine Hyperebene, welche mit C'_m und C_0^* höchstens Schnittpunkte gemein hat, so setzen wir $|C'_m \cap L| =: l$. Dann ist $l \equiv |C_0^* \cap L| \pmod{2}$, wegen $\text{ord}(C_0^*) = k$ also $\text{ord}(C'_m) \equiv k$ und folglich $C'_m \in K'$. Weil $\text{ord}(C_0^*) = k$ ist, liegen von den l Punkten von $C_0^* \cap L$ höchstens k nicht in den Bogen B_i und nach 1)–4) hat L mit höchstens k Bogen B_i einen nichtleeren Durchschnitt. Es folgt $l \leq k + k(k+2) \leq 9k^2$. Daher ist auch $\text{ord}(C'_m) \leq 9k^2$.

3b. Wir modifizieren die Überlegungen in 3a folgendermaßen. Als Grundkurve C_0^{**} wählen wir die in 2b definierte Kurve C''_0 . Als Intervall I wählen wir ein offenes Intervall der t -Geraden mit folgenden zwei Eigenschaften: I enthält keine der $k+1$ Stellen, an denen C_0^{**} einen Scheitel hat; über I ist die k -te Ableitung $R^{(k)}$ von R positiv und monoton wachsend. Wir ersetzen in 1): k durch $k+1$; in 6_i) und 6): $t^2 \cdot (k+2)!/2$ durch $R^{(k)}(t)$; in 7): $t \cdot (k+2)!$ durch $R^{(k+1)}(t)$. Nun die Definition von C''_m :

$$x_0 = 1, x_1 = t, \dots, x_{k-1} = t^{k-1}, x_k = R(t) - f(t);$$

$$x_0 = u^{k-1}, x_1 = u^{k-2}, \dots, x_{k-1} = 1, x_k = u^{k+1} R(u).$$

Analoge Schlüsse wie in 3a ergeben, daß C''_m k -sekantenfrei und glatt ist, an den m Stellen $t'_1, \dots, t''_n$ und nur dort einen Scheitel hat und daß schließlich $\text{ord}(C''_m) \leq 9k^2$ ist.

4. Der Fall $m = \infty$. 4a. Es sei C_0^* die in 3a definierte Basiskurve.

Vorbemerkung. In C_0^* existiert eine Folge von Punkten $p_i = x(t_i)$ mit $1 > t_1 > t_2 \dots$, $\lim t_i = 0$ und zu jedem i eine (im P^k offene) Umgebung U_i von p_i mit $\bar{U}_i \cap \bar{U}_j = \emptyset$ für $i \neq j$ mit folgender Eigenschaft: Je $k+1$ Punkte $q_{i_1}, \dots, q_{i_{k+1}}$ mit $q_{i_1} \in \bar{U}_{i_1}, \dots, q_{i_{k+1}} \in \bar{U}_{i_{k+1}}$ und verschiedenen $i_1, \dots, i_{k+1}$ sind linear unabhängig.

Die Schmieghyperebene L_0 an C_0^* im Punkt $p_0 = x(0)$ hat mit C_0^* nur den Punkt p_0 gemein. Wählen wir also den Punkt $\underline{p}_1 = x(t_1)$ mit $1 > t_1 > 0$ beliebig und eine Umgebung U_1 von $\underline{p}_1$ mit $\bar{U}_1 \cap L_0 = \emptyset$, so existiert eine Umgebung W^1 von p_0 mit $\bar{W}^1 \cap \bar{U}_1 = \emptyset$ derart, daß

gilt: Für je k Punkte $w_1^1, \dots, w_k^1 \in W^1 \cap C_0^*$, verschieden oder nicht, und jeden Punkt $q_1 \in \overline{U_1}$ sind die $k+1$ Punkte $w_1^1, \dots, w_k^1, q_1$ linear unabhängig (bei zusammenfallenden Punkten w_1^1 ist der von ihnen aufgespannte Schmiegraum zu nehmen). Induktionsvoraussetzung:

Für ein natürliches $n > 0$ seien $p_1, \dots, p_n$ mit $p_i = x(t_i)$, $1 > t_1 > \dots > t_n > 0$ Punkte von C_0^* und $U_1, \dots, U_n$ Umgebungen dieser Punkte mit $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$ für $i \neq j$, sowie W^n eine Umgebung von p_0 mit $\overline{U_i} \cap \overline{W^n} = \emptyset$ für $i = 1, \dots, n$ derart, daß je $k+1$ Punkte $w_1^n, \dots, w_h^n \in \overline{W^n} \cap C_0^*$, $q_{h+1} \in \overline{U_{i_{h+1}}}, \dots, q_{k+1} \in \overline{U_{i_{k+1}}}$ mit verschiedenen $i_{h+1}, \dots, i_{k+1}$ linear unabhängig sind ($0 \leq h \leq k+1$; $h=0$ bedeutet: $q_1 \in \overline{U_{i_1}}, \dots, q_{k+1} \in \overline{U_{i_{k+1}}}$ sind linear unabhängig). Nun wählen wir einen Punkt $p_{n+1} = x(t_{n+1}) \in W^n$ mit $t_n > t_{n+1} > 0$, sowie eine Umgebung U_{n+1} von p_{n+1} und eine Umgebung W^{n+1} von p_0 analog wie soeben U_1 und W^1 . Dabei können wir (Beweis indirekt) auf Grund der Induktionsvoraussetzung U_{n+1} so klein wählen, daß gilt: Sind $w_1^{n+1}, \dots, w_{n-1}^{n+1}$ Punkte von $\overline{W^{n+1}} \cap C_0^*$, verschieden oder nicht, $q_h \in \overline{U_{i_{h+1}}}, q_{h+1} \in \overline{U_{i_{h+1}}}, \dots, q_{k+1} \in \overline{U_{i_{k+1}}}$ mit verschiedenen $i_{h+1}, \dots, i_{k+1}$, so sind die $k+1$ Punkte $w_1^{n+1}, \dots, w_{n-1}^{n+1}, q_h, q_{h+1}, \dots, q_{k+1}$ linear unabhängig. Damit ist die Induktionsvoraussetzung für $n+1$ realisiert und die Vorbemerkung bewiesen. – Aus der Vorbemerkung folgen 1) und 2) in 3a für $i = 1, 2, \dots$. Für jedes i wählen wir ein c_i und ein ε_i mit den in 3a genannten drei Eigenschaften und der folgenden vierten: Für beliebige $t', t'' \in I_i$ ist $1/2 < t'/t'' < 2$. Sodann definieren wir die Funktionen g und f_i wie in 3a. Dann gelten 3i)–5i). Nun wählen wir für jedes i ein $t_i^0 \in I_i$ mit $|f_i^{(k)}(t_i^0)| = \max |f_i^{(k)}|$ (woraus folgt $f_i^{(k+1)}(t_i^0) = 0$) und sodann ε_i und c_i im Rahmen der bereits gestellten vier Forderungen so, daß 6i) $f_i^{(k)}(t_i^0) = (t_i^0)^2 \cdot (k+2)!/2$. Schließlich sei $v_i := +1$, wenn $f_i^{(k)}(t_i^0) > 0$ ist; andernfalls sei $v_i := -1$. Jetzt sei $f := v_1 f_1 + v_2 f_2 + \dots$. Dann folgt aus 3i)–6i), weil $I_i \cap I_j = \emptyset$ für $i \neq j$: 3) $|f| \leq \varepsilon_i$ auf I_i ; 4) f verschwindet identisch außerhalb von $I_1 \cup I_2 \cup \dots \subset I$; 5) f ist $k+1$ -mal stetig differenzierbar an allen Stellen $t \neq 0$; 6) $f^{(k)}(t_i^0) = (t_i^0)^2 \cdot (k+2)!/2$; 7) $f^{(k+1)}(t_i^0) = 0$. – Ergänzung zu 5): 5') f ist $k+1$ -mal differenzierbar an der Stelle $t = 0$. Es ist nämlich $|f^{(k)}(t_i^0)| = \max |f_i^{(k)}| = \max \varepsilon_i c_i^k |g^{(k)}| = \varepsilon_i c_i^k \max |g^{(k)}|$. Nun ist $\max |g^{(k)}| \neq 0$. Aus 5i) folgt also $\varepsilon_i c_i^k / t_i^0 > 0$ und hieraus $\varepsilon_i c_i^k / t_i^0 \rightarrow 0$ für beliebige $t_i^0 \in I_i$ zufolge der obigen vierten Forderung an die c_i . Wegen $c_i > 1$ folgt weiter $\varepsilon_i c_i^r / t_i^0 \rightarrow 0$ für jedes $r = 0, 1, \dots, k$ und beliebige $t_i^0 \in I_i$. Weil schließlich $g^{(r)}$ beschränkt ist, folgt $\varepsilon_i c_i^r g^{(r)}$

$(c_i(t'_i - t_i))/t'_i \rightarrow 0$, also $f_i^{(r)}(t'_i)/t'_i \rightarrow 0$. Damit ist 5') bewiesen. (Daß $f^{(k+1)}$ an der Stelle $t = 0$ stetig ist, wird nicht gezeigt.)

Nun ist die Definition der Kurve C'_∞

$$x_0 = 1, x_1 = t, \dots, x_{k-1} = t^{k-1}, x_k = t^{k+2} - f(t), \\ x_0 = u^{k+2}, x_1 = u^{k+1}, \dots, x_{k-1} = u^3, x_k = 1 \quad (|u| < 1).$$

Analog wie in 3a ergibt sich, daß C'_∞ glatt und k -sekantenfrei ist, daß C'_∞ an den unendlich vielen Stellen $t_1^0, t_2^0, \dots$ einen Scheitel hat, daß $C'_\infty \in K'$ und $\text{ord}(C'_\infty) \leq 9k^2$ ist.

4b. Wir setzen $t^{k+3}R^2(t) =: S(t)$. Für $|t| < 1$ ist $S(t) = t^{k+3}(1 - t^2 + t^4 - \dots)^2$, also $S^{(k)}(t) = t^3 + o(t^4)$. – Nun sei C_0^{**} die Basiskurve, definiert durch:

$$x_0 = 1, x_1 = t, \dots, x_{k-1} = t^{k-1}, x_k = S(t); \\ x_0 = u^{k-1}, x_1 = u^{k-2}, \dots, x_{k-1} = 1, x_k = R^2(t).$$

Weiter sei I ein hinreichend kleines, im Einheitsintervall der t -Geraden enthaltenes Intervall mit 0 als Anfangspunkt; dann hat der Bogen $\subset C_0^{**}$ über I die Ordnung k . Es gilt dann wieder die Vorbemerkung in 4a. Wir verfahren nun wie dort; nur wählen wir jetzt ε_i und c_i so, daß $6_i) f_1^{(k)}(t_i^0) = S^{(k)}(t_i^0)$ ist; dann ist auch $6) f^{(k)}(t_i^0) = S^{(k)}(t_i^0)$. Analog wie in 4a gilt 5'); denn nach 6) ist $f^{(k)}(t_i^0) = (t_i^0)^3 + o((t_i^0)^4)$, also $f^{(k)}(t_i^0)/t_i^0 \rightarrow 0$. Nun die Definition von C''_∞ :

$$x_0 = 1, x_1 = t, \dots, x_{k-1} = t^{k-1}, x_k = S(t) - f(t); \\ x_0 = u^{k-1}, x_1 = u^{k-2}, \dots, x_{k-1} = 1, x_k = R^2(u) \quad (|u| < 1).$$

Schließlich analog weiter wie in 4a.

Damit ist der eingangs formulierte Satz bewiesen.

5. Im bewiesenen Satz können $\text{ord}(C'_m)$ und $\text{ord}(C''_m)$ variieren, wenn m die Folge der natürlichen Zahlen durchläuft. Dies kann verhindert werden, wie das folgende Korollar zeigt.

a) Es gibt ein natürliches $M' \leq 9k^2$, für welches zu jedem $m = 2k, 2k+2, 2k+4, \dots$ eine Kurve $C'_m \in K'$ existiert mit $s(C'_m) = m$ und $\text{ord}(C'_m) = M'$; b) es gibt ein natürliches $M'' \leq 9k^2$, für welches zu jedem $m = 2k, 2k+2, \dots$ eine Kurve $C''_m \in K''$ existiert mit $s(C''_m) = k+1+m$ und $\text{ord}(C''_m) = M''$.

Beweis: a) Es seien $t_1, t_2, \dots$ und $U_1, U_2, \dots$ Folgen wie in der Vorbemerkung in 4. Für jedes Tupel $i_1 \dots i_n$ liefert die Konstruktion in 3a bei Verwendung von $t_{i_1}, \dots, t_{i_n}$ und $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ statt $t_1, \dots, t_n$ und $U_1, \dots, U_n$ eine Kurve $C'_{2n} \in K'$ mit $s(C'_{2n}) = 2n$ und $\text{ord}(C'_{2n}) \leq 9k^2$. Es sei $M' := \max \text{ord}(C'_{2n})$ für alle Tupel $i_1 < \dots < i_n; n = 1,$

2, ... Es ist $M' \leq 9k^2$. Weiter sei $i_1 < \dots < i_{n_0}$ ein Tupel, welches eine Kurve $C'_{2n_0} \in K'$ mit $\text{ord}(C'_{2n_0}) = M'$ liefert. Dann existiert eine Hyperebene L mit $|C'_{2n_0} \cap L| = M'$. Ist nun $n_0 \leq k$, so setzen wir $n_0 = : n_1$ und $i_1 = : j_1, \dots, i_{n_0} = : j_{n_1}$. Ist hingegen $n_0 > k$, so ist zufolge der Vorbemerkung der Durchschnitt $B_i \cap L$ nicht leer für höchstens k der Indizes $i_1, \dots, i_{n_0}$; dies sei der Fall für die Indizes $j_1 < \dots < j_{n_1}$ ($1 \leq n_1 \leq k$). Für die von diesen Indizes gelieferte Kurve $C'_{2n_1} \in K'$ ist $|C'_{2n_1} \cap L| = |C'_{2n_0} \cap L| = M'$. Für ein hinreichend großes $J > j_{n_1}$ sind alle U_j mit $j > J$ fremd zu L . Nun streichen wir aus der Folge $t_1, t_2, \dots$ alle t_i mit $J > i \neq j_1, \dots, j_{n_1}$ und bezeichnen die verbleibenden t_i in unveränderter Reihenfolge mit $t_1, t_2, \dots$; analog verfahren wir mit den U_i . Für jedes $n \geq n_1$ hat dann die mittels $t_1, \dots, t_n$ und $U_1, \dots, U_n$ konstruierte Kurve $C'_{2n} \in K'$ die Eigenschaften $s(C'_{2n}) = 2n$ und $\text{ord}(C'_{2n}) = M'$. Wegen $n_1 \leq k$ folgt hieraus a). – Analog für b).

¹ Zur Definition der k -Sekanten und der Glattheit vgl. z. B. Nöbeling, G. *Über einen Satz von Möbius-Hjelmslev*, Sitz.-Ber. Bayer. Ak. Wiss., Math.-nat. Kl. 1987, 29–37. Die k -sekantenfreien, glatten Kurven im P^k sind identisch mit den Kurven im P^k , welche den Bedingungen (2) – (4), l. c.²), II.4.2 genügen.

² Nöbeling, G. *Über die Anzahl der ordnungsgeometrischen Scheitel von Kurven, Teil II*. Erscheint in Geom. Ded.

³ Hjelmslev, J. *Ein Satz über monotone Raumkurven im $R_n \dots$* , Acta Math. 87 (1952) 59–82. Nöbeling, G., *Über die Anzahl der ordnungsgeometrischen Scheitel von Kurven. Teil I*. Aeq. Math. 34 (1987) 82–88.

⁴ Fabricius-Bjerre, Fr. *Über geschlossene Raumkurven $(n+1)$ -ter Ordnung im $R_n \dots$* , Kgl. Danske Vid. Selsk., Math. Fys. Medd. 20, Nr. 1 (1942) 1–25. Die Umkehrung $\Leftarrow$ gilt nicht.

⁵ Die Schranke $9k^2$ ist sehr grob. Wesentlich daran ist nur, daß sie von m unabhängig ist.

⁶ (A) ist eine bekannte Eigenschaft der stationären Schmieghyperebenen. – Ist B ein hinreichend kleiner (abgeschlossener) Bogen $\subset K$ mit der Stelle $t = 0$ als Anfangs- oder Endpunkt, so ist $\text{ord}(B) = k$; denn aus $\text{ord}(B) > k$ würde wegen l. c.²), II,3, Satz II folgen, daß im offenen Bogen $\underline{B}$ mindestens ein Scheitel liegt. Hieraus und den Voraussetzungen über $n_1, n_2, \dots, n_k$ folgen (B) und (C) nach O. Haupt u. H. Künneth, *Geometrische Ordnungen*, Springer-Verlag 1967, 262 (Eindeutigkeitssatz) und 257–258 (Satz 3).