

JOHANNES KEPLER GESAMMELTE WERKE

IM AUFTRAG DER
DEUTSCHEN FORSCHUNGSGEMEINSCHAFT
UND DER
BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

BEGRÜNDET VON
WALTHER VON DYCK UND MAX CASPAR

HERAUSGEGEBEN VON
FRANZ HAMMER

C.H.BECK'SCHE VERLAGSBUCHHANDLUNG
MÜNCHEN

JOHANNES KEPLER GESAMMELTE WERKE

BAND IX
MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

BEARBEITET VON
FRANZ HAMMER

C.H.BECK'SCHE VERLAGSBUCHHANDLUNG
MÜNCHEN MCMLX

JOHANNES KEPLER
GESAMMELTE WERKE

NEUNTER BAND
METAMORPHISCHE SCHRIFFTEN
HERAUSGEGEBEN VON
JOHANN HANDEL
VERLAG VON C. H. BECK'SCHEN BUCHDRUCKEREI
NÖRDLINGEN

der Supplementum.

NOVA
STEREOMETRIA
DOLIORVM VINARIORVM, INPRI-
mis Austriaci, figuræ omnium
aptissimæ;

ET

VSUS IN EO VIRGÆ CUBI-
cæ compendiosissimus & pla-
ne singularis.

Accessit

STEREOMETRIÆ ARCHIME-
deæ Supplementum.

Authore

Ioanne Kepplero, Imp. Cæs. Matthiæ I.
ejusq; fidd. Ordd. Austriæ supra Anasum
Mathematico.

Cum privilegio Cæsareo ad annos XV.

ANNO



M. D. C. XV.

LINCII

Excudebat JOANNES PLANCVS, sumptibus Authoris.

ILLVSTRISSIMO DOMINO

D. MAXIMILIANO,

† Domino DE LIECHTENSTEIN et Nickelspurg, Domino Rabenspurgi,
 Hohenaugae, Butschavizij, Poserizij et Neogradi, Sacrae Caesaræ
 Maiestatis Consiliario, Camerario et stabuli Praefecto, etc.

Nec non

ILLVSTRI ET GENEROSO DOMINO

D. HELMHARDO IÖRGERO,

in Tollet, Keppach, Grebing et Hernals, Domino Steireccij et Erlachij,
 10 Lib: Baroni de Creüspach: Archiducatus Austriae supra Anasum aulae
 Magistro provinciali haereditario: Sacrae Caesaræ Maiestatis ad Came-
 ram aulicam Consiliario; et pro tempore Provinciae dictae ex Baronibus
 Ordinario;

Dominis meis gratiosissimis

Cum superiori Novembri mense, Illustrissime Domine, Illustris et
 Generose L. Baro, Domini Gratosissimi, novam nuptam domum
 A 2 v dedu¹ xissem; tempore tali, quando Austria, vindemiâ copiosâ, nec minus
 generosâ collectâ, plurimis onerarijs adverso Danubio missis, opes suas
 Norico nostro dividebat, litusque omne Lincianum vasis vinarijs tolera-
 20 bili precio venalibus obstructum visebatur: conveniens erat officio ma-
 riti, bonique patris familias, ut domui meae de necessario potu prospic-
 erem. Dolijs igitur aliquot domum illatis et conditis, post dies quatuor
 venit venditor cum virga mensoria, qua unâ et eâdem cados promiscuè om-
 nes exploravit sine discrimine, sine respectu figurae, sine ratiocinatione
 vel calculo. Demissa enim acie virgae aeneâ in orificium infusorium
 pleni cadi transversim ad calcem utriusque orbis lignei, quos fundos
 vernaculo usu dictitamus, postquàm utrinque aequalis apparuit haec
 longitudo à ventris summo ad utriusque circularis Tabulae imum: de
 nota numeri, quae erat impressa virgae eo loco, quo desinebat haec
 A 3 30 longitudo, pronunciavit¹ numerum amphorarum, quas caperet cadus:
 secundum quem numerum ratio fuit inita precij.

Mirari ego, si transversa linea per corpus dimidij cadi ducta argu-
 mentum esse posset capacitatis; dubitare etiam de fide huius dimensio-

30) quos

nis; cum cadus inter binos orbes brevissimus, tantummodò orbibus paulo latioribus, eoque perexiguae capacitatis, possit habere eandem longitudinem ab infusorio, ad orbis alterutrius imum. Subijt memoriam laboriosa dimensio ad Rhenum usitata: ubi aut cados implent, et per singulas liquoris amphoras numerando transeunt, cum fastidiosa temporis occupatione, notasque capacitatis inurunt vasis exploratis: aut etsi virgis mensorijs utuntur, ut plurimum tamen diametros orbium et longitudinem tabularum curvatarum metiuntur: easque inter se multiplicant, variasque cautiones adhibent, de Orbium inter se inaequalitate, ventris amplitudine, curvatura tabularum: neque sibi invicem satis¹ faciunt; quin 10 A3v alij alios erroris arguunt.

Cùm igitur didicissem, usum hunc virgae transversalis publica hic autoritate stabilitum, et juratam illi mensorum fidem: visum est non inconveniens novo marito, novum Mathematicorum laborum principium, certitudinem huius compendiosae, et ad rem familiarem pernecessariae dimensionis ad leges Geometricas explorare, fundamentaque, si quae essent, in lucem proferre.

Cùm autem speculatio haec superiori triduo jucunda quadam varietate successisset, adeò ut certi quid pronunciari posset: jamque ad perscribendam et excolendam hanc demonstrationem, quippe quòd jam 20 erat mente comprehensa, calamum stringerem: non diu mihi quaerendi erant, quos dedicatione, quod principium erat libelli, alloquerer; qui ingenij rectitudine demonstrationum ἀκρίβειαν aequarent, pulchritudinemque earum singulari cupiditate prosequerentur: talem enim Te, Illustrissime Domine DE LIECHTENSTEIN, mihi praedicavit Medicus tuus A 4 D. IOANNES WODDERBORNIVS Scotus, vir Mathematicis artibus exercitissimus, eòque mihi amicissimus, qui commodum interveniens, Tui memoriam mihi praesentiâ suâ renovavit: Talem etiam Te Illustris et Generose L. B. IÖRGERE, longo usu cognitum habebam: quâ in laude ita pares estis; ut injuriam alterutri facere videri possim, quippe utrius- 30 que cliens, si alterum solum nominarem.

Et quid impediat, quo minus collegas hic vos designem? quippe in negotio, ubi non jam nobilitatis, non dignitatis, non virtutum politicarum, non ullius rei, quam Mathematicus cernere soleat; sed ingenij tantum, et si licet addere, patrociniij mei aemulatio locum habet.

Nullâ igitur haesitatione usus, strenam GG.VV. in subeuntes Ianuarij Calendas ex speculatione mea concinnare statui: quâ et de gratitudine in Deum, pro acceptis his alijsque transacti anni beneficijs, utrinque admoneremur, juxtâque¹ et vos Patroni ex dedicatione rei gratae, et ego A 4v author ex lectoribus et aestimatoribus intelligentibus, mutuâ voluptate 40 frueremur: utque hoc Austriae nostrae decus, Austriacae potissimum

Nobilitatis Proceres, vinique mensurandi ratio, vinearum latissimarum possessores, quibus vinum ad munificentiam usque suppeteret, patronos haberet.

Valete Gen: Proceres, et speculatione pulcherrimâ, delicijs vestris consuetis, animos vestros oblectate, Annumque subeuntem hilares et macti bonis omnigenis transigite: meque ut consuestis, vestrâ gratiâ porrò quoque prosequimini. Lincij, XVI. Cal. Ian. Anno Christianorum Occidentalium M.DC.XIII.

III^{ae} et III^{is} GG. VV.

Devotissimus

Imp. Caes. MATTHIAE

Ejusque fidd. Ordd. Austriae s. A.

Mathematicus

IOANNES KEPLERVS

PRAEAMBVLVM
DE RATIONE FIGVRAE DOLII VINARII

Omnis artificiosa et compendiosa dimensio spacij, figuram etiam ordinatam requirit; nam Vasa nullius certae, nullius ordinatae figurae, ingenium respuunt, solamque manum et numerationes successivas infusi liquoris expectant.

Vasa vinaria, materiae, structurae, ususque necessitate figuram circularem sortita sunt, conicae et cylindricae affinem. Humor enim in vasis metallicis diutius contentus corrumpitur aerugine; Vitrea et testacea, 10 nec suppetunt, nec tuta sunt; Lapidea sunt usu inepta ob pondus: superest igitur, ut vina ligneis excipiamus condamusque. At rursum ex unica trabe vasa nec facile, nec ampla, nec in necessaria copia parari possunt, et si possent, rimas agunt. Ex multis igitur lignis inter se coassatis dolia construi oportet. At commissurae lignorum nulla materia, nulla arte muniri contra effluxum humoris possunt, nisi sola vinculorum constrictione. Vincula verò cum sint ex materia flexili, ex Betulla, Quercu, aut similibus, urgente mole solubili rerum, quas cum violentia quadam constringunt, sese didunt in ambitum omnium capacissimum. Summa igitur ratione Victores rediguntur ad circulos: ne, si venter Cadi ut 20 dictum, circularem affectat amplitudinem, ipsi figuram aliam in oris extimis instituentes, distortum et imbecille Vas efficiant. Videre est in Lagenis, quibus Italica vina trans Alpes important in Germaniam; quae cum, usu exigente, compressae figurae sint, ut ad Mulorum latera appendi, et per angustias viarum transportari inoffensè possint: et ne longiùs procurrentes à lateribus Mulorum, ex ratione staterae plus gravent jumenta, et quassationem reddant violentiorem: qua parte sunt complanatiores, illa et imbecillius impetum sustinent, facileque dehiscunt.

Accedit et commoditas figurae circularis seu Cylindraceae, ut quia 30 vina plaustis transportanda sunt per terram; plurimum vini, minimum ligni habeant moles. Quo nomine si Globus ex tabulis ligneis coassari posset, globosa potissimum vasa futura fuissent. At quia Globus vinculis constringi nequit, pro Globo Cylinder successit. Neque tamen is purus putus Cylinder esse potuit: nam vincula laxata statim fierent inutilia, nec possent adigi violentiùs, nisi dolium figura conicâ à medio

ventris utrinque nonnihil coarctaretur. Est et apta haec figura ad vol-
vendum in directum (unde Cylindro nomen) adque vehendum in plau-
stris; et geminata basi, in quandam sui ipsius similitudinem, librationi
commodissimam, visu speciosam, composita.

Cum igitur dolia vinaria Circulo Cono et Cylindro, figuris regula-
ribus participant, apta sunt hactenus ad Geometricas dimensiones: qua-
rum principia operae precium est in vestibulo huius speculationis collo-
care; ut illa ab ARCHIMEDE sunt investigata; quantum quidem huius ad
oblectationem animi Geometriam amantis sufficiet: absolutae enim et
10 omnibus numeris perfectae demonstrationes petendae sunt ex ipsis li-
bellis Archimedeis; si quis à spinosa lectione eorum non abhorruerit.

Licet tamen in quibusdam locis, quae non attingit ARCHIMEDES, non-
nihil immorari; ut inveniant et doctiores, quibus juventur, seseque
oblectent.¹

Bv

I. PARS

CVRVORVM REGVLARIVM STEREOMETRIA

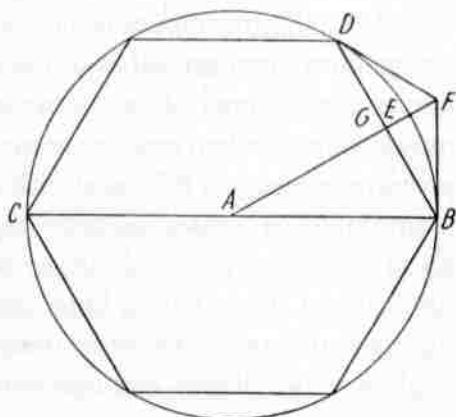
THEOREMA I

† **P**rincipiò requirebatur cognitio proportionis Circumferentiae ad
Diametrum. Et docuit ARCHIMEDES,

20 *Rationem circumferentiae ad diametrum, esse proxime eam, quae est
Numeri 22 ad 7.*

Ad hoc demonstrandum usus est figuris circulo inscriptis et circum-
scriptis; quae cum sint infinitae; nos facilitatis causa utemur sexangula.
Sit enim in circulo CBD, regulare sexangulum, cuius anguli C, D, B,
latus DB, et tangant circulum duae
rectae in D et B, coeantque ad com-
munem sectionem F: et centrum A
cum F connectatur lineâ AF, quae
secet rectam DB in G, arcum DB in
30 E. Cum igitur DGB sit recta, id est
ductus à D in B brevissimus, DEB
vero arcus, id est ductus à D in B
non brevissimus, longior igitur est
DEB, quam DGB.

E contra cum recta BF tangat cir-
culum, omnes igitur partes arcus EB



Schema I

sunt intra FB versus GB: quòd si EB esset recta, omnino brevior esset, quàm FB. Nam AEB, FEB anguli sunt aequipollentes Recto, cum EFB sit acutus. Ergo EB subtensa minori angulo EFB, minor est, quam FB, quippe quae maiori est subtensa. Licet autem argumentari de EB ut de recta, quia vis demonstrationis secat circulum in arcus minimos, qui aequiparantur rectis.

Quancquàm inter ea quae communi sensu sunt nota, recipi potest, † arcum DEB, intra triangulum DBF, minorem esse lineis DF, FB, quippe qui cum flectatur versus angulum DFB, nullam tamen particulam habet extra lineas DF, FB: comprehendens autem, sensu communi maius est 10 comprehenso. Secus haberet, si arcus DEB esset linea flexuosa et inordinata.

Cum igitur DB sit latus inscripti sexanguli, et DF, FB sint duae medietates circumscripti sexanguli; arcus DEB erit circuli pars sexta: maior verò erat quàm DB, minor quàm DF, FB. Sex igitur lineae DB, minores sunt quàm circumferentia circuli, et duodecim lineae DF, vel FB, sunt maiores quàm circumferentia.

Est autem DB latus sexanguli regularis, aequale ipsi AB semidiametro. Sex igitur semidiametri AB, hoc est tres diametri CB, vel (diametro in septem aequalia divisa) viginti et una septimae, sunt breviores 20 circumferentia. †

Vicissim cum DG, GB sint aequales, erit GB dimidium ipsius AB. B₂ Quadratum verò AB aequale est junctis AG, GB quadratis, et est quadruplum quadrati GB, ergo AG est triplum quadrati GB. Proportio igitur quadratorum AB et AG est sesquitertia, linearum igitur AB et AG proportio est semi-sesquitertia, scilicet ea quae numerorum 100000 et 86603. Vt vero est AG ad AB, sic est GB ad BF. Ergo etiam inter GB et BF est proportio semi-sesquitertia; ut quia GB est dimidium ipsius AB, scilicet 50000; BF talium particularum habeat 57737 proximè. Duodecies igitur sumptus numerus iste, maior erit quam circumferentia 30 circuli. Colligitur numerus 692844, qualium diameter habet 200000. Et qualium diameter habet 7, talium sunt in BF duodecies sumpta 24, minus una decima. Maior igitur est hic numerus ipsa circumferentia; minor autem eadem erat numerus 21. Et patet ad oculum, arcum BE propiorem esse ipsi BG, quam BF lineae. Circumferentia igitur propior est numero 21, quam numero 24, minus una decima. Ponitur igitur ab 21 recessisse per 1, ab altero verò per 2, minus una decima, ut sit nimirum 22. Haec autem longè accuratius demonstrat ARCHIMEDES in figuris multilateris, ut sunt figurae 12, 24, 48 laterum: ubi etiam apparet, paulum quid deesse circumferentiae, quo minus sit 22. ADRIANVS 40

19) diametri statt semidiametri

25) sesquitertia linearum

31) 477974

32) BD

ROMANVS eadem Methodo demonstravit, si diameter circuli secetur in partes 2000000000000000 tunc talium partium 62831853071795862 ferè esse in circumferentia.

Episagma

Ex tribus lineis sectionum Conicarum, quae Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipsis dicuntur, Ellipsis est circuli aemula, et demonstravi in Com. de Motibus Martis, longitudinem Ellipticae lineae sese habere ad medium arithmeticum inter duas ejus diametros, quae axis rectus et † transversus dicuntur, similiter ut 22. ad 7. fere.

10

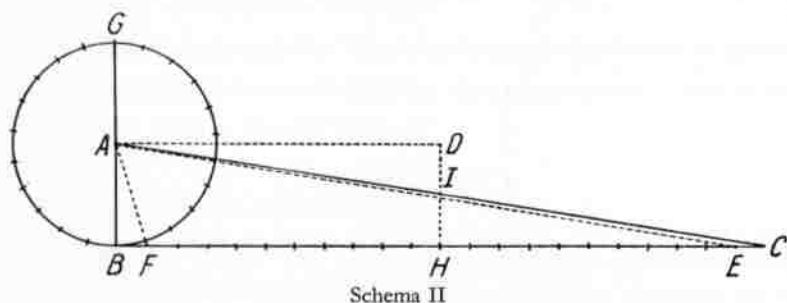
THEOREMA II

Circuli area ad aream quadratam diametri comparata, rationem habet eam quam 11. ad 14. fere.

† ARCHIMEDES utitur demonstratione indirecta, quae ad impossibile ducit: de qua multi multa: Mihi sensus hic esse videtur.

Circuli BG circumferentia partes habet totidem, quot puncta, puta infinitas; quarum quaelibet consideratur ut basis alicuius trianguli aequicruri, cruribus AB: uti ita Triangula in area circuli insint infinita,

B2v omnia † verticibus in centro A coeuntia. Extendatur igitur circum-



Schema II

ferentia circuli BG in rectum, et sit BC aequalis illi, et AB ad illam
20 perpendicularis. Erunt igitur infinitorum illorum Triangulorum, seu
Sectorum, bases imaginatae omnes in una recta BC, juxta invicem
ordinatae: sit una talium basium BF quantulacunque, eique aequalis CE,
connectantur autem puncta F, E, C, cum A. Quia igitur triangula ABF,
AEC totidem sunt super recta BC, quot sectores in area circuli, et bases
BF, EC aequales illis, et omnium communis altitudo BA, quae etiam
est sectorum; Triangula igitur EAC, BAF erunt aequalia, et quodlibet
aequabit unum sectorem circuli; et omnia simul in linea BC bases

15) quod

habentia, id est Triangulum BAC, ex omnibus illis constans, aequabit sectores circuli omnes, id est aream circuli ex omnibus constantem. Hoc sibi vult illa Archimedeae ad impossibile deductio.

Divisa igitur BC bifariam in H, fiat ABHD parallelogrammum, ut DH secet AC in I. Erit hoc parallelogrammum Rectangulum aequale areae circuli. Nam ut CB tota ad CH dimidiam, ita et AB, id est DH tota, ad IH dimidiam. Igitur HI aequat ID, et HC aequat DA, id est HB: et anguli ad I aequales, D vero et H recti. Triangulum igitur ICH, quod est extra parallelogrammum, aequale est triangulo IAD, quo parallelogrammum excedit trapezium AIHB.

10

Cum igitur diameter GB ponatur esse partium 7, quadratum diametri erit 49. Et cum harum partium 22 sint in circumferentia, sc: in BC, dimidia BH habebit earum 11, paulo minus, ut supra. Duc 11 in semidiametrum 3 semis, sc: in AB: fiet Rectangulum AH 38 semis.

Qualium ergò Quadratum diametri	Talium Area circuli inscripti
habet 49.—	habet 38 semis.
bis 98.—	— 77.
Divisi per 7. faciunt 14.—	— 11. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I

20

Sectoris in circulo (constituitur rectis ex centro, et ex arcu intercepto) area est aequalis rectangulo sub semidiametro et dimidio arcu.

Corollarium II

Segmenti circuli minoris (portio est per unam rectam recisa) area minor est sectoris areâ, triangulo sub sectoris et segmenti rectis comprehenso: Segmenti maioris area tanto maior est sectore suo.

Demonstratur autem in Geometricis, rectangulum sub perpendicularo trianguli et dimidia sectionis linea aequale esse areae trianguli. Ablato igitur plano huius trianguli ab area sectoris, restat area segmenti minoris, sed addito, maioris segmenti area constituitur.

30

In Schemate I. DABE est sector minor, DABCD maior; DGBE segmentum minus, DGBC maius; DBA triangulum, quo sector à segmento¹ differt. Id habet duas partes aequales et congruas, AGB, B; AGD. Apposito igitur angulo DAG ad GBA, sic ADG ad GAB, fit rectangulum altitudine AG, latitudine GB. Et dicitur in Triangulorum doctrina, GB sinus arcus EB dimidij, GA sinus eius complementi.

Episagma I

Circulo commune hoc est cum Parabola; quod in utraque, portiones quomodocunque per unam rectam abscissae, si aequales habuerint diametros, et ipsae inter se in qualibet figura sint aequales. ARCH. de † Conoid. IV.

Episagma II

Paraboles area est sesquitertia areae Trianguli, habentis eandem cum Parabola basin rectam, et eandem altitudinem. ARCH. de Quadr. † Parabolae Prop. XVII. et XXIV.

10

Episagma III

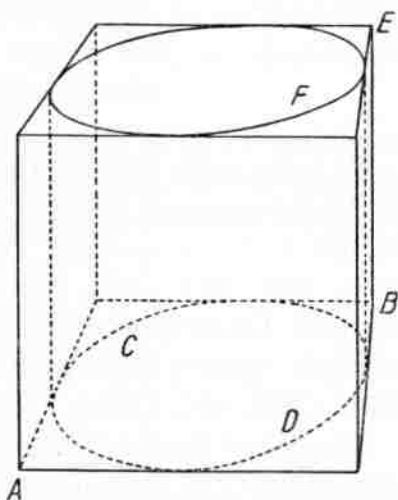
Ellipsis area, ad aream circuli est, ut minor Ellipsis Diameter ad maiorem: Et ut circulus ad quadratum diametri, sic Ellipsis ad Rectangulum diametrorum, scilicet etiam ut 11. ad 14. ferè. ARCH. Sphaeroid. †

THEOREMA III

Cylindri vero ad Parallelepipedum columnare rectangulum aequale, quod Cylindri corpus stringit quadratis suis basibus et parallelis lateribus, ratio est eadem, quae circuli ad quadratum circumscriptum, hoc est eadem quae 11. ad 14.

Vt enim CD Cylindrica basis circularis ad AB quadratum circumscriptum, ita CF corpus Cylindri, ad AE corpus parallelepipedum rectanguli, † seu columnae. ARCH. de Sphaera et Cylindro.

Cylinder enim et columna aequale sunt hic veluti quaedam plana corporata: accidunt igitur illis eadem quae planis.¹



Schema III

B₃ v

THEOREMA IV

Si Columna recta parallelarum Basium cum Pyramide, si Cylinder cum Cono eandem basin habuerit eandemque altitudinem, Triplum erit illius.

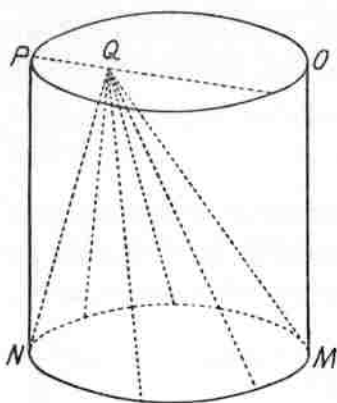
Nam omnis Columna, ut hic quinquangularis BI, bases ABCDE et FGHK parallelas habens, et BAF, AEK caeterosque angulos rectos,

³ Kepler IX

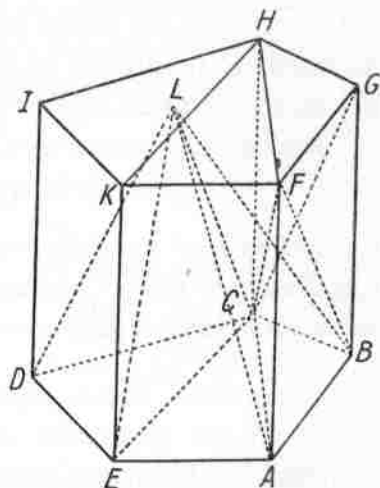
solvitur in sua Pentaedra seu Prismata, ut hic quinquangularis in tria GHF, FHK, KHI, trinis parallelogrammis et binis triangulis oppositis clausa.

	Primi	Secundi	Tertij
Triangula	GHF	FHK	KHI
	BCA	ACE	ECD
Parallelogrammata	GHCB	HCAF	KECH
	HCAF	FAEK	HCDI
	FABG	KECH	IDEK

Pentaedron vero in tria Tetraedra solvitur, quorum bina semper, quae unum Planum Parallelogrammum ex aequo dividunt, aequalia sunt. 10



Schema IV



Sit verbi gratia Prisma primum sub GHF, BCA triangulis. Ducantur in Parallelogrammis BGFA et AFHC diagonij BF, CF, ex trianguli BCA, angulis B, C. Iis resecatur Tetraedron, cuius haec quatuor triangula BCA, BFC, BFA, AFC. Restat Pyramis quadrangula, basi BGHC, vertice F. Ducta igitur diagonios GC secat eam in duo Tetraedra: unius triangula quatuor sunt ista BGC, GFB, GFC, CFB: reliqui sunt ista, GHC, GFH, HFC, CFG.

Cùm igitur Parallelogrammum GHCB lineâ GC sit sectum bifariam, et triangula GCH, GCB aequalia, et GF altitudo eadem (nam BGF rectus est) aequalia erunt Tetraedra GCBF, GCHF. Similiter Parallelogrammum GFAB lineâ BF sectum est bifariam et in aequalia FBG, FBA. Et planum BCA rectum est ad planum GA, igitur perpendicularis ex C in BA est altitudo Tetraedrorum GBFC, et ABFC: sunt igitur aequalia. Eidem verò GBFC fuit aequale GCFH. Omnia igitur tria sunt aequalia, et Prisma HGA habet tria aequalia Tetraedra. 20

B₄ Sumatur jam in basi supera FGHIK, punctum L, quod connectatur cum angulis basis inferae ABCDE, ut creetur Pyramis quinquangula: Dico illam esse tertiam partem columnae GAD. Nam basis ABCDE, lineis AC, EC in triangula tria est divisa ut prius, super quae stant et tria Pentaedra, et tres partes Pyramidis, sc. ABCL, ACEL, ECDL, et perpendicularis ex L demissa in planum BD, aequat recta latera KE, FA et caetera. Est igitur eadem altitudo Tetraedrorum ABCF, ABCL; sunt igitur aequalia. Sed ABCF est tertia pars Prismatis ABCFGH: Ergo et ABCL ejusdem tertia pars est. Similiter verò secunda Pyramidis pars
 10 ACEL, secundi Prismatis; et tertia ECDL, tertij prismatis tertiae sunt partes: Tota igitur Pyramis totius Columnae tertia pars est; et haec illius ergò triplum.

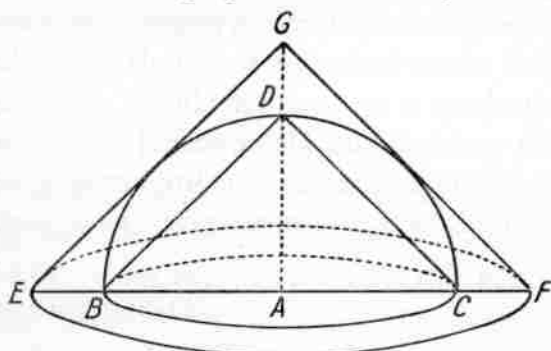
Eodem verò modo et MNOP Cylinder, cuius bases MN et OP parallelae, aequat tres conos MNQ, vertice Q ad superioris basis planum pertingentes, et eandem basin MN habentes. Demonstratio enim
 † analogicè applicari eadem potest, si perpendas, circulum, qui basis est Cylindri et Coni, in infinita triangula ex centro dividi, quibus totidem Prismata, totidemque partes Coni superstent, illa in axe Cylindri, hae in axe Coni convenientes.

20

THEOREMA V

Superficies curva Coni Rectanguli inscripti Hemisphaerio, est semidupla Baseos, † seu circuli maximi in sphaera, et Basis eiusdem Coni est dimidia Baseos Coni rectanguli circa Hemisphaerium.

Sphaera BDC secetur plano per centrum A, et sectio BC continuetur
 B₄v basin BC † et verticem D eundem habens cum Hemisphaerio; alter totus extra
 30 Hemisphaerium, stringens illud mediae suae superficiei lateribus, quae sint EG, FG, parallelae ipsis BD, CD, habens verticem G, in axe prioris AD continuato, basin vero EF in plano sphaeram secante.



Schema V

Cum igitur BA et AD sint aequales; erunt etiam EA semidiameter basis maioris, et AG altitudo Coni exterioris aequales: Et quia EGF rectus, erit igitur EG quadrati circulo circumscripti latus, eoque aequalis

22) et Basis eiusdem Coni est *fehlt*

38) AD statt AG

diametro BC. Sed EF quadratum, aequale est duobus quadratis EG et GF, aequalibus diametro BC: Ergo quadratum EF duplum est quadrati BC: circulus igitur EF duplus est circuli BC. Dico etiam superficierum conicarum inter se proportionem esse duplam, et minoris conicae curvae superficiei proportionem ad aream basis BC esse semiduplam.

Nam per ea quae dicta sunt Theor. II. rectangulum sub semidiametro AB, et circumferentia tota BC, duplum est areae circuli BC. Eodem verò modo, eademque demonstrationis vi, rectangulum sub tota BD et tota circumferentia BC, est duplum conicae curvae superficiei BDC. Quare ut AB ad BD, sic superficies plana circuli BC, ad curvam Coni BDC. Sed proportio AB ad BD est semidupla, quia quadratorum proportio est dupla; ergo et superficierum dictarum proportio est semidupla. Et quia sunt Coni similes; ut igitur basis BC plana ad Curvam BDC: sic plana EF ad curvam EGF; et permutatim, ut basis ad basin, ita conica ad conicam curvam: dupla verò est proportio inter bases; dupla igitur et inter conicas curvas.

THEOREMA VI

Convexum Sphaericum est quadruplum areae circuli maximi, qui Sphaeram per centrum secat.

20

Demonstrationes ARCHIMEDIS et PAPPY sunt ingeniosissimae, nec admodum faciles captu: veritas verò propositionis, et prima demonstrationis elementa elucent ex praemissis.

Est enim superficies convexa Coni maioris EGF maior superficie Hemisphaerij BDC, minoris BDC minor; illa enim tegit Hemisphaerium, haec sub Hemisphaerio tota latet. Verisimile est igitur, Hemisphaerij superficiem esse medium proportionale inter utriusque Coni superficies. Sed minor conica est semidupla areae planae basis, maior sesquidupla ejusdem; et medium semiduplae et sesquiduplae, est dupla proportio. Ita verisimile fit, Hemisphaerij superficiem esse duplum, et Sphaerae totius superficiem esse quadruplum areae circuli maximi BC. Demonstrat verò id ARCHIMEDES necessariò ex consimilibus principijs.

THEOREMA VII

Convexum cuiuslibet segmenti sphaerae est aequale plano circuli, cujus semidiameter subtendit segmenti latitudinem à Polo ad basin.¹

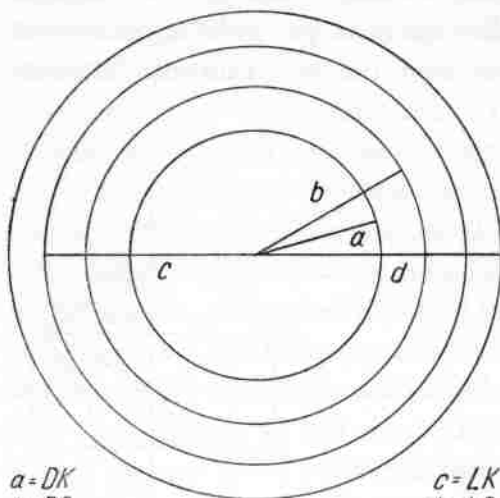
Segmenta sphaerae hic reputantur non quaelibet portiones, sed illae tantum, cùm Sphaera ab uno plano tota secatur in partes duas, sic ut

1) GC statt BC

15) EGC statt EGF

30) duplam

Alia vero segmenta segmentorum, quae non integris circulis planis, sed eorum partibus terminantur; nisi polus D et axis DI totius segmenti HKD fuerit constitutus in concursu sectionum, nondum habent notam aequationis vel computationis suae methodum.¹



$a = DK$
 $b = DC$

Schema VII

$c = LK$
 $d = LD$

THEOREMA VIII

Cv

Sphaericum Convexum et ejus axis secantur à plano ad axem recto in eadem proportionem.

10

Septimum Theorema servit Geometricae delineationi, hoc octavum arithmetice est utilius et compendium jucundissimum.

Illud planum prodit aequale curvae superficiei; hoc lineas ostendit aequivalentes segmentis.

In Sch. praecedenti, si axis totus DL valet superficiem totam DKLH, pars axis DI valet partem superficiei HDK, siquidem DI fuerit axis sectionis, id est, si fuerit rectus ad planum HK secans, idque secet in centro I, sic pars axis IL valet partem superficiei HLK.

20

Nam quia HDK est ad KLH, ut circulus DK ad circulum KL rectae, per VII. id est quadratum KD ad quadratum KL: At verò quadratum KD est ad quadratum KL, ut recta DI ad rectam IL: Ergò etiam ut recta DI ad rectam IL, sic HDK superficies ad KLH superficiem.

Analogia. Quemadmodum igitur in lineis BA, HI, inest proportio circularium circumferentiarum BC, HK, centris A. I. scriptarum; sic in lineis transversis DA, DI, inest proportio arearum BDC, HDK, terminatarum ad illos circulos: Et sicut DI valet aream HDK, et DA aream BDC, sic IA valet aream Zonae BHKC.

THEOREMA IX

30

Cylindri recti superficies est aequalis Sphaericae, quam stringit.

Creatur enim Cylindrica superficies ductu totius circumferentiae KL (in sequenti schemate) in totam diametrum KN vel GB: at ductu dimidia circumferentiae KL, in dimidiam diametrum AB creatur pars quarta

3) HKI

5) notum

19) BK statt HK

32) superficies fehlt

- † 4.6. — 24 prioris, cum figurae similes sint in dupla proportionem late-
 2.3. — 6 rum: creatur verò eodem ductu area circuli maximi, per II.
 2.2. — 4 quae est etiam sphaericae superficiei pars quarta, per VI.
 Duo ergo ejusdem quadrupla sunt inter se aequalia, super-
 ficies sc. curva Cylindri KML, et superficies curva globi seu sphaerae
 suae GB, utraque quadruplum areae KL.

THEOREMA X

*Superficies globi, et ejus cylindri, qui globum stringit, resectae ab eodem plano
 ad axem recto, sunt aequales.*

- 10 In figura sequenti sit GB globus, LN ejus cylinder, stringens globum
 in medio, et in G.B. Et sit planum PST secans utramque superficiem:
 dico Zonam KPSTL cylindricam, esse aequalem curvae superficiei seg-
 menti globi GR.

- Videtur falsum esse, cum Cylindrica sit tam laxa, globi verò super-
 ficies sursum in angustum coeat. Sed memineris, quanto illa laxior, tanto
 hanc esse latiore, cum per obliquum ad eandem tendat altitudinem.
 Sed facilis est demonstratio. Cum enim KP et GR sint aequales, et
 creetur Zona KPSTL ductu KP vel GR in totam circumferentiam KOL,
 et sic etiam Zona PSTMN creetur ductu PN vel RB in eandem circum-
 20 ferentiam totam: ergo ut recta GR ad RB, et BG, sic superficies cylin-
 C 2 drica KT, ad TN et NL. At ut recta GR¹ ad RB et BG, sic superficies
 segmenti globi GR ad RB segmentum et BG totam globi superficiem,
 per VIII. Ergo et ut cylindrica KT ad TN et NL, sic sphaerica GR ad
 RB, et BG. Est autem tota Cylindrica NL aequalis toti Sphaericae GB,
 per IX. Ergo et pars Cylindricae KOLPST parti Sphaericae in seg-
 mento GR erit aequalis.

THEOREMA XI

- † *Corpus Cylindri est ad corpus Sphaerae, quam stringit, in proportionem
 sesquialtera.*

- 30 Corpus enim Sphaerae ad Analogiam eorum, quae dicta sunt Theor. II.
 potestate in se continet infinitos veluti conos, verticibus in centro sphae-
 rae coeuntes, basibus, quarum vicem sustinent puncta, in superficie
 stantibus. Sit igitur in schemate II. BG Sphaera, A centrum, coni AB,
 AG et similes infiniti, ijque minimi, id est, quorum Bases sint puncta
 B. G. vertex omnium communis A. Fiat novum Schema, in quo exten-

11) GB.

18) KRSTL

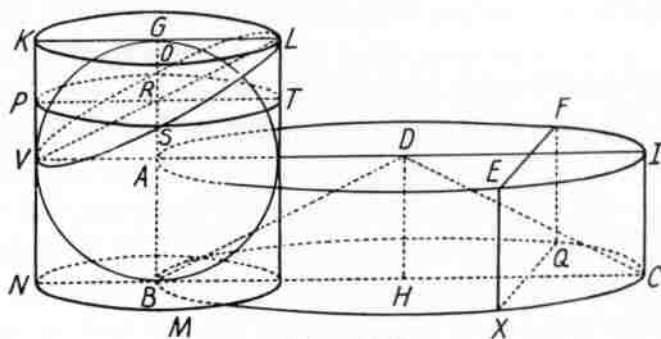
20) rectae

21) rectae

24) BC statt BG

datur curva superficies sphaerae in planum circulare, cuius diameter sit BC, dupla ad diametrum Sphaerae BG, quia Circulorum proportio est quadrupla per VI. praemisum: et fiat circulus ex BC, ex cuius medio puncto H surgat perpendicularis HD aequalis semidiametro AB. Sit autem Conus BDC, basi BC, vertice D: Conus iste aequale corpus habet corpori Sphaerae BG. Omnium enim conorum AB, AG, infinitorum in sphaera, bases B. G. minimae, cum sphaerica superficie ipsa in qua insunt, in planum circulum BC extensae et juxta invicem ordinatae sunt, et pro eo quod erant in Sphaera Coni recti ABB, AGG, facti sunt hic conii scaleni DCC, DBB, excepto medio DHH, qui manet rectus, habentque omnes eandem altitudinem DH, et bases aequales, quippe minimas, omnes igitur et inter se et conis rectis in Sphaera aequales sunt; et totus conus BDC ex omnibus compositus, aequalis erit toti sphaerae BG ex omnibus compositae.

Ductâ igitur areâ circuli BC in semidiametrum HD, creatur Cylinder AICB, cuius corpus est conii BCD triplum, per IV: Est verò cylindri sphaeram stringentis duplum, quia basin BC habet, basis KL quadrup-



Schema VIII

lam, altitudinem verò HD, altitudinis BG dimidiam. Duo enim AICB cylindri invicem impositi, efficerent altitudinem aequalem ipsi BG altitudini cylindri KLB, essentque illius quadruplum, propter basin BC quadruplam baseos KL: unus igitur AICB est cylindri KLB duplum: erat verò triplum conii BDC, id est corporis Sphaerae BG, aequalis cono BDC. Ergo diviso cylindro AICB in 6: dimidium huius, scilicet 3, venit Cylindro KLB; tertia verò pars de 6, scilicet 2, venit sphaerae GB. Cylinder igitur KLB, ad sphaeram suam GB, est ut 3. ad 2. quae est proportio sesquialtera.¹

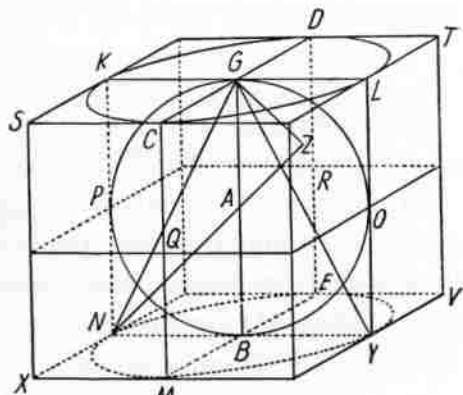
Potest idem etiam per IX. probari, si fingamus Cylindrum secari in infinita prismata, in axe cylindri coeuntia; pro basibus verò, quas habent prismata, quadrangulis, habentia lineas rectas aequales axi; quae bases prismaticum omnes juxta invicem ordinentur in curva Cylindri superficie,

ut supra Theor. II. de circumferentia circuli similia sumus imaginati. In illo enim Schemate II. sit circulus BG utraque basis Cylindri: et circumferentia BG repraesentet curvam Cylindri superficiem, punctum verò A repraesentet axem Cylindri, aequalem ipsi BG diametro, et extendatur curva superficies Cylindri in planum, sitque BC, quae repraesentet rectangulum, cuius longitudo BC, latitudo BG; et connectatur axis Cylindri AA, cum recta CC, ipsi parallela, rectangulo AACC: ut sit Prisma AABGCC, aequale corpori Cylindri. Erunt enim omnium Cylindri Prismatum minimorum bases rectangulae minimae (hoc est lineae) juxta
 10 invicem ordinatae in superficie rectangula BC, et Prismata in Cylindro recta, fient hic scalena, omnium tamen acies pertingent ad communis altitudinis BA terminum AA, erunt igitur aequale et invicem et cum rectis Prismatibus ipsius cylindri. Ducto igitur rectangulo BBCC in altitudinem BA, creabitur Parallelepipedum, cujus corpus est duplum corporis prismatis AABGCC, duplum igitur corporis cylindri. At supra etiam ducebatur circulus aequalis rectangulo BBCC superficiei curvae cylindri (sc. quadruplus circuli maximi, per VI) in altitudinem aequalem ipsi BA semidiametro, et creabatur triplum coni, aequalis Sphaerae. Idem ergo est triplum sphaerae et duplum cylindri: Ergo ut supra,
 20 Cylindri ad sphaeram proportio est sesquialtera.

THEOREMA XII

Cubi corpus ad corpus Sphaerae quam stringit, est duplum paulo minus, nimirum ut 21. ad 11. proxime.

Nam Cubus STVX, in figura sequenti, est ad Cylindrum suum KLN quem stringit, ut 14 ad 11 proximè, per III. praemisum, id est ut 42. ad 33. At Cylindrus KLN est ad sphaeram PGOB, quam communiter cum cubo stringit, ut 3. ad 2. per XI. praemisum, id est ut 33. ad 22. Ergo cubus ad sphaeram est ut 42. ad 22. id est, ut 21. ad 11.



Schema IX

THEOREMA XIII

Corpus Coni, cujus altitudo est aequalis diametro Sphaerae, basis Sphaerae maximus circulus, est dimidium corporis sphaerae.

Cylindrus enim KLN eadem basi et altitudine, est triplum Coni sui

NGY, vel ut 3. ad 1. Idem verò ¹ Cylinder est ad Sphaeram suam, ut 3. C₃ ad 2, per XI. praemissum: Ergo Conus ad Sphaeram est ut 1. ad 2.

Summa praemissorum.

	Conus NGY	Sphaera PGOB	Cylinder	Cubus STVX	Cylindrum
	Cylindri KLYN	Cylindri KLYN	KLYN	stringens in KN, CM, LY, et DE.	Sphaeram vero in G. O. B. P. Q. R.
Est ut	11	22	33	42	
Vel ut	1	2	3	4	minus

Corollarium

10

Porro indidem etiam patet, Conum priorem in Hemisphaerio (ut Theor. V. Conum BDC) esse ad Cylindrum qui sphaeram stringit, ut Octaedron in sphaera ad Cubum circa sphaeram, sextam scilicet partem Cylindri, quartam sphaerae, et sic dimidium Hemisphaerij sui, dimidiumque coni Theor. XIII. descripti, quippe cujus basin habet integram, altitudinis verò saltem dimidium.

Ille verò conus major EFG, in quo est Hemisphaerium (Theor. V.) corpus habet irrationale seu ineffabile. Similes enim Coni, ut EFG, et BDC sunt in tripla proportione altitudinum AG, et AD. Est autem proportio AG ad AD semidupla: ergo proportio conorum est triplex semidupla, hoc est, sesquidupla. At sesquiduplae termino uno pronunciato (quod scilicet conus BDC dimidium Hemisphaerij BCD dicitur) terminus alter fit ineffabilis, nisi de propinquo.

Episagma I

Eadem est etiam proportio corporis ab Ellipsi generati, quod Sphaeroides dicitur, ad conum aequale. ARCH. Sphaeroid. prop. XXIX. † XXX.

Episagma II

Sicut sphaeroides est coni sui duplum: sic Conoides Parabolicum est coni sui sesquialterum. Vide in eodem libro prop. XXIII. XXIV.

30 †

Conoides verò Hyperbolicum (qualis est ferè figura hulceris, montis, aut acervi frugum ordinati) sesquialteram proportionem magis ad aequalitatem adducit. Nam ad lineas sesquialteram proportionem continentes (quae habent duplum et triplum eius quae inter verticem et centrum figurae) addit utrinque axem.

1) NGI

THEOREMA XIV

Segmento sphaerae aequalis est conus super eadem basi, habens altitudinem tanto maiorem, ut sit ejus excessus ad semidiametrum Globi, sicut est altitudo ipsa segmenti ad residuum diametri.¹

C₃ v Sit sphaera CLB, ejusque segmenta duo HKD et HKL, eorumque axes DI, IL, partes diametri per A centrum ductae, quae continuentur à D versus O. P. Quaeritur conus aequalis segmento minori HKD. cuius axis DI, residuumque diametri IL. Fac ergò ut IL ad LA, sic ID ad DO: erit IO altitudo, et HK basis coni, cujus corpus est aequale corpori
10 segmenti HKD minoris. Sit deinde segmentum HKL, ejus axis LI, residuumque diametri ID. Fac iterum ut ID ad DA, sic IL ad LP: erit IP altitudo, et HK basis coni, qui aequalis est segmento HKL maiori.

† Demonstratio non est popularis, ideò petat illam, qui vult, ex secunda secundi libri ARCHIMEDIS de sphaera et cylindro: non est enim mihi consilium, totum ARCHIMEDEM hic transcribere. Veritas autem ejus circa Hemisphaerium sic patet; sit Hemisphaerium BCD, cujus axis AD, residuum diametri AL. Quod si facio ut residuum diametri AL ad semidiametrum LA, sic AD axem, ad DQ, facio igitur DQ aequalem ipsi DA, et altitudo AQ erit dupla ad altitudinem segmenti AD. Conum igitur qui
20 habet basin BC, altitudinem diametri DL, pono esse aequalem Hemisphaerio. Id autem verum esse, priori Theoremate vidisti, ubi conus iste erat dimidium sphaerae.

ARCHIMEDES etiam comparat proportionem segmentorum solidorum, cum proportionem segmentorum superficiei, demonstrans solidorum proportionem esse minorem dupla proportionem superficierum, maiorem sesquialterâ. Constituitur autem proportio dupla in numeris, ducto utroque proportionis termino in seipsum; sesquialtera verò, ducta eiusdem termini radice in terminum ipsum. Vt si superficies essent inter se segmentorum, ut 4. ad 9. quadrati numeri; corpora sub illis superficieribus
30 tecta, essent inter se propiora quam 16. et 81. ducto utroque quadrato in seipsum; remotiora quàm 8. à 27. (ductis quadratorum radicibus 2. et 3. in ipsos quadratos) vel 16. à 54. Itaque si minus segmentum ponderaret 16: Majus esset inter 54 et 81 pondo.

Corollarium

Proportio binorum globi segmentorum inter se, causa corpulentiae, in una qualibet sectione, est expressa in altitudinibus conorum, scilicet in IO, IP; sicut prius proportio superficierum segmentorum erat ex-

6) continetur

20) BL. statt BC

pressa in JD, IL. Sed discrimen magnum est, quod globi totius corpus in una qualibet sectione repraesentatur à peculiari linea OP: at superficies tota globi semper ab eadem diametro DL repraesentatur.

Episagma I

Multa hic sunt communia globo et sphaeroidi atque conoidibus. Nam ut sectio globi facta plano semper est circulus; sic sectio sphaeroidis non omnis, sed quae fit plano axi parallelo, est Ellipsis, sphaeroidi similis: Ellipses verò diversarum et dissimilium specierum, aut circuli fiunt, quoties vel sphaeroides utcumque, vel conoides per utrumque oppositorum laterum secatur. ARCH. Sphaer. XII. XIII. XIII. XV.¹

10 t

Episagma II

C 4

Segmentorum sphaeroidis ratio eadem est, quae segmentorum globi, si recta fit sectio ad axem: sin obliqua, tunc usurpatur non dimidium axis, sed dimidium eius quae vertex portionum factarum (id est puncta earum super sectionem altissima) conjungit. Nam in Ellipsi quae gignit sphaeroidem, axis quidem est inter diametros, diametrorum verò multae sunt diversae longitudinis, quaelibet binos oppositos vertex conjungens.

THEOREMA XV. PROBLEMA

Quemadmodum superficiebus curvis segmentorum theorema VII. fecit aequales circulos planos, Theorema vero VIII, aequivalentes lineas rectas ostendit, comparabiles inter se diversarum sectionum: sic etiam *soliditati segmentorum assignare* possumus non tantum Conos aequales ut Th. XIV, sed etiam *plana aequivalentia, seu proportionis ejusdem, et comparabilia inter se diversarum sectionum*: quam demonstrationem, licet difficilius captus, addo, quia à Geometris prioribus tentata non est.

Quaeruntur tria plana quae habeant inter se proportionem eam quam duo segmenta Globi inter se et ad totum.

Sint segmenta HKD, HLK. Ergo centro H vel K, termino segmenti in plano circuli HDK, distantia HI vel KI, scribatur arcus circuli IS, secans HDK in S, et ab S, per A, ducatur diameter, eamque ad rectos secet recta ex K, quae sit KT, sectio R. Hoc facto fiant rectangula tria, primum sub AD semidiametro et DL altitudine seu diametro globi totius, quod repraesentet soliditatem totius globi: secundum sub AD semidiametro et DI altitudine segmenti, quod repraesentabit soliditatem sectoris sphaerae HAKD: tertium ex AI (altitudine coni HKA) in RS, quod

2) peculiari

13) sit stat fit

16) sphaeroides

17) quilibet

20) aequivalentes

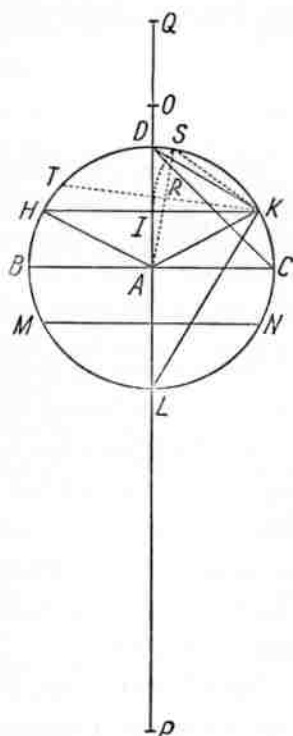
28) HLD stat HLK

30) eumque

dico repraesentare in eadem proportionem conum $HIKA$ solidum: itaque sicut conus $HIKA$ ablatum à sectore $HAKD$, relinquit segmentum $HIKD$; sic etiam tertium rectangulum ablatum à secundo, relinquet planum aequivalens in eadem proportionem segmento sphaerae $HIKD$.

Quod si segmentum sit maius Hemisphaerio sc. HKL ; pro DI , sumenda est IL in secundi rectanguli formatione, et ad id est addendum rectangulum sub AI, RS , constitueturque planum
 10 aequivalens segmento $HIKL$ maiori.

Demonstratio. Primum inter lineas DI, IL , et DL , est proportio segmentorum superficiei et totius, per VIII. Ergo etiam inter rectangula,
 C 4 v ductis his lineis in eandem semidiametrum AD , erit eadem proportio: sed sectorum $HAKD$, $HAKL$, et globi totius est eadem inter se mutua proportio, quae superficierum HDK, KLH , et totius. Ergo et inter facta rectangula est proportio sectorum $HAKD$, et $HAKL$. Deinde AD altitudo ducta in basin circulem, aequalem superficiei segmenti HDK , cuius semidiameter KD (per VII.) creat Cylindrum, triplum coni aequalis sectori $HDKA$; et AI altitudo ducta in basin HK circulem, cuius semidiameter KI , creat itidem triplum coni $HIKA$. At ut
 20 circulus radio KD , ad circulum radio KI vel KS ; sic etiam quadratum KD ad quadratum KS : ut verò quadratum KD ad quadratum KS , sic DI recta ad SR , per VII. Ergo proportio basium circularium, per KD et KS descriptarum, est etiam proportio linearum DI, SR . Sed proportio conorum est composita ex proportionem altitudinum et proportionem basium; ut habet
 30 ARCHIMEDES, XI. Sphaeroideon. Ergo proportio $HDKA$ sectoris, et $HIKA$ coni in eo, est composita ex proportionem AD ad AI , et DI ad SR . Est autem etiam rectangulorum proportio composita ex proportionem laterum correspondentium. Quare proportio $HDKA$ sectoris, et $HIKA$ coni in eo, est eadem, quae rectangulorum sub AD, DI , et sub AI, SR . Ac proinde ipsa sunt ad mutuam eorum differentiam, ut sector $HDKA$ et conus in eo $HIKA$, ad mutuam eorum differentiam, scilicet ad $HIKD$ segmentum. Haec methodus concernit potissimum conum $HIKA$, qui est communis differentia, qua segmenta differunt à suis sectoribus, quem
 † conum interdum operae precium est notum habere.



Schema VI

23) HDKC

27) RS statt KS

36) HIKA statt HIKD

Episagma comparativum

Sic segmenta Conoidis parabolici sunt inter se in proportionem, quae est inter quadrata axium. ARCH. Sphaeroid. XXVI. †

Corollarium I

Segmenta segmentorum Sphaerae easdem habent leges quod corpora attinet, quae supra fuerunt ejusdem generis segmentorum superficiei, in corollario ad VII.

Corollarium II

Zona sphaerae et sphaeroidis, seu corpus annulare, contentum parte superficiei sphaerae vel sphaeroidis mediâ, quae Zona dicitur, et superficiei cylindrica intus, haec inquam sic investigatur. A sphaera vel sphaeroidae auferuntur bina segmenta aequalia, et Cylinder Zonae aequale, basibus iisdem cum segmentis ablatis; remanetque corpus Zonae. Quod si Zona non sit media globi vel sphaeroidis, sed inclinata ad polum seu verticem, auferuntur segmenta inaequalia, et truncus coni, ut remaneat talis Zona. 10

Intelligitur autem Zona, cui circumcirca sit aequabilis latitudo, et sub qua sit tectus Truncus conicus parallelarum basium, cujus dimensiones jam in proximo theoremate sequuntur.¹

THEOREMA XVI

20 D

Conus secatur variè: aut enim per verticem et basin, et id vel plano, vel superficie alia coni minoris, habentis eundem verticem.

In utroque casu segmenta Coni aequalia, sunt ut eorum Bases inter se. †

Nam Conus est hîc veluti circulus corporatus; idem igitur à sectione patitur, quod circulus suae baseos.

Aut secatur Conus plano parallelo lateris, cuius circumductu Conus est creatus; aut neque parallelo, sed supra verticem extra figuram concursuro cum latere: utroque casu fiunt portiones indefinitae, de quarum soliditate nulladum disquisitio facta fuit à Geometris, usu quippe non exigente. 30

Aut secatur Conus plano per latus utrumque; fiuntque partes duae, Verticalis superior, et Truncus inferior. Verticalem, plano ad axem obliquo, ARCHIMEDES portionem Coni maluit appellare; agnoscens Conos non alios quam aequicrurios: APOLLONIUS vero Conos faciens alios

34) aequicruros

aequicrurios, alios scalenos (cujus exemplum in Schemate IV.) talem portionem, quantumvis axe per obliquum secto, dummodò sectio sit circulus, pro Cono et ipsam agnoscit.

Quod attinet segmentum verticale, ejus sectio fit Ellipsis, quae habet centrum suum extra axem, versus latus Coni longius. In Schemate IX. Coni GYN axis est GAB, cujus segmentum verticale GNA, basin habet Ellipsin, quae repraesentatur per lineam NZ, cujus centrum seu medium, ubi latissima, est infra A, sectionem ejus cum axe, versus N.

10 Atque hoc est semper majus segmento recto illo, in quo planum ad basin NY parallelum per terminum axis, ab Ellipsi secti transit, sc. per A. Nam planum secans, in A fixum, et ad axem GA inclinatum, plus de corpore Coni acquirit parte AN, quàm amittit parte AZ.

An autem huic segmento GNA aequalis sit Conus ille, cujus basis basi NY parallela, per centrum Ellipsis infra A transit; id consideratione dignum est: mihi nondum liquet, nec jam vacat. Vide de hoc infra Th. sequenti aliqua.

Interim in genere de omni segmento verticali verum est Th. XI.

† Sphaeroid. ARCHIMEDIS; secundum quod Coni, segmentive Verticalis,
20 ad Conum proportio, componitur ex proportionibus Basium inter se, et Altitudinum inter se.

Ergo area Ellipsis NA, ad aream circuli NY est proportionis solidorum GNA, ad GNY pars una. Inest autem harum arearum proportio (per Epis. III. ad Th. II.) in rectangulo diametrorum Ellipsis et quadrato NY, tanquam notioribus. Pars altera proportionis corporum est inter GZ altitudinem segmenti GNA super plano NAZ, et GB altitudinem conici NGY super plano NY. Multiplicatis igitur in se mutuò terminis proportionum ZG in GB, et rectangulo diametrorum Ellipsis NA, in

† quadratum NY; ut posterior factus ad priorem, sic est corpus conici NGY
D v 30 ad corpus¹ segmenti GNA. Potest etiam quodque seorsim computari; ut GNA, ducta altitudine GZ in planum Ellipsis NA, prodit triplum corporis GNA.

In specie, si planum secans parallelum fuerit basi NY: proportio corporum, segmenti et totius, erit triplicata altitudinum vel radiorum in basibus circularibus, vel sescuplicata planorum.

Nimirum quia hoc pacto segmentum verticale, et conus totus fiunt solida similia. Multiplicatis igitur cubice singulis seorsim vel altitudinibus vel radijs basium, erit ut numerus cubicus major ad minorem, sic Conus totus ad segmentum. Aut si sola plana baseon nota essent, quae-
40 runtur illorum radices, multiplicanturque in illa.

1) aequicruros

24) Epis. II.

Quod Truncos attinet, facilis est ex dictis, illos inquirendi Methodus. Ex uno enim modorum praemissorum computatur et conus veluti totus, et segmentum verticale deficiens, ex data vel altitudine vel basis radio. Quod si nescitur ejus, ut deficientis, altitudo, si quidem eâ fuerit opus, quaeritur ex comparatione basium Trunci cum altitudine; ut enim differentia Radiorum in basibus, ad altitudinem (si Truncus sub planis perpendicularibus fuerit) sic radius basis minoris ad altitudinem segmenti deficientis; ablato igitur corpore segmenti deficientis à Cono toto, relinquitur corpus Trunci quaesitum.

In his verò Truncis, qui sub parallelis basibus continentur, rursum ¹⁰ est brevior methodus ut prius. Nam quia bases talium Truncorum ignorari non possunt, earum diametri (quaelibet in seipsam) multiplicantur cubicè, et ablato cubo minori à majori; erit ut maximus ad differentiam, ita Conus totus ad Truncum.

CLAVIVS alium docet modum, ingeniosiore quidem, sed et difficiliorem, ut mihi videtur. Non minus enim quàm suprâ, computanda est area basis utriusque; et jam hoc insuper accedit, quod quaerenda est area medio loco proportionalis inter planum utriusque basis. Id autem fit vel multiplicatione et extractione numerorum prolixorum; vel duabus ²⁰ extractionibus radicum, earumque multiplicatione: tunc addenda omnia tria plana, et summa in trientem altitudinis Trunci multiplicanda. Atqui ex radijs circulorum, qui requiruntur ad investigationem arearum, multò faciliori negotio potest haberi, quicquid quaeritur.

Cùm autem Truncorum Conicorum, qui fiunt plano ad axem recto, multiplex sit usus, et praesenti materiae cumprimis necessarius ob doliorum figuram; subjungam hic pulcherrimum Theorema, et compendium exoptatissimum; etsi demonstrationem cognationis causâ differo deorsum in Supplementum Archimedeae Stereometriae, et Th. XXII. Dividitur autem Truncus in medium Cylindrum et circumjectam ei conicam veluti Tunicam, quae segmentum est Coni dissimile superiorum, sc. ³⁰ superficie Cylindricâ factum: Ergo si tres Diametri, duae basis minoris, una majoris, extendantur in unam rectam: erit ut rectangulum sub tota et sub differentia basium, ad triplum quadrati basis majoris vel minoris, ita corpus Tunicae ad corpus Cylindri vel majoris vel minoris.¹

Ergo duplum minoris adde maiori, summam duc in differentiam ^{D 2} maioris et minoris, pro Tunica: deinde minorem quadra, quadrati triplum sume pro Cylindro inscripto; summam et huius et illius pro toto Trunco.

Vt si sint basium diametri 3. 5. differentia 2. ad bis 3. adde 5. fiunt 11, quae duc in 2, fiunt 22 pro tunica. Et quadratum de 3. est 9, cujus ⁴⁰

³⁰) qui

tripulum 27. est pro Cylindro: Ergo 49 pro Trunco, in quacunque proportionem altitudinis. Sed haec per sequens Theorema, ejusque Corollarium fient adhuc compendiosiora.

THEOREMA XVII

Segmenta Cylindri recta, parallelis axi superficiebus rescissa, sunt inter se, ut segmenta basis.

Nam Cylinder est hic veluti circulus aut Ellipsis corporata; quare hic idem illi accidit, quod figuris hisce in basi, in sectione eadem. In Schemate VIII. planum EFQX est parallelum axi DH. Ergo ut portio
10 circuli EFI vel XQC, ad portionem EFA vel XQB: sic portio Cylindri EFICX ad portionem EFABX. Vide Coroll. Th. II.

Segmenta vero, plano per axem transeunte, dummodo non secet alteram basium, sunt ut segmenta axis inter se.

Nam Cylinder rectus, sectus plano ad axem recto, est veluti linea corporata, et quidem cylindrico corpore praedita: quare accidit illi idem quod lineae. Alia verò segmenta per axem, aequalia sunt Cylindris eadem axis longitudine. Nam quantum ex uno latere Cylindri deficit segmento, quo minus sit rectum; tantum ei accedit ab altera parte; quod in sectione conici non fit, ob inaequalem eius crassitiem. In Schemate VIII. plana
20 PST rectum, LSV obliquum ad axem GB, secant illum communiter in R: ut igitur GR ad RB, sic non tantum portiones rectae KT ad TN, sed etiam obliquae LVK ad VNL. Quantum enim ipsi LVK deficit à partibus L, scilicet LRT, tantum ei superest ex partibus V, scilicet VRP, simile ipsi LRT.

*Segmentum segmenti Cylindracei, quale cernitur in Schemate XIV. secuturo, literis GST, contentum scilicet tribus superficiebus, semicirculo GT, semiellipsi GS planis, et curva Cylindricâ VTS; sic, ut sectionis planorum linea perpendiculariter incidat in G punctum axis HF; hoc inquam segmentum habet se ad totum Cylindrum TY aequale, ut
30 7. ad 33. vel 14. ad 66. ferè, ad segmentum verò HGS residuum ad semicylindrum HGTS, (plano scilicet per axem HG ducto rescissum) ut 14. ad 19. Nam infra in supplemento Archimedeo demonstrabitur hoc de una specie Cylindri, quando scil. eius altitudo aequat circumferentiam basis, Theor. XIX. XX. XXI. At cum non tantum totus globus sit aequalis toti semicylindro, et totum strictum toti segmento
† Cylindri, ubi vertices ellipsis sectricis tangunt bases: sed etiam 1 partes*

11) EFIXV statt EFICX

19) crassitiem

32) Archimedeo

globi et stricti aequales, secundum aliquotam circumferentiae partem quibus sunt proportionales, sint aequales partibus segmentorum semicylindri et Cylindri dictorum, secundum eandem quotam altitudinis, vi ejusdem explicationis corporum rotundorum in rectum; sequitur ut et segmenta ista segmenti, quorum basis est semicirculus, sint altitudinibus suis proportionalia, et sic inter se in omni altitudine retineant proportionem eandem ad Cylindri segmentum aequale, quae est totius vel primi segmenti ad totum aequale Cylindrum, sc. 7 ad 33. Idem enim locum habet etiam in segmentis segmenti, quorum basis est circulus, semper enim segmentum hac basi, sive altum sive humile, est 10 Cylindri sui aequale dimidium. Quibus verò bases non sunt circulus et semicirculus, sed alia circuli segmenta, illis bases itidem istae singulae singulas conciliant proportionem. Itaque etiam de his cylindraceorum segmentorum segmentis valet axioma, non minus quam de Conis et Pyramidibus quod quae insistant eidem segmento circuli, sint inter se ut altitudines: quae verò eidem lineae segmenti circularis, sint ut segmenta altitudinis respondentia.

Denique Cylindri per aliam superficiem cylindricam eodem axe secti limbus exterior, dividitur à superficie conica, cuius sunt bases, infera circulus amplior, supera angustior, in duo novae speciei segmenta circularia, quorum interius Th. priore Tunicam appellavimus, puta cylindri angustioris. 20

Horum igitur Limbi segmentorum proportio inter se est, quae duarum medietatum Arithmeticarum, quae constituuntur inter diametrum minorem et diametrum maiorem. †

Diviso enim numero, puta diametri majoris, in partes duas, in diametrum minorem et in excessum, factisque quadratis, tam à minore, quam à majore, majus quidem quadratum continebit partes quatuor, I. quadratum minoris, II. quadratum differentiae, et III. IV. rectangula duo sub minore et differentia. Triplicatis deinde quadratis, existent pro 30 majoris triplo, tria minoris, tria differentiae, et sex rectangula. Et haec tria quadrata differentiae cum sex rectangulis sunt differentia tota quadratorum triplicatorum. Quare ut quadrata ad suos circulos, adque cylindros aequale, sic haec differentia ad limbum cylindricum totum. Atqui Th. antecedenti differentiam jussi sumus multiplicare in unam majorem et duas minores, id est, in seipsam et in tres minores, pro parte limbi interiore, quae Tunica fuit indigetata. Ablato igitur quadrato differentiae uno et tribus rectangulis, à quadratis tribus et sex rectangulis, restant quadrata differentiae duo et tria rectangula, pro reliquo limbi. Est autem trium rectangulorum et unius quadrati, ad tria rectangula et 40 duo quadrata proportio eadem, quae trium minorum cum una differen-

tia ad tres minores cum duabus differentijs, eademque quae unius minoris cum parte tertia differentiae ad unam minorem cum duabus tertijs differentiae. At si ad minorem addis primo partem unam, pòst partes duas differentiae, constituis duo media arithmetica inter minorem et majorem. Atque id est quod proposueramus.¹

D 3

Corollarium I et Praxis

† Hinc facile habetur proportio Trunci conici ad Cylindros, Trunco inscriptum et circumscriptum. Inter diametros constitue duo media arithmetica, et multiplica differentiam totam diametrorum in horum minus
 10 pro Tunica, quam indue Cylindro minori, hoc est adde quadrato ejus diametri, pro Trunco. Ecce exemplum.

Sint diametri 3. 5. Differentia 2. quae non communicat cum ternario. Ergo substitue triplos 9. 15. Differentia 6. Quia eadem manet proportio.

Ergo diameter minor	Duo media arithmetica		Diameter maior	Cylinder	
9.	11.	13.	15.	minor	81.
9.	Diff. 6.	6.	15.	Tunica	66.
81.	66.	78.	225.	Truncus	147.
Pro Cylindro	Pro	Pro resi-	Pro Cylindro	Residuum	
inscripto	Tunica	duo Limbi	circumscripto	Limbi	78.
				Cyl. maior	225.

Aliud Exemplum.

Dia	—	metri	
5.	7.	9.	11.
5.	6.		

Cyl. 25. Tun. 42. — Truncus 67

Aliud Exemplum

Dia	—	metri	
19.	20.	21.	22.
19.	3.		

Cyl. 361. Tun. 60. — Truncus 421

Vel quod eodem recidit: Multiplica diametros inter se, multiplica etiam differentiam in sui partem tertiam, et adde factos; provenit Truncus in ea dimensione, ut cujuslibet diametri quadratum valet suum Cylindrum. En superiora tria Exempla

9 6 9	5 6 5	19 3 19
15 2 9	11 2 5	22 1 19
135 12 81 Cyl. minor.	55 12 25 Cyl. minor.	418 3 361 Cyl. minor.
12	12	3
147 Truncus.	67 Truncus.	421 Truncus.

Corollarium II

Segmenta limbi cylindri maioris circa minorem, superficie conicâ facta, stantia super eâdem basi, non minus quam cylindri ipsi, adeoque

et Trunci toti sub iisdem basibus circularibus parallelis, sunt in proportionem suarum altitudinum.

Etsi verò superior basis non fuerit inferiori parallela, nec circulus, sed Ellipsis ad axem obliqua: nihilominus bina limbi segmenta, exterius et interius, sunt in proportionem illarum altitudinum, quas habet Ellipseos centrum et diameter minor, eademque diameter cylindricae baseos rectae. Itaque non de nihilo est, quod Th. praecedenti, portionibus conicis, obliquo ad axem plano resectis, quaesivi methodum dimensionis à diametro Ellipsis brevioris. Etsi superficies talem limbum inaequalis altitudinis dispescens, non est Coni recti, cui sit idem axis cum Cylindris, sed conii scaleni.¹

APOSTROPHE AD PATRONOS

D 3 v

Cum libellus iste manuscriptus per menses sedecim apud librarium Augustanum delitisset, commendatus illi ab eximio illo Germaniae nostrae decore, meique dum viveret, amantissimo MARCO WELSERO; neque tamen typis excuderetur, ut erat mihi facta promissio: vix tandem, WELSERO jam rebus humanis exempto, libellum meum extorsi detentori, postliminioque recepi.

Ex eo tempore consilium cepi, libellum, quamvis in magna operarum penuria, excudendi domi: qua occasione potestas mihi facta fuit, non correctiorem tantum, sed et auctiorem, quam erat initio conscriptus, extrudendi. Nec diffiteor, temporis aliquantum subtractum studiis caeteris, impensumque huic speculationi; nec poenitet jacturae. Nam fieri nequaquam potest, ut immortalitatis fructum metat labor, qui sementem temporis fecit nullam.

Et censuisti Tu quidem, Ill^{ris} et G^{so} L. B. IÖRGERE; quae de figuris ab AR^lCHIMEDE non tactis, ad rationes tamen doliorum propriissimè pertinentibus, affecta tantum audiebas, uti nequaquam omitterentur, quin potius operi subjungerentur, appendicis loco.

Ego verò et perfeci potissimam eorum partem; ut quod demonstrationes attinet, parum, quod usum, nihil ad perfectionem supersit: et tractatum in ipsum libellum hic inserui suo loco, cumque partibus caeteris ita connexui, ut non appendix cauda, sed caput aut cor speculationis totius, ut est quidem, videri possit: quod et Te, L. B. IÖRGERE, et multò maximè Te, Illustrissime Domine DE LIECHTENSTEIN (cujus in hac Philosophiae parte exercitationes assiduas, facultatemque comparatam egregiam judicandi, ex quo Te primùm in praefatione libri sum allocutus, multò nunc rectiùs et copiosiùs habeo cognitam et perspectam) ubi tempus ad isthaec cognoscenda vacaverit, ipsos censituros existimo. Valete et fruimini. Id. Iulij Anno 1615.¹

40

DE STEREOMETRIA FIGVRARVM
CONOIDIBVS ET SPHAEROIDIBVS PROXIME
SVCCEDENTIVM

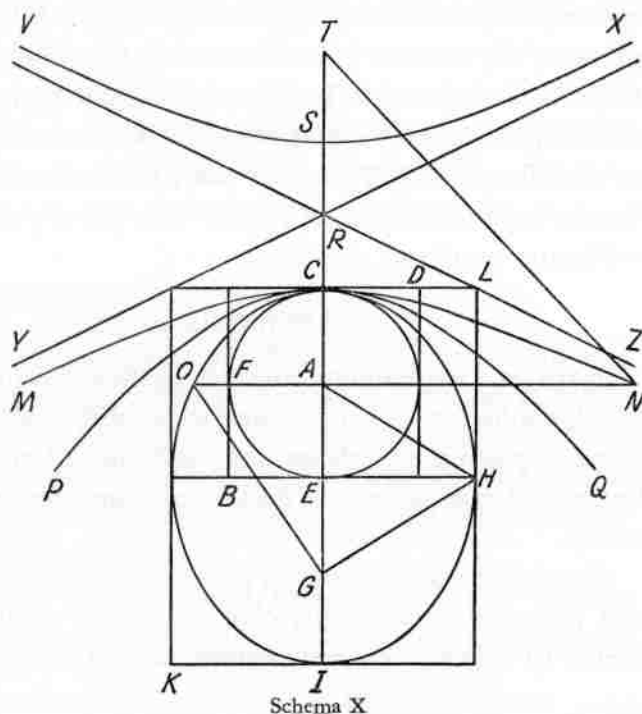
Huc usque ARCHIMEDES et Geometrae veteres progressi sunt, inquirentes Naturam et Dimensiones figurarum ordinarum rectilinearum et curvilinearum, quaeque ab ijs solida proximo gradu gignuntur.

Caeterum quia figura Dolij longius à Regularibus excurrit, operae precium me facturum putavi, si genesin illius et cognatarum, gradusque
10 cognationis earum cum Regularibus, eadem quasi Tabella comprehensas ob oculos exhiberem, cum ut demonstrationes secuturæ plus lucis haberent: tum verò etiam, ut industriam Geometrarum hujus ætatis excitarem, portisque spaciosissimi agri Geometrici pansis, quae adhuc in eo excolenda, quae indaganda restent, praeconio meo promulgarem.

De sectionibus conii, solidorum genitricibus

† Sectiones Conicae curvae superficiei, quae varia solida progignunt, hac vice considerata, quatuor sunt curvilineae; quas hic in Schemate exhibeo inter se comparatas. Nam omnis
20 hujusmodi sectio aut Circulus est CFE, aut Parabolæ PCQ, aut Hyperbolæ MCN, aut Ellipsis CHI.

Harum figurarum causa simplicitatis hic est ordo, ut primus sit circulus, sequatur Ellipsis, inde Parabolæ, ultimo locos sit Hyperbolæ. Inter has duae primæ in seipsas redeunt, Circulus et Ellipsis: duæ verò posteriores figurae, Pa-



rabole et Hyperbole sic sunt comparatae, ut in infinitum, si continues, excurrant, semper quidem ad rectitudinem magis atque magis accedentes; nunquàm verò eam penitus assequentes; et id hoc discrimine, quòd brachia Paraboles CP, CQ, uni rectae CI, adeòque inter se ipsa etiam, magis atque magis fiant parallela, quamvis interim infinito intervallo ab invicem discedant: brachia verò Hyperboles CM, CN sequantur ductum duarum Rectarum RY, RZ, concurrentium in R, eoque versus Y. Z in infinitum ab invicem discedentium;¹ quae brachijs Hyperboles semper approximant magis magisque, nunquam tamen cum ijs concurrunt; à qua proprietate, Rectae RY, RZ dicuntur Asymptoti. E 10

Rursum ex utraque biga est una, quae sola suam implet speciem, ex finitis quidem circulus, ex infinitis Parabole: Ellipsium verò illinc tot sunt formae, quot possunt esse formae rectangulorum parallelogrammorum LK: Hyperbolarum hinc formae tot, quot angulorum YRZ, à binis rectis RY, RZ formarum. Sanè quia, ut circulus CE se habet ad circumscriptum quadratum uniforme DB, et ut Parabole PCQ, ad Axem seu rectam CI unicam, sic Ellipses CI, se habent ad Rectangulorum LK, Hyperbolae MCN ad concurrentium rectarum YR, ZR, species infinitas, quaelibet ad suam.

Et nota propter descriptionem figurarum, quod sicut in circulo omnia 20 intervalla AC, AF, AE, inter se sunt aequalia, sic in Ellipsi bina semper intervalla AO, OG, non à centro E, sed à duobus Focis A, G, aestimata, binis quibuscunque AH, HG, vel AC, CG, vel AI, IG, sunt aequalia. In Parabola, cuius focus A, ducta quacunque KI in eodem plano, rectà ad axem CI, rursum binae lineae AC, CI, binis quibuscunque alijs ut AO, OK aequales sunt. In Hyperbola, cuius focus unus A intus, alter T exterius, et circa eum figura similis VSX, intervalla bina cuiusque puncti, ut N, et focorum A, T, semper unam et eandem habent differentiam CS, lineam inter vertices C, et S, etc. Vide plura paulò infra de figurarum solidarum numero. 30

De modis Geneseos

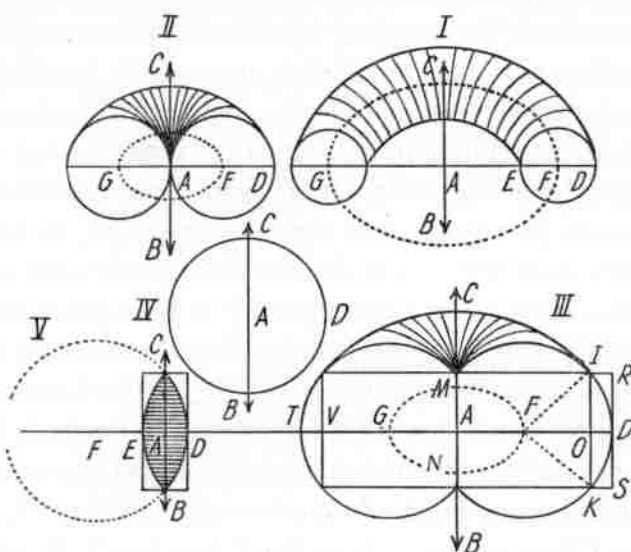
Porro ex circumductu circulari quatuor harum planarum figurarum (de alijs enim formis hac vice non loquimur) creantur infinitae solidorum formae, quarum superficies non, ut Coni et Cylindri, altrinsecus rectilineae, sed quaquaversum curvilineae sunt, secundum magis tamen et minus.

Circumactûs autem species generaliter sunt quinque, sed quae minutius postea subdividuntur, cùm ad figuras magis compositas ventum fuerit. In adjecto Schemate expressae sunt hae species utcunque. Nam

5) fiunt

22) AC statt AO

- I. Axis CB, circa quem figura est circumagenda, vel longius stat à centro F figurae ED circumducendae, quàm ut concurrat cum figura. Tunc figura DE directè circumacta in circulum FCG, cum latitudine sua erecta,¹ creat Annulum, in quo spacium est intermedium, cuius centrum A. II. Vel tangit axis iste geneseos, ut CB, figuram FD circumagendam tangat in A, et manente puncto circumferentiae A, totus circulus circa CB circumagatur: tunc figurae gignuntur, quas possis Annulos strictos appellare. III. Vel secat axis geneseos figuram circumagendam extra medium, ut si maius circuli segmentum MDN circa sectionem MN sit circumagendum, ita ut centrum F per G transeat, gignitur autem figura in duobus locis oppositis cava, scilicet circa M et N, quae Mali fructus arborei forma est. IV. Vel transit axis geneseos per ipsum centrum figurae, ut si semicirculus CDB circa manentem diametrum CAB sit circumagendus; et tunc gignitur Sphaera seu globus perfectus. V. Vel denique secat axis geneseos figuram circumagendam intra medium, ut si residuum seu minus segmentum CDB de circulo MDN sit circumagendum circa sectionem suam CAB: et tunc gignitur figura, in locis duobus oppositis acuta, quam à Citrij mali figura possis denominare.



Schema XI

De figurarum numero et differentiis

Quod si tres figurae reliquae, sectione Coni ortae, tam essent simplices, quàm circulus, de quo hactenus: figurae solidae his V. modis procreatae essent in universum Viginti, à qualibet earum, ut hactenus à circulo, quinque, pro quinque modis Creationis circularis. Sed propter mixtam reliquarum figurarum Naturam, Vicenarius iste solidorum numerus ad Nonaginta et duo extenditur.

Cùm enim figurae tres propriè dictae Conicae, non sint undique similes: fit ut quae respectu circuli unica est linea, pro axe geneseos

11) AB 12/13) circumagendam; Tangat 27) CDE 28) CAD 36) et duo fehlt

assumpta, respectu harum figurarum fiant diversae, punctum in Circulo unicum, diversa puncta sint in caeteris. In circulo Vertex uno et eodem modo dicitur, et omne circumferentiae punctum pro vertice sumi potest: In caeteris Vertex primarius est, non nisi extremitas alicuius certae lineae, scilicet eius quae axis dicitur, quae est in figuris duabus sequentibus CI, cuius vertices à C repraesentantur: contrà Vertices, latiore sensu, totidem sunt, quot lineae in figura pro axe geneseos, vel ei parallelis, eliguntur; quos lubet Vertices positionis appellare, quia lineâ tali ad perpendicularum erecta, punctum totius figurae altissimum, fit vertex eius. Vt sequenti Schemate XIII. electa diametro OS pro axe geneseos, A fit vertex positio- 10 nis: contrà electa contingente EF in axem geneseos, Vertex vel nullus est, in Hyperbolis scilicet obtusangulis, et certa earum positione, vel certè longe alius, quàm A, puta circa O. In circulo Centrum idem est cum Foco, scilicet A in Schemate X. praemisso. In Parabola Focus unus A, centrum verò nullum est; nisi concipias, centrum eius infinito intervallo, focumque alterum, intervallo duplo maiori, in linea CI, à Vertice C, recessisse: In Ellipsi et Centrum est E, et foci duo A. G. omnia intra figuram: In Hyperbola itidem Centrum et duo foci; sed centrum extra figuram in R; focorum alter intra, in A, alter extra in T, qui est respectu VSX sectionis oppositae, intra illam. In circulo diametri omnes pro axe sunt, 20 in caeteris saepe aliud axis, aliud diameter, ut aliud est species, aliud genus.¹

Et in Parabola quidem (ut redeamus ad Schema XIII. sequens) E 2 diametri omnes aequidistant, ut CI, OS. in Hyperbola verò atque Ellipsi omnes per centrum figurae R traducuntur, quod est in Hyperbola extra, in Ellipsi intus in medio. In circulo aequales sunt omnes diametri; in Ellipsi differunt longitudine, ut CI, OS; in Parabola et Hyperbola non est earum finita longitudo. In circulo et Ellipsi omnis lineam tangens habet aequidistantem sibi diametrum; in Parabola et Hyperbola, quae tangenti cuicunque aequidistat, ut LK ipsi FE, diameter 30 figurae esse non potest. Secundum horum igitur punctorum linearumque differentiam figurae planae circumactae, varias etiam, et re quidem semper, plerunque verò etiam ad oculum differentes species solidorum procreant: quas sigillatim recensere non pigebit, non tamen repetitis quinque speciebus ex circulari Coni sectione ortis, quae singulae familias singulas ducunt jam sequentium, quasdam interim communes habent clientelas.

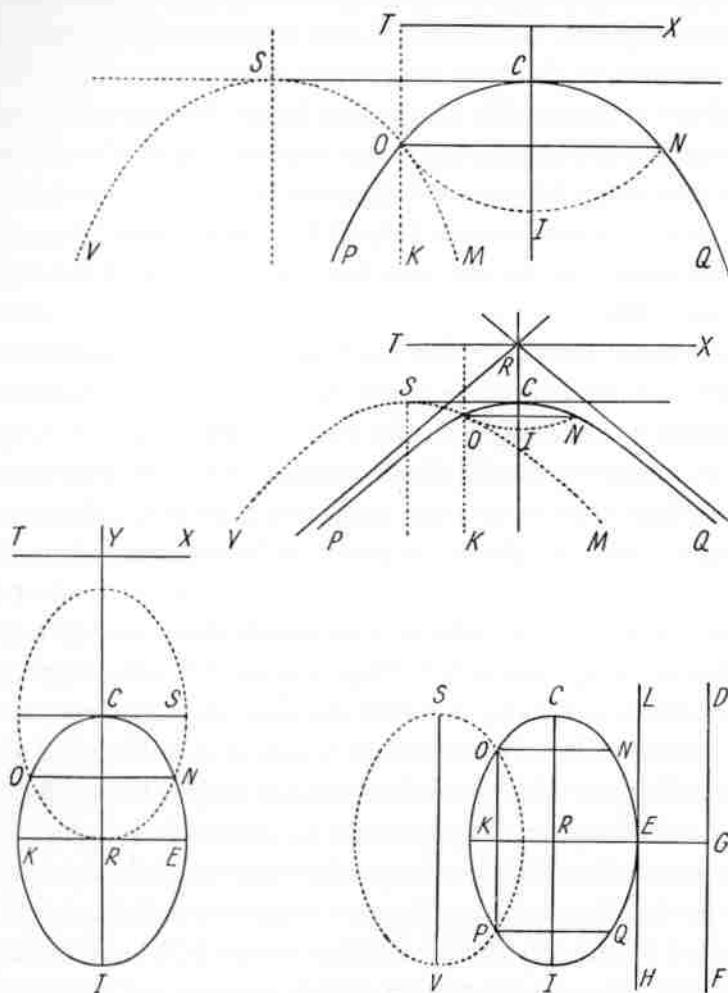
Incipiamus ab ijs in quibus desijt ARCHIMEDES, et sit in Schemate adjecto, axis figurae CI; circa quem figura PCQ circumagatur, sic ut manente CI, punctum N per punctum O transeat, Q per P. Creantur 40

24) OS, HA. in

30) PK statt LK

34) repititis

igitur solida duo Conoidea, Parabolicum et Hyperbolicum, et Sphaeroides longum, seu figura Ovi: cuius vertices C, I; circulus amplissimus



Schema XII

ERK; de quibus ARCHIMEDES libro de Conoidibus et Sphaeroidibus. Modus geneseos est è Numero IV, idem qui globi. Species sunt 3. numero linearum.

Sit jam axis geneseos non ipse axis figurae CI, sed ei parallelus. Erit igitur vel extra figuram, ut in DF, vel contingens eam, ut LH contingens in E: quae duo in sola Ellipsi locum habent. Nam in caeteris, omnis linea parallela axi in eodem plano, secat figuram continuatam. In Ellipsi igitur, manente DF, et totâ figura NOPQ in distantia centri RG circumlata, gignitur annuli species, quem arduum dixeris: similis est serto puel-
 10 igitur, manente DF, et totâ figura NOPQ in distantia centri RG circumlata, gignitur annuli species, quem arduum dixeris: similis est serto puel-
 4- larum rusticarum, quippe spacium habet in medio. Sic manente LH et puncto contactus E, tota itidem figura NOPQ circumlata, fit solidum ejusdem nominis, sed sine spacio in medio, hoc est annulus strictus. 5-

Vtrumque imaginare tibi in Schemate XI. ad Numeros I.II. sed pro circulis sectionem intellige Ellipses erectas.¹

- Vel erit intra figuram axis circumductionis; sit OK, et consistat vel E 2 v
 citra CI axem figurae, sic ut axis CI cum portione figurae majore OCQ
 circa OK agatur, et manente O, vertex C per S transeat, et Q per V:
 tunc Parabolae et Hyperbolae, magis ista, figuras faciunt QCOSV, montis
 6. 7. Aetnae similes, propter cavitatem ejus in vertice, quam Graeci vocabulo
 Craterum celebrant: Ellipsis verò figuram hoc pacto creat similem Mali
 8. Cotonei, quam imaginaberis in Sche. XI. praeced. apud Numerum III:
 sed pro consertis circulis sectionis intellige consertas Ellipses erectas, 10
 ut in Schem. XII.

- Consistat etiam dicta OK ultra axem figurae CI sibi parallelum, sic ut
 PO minor pars figurae, quae axem non habet, circa manentem OK
 circumagenda sit: tunc à Parabola atque Hyperbola species quaedam
 9. 10. nascuntur Cornuum rectorum MOP, quorum alia sunt acuta alia obtusa,
 ut in pecudibus quando primùm coniscant cornibus. Ellipsis verò dat
 11. OQ figuram Olivae vel Pruni, similem illi Numero V. Schematis prae-
 missi XI.

- Jam omisso axe CI, succedat ejus perpendicularis in eodem plano, et
 sit primùm extra figuram ut TX. Ergo circum TX actae figurae, solida 20
 12. 13. creant annularia ordinata, Parabolae quidem et Hyperbolae extrorsum
 infinita, brachijs CP, CQ extrorsum versis et hiantibus, in circulum
 circumlatis. Ellipsis verò circa talem axis CR perpendicularem TX exte-
 riorem, intervallo centri RY, manente Y, circumducta, creat annulum
 14. supinum seu sessilem, similem fulmento presso bajulantium situlas, capi-
 tibus suppositis. Rursum hanc figuram imaginare in Schemate XI. prae-
 ced. Numero I: sed pro circulis sectionum sint Ellipses jacentes, verti-
 cibus invicem obversae. Contingat exinde figuram in C vertice perpen-
 dicularis ista axis, sitque CS; et figuris circa eam circumactis, tres gíg-
 15. 16. 17. nentur species Annulorum strictorum ordinatorum, duo infiniti extror- 30
 sum, ut prius, unus finitus ab Ellipsi CI, manente puncto C, estque
 supinus vel sessilis vel pressus, ut prius; imaginandus in Schemate XI.
 praeced. apud numerum II, si pro circulis sectionum essent Ellipses
 verticibus sese contingentes. Secet denique figuram ista perpendicularis
 axi, sitque ON: secabit figurae planitiem in partes duas; in Parabola et
 Hyperbola semper inaequales, cum altera pars PONQ infinita sit, ONC
 finita, ita ut lineae conicae fiant tria segmenta, duo infinita, unum fini-
 tum; in Ellipsi verò, licet utraque finita sit, altera tamen plerunque major
 est, NIO, altera minor, OCN. Igitur sex hisce figurarum segmentis circa
 18. 19. ON circumactis, totidem existent novae species, duae circa medium 40

1) Vtrumque

2) sectionum

15) MNP

utrinque (sc. in O et N) excavatae, exterius circumcirca infinitae, quippe à partibus infinitis PONQ, circa ON circumactis, una quae est ab Ellipseos segmento maiori, lenticularis, supra et infra umbilici forma. Provenit tali forma genus quoddam Melonis sessilis minuti, qui totus editur: proveniunt tali forma superius etiam boleti aliqui. Hanc in Schemate XI. praecedenti, Numero III. apud figuram Mali imaginare, sed pro consortis circulis sectionis intellige consortas Ellipses eodem axe, ut in Schemate praesenti XII. Denique minoribus figurarum partibus ONC, tres reliquae figurae solidae fiunt, aspectu similes inter se, reipsa diversae; Ellipticam quidem OCNR à Pruno crasso, Parabolicam verò et Hyperbolicam OCNI à Fusis distinctionis causâ non ineptè denominaveris. Atque hae duae, praesertim ¹ illa, quae est ab Hyperbola multum obtusangula, praecipue sunt notabiles: Fiunt enim figurae verticosae, cum ventre circulari, rotunditatis conspicuae, reliquo corpore versus vertices utrinque magis ad Conorum rectitudinem accedente. In his erit nobis quaerenda genuina figura dolij, praesectionis verticibus O. N.

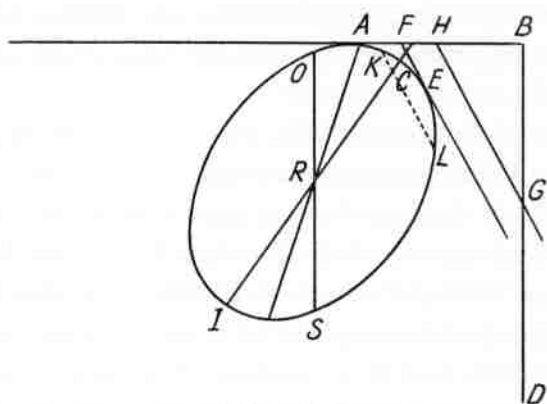
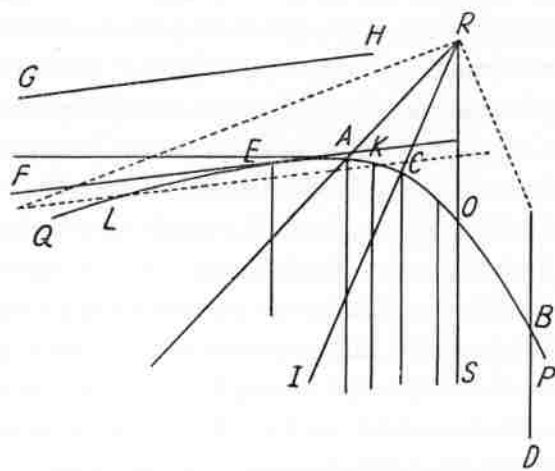
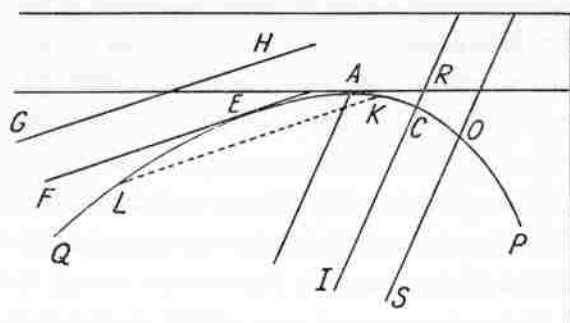
Dictum est, in hac forma sectionis, segmenta Ellipseos non semper esse inaequalia. Cum ergò haec axi perpendicularis per centrum figurae R transit, quam axem vel diametrum rectam vel breviorē appellant, tunc figurae dimidium, circa hanc ERK circumactum, sic ut manente E vertex C per I traducatur, creat alteram speciem Sphaeroidis lati, cuius vertices in E, K, circulus amplissimus CRI, de quo itidem ARCHIMEDES.

Hucusque recensere et distinguere figuras solidas suffecisset ad Dolia vinaria. At cum praedixerim, me in hac speculatione paulò longius ultra libelli huius metas prospicere; adjungam cognationis causa etiam reliquas solidorum species.

Succedat igitur in praesenti Schemate XIII. pro axe CI alia quaecunque diameter OS, et in ea statuatur axis geneseos. Hic Ellipsis quidem secatur per centrum R, in duas medietates similes, quarum utralibet circumducta circa OR manentem, creat formam Pyri, quae iure cognationis postulat adiungi Malis et Cotoneis et Prunis, ut constet his bellariis sua integritas. At reliquae duae figurae secantur in partes dissimiles inter se, utrasque infinitas, sed in Hyperbola obtusangula casus duo sunt: Nam aut secatur angulus obtusus ab electa diametro in duas partes acutas, aut una sola pars est acuta, altera obtusa vel recta. Partes igitur figurarum, excepto casu ultimo, circumductae creant figuras, quae ad oculus nihil differunt à Crateribus et Ceratoidibus, Numeris 6. 7. 9. 10. insignitis; etsi reipsa diversae sunt, ob axis CI circumvolutionem, hic conicam illic cylindricam, totiusque hic partis generantis obliquitatem.

10) OCNL 19) rectam et breviorē

In obtusa verò sectione anguli obtusi Hyperboles, pars maior figurae
30. circa talem diametrum circumducta addit unam speciem, veriùs non



Schema XIII

speciem. Nam et deorsum et extorsum infinita est (nisi, ut in omnibus talibus, superficie conica vel cylindrica, quae oritur ductu rectae, finem ei statuas) caretque Ver-
tice, sed eius loco est in
medio in umbilicum de-
pressa, circa ascendit
sursum leniter, idque
sine termino.

Pro diametro OS su-
matur ei parallela BD,
quae in Ellipsi non habet
separatam consideratio-
nem à parallela lineae
contingentis, quippe
omni diametro respon-
det sua parallela contin-
gens figuram. Restat ut
illam parallelam applice-
mus reliquis duabus figu-
ris; sit igitur vel extra
figuram vel intra. Extra
esse in Parabola et Hyper-
bola non potest, cum
omnes diametri paralle-
lae figuram continuatam
intrent. Ducatur igitur
aliqua diametro OS par-
allela, intra figuras has
duas. Rursum autem in

Parabola linea quae est diametro parallela, ipsa quoque est diameter, nihil
hinc gignitur novi. In Hyperbola sola casus iste locum et considerationem
separatam habet: quam cum diameter OS in duas dissimiles secuerit par-
tes, jam haec Parallela ipsi OS vel in minori eius parte ducitur, vel in
maiori. Ducatur in minori et sit BD, secatur igitur et ipsa figuram in partes
40

4) extorsum

magis adhuc dissimiles, quarum maior creat aliquid Craterum Numero 7. 31.
 simile, aut infiniti Numero 30. minor simile Ceratoidum, Numero 10. 32. 33.
 Ducatur jam in maiori parte OQ, aliqua ipsi OS diametro parallela; quod
 in Hyperbolis acutangulis habet casus quinque. Nam aut inter diametrum
 dividentem et verticem primarium ducitur, ut inter C.O. aut per ipsum
 verticem primarium C, aut inter vertices duos, primarium C, et posi-
 tionis A, aut ultra verticem positionis A. Sed in obtusangulis Hyperbolis
 vertex positionis non datur. In uno quolibet casu secatur figura in duas
 dissimiles partes. Species igitur nascuntur tredecim, quarum quatuor 34. 35. 36. 37.
 10 sunt similes Craterum Numero 7. tres similes figurae cavae Numero 30. 38. 39. 40.
 quatuor similes Ceratoidum Numero 10. quippe acutae: duae residuae 41. 42. 43. 44.
 sunt rotundatae in vertice, similes Conoidi Hyperbolico, numero 2. una 45. 46.
 quidem, quae est à parte maiore Hyperboles vel acutangulae, vel si
 obtusangula, convenienti diametro divisae, ut dictum (debet enim illa
 secare angulum Hyperboles obtusum in duas partes acutas) similis est
 obtusangulo, quae verò à parte minore, similis acutangulo Conoidi.

Ultima linea sit Contingens sectionem, extra tamen verticem pri-
 marium C, ut EF. circa quam si circumagantur figurae Parabolae et
 Hyperbolae, duas gignunt species infinitas, similes ijs quae sunt numero 47. 48.
 20 15. 16. minus tamen ordinatas, infinitas enim se extendit in transversum.
 Ellipsis verò circa hanc EF circumducta gignit anulum strictum 49.
 conniventem, cognatum illi Numero 17. quem imaginaberis in Sche-
 mate XI. quinque modorum circumactus, apud numerum II. sed pro
 circulis sectionum concipe Ellipses ad mutuum contactum aequaliter
 inclinatas. Contingentibus accenseri posset Asymptotos, est enim quasi
 contingens sectionem in puncto infinitum distanti: et hic consideratur
 nova species, quasi media inter annulares laxas et strictas. 50.

Sit pro contingenti, eius parallela, et sit primum extra figuram, et
 circa hanc velut axem circumagantur figurae; quatuor fiunt solidorum
 30 annulorum species, ex Parabola et Hyperbola infiniti in transversum,
 quorum dorsum in Parabolico semper circulariter eminet, in Hyper- 51.
 bolico quidam eminens dorsum habent, alii extrorsum fiunt altiores, 52. 53.
 quam quo loco sunt angustissimi, non multum absimiles figurae
 numero 13. Ex Ellipsi verò circa GH circumactâ fit annulus finitus 54.
 connivens, ex altera parte amplior, in forma ferè Tiaræ seu Globi
 Turcici, si dempseris ei apicem. Hanc etiam imaginare apud primam
 formam circumactus, ut tamen pro circulis sectionum concipias Ellipses
 ad se mutuò aequaliter inclinatas.¹

E. 4 Parallela Contingenti si fuerit intra figuram, ut LK, secans eam in
 40 partes duas, multae fiunt species, quia etiam casus multi. Vel enim LK
 non secat axem intra figuram, vel eum secat. Et si secat, tum vel transit

verticem primarium C, vel eum intercipit, excludens verticem positionis circa O, qui ad erectionem figurae secundum EF sequitur; si tamen aliquis datur; nam in Hyperbola obtusangula, si LK vel FE cum Asymptoto contraria RB fecerit obtusum angulum versus figuram, Vertex nullus est: Vel per hunc positionis verticem transit: vel etiam hunc in parte resecta includit. Casus recensui quinque et omnes in omnibus tribus figuris locum habent; sectiones ergo quindecim, et bina in singulis figuris segmenta. Sed in Hyperbola tria majora trium primorum casuum duplicia, respectu effectus; aut enim deorsum excurrit infinitas ibi, ut in Parabola, aut sursum. Solidorum ergo species 10
 hinc sunt triginta tres, quarum tredecim infinitae in transversum, et ex
 55. 56. 57. his novem utrinque in umbilicum excavatae (quarum 6. cum eminenti
 58. 59. 60. labro circulari, ut Crateres Numero 7, sed in hoc diversi, quod aequi-
 61. 62. 63. parantur monti etiam subtus excavato; 3. verò sine eminenti labro, quarum non est finita altitudo, similes figurae Numero 19.) duae
 64. 65. acuminatae, Ceratoides, ut Numero 10. et duae bene rotundato vertice,
 66. 67. Conoides, ut Numero 2; quando scilicet linea, circa quam est circum- agenda figura, per verticem transit positionis, ubi is datur. Harum tredecim quinque sunt Parabolicae, octo Hyperbolicae, reliquae viginti
 68. 69. 70. sunt finitae, et altera parte crassiores, reliqua tenuiores. Ex ijs enim 20
 71. 72. 73. quindecim (quinae ex figuris singulis) species sunt in acumen desinentes,
 74. 75. 76. novem quidem utrinque, ternae ex figuris singulis, quos Nucleos
 77. 78. 79. appellemus: tres verò, singulae ex figuris singulis, à parte crassiori benè rotundatae, affines ideò Sphaeroidi lato; quas Fragis aut Nuci Pineae
 80. 81. 82. comparare possumus: tres denique, singulae rursum ex figuris singulis, à parte crassiori cavae, à tenuiori acutae, in modum folliculi Vesicariae, quam Germani Cerasa Judaica dictitant, occultè signantes glandem penis
 83. 84. 85. cum praeputio. Quinque verò ultimae sunt Pyrorum species, à parte
 86. 87. majori Ellipseos, quinque dictis casibus sectionis hujus, generatae, cavae omnes, tres utraque parte, duae alterâ solum, parte verò reliqua tenui 30
 una rotundata, et Sphaeroidi similis; una acuta, ferè concidens cum Vesicaria, ex Ellipseos parte minori nata. Summa octuaginta septem, quibus additae figurae quinque ex circulo, veluti capita familiarum, efficiunt formas nonaginta et duas.

Tot igitur sunt genera figurarum Solidarum à sectionibus conicis in circulum actis resultantium; ut jam segmenta singularum, aut composita à segmentis, seorsim non numerentur. Verbi causa, patina stannea constat plerunque tribus superficiebus, in fundo segmento Sphaerae, circum cratere Parabolico, limbus verò est ex superficie coni valde obtusi, aut etiam Zona Globi obliqua. Etsi verò complurium 40

dimensiones artificiosae in idem recidunt; non sunt tamen ignoranda Geometrae discrimina generationis tam multiplicia, ne incautus, circa nonnullarum specialium generalem considerationem, pertrahatur in insidias inexplicabiles. Circa has igitur singulas exerceant se Geometrae, exemplo ARCHIMEDIS; qui ex hisce quatuor solas, et quintam, Globum
 E 4 v ipsum, considera¹vit: non quòd utilissimae aut communissimae essent, quid enim hic habet Conoides parabolicum prae Annulo, Malo, Pyro, Pruno, Nucleo? sed quod simplicissimae et proximae globo, ingenio se praeberent. Nos in praesens illas tantum contemplabimur, per quas
 10 accessus patet ad Fusa Hyperbolica, quorum Trunci sunt nostratia dolia: subjiciam igitur de ijs theoremata sequentia.

THEOREMA XVIII

† *Omnis Annulus sectionis circularis vel ellipticae, est aequalis Cylindro, cuius altitudo aequat longitudinem circumferentiae, quam centrum figurae circumductae descripsit, basis vero eadem est cum sectione Annuli.*

Intelligo sectionem, quae fit plano traducto per centrum spacij annularis, ad superficiem annularem recto. Huius Theorematis demonstratio patet partim ex Th. XVI, et ijsdem elementis institui potest, quibus ARCHIMEDES Stereometriae principia tradidit.

20 Annulo enim (in Schemate XI.) GCD, sed integro, ex centro spacij A, secto in orbiculos infinitos ED, eosque minimos, quilibet eorum tantò erit tenuior versus centrum A, quantò pars eius, ut E, fuerit propior centro A, quàm est F, et recta per F ipsi ED perpendicularis in plano secante; tantò etiam crassior versus exteriora D: extremis verò dictis, scilicet D, E, simul sumptis, duplum sumitur eius crassitiei, quae est in orbiculorum medio.

Haec ratio locum non haberet, si orbiculorum ED partes cis et ultra circumferentiam FG, lineasque per F, G, perpendiculares, non aequales aequaliterque sitae essent.

30 Corollarium

Haec ratio dimensionis valet tam in circulari forma annuli, quam in elliptica ardua, sessili, connivente, tam in laxis annulis, quàm in strictis: quin imò in omni annulo, quaecunque eius, pro circulo ED, existat figura ex sectione eius rectâ: dummodò in plano per AD ad annulum recto, sectionis partes cis et ultra F, fuerint aequales aequaliterque sitae

8) globo, et ingenio 21) eoque 25) D, S, 27) E, D, 30) Corollarium I. 33) omnibus annulis

hinc et inde: Quod explorabimus in figura sectionis quadrata. Sit annulus corpore quadrato, et intelligatur sub ED quadratum. Hic annulus habet rationem dimensionis etiam aliam. Nam est pars exterior Cylindri, cuius basis est circulus semidiametro AD, altitudo DE: huic Cylindro ex Th. XVI. adimenda est medulla, seu Cylinder, cuius basis est circulus semidiametro AE, altitudo ED. Quare quod fit ducta ED in circulum AD, minus circulo AE, aequat corpus annuli plano quadrato creati. Et si duceretur ED in quadratum AD, minus quadrato AE, proportio corporis facti, esset ad corpus quartae partis annuli, ut est quadratum ad circulum, scilicet 14. ad 11. Sit AE 2. Ergo AD 4. cuius quadratum 16. sed quadratum AE est 4. Ergo differentia quadratorum est 12. quod duc in altitudinem 2. existit corpus¹ 24. cuius quadruplum 96. ut verò 14. F ad 11. sic 96. ad 75. cum tribus septimis, Annuli quadrati corpus. Haec secundum rationem Th. XVI. At secundum modum praesentem, cum sit AF 3. FG 6. ut verò 7. ad 22. sic 6. ad 19. minus una septima: erit ergo haec longitudo circumferentiae FG, pro altitudine Cylindri: Et cum ED sit 2, et quadratum eius 4, pro basi Cylindri, duc igitur 4. in 19 minus una septima, prodeunt 76 minus quatuor septimis. Ecce verum etiam sic theorema.

THEOREMA XIX ET ANALOGIA

20

Annulus strictus est aequalis Cylindro, qui habet basin circulum sectionis Annuli, altitudinem aequalem eius circuli longitudini.

Valet enim modus iste in omni omninò proportionem ipsius AE ad AF, valetque adhuc in Annulo stricto, ubi circuli EC circumacti centrum F, describit circulum FG, aequalem ipsi DA circumacto. Nam secatur tale strictum ex A, in orbiculos, qui in A habent crassitiem nullam, in D duplam ipsius crassitiei in F, sicut circulus per D. duplus est ad circulum per F.

Corollarium

Corpus Cylindraceum, quod fit (in Schemate XI.) circumacto³⁰ quadrilatero mixtilineo MIKN, vi ejusdem demonstrationis aequale est columnae, quae hoc quadrilaterum habet pro basi, et longitudinem circuli per FG pro altitudine. Limbus verò exterior IKD, cylindraceum exterius ambiens, ut circulus ligneus dolium, planè nihil attinet ad hoc theorema, sed alijs principijs est indagandus.

¹⁰) AE 1.

Analogia

Rursus autem valet iste modus per omnia corpora seu segmenta Mali (ut et Cotonei) cylindracea, magis magisque tenuia, donec tandem IK et MN coincident, quod fit in genesi globi, numero IV. ubi pro duabus MN et IK, est unica BC, quare in illo corpore primùm cessat in solidum, huius theorematism demonstration et usus.

Corollarium

Globus est ad annulum strictum, eodem circulo creatum, ut 7. ad 33. Nam tertia pars semidiametri, ducta in quadruplum circuli maximi, vel
 10 duae tertiae diametri in aream circuli maximi, creant cylindrum aequalem cubo. At Cylinder aequalis stricto, habet basin quidem eandem; altitudinem verò circumferentiam. Ergo ut circumferentia ad bessem diametri, 33. ad 7. ita strictum ad Globum.¹

Fv

THEOREMA XX

† *Zona Mali componitur ex Zona globi, et segmento recto cylindri, cuius segmenti basis est segmentum, quod deficit in figura, quae gignit Malum, altitudo vero aequalis circulo, quem centrum segmenti maioris describit.*

Demonstratio. Explicetur corpus Mali iisdem legibus in Cylindricum segmentum, quibus ARCHIMEDES Theor. II. explicavit circuli aream in
 20 triangulum rectangulum; et sit AD semidiameter circuli maximi in corpore Mali, ex cuius puncto D, erigatur DS, ejus circuli maximi longitudo in rectam extensa, quae concipiatur in superficie cylindrica. Nam linea MN est veluti communis acies, ad quam terminantur omnia segmenta solida circularia. Extensâ verò maximi circuli circumferentia in rectam DS, segmenta illa solida circularia simul extenduntur, et fiunt Elliptica MSN, praeterquàm primum MDN. Sed clarius elucescet vis huius transformationis in sequentibus. Secetur area MDN lineis parallelis ipsi MN in aliquot segmenta aequalata minima, quasi linearia, et connec-
 30 tantur A. S puncta, et in lineam AS, ex AD diametri punctis, per sectiones areae factis, ducantur perpendiculares FG, OL. sit autem F centrum, et quae ex F perpendicularis, secet AS in G, et per G ducatur ipsi FD parallela GT. Sit denique O punctum medium sectionis IK, et ex illo perpendicularis OL, secans AS in L, et per L ducatur ipsi OD parallela LR. Cùm igitur figura circa MN circumagitur, nihil ferè creat areola MN, quia minimùm movetur; at eius parallela per F, jam movetur in circulum, longitudine FG, linea per O, in circulum longitudine OL, et sic

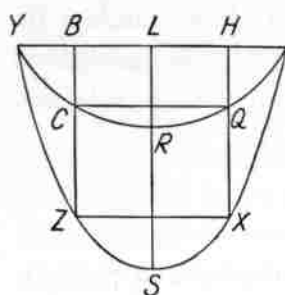
5) MN est IK

8) circulum statt annulum

22) rectum

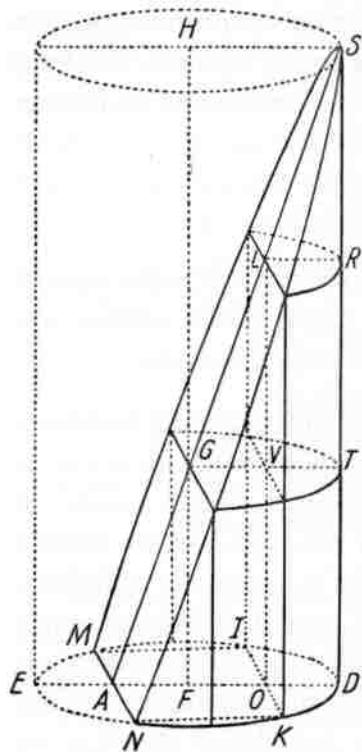
25) rectum

omnes: et partes corporis cylindracei, per FG , OL signatae, sunt aequales cylindraceis illis veluti tunicis in Malo, quas gignunt lineae in circumactu



figurae MDN circa MN : per XVI. Theor. Tota igitur figura, scilicet Cylindri prisma $MNDS$, constans ex omnium tunicarum corporibus in rectum extensis, aequalis est toti corpori Mali, ex tunicis constanti.

Amplius, cylindraceum corpus super basi $IMNK$ usque in L , cylindro secto per planitiem, in qua sunt OL et KI lineae, erit ae-
quale cylindraceo Mali, cui dempta est zona exterior. Et igitur particula cylindri, resecta per hoc planum, scilicet $LSDO$, erit aequalis Zonae Mali.¹



Schema XIV

Cum autem GT sit aequalis ipsi FD , et
sit semidiameter illius globi, cuius maxi-
mus circulus est $MIKN$, et TS sit longitudo
illius circuli maximi (quia ut AD ad DS ,
sic GT ad TS) Prisma cylindri supra GT
usque in S , erit aequale Globo: Et pars
 GVL similiter erit aequalis cylindraceo
corpori globi FD , per circumactum lineae
 IK ad FO rectae descripto. Et igitur parti-
cula cylindri $LSTV$ reliqua, erit aequalis
zonae globi huius, cuius sectio est segmen-
tum KDI .

Sed $ODSL$ componitur ex $VTSL$ et ex
 $ODTV$, segmento cylindraceo, cuius basis
 IKD segmentum, et FG altitudo, aequalis
circulo, quem F centrum segmenti maioris
 $MIKN$ describit, si figura circa MN circum-
agatur. Ergo etiam horum aequalia sic

sunt; scilicet, ut zona Mali componatur ex Zona Globi ab eodem segmento descripta, et ex dicto segmento cylindraceo.

Corollarium et Praxis stereometrica

Malum mensuri, sic agemus. Datam esse oportet longitudinem MN deficientis segmenti apud A , in proportionem ad diametrum circuli seu semidiametrum FD . ex qua datur sector MFN ac IFK , per Coroll. ad

2) Globo statt Malo

23) descripti

38) ad statt ac

Th. II. Nam si dimidia MN, hoc est IO, explicetur numero, qualium FD est 100000, MN erit sinus rectus arcus DI; quo dato, datur et OF sinus complementi, et OD altitudo segmenti deficientis, seu sagitta aut sinus versus in tabula sinuum. Multiplicato igitur FO in IO, prodit area trianguli IFK, qua ablata à sectore IFK, relinquitur segmentum IKD, quod duc in circumferentiam semidiametri AF, per Th. praesens, et creabis segmentum cylindri, super basi segmento circuli, et altitudine FG; quae est pars una Mali, pars scilicet Zonae Mali: aufer autem duplum segmenti circuli ab area circuli, restabit segmentum circuli inter
 10 IK et MN; quod duc in eandem circumferentiam circuli per AF descripti: et creabis cylindraceum Mali; quae est pars altera.

Et quia scitur IK, scitur igitur et IM. Quaero ergò segmentum globi, cuius baseos diameter IM, per Th. XIV; eandem verò basin duc in altitudinem MN, creabisque cylindrum sub hoc globi segmento, per Th. III. cui adde duo segmenta globi inventa, conflabisque cylindraceum globi, inter IK, MN; id aufer à corpore globi noto, per Th. XIII, restabitque zona globi, cuius sectio IKD; quae est pars tertia Mali, pars scilicet altera zonae Mali; tribus vero partibus compositis, totum repraesentatur corpus Mali.

20

Corollarium II

† Sic zona Cotonei et zona Cucurbitae sessilis, componuntur ex zonis, illa Sphaeroidis longi, haec sphaeroidis lati, et ex cylindri pressi seu Elliptici segmentis, illa ex planiori, haec ex dorsuali: quorum segmentorum bases sunt Ellipseos segmenta, deficientia in figuris, quae cotoneum et sessilem cucurbitam creaverant: altitudines verò aequales circumferentijs in longum extensis, quas centra figurarum in circumactu describunt.¹

F 2 v

THEOREMA XXI

† *Corpus Citrij est differentia inter Zonam Globi et dictum segmentum Cylindri.*
 30

Demonstratio. Nam eodem modo, ut prius, cum figura (superius in Schemate XI, Numero V. CDB circa CAB) hic verò in Schemate XIV. IDK circa IOK circumagitur: segmentum areolae in ipsam IOK terminans, ferè nihil creat, quia penè nihil movetur: at partes remotiores, iam moventur per longitudinem circumferentiarum suarum, donec ultima D, vel ei respondens R moveatur in longitudinem RS, quanta est circumferentia circuli amplissimi per corpus Citrij: ex quibus elementis

10) AB statt AF 12) globi KIM, 32) X statt XI

conficitur, ut corpus Citrij (CDBE, in Schemate XI.) sit hic in Schemate XIV. aequale segmento cylindri LRS. At cum AO dupla sit ipsius FO, id est GV, erit et OL dupla ipsius GF. Corpus igitur ODRL rectum, duplum ipsius VTRL; pars igitur ODTV, aequalis parti VTRL. Sed RLS est differentia inter LSTV et LRTV, quorum illud aequale Zonae Globi, hoc aequale segmento Cylindri ODTV. Patet igitur propositum.

Corollarium et Praxis

Oportet esse datam longitudinem axis Citrij, et diametri circuli maximi per corpus medium. Multiplicato igitur axe in seipsum, et facto 10
diviso per diametrum huius circuli maximi in corpore Citrij, prodit aliquid adiiciendum diametro Citrij: ut hoc aggregatum est ad diametrum circuli 200000, sic axis ad sinum segmenti quod creat citrium: Sic et diameter Citrij ad sinum versum. Ex eo similis, sed tamen brevior, est calculus una operatione, quam prius. Non indigemus enim cylindraneo Mali: sed invento primum segmento VTDO, deinde Zonâ Globi LSTV, aufertur illud ab hac, et restat LSR corpus Citrij.

Corollarium II

Sic corpus Olivae vel Pruni Elliptici, est differentia inter Zonam †
Sphaeroidis illic longi, hic lati, et inter dictum segmentum Cylindri Elliptici. 20

THEOREMA XXII

*Zona Citrij truncati utrinque aequalibus circulis, componitur ex corpore minoris †
Citrij, quod creatur ab eodem circuli segmento, quo et Zona proposita creata est,
et ex segmento Cylindri, cuius basis est idem minus segmentum circuli, altitudo
aequalis circumferentiae circuli truncantis.¹*

Repetatur enim Schema XIV. Et sit in eo segmentum LSR Cylindri F, draceum, aequale Citrio maiori. Explicetur autem hoc segmentum seorsim, ut basis eius in conspectum veniat, est autem basis ista, segmentum plani Circularis, quod creavit Citrium maius, seu truncandum. Intelligatur segmentum hoc circuli sub recta YBLH, et sub arcu YCRQ. Sit 30
autem Citrium hoc utrinque truncatum (quale, schemate sequenti XVIII. cernitur literis EAHFSQCG) sic ut intelligamus creatum esse non integro segmento circuli, sed parte eius interiori BCQH, arcu CRQ circa BH axem circumactio. Repraesentabunt igitur rectae BC, HQ, semidiametros circulorum Truncantium: et Basis ista secabitur in partes quatuor.

3) GZ statt GF 5) LSTR statt LSTV 6) VDTV 15) VTKO statt VTDO 26) ISR

1. BCY, ad latus unum, triangularis mixtilinea. 2. Altera ultra HQ ad latus alterum, priori similis. 3. Parallelogrammum rectangulum BHQC, in medio. 4. Segmentum circuli minus, à tergo, rectâ CQ et arcu CRQ contentum.

$\overline{Y \quad B \quad L \quad H}$

Cum autem ponatur solidum aequale Citrio maiori toti, erit RS altitudo solidi, aequalis circumferentiae circuli per medium huius Citrij corpus. Et quia planum YSH idem est, in quod incidunt hypotenusae
 10 rectorum angulorum BCZ et LRS: quare ut LR ad RS, sic BC ad CZ. Sed LR est ad RS, ut radius circuli ad circumferentiam suam: ergo et BC ad CZ sic est. Itaque cum BC sit semidiameter truncantis; erit CZ circumferentia truncantis.

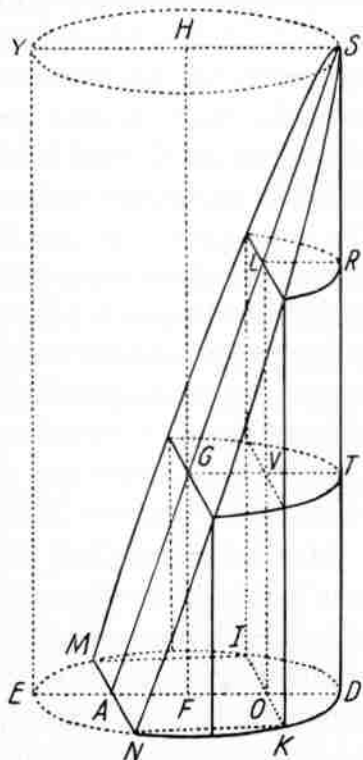
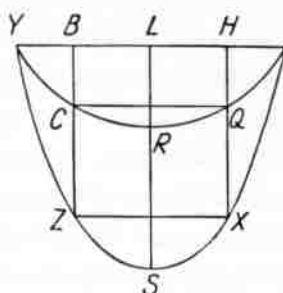
Quatuor ergo dictis baseos partibus, totidem solidae superstant;

1. Super BCY, stat BYCZ Pyramidalis, mixtis et superficiebus et lineis contenta.

20 2. Similis ei ultra HQX. Et hae duae sunt
aequales duobus Verticibus solidis, de Citrio
resectis. (In Schemate XVIII. sequenti, ver-
tices hi spectandi sunt literis GEI et FNH.)

3. Super BHQC stat Prisma seu Pentahedron BCZXHQ, quippe quod continetur tribus quadrilateris BCQH, CQXZ, XZBH, et duobus triangulis CZB, QXH; eius altitudo est CZ, inter QC, XZ parallelus. Hoc solidum est aequale Cylindro medio, in corpore truncati Citrij, bases habenti circulos truncantes. (Hic Cylinder in Schemate XVIII. sequenti adumbratur literis EHFG, totusque latet intra zonam FCG. HAE.)

4. Denique super segmento parvulo CQR, stat solidum SRQCZSX, simile illi, in quod zona Mali explicabatur. Cum autem tota figura solida HYSR, aequet totum Citrij corpus, et tres recensitae partes, totidem partes Citrij aequent: residua etiam ista Cylindracei segmenti, residuam Citrij partem aequent, necesse est. Est autem zona ambiens Cylindrum jam modo dictum, in corpore Citrij truncati.



Schema XIV

Atqui ut similis est ista pars solida priori, quae Zonam aequabat Mali; sic etiam duas, ut illa partes habet, manifestis signis ab invicem discretas: una est segmentum cylindri rectum, contentum superficiebus quatuor, ¹ plano parallelogrammo CQXZ, superficie cylindrica XZCRQ, F 3 v et duobus segmentis parvis circuli; quorum unum apparet, literis QCR, alterum ad XZ non apparet. Et huius segmenti altitudo CZ, ut jam est demonstratum, aequat circumferentiam circuli Truncantis. Altera huius zonae pars est Prisma ZX^s, super eodem segmento parvo stans ad ZX. Cùm autem LR dixerimus sic se habere ad RS, ut semidiameter est ad circulum; et sit etiam BC sic ad CZ; erit etiam sic differentia LR et BC, 10 ad differentiam RS et CZ: quae est altitudo huius secundae partis de Zona supra ZX. Sed differentia LR et BC est latitudo, vel sinus versus segmenti CQR (in Schemate XVIII. AP, quae est semidiameter Citrij minoris, arcu HAE circa axem HE descripti). Ergo etiam differentia RS et CZ, hoc est, altitudo huius Prismatis Cylindraceuti, est aequalis circumferentiae circuli, per medium corpus Citrij minoris. Per ea igitur, quae Th. antecedenti sunt dicta Prisma, hoc Cylindraceutum ZX^s, est aequale Citrio minori, segmento parvo CQR descripti (quod est in Schem. XVIII. seq. HAE). Et ecce in zona Citrij truncati duas partes, quales in Theoremate descripsimus. Vt ita constet corpus Citrij truncati ex tribus omninò 20 Elementis, ex corpore Citrij minoris, ex Cylindro, et ex segmento cylindri recto.

Corollarium et Praxis

Mensuri corpus Citrij utrinque truncati, sic agemus. Datam oportet esse longitudinem diametrorum tam circuli maximi in corpore medio, quam circulorum truncantium: datum sit etiam intervallum inter circulos truncantes, omnia in eadem mensura. Tunc aufer diametrum truncantium à diametro maximi; quod remanet, dividat quadratum intervalli inter truncantes; quotienti adde divisorem. Vt ergo compositum hoc ad divisorem, sic 200000, mensura diametri usitata in Canone sinuum, 30 ad sinum versum segmenti, quod creat, I. Citrium minus, II. Zonam Citrij maioris, III. Zonam Globi, IV. Zonam Mali, quod creatur † eiusdem cum Citrio minori circuli segmento maiori: sic etiam idem numerus 200000 est ad diametros intervallumque Truncantium in eadem mensura.

Iam igitur per Corollarium ad XXI, quaere corpus Citrij parvi, per Zonam Mali et per Zonam Sphaerae; hoc corpus est pars una Citrij Truncati. Deinde per numerum diametri truncantis, iam inventum, quaere longitudinem eius circumferentiae in eadem mensura, eamque

15) CL

multiplica in segmentum circuli inventum; prodibit Citrij truncati pars altera, et iunctae hae duae partes, constituent eius Zonam. Tertiò multiplica planum circuli truncantis in numerum intervalli truncantium, iam inventum, prodibit pars tertia Citrij truncati. Omnibus in unam summam coniectis, componetur totum corpus Citrij truncati.

Corollarium II

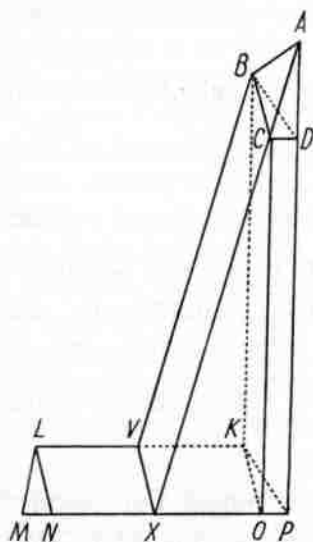
Zona Olivae aut Pruni Elliptici truncati componitur similiter ex corpore Olivae aut Pruni minoris, quod eodem Ellipseos segmento ^{F4} creatur; ¹ et ex segmento Cylindri pressi, quod eidem Ellipseos segmento ¹⁰ superstat, altitudinem habens aequalem circumferentiae circuli truncantis Olivam aut Prunum.

Episagma

Huc distuli demonstrationem Theorematis XVII. de Zona seu Tunica Trunci conici circa Cylindrum: propterea quod cognata est demonstrationi Theorematis praesentis.

Sit KLMP Trunci Conici recti sectio per axem VX, diameter circularis basis PM, diameter circuli Truncantis KL, cui perpendiculares sint KO, LN, ut sint aequales KL et ON, et KOP figura similis figurae LNM, et KVXO quadrilatera similis LVXN. Explicetur autem trunci
 20 soliditas in rectum, iisdem legibus, quibus hactenus omnis generis figuras, superficiebus in omnes plagas curvis terminatas, explicavimus. Cum igitur linea PK conicae superficiei sit recta, explicata igitur superficies erit plana, scilicet ABKP, et PA erit aequalis circumferentiae baseos PM: KB verò aequalis circumferentiae circuli KL truncantis, cui aequalis erit OC: fiat tandem eidem aequalis et PD, et puncta D, C, B connectantur; quae formabunt triangulum aequale et simile triangulo POK, et latera unius, lateribus alterius parallela, ut et planum plano.

Duo igitur Pentaedra seu Prismata, BCVXOK et KOPDBC sunt aequalia, quippe sub parallelis planis. Sed discrimen est inter illa, quod parallelepipedum basi KOXV, altitudine OC, est duplum prismatis CBVXOK, at Prisma basi PKO, altitudine eadem, est ipsum sui totius mensura: est tamen et ipsum triplum Pyramidis aequalitae POKD.



Schema XV

19) quadrilaterae

22) superficii sit in has plagas PK, recta,

26) tantem

Denique super DCB basi stat Pyramis DCBA, habens altitudinem DA, differentiam circumferentiarum KL, PM, cum basis DCB sit aequalis basi Pyramidis POKD. Cùm autem Pyramides super aequalibus basibus, sint inter se, ut earum altitudines; Pyramis ergo tertia, basi POK, altitudine PA, composita ex PD, DA, (haec autem aequat circumferentiam PM) erit aequalis Pyramidi utrique, POKD et DCBA. Et Prisma basi et altitudine iisdem, erit illius triplum; altitudine verò, tertia parte ipsius PA, erit his 2 Pyramidibus aequale: Quod verò de Prismate humiliore KOPDBC reliquum est, puta DOKBC, duas tertias retinet Prismatis. Ergo huius reliqui corpus creatur, ductis duabus tertijs altitudinis CO (seu circumferentiae circuli KL vel ON) in basin POK. Hae sunt igitur partes corporis de Trunco, quod Zonam seu Tunicam appellamus. Reliqua pars, Cylinder sc. intermedius, aequat Prisma CBVXOK, quod est veluti triangulum COX incorporatum, crassitiae OK, XV, CB, ubique aequali; fit igitur ut cum triangulis, ut basis KOXV, ducta in dimidiam altitudinem CO (semicircumferentiam ipsius KL vel ON) creet corpus huius Cylindri. Haec de genesi: reliqua quibus compendium nostrum innititur, brevitatis et lucis causa, per Synopsin tradam.¹

Per demonstrata hactenus,

20
F 4 v t

Pro Tunica Ducitur KOP	Pro Cylindro Ducitur KOXV
Per aequipollentiam dimidia PO vel ipsa PO	vel OX, vel ejus dupla ON
In trientem PA, et bessem OC	In semissem OC
Per aequipollentiam, in trientem PM et bessem ON	In semissem ON, hoc est, in OX
Per aequipollentiam, in totam PM, et duas ON	In ON, NX, tres scilicet OX

Ducitur ergo permutatis terminis

PO, vel ejus duplum PO, NM hoc est differentia diametrorum KL, PM	ON, NX, vel ejus duplum, quod est triplum ipsius ON diametri minoris
In totam PM et duas ON	In ON diametrum minorem: quod erat demonstrandum.

Compendium quod ex hac demonstratione resultat opportunissimum, pete ex Th. XVI. XVII. et huic supplemento imputa, cuius est ornamentum singulare.

18) innititur

Exemplum praecedentium aliquot Praeceptorum

† Sit, in Schemate XVIII. sequenti, corpus Citrij Truncati HAEGCF, et diameter circuli maximi in eo AC, sit 22, Truncantium EG, HF, 19, longitudo interjecta HE vel MK vel FG, sit 27. Ergò etiam dimidia harum linearum LA, KE, KL sunt inter se in eadem proportionem, sc. ut 22. 19. 27. Differentia igitur inter AL, LP (aequalem ipsi EK) est 3. Quaerendum est primò, arcus HAE quota pars sit sui circuli. Cum igitur AP sit portio de diametro hujus circuli, et EP in illam perpendicularis, ut igitur AP ad PE, sic PE ad residuum de diametro supra AP. Cùm ergo PE sit 27, quadratum ejus 729, divide hoc per
 10 AP 3, provenit residuum diametri 243, cui addita AP 3 constituit diametrum 246, semidiametrum 123. Vt verò canone sinuum uti possimus, lineae omnes debent nancisci numeros, in illo Canone usitatos: quod si 123 fit 100000, ergo AP pro 3 fiet 2439, et hic est sinus versus arcus AE quaesiti. Quare secundum doctrinam de usu Canonis sinuum, ablati à radio 100000, relinquit 97561, sinum complementi hujus arcus, sc. G. 77. M. 19. S. 9. Ergo arcus AE est G. 12. M. 40. S. 51, ejusque sinus PE ex Canone est 21951. Idem ex regula, si fiat ut 123 ad 100000, sic 27, quanta fuit PE in prima dimensione, ad numerum hujus dimensionis, prodit etiam 21951. Itaque totus arcus EAH est G. 25. M. 21. S. 42.

20 Et quia, per Th. XXII, opus nobis est cognitione areae in segmento EHA, inquiremus illam per Corollarium II. ad Th. II. in hunc modum. Totius Circuli area valet talium particularum 3 1415926536, qualium sunt in Quadrato diametri 4000000000: intellige particulas quadratas, longas et latas unam talem unitatem, qualium sunt in diametro 200000 longae. Pars igitur areae circuli, contenta sub EH arcu et lineis, quae E, H, terminos cum centro connectunt, sector scilicet arcus EH (qui semper est proportionalis suo arcui) valet 2213222936. Ab hac area sectoris auferendum est triangulum, cujus vertex in centro, basis recta EH. Cum autem ab A in centrum sint 100000, sed ab A in P, 2439: Ergo à P in centrum, hoc est, perpendiculum Trianguli, erit, ut prius, 97561. Duc hoc
 30 perpendiculum in PE, dimidiam basin, quae inventa est 21951: fiet 2141561511, area Trianguli, qua deducta de sectore, restabit 71661425, area segmenti EHA.

Ex hac area segmenti nobis innotescit segmentum rectum Cylindri, cujus basis est haec area segmenti circuli, nimirum pars minor de Zona illius Mali, quod describitur à segmento circuli, post ablatum EAH, residuo et majore, circa axem HE circumacto. Nam per Th. XX. ducenda est haec area in circulum, quem centrum ¹ hujus segmenti majoris describit. Hujus igitur circumferentiae longitudo inquiritur sic. Perpendiculum Trianguli est distantia centri ab axis EH puncto P medio, sc. 97561: et hic est quaesiti circuli radius: cum autem circulorum ad suos radios una sit eademque proportio, per Th. I.
 40 Vt igitur 100000 radius, ad 628318 semis, circumferentiam circuli EAH, sic 97561 radius, ad sui circuli circumferentiam 612994, quae ducta in aream segmenti, efficit 43928023556450.

Igitur qualium cubus, in quem globus, ex circulo EAH factus inscribitur, habet 8000000000000000 partes cubicas, unam centies millesimam semidiametri longas, latas et altas, quarum 4188790204786301 sunt in corpore Globi; talium cubicorum summa expressa est in prodeunte summa, et tot omnino existunt

6) LQ statt LP

7) AC

22) particularem

46) cubisorum

8 Kepler IX

in parte illa Zonae Mali, quam aequat segmentum Cylindri rectum, Th. XX. descriptum.

Pars altera huius Zonae Mali, est Zona globi EAH, per idem segmentum EPHA, circa reliquum corpus globi, descriptum, per Th. XX. Ergo quaerenda est Zona globi, cujus maximus circulus sit EAH. Respiciatur igitur Schema VI. in quo sit KCN arcus idem, de quo hactenus egimus. Ergo globi CDBL Zona, quae per KCN et HBM transit, est inquirenda. Ergo per Th. XV. Coroll. II. quaeratur corpus segmenti globi KHD. Cum ergo sit NK G. 25. M. 21. S. 42. et CK G. 12. M. 40. S. 51. erit igitur KD G. 77. M. 19. S. 9. cujus sinus KI est 97561. At circulus per KIH, est Basis segmenti HKD, sic ut KI sit ejus semidiameter. Non potest igitur ignorari area. Nam ut quadratum CA radij 1 0000000000, ad aream circuli sui, sic etiam quadratum KI, quod est 9518148721, ad aream circuli KIH, 29902146098. Haec si ducatur in tertiam partem ipsius IO, ut altitudinis Coni, creat corpus segmenti HKD. Invenienda est igitur IO, ex praescripto Theor. XIV. Cum enim KC sit nota, et IA, ejus sinus, supra fuerit 21951: quare ID est 78049, et IL 121951. Vt autem IL ad LA, sic ID ad DO. Divisâ ID 78049 (auctâ quinque cyphris) per IL 121951, prodit DO 64000. Tota igitur IO 142049, et pars ejus tertia 47350: quae ducta in basin KIH, creat 1415866617740300, corpus segmenti HKD, cui est aequale segmentum inferius MNL: cum totius Globi corpus per Th. XII. sit 4188790204786301. Ablato utroque segmento, restat in Trunco HKNM 1357056969305791. Posses hucusque pervenire etiam sine cognitione areae in basi, per XIV. Corollarium. Nam IL est altitudo majoris segmenti de sphaera, et ID ejus residuum ad Diametrum. Vt ergo ID ad DA semidiametrum, sic IL altitudo majoris segmenti, ad LP: unde habetur tota IP, pro segmento majori, et erat IO pro segmento minori, sic ut composita OP aequiparetur Sphaerae toti: Prodit enim eadem segmenti HKD quantitas, quae antea.

Porro de Trunco HKNM adhuc reiciendus est cylinder medius, cujus basis eadem quae segmenti, sc. HIK, altitudo verò KN, vel duplum ipsius IA. Erat autem IA 21951, tota igitur altitudo est 43902, quae ducta in aream circuli HIK, creat 1312764017994396 Cylindrum, Zonâ quaesitâ amictum, quo ablato de Trunco HKNM, restat Zona KCN, HBM 44292951311395.

Vt autem redeamus ad Schema XVIII. hujus ultimi cylindri altitudo in illo repraesentatur per EH, et Zona globi habet idem segmentum EHA, quod erat in priori segmento cylindri recto. Ex his ergo duabus partibus, ex illo segmento cylindri recto, et ex hac Zona globi, composita est Zona Mali.

Hinc verò, per Th. XXI. facile habetur corpus Citrij, quod eodem segmento EHA describitur, subducto illo segmento cylindri 4392 etc. ab hac Zona globi 4429 etc. Nam restat 364927754945, corpus parvi Citrij, per segmentum EAH circa axem EH circumactum, descripti: cujus usus jam fiet necessarius.

Iam tandem ad Citrium majus IANC, ejusque Truncum medium HAEGCF. Constat enim et hic Truncus, cylindro FGEH, et Zonâ cylindrum vestiente, quae describitur segmento HAEPH, circa axem MLK circumacta, sic ut H per F transeat, A per C, P per O, et E per G.

Cylinder igitur FGEH sic investigabitur: qualium AL est 22, talium PL vel HM dabatur 19, et AP 3. Sed pro usu canonis sinuum, ex AP 3, facta est

19) KH statt KIH

21) 4188790204786391

29) KM statt KN

- 2439, qualium scilicet totius circuli EAH radius est 100000. Vt igitur 3 ad 2439, vel ut 123 ad 100000 (ut prius) sic 19 ad 15447. Tanta est jam semidiameter HM circuli HF, ¹ cuius area est inquirenda. Vt autem quadratum radij 100000, quod est 10000000000, ad aream circuli 31415926536: sic etiam est radij 15447 quadratum 238609809, ad aream sui circuli 749614823. Haec est area HF vel EG, basis cylindri. Sed et altitudo ejus ex antecedentibus constat: est enim (ut prius in Cylindro Globi) 43902. Ducta igitur haec altitudo in aream Basis modò inventam, creat corpus cylindri FHEG 32909589959346. Restat Zona Citrij majoris. Per Th. XXII. verò, Zona haec Citrij majoris NAIC, vel
- 10 Trunci HAEGCF, componitur ex corpore invento Citrij minoris, per HAE descripti, et ex segmento cylindri, stante super EHA, et habente altitudinem aequalem circumferentiae circuli HF truncantis. Rursum igitur ut radius 100000 ad circumferentiam 628318 semis, sic radius HM, ad circumferentiam HF 97056, quam duc in segmentum circuli EPHA initio investigati 716 etc: et creatur segmentum cylindri rectum 6955171264800, pars Zonae in Citrio Truncato. Cui adde corpus Citrij minoris supra inventum 36 etc: prodit Zona tota circa truncatum Citrium 7320099019745. Adde ultimò et Cylindri corpus intra Zonam abditi 3290 etc: conflabisque totum corpus Citrij truncati 40229688979091, cuius pars major quintà, minor sextà, infarcta est in Zonam.
- 20 Lubet comparationis causa computare etiam corpus, non Citrij, sed compositum ex duobus truncis Conicis ACFH et ACGE, sic ut AH, AE, CF, CG sint rectae: computandum igitur est corpus Coni GBE, et Coni CBA, ex Th. XVII. Sit ergò conus GBE, cuius basis, area circuli GE, jam in superioribus fuit inventa 7496 etc. Altitudo verò KB sic habetur. Nam ut AP 3, ad PE 27, hoc est ut 1. ad 9, sic EK 15447. ad KB. Cùm autem pro Coni corpore tertia solum pars altitudinis sit multiplicanda in basin, per Th. IV. ergò triplum EK, 46341 ductum in basin, creat 34737900512643. corpus Coni GBE. Iam ad Conum alterum, cuius basis AC, area nondum est nota, sed facile investigatur ex area circuli EG. Nam EK vel PL est ad LA, ut 19. ad 22. Ergo quadrata
- 30 sunt ad invicem ut 361 ad 484. Vt verò quadrata ad invicem, sic sunt etiam areae circularum. Est igitur area circuli AC, qui basis est Coni ABC, 1005023661. Rursumque ut AP 3 ad PE 27, hoc est 1. ad 9; sic AL 17886 (composita ex AP, et PL vel HM supra inventis) ad LB altitudinem Coni. Quare etiam hujus noncupli partem tertiam, hoc est, triplum ipsius AL 53658 duc in aream inventam, creabisque corpus Coni ABC 53927559601938. Hinc aufer conum GBE, restat truncus unus ACGE, 19189659089295, cui aequalis est alter ACFH. Totum igitur corpus ex truncis conicis compositum, erit 38379318178590. Ecce ut minus habeamus quam antea, per 1450370800501, scilicet tantum est infarctum in duas Zonas obliquas, arcubus HA, AE, et rectis HA, AE, adumbratas: puta
- 40 partem paulo minus vicesimam octavam trunci duplicis. Quod si altera breviori methodo usus, ut in Conis similibus, feceris, ut 10648: cubum de 22, vel 6859, cubum de 19, ad eorum differentiam 3789, sic Conum majorem 5392 etc: (vel etiam minorem, si prior daretur) ad quartum: prodibit truncus idem, ut prius.

At secundum Th. XVII. ejusque demonstrationem in proximo Episagmate praemissam; cùm sit inventus Cylinder FHEG 3290 etc. quare dimidium ejus 16454794979673: sciatur verò AC 22 (in sua propria mensura) et PO, vel HF

10) NAEGCF

23) hujus

45) FHCG

19, cujus duplum 38, et additâ AC 22. summa fiat 60, et differentia diametrorum sit 3, ductis ergo 3 in 60, creatur rectangulum 180, repraesentans Tunicam: quadratum verò minoris diametri HF, id est quadratum de 19, est 361, cujus triplum 1083 repraesentat Cylindrum Trunco inscriptum. Vt ergo 1083 ad 180 sic Cylinder 1645 etc: ad Tunicam. Vel brevius, secundum compendium corollarij ad XVII. sic agemus.

Diametri	19. 20. 21. 22.	Vel sic	19. 3
	19. 3.		22. 3
	361. 60.		418. 9
	421.		3
			421.

10

Vt igitur 361 ad 421, sic Cylinder inventus 1645 etc: ad 273 48689 71691: supra verò, Cylindro ablato à trunco, erat hoc corpus 273 48641 09622: differentiam minutulam faciunt sinus quibus non penitus exactis usi sumus.¹

De Fusis

G 2

Hactenus Cylinder et Globus, aut ejus loco Sphaeroides, in segmentum cylindri sui transformata, nobis subsidio venerunt ad prodendas mensuras Malorum, Citriorum, Cotoneorum, Melonum sessilium, Olivarum, et Prunorum Ellipticorum. Cùm enim corporum totorum leges in ipsis figuris non inveniremus, partium corporis mensuras in Cylindrorum partibus invenimus. At cum partes quaedam Cylindri definitionem quidem habeant certam, scientiam verò seu leges corpulentiae in seipsis vel nullas, vel nondum in lucem prolatas; Globus et Sphaeroides successerunt, quae cum dimensionem corpulentiae habeant antea, transformata in talem Cylindri partem, easdem leges corpulentiae in illum intulerunt. Restat nunc difficilior de Fusis Parabolicis et Hyperbolicis contemplatio, in qua nos demonstrationis methodus hactenus adhibita rursum deficit. Nam etsi Fusum eodem modo quo Citrium et Olivam et Prunum, transformes in columnae prisma, quod curvaturam lineae conicae (in Schemate X.) sectionum OCH, PCQ vel MCN, toto dorso erecto retineat; hujus tamen figurae corpus nihilo magis demonstrari potest, quam Fusi ipsius. Primùm enim hic totum nullum est, ad quod prisma possit comparari; quippe columna, ut sectio ipsa, ad latus MN vel PQ infinita erit: deinde non congruit globus suo circulo maximo, non Sphaeroides, in talem columnam conicam: aut enim tangit circulus conicam intus in puncto unico, si fuerit ex foco figurae A, per ejus verticem C descriptus: aut si paulò amplior circulus per C fuerit descriptus, tangit quidem figuras exterius in C, secat verò easdem statim binis punctis ipsi C proximis, de reliquo penitus dissidet à sectione.

3) verò 19 minoris

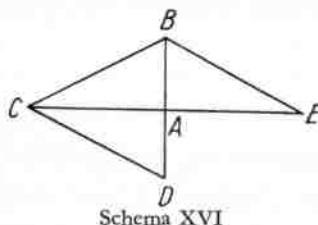
5) 1545

Restat igitur, ut sicut in corporibus, à Circuli segmento creatis, ad globum confugimus, in Ellipticis ad Sphaeroides; sic in ijs quae à Parabola et Hyperbola, confugiamus ad Conoidea congenera: quod nisi succedat ex asse conatus, de reliquo Geometras in subsidium vocabimus.

THEOREMA XXIII

Coni duo, creati à rectangulo scaleno, alter minori, alter majori latere eorum, quae circa rectum, pro axe constitutis, sunt in proportionem laterum, quae bases ipsis Conis describunt.

Sit Rectangulum ABC, cujus laterum circa rectum angulum, minus
 10 BA, fiat axis, et figurâ circumactâ, subtensa BC creet superficiem Conicam CBE, cujus vertex B, basis CE. Rursum fiat majus latus AC axis; et figura circa AC manentem circumacta creet Conum BCD, vertice C, basi BD circulo. Dico ut est BA ad AC, sic esse corpus, quod circulo CE, et superficie conica CEB, continetur, ad corpus Coni BDC.¹



G 2 v Demonstratio. Nam per allegata Theor.

XVII. proportio Coni EBC, ad Conum BCD, est composita ex proportionem Circuli EC ad circulum BD, et ex proportionem altitudinis AB, ad
 20 altitudinem AC, sed circuli EC ad circulum BD proportio, dupla est proportionis AC semidiametri ad AB semidiametrum. Ergò Conorum, EBC ad BCD, proportio est composita ex proportionem AC ad AB, et iterum ex eadem AC ad AB, et tertio ex AB ad AC. Sed proportio AC ad AB, composita cum proportionem AB ad AC, conflatur proportionem aequalitatis, quae est proportionum minima, hoc est terminus, et aequalitas, quae addita vel ablata à proportionibus reliquis, nihil mutat. Igitur ex tribus elementis proportionis Conorum, quorum duo ultima se mutuò tollunt, solum primum restat, et Conus EBC, ad Conum BCD, est ut AC, semidiameter circuli EC, ad AB, semidiametrum circuli BD.

THEOREMA XXIV

† *Sphaeroides longum inscriptum sphaeroidi lato, sic ut easdem habeant diametros, sed axes in iis permutatos, est ad Sphaeroides latum, ut diameter brevior ad longiorem.*

Sit in Schemate XII. Sphaeroides longum CEI ad dextram, cuius vertexes C, I, latum KCE ad sinistram, verticibus K, E, et sit illius axis CI, aequalis huius diametro CI, illius verò diameter KE, aequalis axi huius KE, dico Ellipsin longam, seu Ovum ad dextram, esse ad latam seu

Lentem ad sinistram, ut KE brevior diameter ad CI longiorem. Describuntur enim Coni, in dimidio Ovo KCE, cuius vertex C, basis KE circulus; in dimidia verò Lente CKI, cuius vertex K, basis CI circulus, per praemissam igitur, ut KR semidiameter circuli EK, ad RC semidiametrum circuli CI, sic Conus KCE ad Conum IKC. Sed dimidium Sphaeroides semper est duplum Coni sibi inscripti ad eundem axem, et super eadem basi circulari: Ergo etiam Sphaeroidum dimidia, et sic Sphaeroidea tota, sunt in proportionem, ut KR ad RC, hoc est, ut eorum dupla KD ad CI.

THEOREMA XXV

10

Segmentum Globi ad Citrium, eodem segmento circuli descriptum, videtur eam habere proportionem, quam habet semidiameter basis segmenti ad axem seu altitudinem segmenti.

Demonstrationem legitimam quaerant alij: Ego quod non possum apodicticè, comprobabo dicticè; quatuor usus documentis. Primum est ab Analogia. Quod enim in dimidio globo, velut in maximo segmento, quod est principium segmentorum, verum est, ut et in dimidio Sphaeroide; quod item in minimo segmento, et veluti in ultimo omnium segmentorum¹ termino, id videtur etiam in segmentis intermedijs locum^{G 3} habere. At in dimidio globo res ita se habet: quemadmodum enim latera²⁰ circa rectum angulum quadrantis, habent inter se proportionem aequalitatis, sic etiam quod creatur, quadrante circa perpendicularum voluto, aequale est ei, quod creatur, eodem quadrante circa basin voluto. In minimis verò similiter locum habet ista proportio: quia quo minus globi segmentum, et Citrium in eo, hoc minus ab hisce differunt Coni, figuris ipsis inscripti: Conorum verò istorum, ut habet Theor. XXIII. est dicta proportio: quare et circumscriptorum solidorum. Etsi fateor, ab eo quod est absolutè minimum, ad id quod minimo proximum, non ubique tutam esse collectionem.

Secundò, Proportio dicta locum habet in Sphaeroide dimidio, etiamsi³⁰ ibi non regnet aequalitatis proportio inter diametros, ut in globo, et quidem in infinitis Sphaeroidibus, et infinitis diametrorum per illa proportionibus: ut est in Th. antecedenti. At sicut Sphaeroides longum inscribitur Sphaeroidi lato, sic etiam Citrium totum, segmento duplicato Hemisphaerij inscriptum est, et generatio utrinque similis intelligitur. Ergo cum dicta proportio obtineat inter Sphaeroides longum et latum, obtinebit etiam, ut videtur, inter Citrium totum et segmentum duplicatum semiglobi. Tertiò, vicem demonstrationis plenariae sustinet hoc,

20) ita habet

quod, in Sch. XVIII. seq. segmentum Circuli obliquum, contentum sub AE recta et AE arcu, quod creat excessum tam segmenti, quam dimidij Citrij, supra suos Conos, supra apud A, et infra apud E aequalis est latitudinis: itaque quae est proportio PE ad PA, ejusdem proportionis motum faciunt partes E circa PA circumactae, ad motum partium A circa PE circumactarum. Corpus igitur obliquarum Zonarum in eâdem proportionem accumulatur ad Conos inscriptos, in qua sunt ipsi Coni inter se. Quartò his accedit calculus et testimonium numerorum: qui licet operosissimè tractentur et subtilissimè, per divisionem diametri in particulas 100000, tandem tamen inepti fiunt ad refutandam hanc proportionem.

† In superiori exemplo erat PE noncuplum ipsius PA, sit ergo etiam segmentum Globi HEA noncuplum dimidij Citrij, ab AEP circa PE immobilem descripti. Quaeratur segmentum HEA. Erat AL 22, LK vel PE 27. Quadrata ergo sunt 484. et 729. Cum autem areae circularum sint ut radiorum quadrata ad se invicem, et AC circulus supra habuerit 1005023661: venient in aream HPE, quae basis est segmenti propositi, partes 1513764977.

Et cum PA fuerit 3 et residuum ad diametrum 243, semidiameter 123. Vt ergò 243 ad 123, vel huius loco ad 100000, sic 3 ad 1234 semis, augmentum altitudinis segmenti, pro altitudine Coni aequalis, idque in dimensione usitata Canonis: cum sit altitudo segmenti PA in hac dimensione 2439, ergo altitudo Coni aequalis 3673 semis, cuius pars tertia 1224 semis, ducta in aream basis supra inventam, creat corpus segmenti 1852848331848, cuius pars nona est 205872036872. Atqui supra corpus Citrij totius erat 36 etc, dimidium ergò 182463877472, quod est quidem minus nona parte de segmento, minus etiam decimâ ejus, sed in hac infida, circa minima, numerorum tractatione. Nam agitur de quantitate corporis, quod minus est quàm vices millesima Globi. Et oritur quidem differentia hujus corpusculi (multò majoris eo de quo controvertimus) ex unica centies millesima particula semidiametri: quia sinus arcus AE, hoc est PE fuit assumptus 21951, qui paulo erat major, minor tamen quam 21952. Quod si assumseris 21952, et cum hoc repetieris processum, corpus Citrij prodibit 424732062579, cujus dimidium 21 etc, jam est majus nonâ parte segmenti hic inventi, nimirum quia etiam 21952 est major justo.

G 3 v Per hos igitur 1 numeros nihil depromi potest contra expressam in Theoremate proportionem dimidij Citrij ad suum globi segmentum.

THEOREMA XXVI

Si recta quaedam sectionem conicam, et genitum ab illa segmentum Sphaeroidis, aut Conoidis, contigerit in circumferentia baseos, concurrans cum axe; et circumductae lineae circa diametrum baseos immobilem creaverint solida: contingens quidem Conum, sectiones vero Conicae Prunum, Olivam vel Fusum, quaelibet suum congenere; eadem vero contingens, circumducta circa axem immobilem,

12) PB statt PA

28) major

38) Conoides

creaverit Conum alium: proportio dimidij Pruni vel Olivae ad Segmentum Sphaeroidis, Fusi vero ad suum Conoidis, proxime erit aequalis proportioni prioris Coni, ad Conum posteriorem. †

In Schemate XII. sit sectio Conica OCN, superius Parabolae, in medio Hyperbolae, infra Ellipsis, cuius axis CI, et sectionis OCN dimidio CN, circa ON immobilem circumacto, sic ut punctum sectionis N maneat, C verò per I transeat, creatum intelligatur Pruni, Olivae vel Fusi OCNI, corpus dimidium CIN. Eodem sectionis dimidio CN, circa CI immobilem circumacto, sic, ut C manente, N per O transeat, creatum intelligatur segmentum Sphaeroidis, aut Conoidis OCN, vertice C, basi circulo ON. Dico, si qua linea tangat sectionem vel solidum in N vel O terminis, illa lineâ Conos duos proxime tales creari, circumactibus ijsdem, qui jam sunt dicti, ut in ijs conis insit proportio dimidij corporis Pruni, Olivae, vel Fusi CIN, ad segmentum Sphaeroidis, aut Conoidis OCN. Hactenus ad declarationem Theorematis opus nobis fuit Schemate XII. Nunc reliqua ex Schemate XVIII. petentur.

Est enim Theorema de segmento Sphaeroidis, deque binis Conoidibus, Parabolico et Hyperbolico; habetque potestate in se partes tres, prima et secunda sunt certae, quod ista proportio sit minor illâ Theorematis praemissi; et secunda, quod aliqua proportio demonstratur maior; tertia nondum est certissima, quod praecisè sit ista proportio, quae in Theoremate hoc exprimitur. Cum autem evidentiora sint omnia in Hyperbolico, sit ergo in Schemate XVIII. sectio Conica quae Hyperbola dicitur, FCG, linea punctis signata; est autem et arcus circuli per FCG descriptus; illum igitur Hyperbola secat in F; unde circulus quidem versus S, Hyperbola verò versus R pergit, semper interior circulo, donec in C vertice tangat circumulum interius; ut demonstratum est in IV. Conicorum APOLL. Pr. XXV. XXVI. Fiat autem ex FCG Conoides, cujus vertex C, axis VCO, basis FG circulus, ejusque semidiameter FO: et sit V centrum figurae, et VX, VZ asymptoti, quarum sectiones cum FG continuata, sint X. Z. contingat autem figuram in F, circumferentiâ basis, recta FY, quae cum axe concurrent inter V centrum et C verticem, concurrat in Y. Inscribatur autem figurae super eadem basi FG, triangulum FCG. Itaque cum antea dimidij Citrij corpus, descriptum arcu circuli FSC, circa FO immobilem, ad segmenti sphaerici FCG corpus, descriptum eodem arcu FSC, sed circa CO immobilem circumacto, proportionem eam habuerit, quae est ipsius CO ad OF: jam hoc theorema de Fuso dimidio, quod describitur Hyperboles dimidio FRC, circa FO immobilem, deque Conoide, quod eadem FRC, sed circa CO immobilem

2) Conoides

10) Conoides OCN, vertice

14) Conoides

32) EY

describitur, affirmat proportionem aliam, scilicet eam, quae est YO ad OF; haec enim est proportio Coni, ab FY contingente, circa FO descripti, ad Conum ab eadem FY, sed circa YO, descriptum. Manifestum autem est YO proportionem minorem esse ad OF, hoc est, aequalitati viciniorem, quam CO ad OF, cumque concurrant VX et YF versus partes X, rursum igitur et ipsius VO ad OX minor est proportio, quàm ipsius YO ad OF.

Quemadmodum igitur YO ad OF est quantitate media inter CO ad OF, et inter VO ad OX, ita demonstrari potest, et Fusi dimidij corpus
 10 ad Conoidis corpus, esse quantitate mediam proportionem inter CO ad OF et inter VO ad OX.

Probetur primùm de CO ad OF, valebit autem demonstratio etiam de Parabolico Conoide. Igitur manifestum est, Fusum lineae FRC, minus esse Citrio arcus FSC: sic etiam Conoides FRCG, minus esse Segmento Sphaerico FSCG. Cùm autem figura plana, contenta inter arcum circuli FSC et Hyperbolam FRC, ad partes F et C, sit inaequalis latitudinis, circa F enim latior est, ubi lineae se mutuò secant, circa C angustior, ubi se mutuò tangunt: tunica igitur, quam segmentum globi circumiecit Conoidi, crassior est versus basin FG, tenuior versus verticem C. Contra,
 20 tunica quam Citrium circumiecit Fuso, tenuior est versus basin ad C, quam versus verticem F. Non amittunt igitur proportionalia, Conoides et Fusum, sed plus Conoides, minus Fusum. Etsi enim circa verticem vicissim minus amittit Conoides, quam Fusum circa verticem F: non fit tamen omnimoda compensatio, quia partium ad verticem motus brevi spacio finitur, partium circa basin motus, in ampliorem diffunditur ambitum. Fusum igitur propius est Conoidi, quam Citrium Segmento Sphaerae, vel CO (per Th. praecedens) ipsi OF: quemadmodum etiam YO propior est ipsi OF, quàm CO ipsi OF.

Hic sumus usi Theoremate antecedenti, quod nondum habet demon-
 30 strationem legitimam. Sed valet eadem methodus etiam tunc, si pro segmento FSCG, et Citrio, Conos FCG substituamus. Conus enim à linea CF circa FO factus, ad Conum à linea eadem FC, circa CO factum, proportionem habet eam, quam CO ad OF. Iam verò figura plana, quae continetur Hyperbola FRC et recta FC, creans excessum Conoidis et Fusi, supra illorum Conos, latior est versus C, quia ibi Hyperbola est curvior; angustior versus F, ubi Hyperbola paulatim degenerat in rectam. Rursum igitur Conis hisce non adiunguntur proportionalia; plus enim accedit Cono Fusi, ut fiat Fusum in sua proportionem, quam Cono Conoidis, ut fiat Conoides: majus igitur est corpus Fusi, respectu Conoidis, quam

20) tenuius

36) rectum

CO respectu OF, id est, minor et aequalitati propior est minoris (Fusi) ad majus (Conoides) proportio.¹

Iam etiam de VO ad OX demonstrandum, quod haec proportio minor sit proportione Fusi dimidij ad Conoides. Est autem demonstratio propria Hyperboles, cùm Parabola careat Asymptotis. Rursum igitur ut prius, figura contenta tribus rectis FX, XV, VC, et Hyperbolâ CRF, latior est versus V, quàm versus X: corpus igitur seu matrix, in qua latet Conoides, crassior est in vertice V, quàm ad basin XZ; vicissim matrix, in qua latet Fusum, est tenuior ad verticem FX, quam ad basin circa VC: plus igitur accedit Cono, cujus axis XO, in sua proportione, quàm Cono, cujus axis VO, in sua. Major igitur ille Conus est, respectu hujus, quàm Fusum respectu OX, minor igitur proportio VO ad OX, et aequalitati propior, quàm dimidij Fusi ad Conoides.

Cùm autem inter proportiones, CO ad OF, et VO ad OX, infinitae aliae sint proportiones intermediae, non una sola quae est YO ad OF: non igitur necessaria, sed verisimilis saltem est collectio in tertia figura argumentationis, affirmatoria ex puris particularibus.

Analogia

Cogita num in Globi quidem segmentis semper valeat proportio Conorum inscriptorum: in Sphaeroidis verò, jam Coni illi, qui genuinam habent proportionem solidorum (puta hîc Pruni ad Sphaeroidis lati, aut Olivae ad longi segmentum) alter verticem alter baseos extremum supra verticem Ellipsis proferant, intra contingentem tamen; in Parabolico Conoide, haec ipsa contingens creet Conos proportionis quaesitae, sic ut altitudo Coni unius, sit praecisè dupla altitudinis segmenti Conoidis; in Conoide denique Hyperbolico, Vertex et Basis Conorum horum, excurrant supra contingentem, versus figurae centrum. Magna quidem et prope demonstrativa vis est huius Analogiae.

Neque tamen sufficit hoc habere demonstratum, oportet etiam ipsis puncta indicare, inter contingentes et Verticem Ellipsis, aut Centrum Hyperboles.

THEOREMA XXVII

Si cuiuslibet Trianguli latus alterum circa rectum angulum, secetur et in duo aequalia, et in proportionem laterum reliquorum: in angulo vero opposito concurrant sectiones Conicae variae, communiter seipsas, et latus recto angulo oppositum, tangentes, Vertices primarios in latere secto habentes: quae sunt à summo ad medietatem, omnes erunt Hyperbolae: quae in ipsam bisectionem incidit, Parabolae; quae hinc usque ad sectionem proportionalem, omnis generis Ellipses rectae;

10) XV

14) CX statt OX

Quartò de BN, praesuppositis quae iam tertio loco de ea sunt demonstrata; cùm insuper AN sit ad NC, ut AB ad BC, quae est proportio unica in uno quolibet triangulo, cùm Hyperbolae et Ellipses varias habeant proportionem, Parabolae unicam quidem, sed proportionem aequalitatis: non poterit igitur BN esse ulla alia sectionum conicarum, praeterquam circulus. Et sanè ita fit in circulo. Sit enim BN circulus, eiusque centrum D, quod connectatur cum puncto B contactus; erit ^{H v} ergo CBD rectus, sed et CAB rectus erat; ergo ut DC ad DB, sic DB, hoc est DN ad DA. Atqui DN est ad DA, ut CB ad BA, et ut CN ad NA. Circuli igitur arcus secant latus, in quo continuato centrum habet, in ¹⁰ proportionem laterum AB, BC.

Corollarium et Analogia

Hyperbolae igitur in hoc triangulo possunt esse infinitae, quarum [†] obtusissima, ut loquar analogicè, est BC, cuius vertex V, et centrum F, in ipsum C, angulum Asymptotòn coincidunt; ipsaque sectio planè in duas rectas degenerat (cono sc. per verticem secto) acutissima verò Hyperbolarum in hoc triangulo, est analogicè ipsa Parabola, cuius vertex in O bisectione, centrum F in infinita distantia. Quod si CV sit pars tertia de CA, aequales fient CF, CV; si CV minor, superat CV, sin maior, ²⁰ superat CF.

Sic Ellipses rectae BI, inter O. N transeunt infinitae, quarum acutissima in vertice, est analogicè ipsa Parabola BO, cuius O vertex, D centrum in infinito intervallo, obtusissima verò harum Ellipseon in vertice, est BN circulus, à quo incipiunt Ellipses transversae rursum infinitae, quarum acutissima circa verticem (impropriè dictum, cum sit venter) est circulus ipse BN, ex eo obtusiores BE semper, donec tandem evanescent in meram rectam BA, verticem in proprium E, et centrum D, in ipso A puncto, verticem verò propriè dictum in B habentem, et obtusissimam circa A, quippe merè rectam. Quod si AE sit pars tertia de CA, aequales fient EA, AD; si verò EA minor, superat ipsam AD, sin ³⁰ major, superatur ab illa.

Corollarium II

Hinc, nimirum ex contingentibus, facile fit iudicium de specie Truncati. Nam si duae truncatum contingentes in punctis circumferentiarum truncantium, in Schemate XVIII. in G. F. rectae FY, GY; mutuam sectionem Y fecerint talem, ut YC sit aequa ipsi CO dimidia differentiae diametrorum circulorum, medij et truncantis: erit Fusi Parabolici truncus,

7) F statt D 8) CA statt DC 22) Parabolae 26) ON statt BN 36/37) differentiae circulorum

sin CY minor, Truncus erit ex Hyperbolico Fuso, sin major, ex Prunorum primò, dein ex Citriorum (si fuerit YF ad FO, sic ut YC ad CO) denique ex Olivarum Ellipticarum genere: ut si sit CY dupla ipsius CO.

THEOREMA XXVIII

Si quatuor species sectionum Conicarum, Circulus, Ellipses, Parabola, Hyperbolae, sese in communi vertice contingunt, praetereaue in duobus alijs punctis, aequaliter à vertice remotis, concurrunt; omnes in ijs duobus¹ punctis secantur ab omnibus, et circumferentia circuli intra sectiones est exterius, continetque Ellipticas, hae Parabolicam; intimae sunt Hyperbolicae, et ex ijs interiores, quae obtusiores, eademque suis Asymptotis propiores.

Cùm enim ponantur sectiones diversae speciei, et dissimiles etiam unius speciei, non poterunt igitur habere partes easdem; sed aut contingunt se mutuò in unico puncto, aut secabunt sese mutuò, arcus verò inter puncta interjecti distabunt ab invicem toti à totis, per XXIV. quarti APOLLONII. Et cùm ponatur, omnes sese mutuò contingere in Coni vertice, concurrere verò etiam ad alia duo puncta: nulla igitur earum cum ulla reliquarum in alijs pluribus punctis concurret, etiamsi Parabola et Hyperbolae in infinitum continuentur, per XXVI. quarti AP. Cùmque ponantur concurrere in tribus punctis: non igitur sese contingunt in eorum punctorum duobus. Nam si in duobus sese contingerent, in tertio non concurrerent, per XXVII. quarti AP. Sequitur ergò, ut concursus duo reliqui sint sectiones; omnis enim concursus aut contactus est, aut sectio. In sectionibus autem permutatur ordo.

Et cùm ponantur puncta tria in circumferentia circuli, circulus igitur per illa transibit unicus, per demonstrata lib. III. EVCLIDIS. Similiter et Parabola erit unica. Pone enim diversas esse; et cùm positum sit, contingere sese in Coni vertice, si diversae sunt et sese secant, diversas etiam contingentes habebunt in communi sectione: quare eadem demonstrationis methodo, qua utitur XXVIII. quarti AP. probans, duas parabolas sese non contingere in pluribus uno punctis, res ad impossibile recidet, et totum fiet aequale parti. Non sunt ergò diversae Parabolae, sed unica, quae per tria puncta transit.

Cùmque Hyperbolae, quo obtusiores, hoc magis exteriùs procurrant ultra sectiones, ut est per se manifestum; ergo intra sectiones necesse est esse tanto interiores: Et quia ex similibus Hyperbolis, sc. eodem angulo Asymptotôn factis, illa maior censetur, quae maioribus lateribus formatur: Obtusae igitur hic sunt minores in sua specie, quam acutiores

1) erit Hyperbolico

in sua: duobus igitur nominibus, interior habet Asymptotos viciniore,
 et quia minor in sua specie, et quia respectu sociae obtusior: obtusiores
 enim, ut praecedenti Theor. dictum, magis magisque appropinquant
 suis Asymptotis, tandemque cum iis coincidunt. Quin etiam hoc demon-
 stratum est Theoremate praecedenti, centrum in obtusiorum aliquâ serie
 propius esse contingenti, quam haec est vertici, in reliqua acutiorum
 remotius. Et verò contingens interiori est ipsa etiam interior. Potest
 hoc etiam absolutè demonstrari per 37. I. APOLL. Sic cum Hyperbolae
 exterius complectantur Parabolam: intra sectiones igitur, Parabola vi-
 cissim complectetur illas; eâdem de causa, cùm Parabola extra sectiones
 complectatur Ellipses, intra igitur sectiones, Ellipses vicissim includent
 Parabolam. Denique cùm circulus Ellipses tangens in vertice, ponatur
 eas secare duobus locis: Lunulae igitur Ellipticae resecabuntur à circulo,
 et consistent extra circum: ante sectiones igitur, arcus Ellipseon erunt
 intra arcum circuli.¹

THEOREMA XXIX

H 2 v

*Si Citrium, Pruna, Fusum Parabolicum, Fusa Hyperbolica, et Conus dupli-
 catus, omnia truncata, habuerint eosdem circulos, tam truncantes, quam medium
 corporum: Citrium erit maximum, reliqua eodem ordine magnitudinis corporum,
 quo hic sunt recensita.*

20 †

Demonstratur facile ex antecedenti. Nam Citrium creatur segmento
 circuli, Pruna ex segmentis verticalibus Ellipseon, Fusa ex segmentis
 verticalibus Paraboles et Hyperbolarum, Conus duplicatus ex Triangulo
 isoscele. Cùm autem corpora statuuntur habere eosdem circulos trun-
 cantes: arcus igitur omnium linearum creatricum sese mutuò secabunt in
 punctis duobus, per quae circuli truncantes transeunt. Et cùm idem
 omnibus corporibus tribuatur circulus maximus corporis medius: ergò
 lineae creatrices omnes sese mutuò tangunt in communi vertice, qui ex
 circumductu figurae cujusque creat illum circum totius corporis me-
 dium. Cùm autem sectiones Conicae sese mutuò amplectantur ordine
 hic attributo: segmenta etiam sese mutuò excedent eodem ordine. Conus
 igitur duplicatus et truncatus (in Schemate XVIII. rectis lineis HAE
 GCF contentus) erit minimus: Ei primùm Hyperbolae singulae singu-
 las tunicas circumducent, ut fiant Fusa Hyperbolica truncata; super-
 inducet et Parabola unam, ut fiat Fusum Parabolicum: tum Ellipses
 singulae rursus addent singulas, ut fiant Pruna Elliptica truncata. Tan-
 dem circulus, arcu FSQCG ultimam induet ei tunicam, facietque Citrium
 truncatum.

THEOREMA XXX. PROBLEMA GEOMETRIS PROPOSITVM

† *Proportionem indagare segmentorum Citrij, Olivae, Pruni aut Fusi, factorum plano axi parallelo.*

Vsus eius non potest esse obscurus, scientia deest. In extensione verò soliditatis Citrij in rectum, sc. in Prismatis cylindrici portionem, respondet tali segmento Citrij, segmentum portionis illius cylindricae, factum superficie, quae similis est cylindratae, seu potius parti involutae chartae quodammodo: nam in unam plagam est recta, et rectae in basi portionis Cylindratae parallela; sursum verò est curva, non tamen curvitate
 10 neque circuli, quod certum est, neque sectionis conicae, quantum mihi constat: etsi inter conicas Ellipticae fit similior, quia superius magis flectitur. Et si de huius curvatis lineâ constaret; nondum tamen ex ea, per hactenus quidem constituta, daretur soliditas talis portionis.

Conclusio huius Supplementi

*Age nunc, SNELLI, Geometrarum nostri saeculi decus, legitimam huius Problematis caeterorumque, quae hic desiderantur demonstrationem nobis expedi: reservatur, ni fallor, haec inventio Tibi, ut existat Maecenatum aliquis, qui tuae fortunae splendorem reputans, et verecundiâ instigatus, dignum aliquid
 20 hac sollertia, quo scilicet notabilis aliqua tuae rei fiat accessio, remuneretur, proque Citrio numerico, Malum aureum rependat.*¹

STEREOMETRIA DOLII AVSTRIACI IN SPECIE

AD QVOD GENVS FIGVRARVM PRAEMISSARVM
PERTINEAT FIGVRA DOLII

Praemissis igitur generalibus, quae de stereometria regularium tam ex ARCHIMEDE quam ex proprijs inventionibus, ad demonstrationes intelligendas utilia videbantur, jam propius ad propositum venio, multaue ab ARCHIMEDE itidem non tacta, de corporibus in eadem Sphaera Parallelepipedis, eorumque Cylindris et Conis, sed quae dolij Austriaci naturam unicè attinere videbantur, sub titulo Stereometriae Dolij Austriaci infero, et praemisso ARCHIMEDIS supplemento adjungo. Dolij namque figura est Cylinder ventricosus; seu accuratius loquendo, dolum intelligitur diremptum in duos veluti Truncos duorum Conorum, quibus vertices in contraria vergentes, intelliguntur praesectione ligneis dolij Orbibus, Basis verò communis, divisionem Conorum faciens, est circulus per dolij ventrem amplissimus.

In Schemate XVIII. hic subjuncto, Cylinder intelligitur HEGF, Conus ABC, et alter huic aequalis ab AC versus ND: vertices praesectione EBG, et aequalis illi alter ab HF, versus ND. Trunci AEGC, AHFC, communis basis AC.

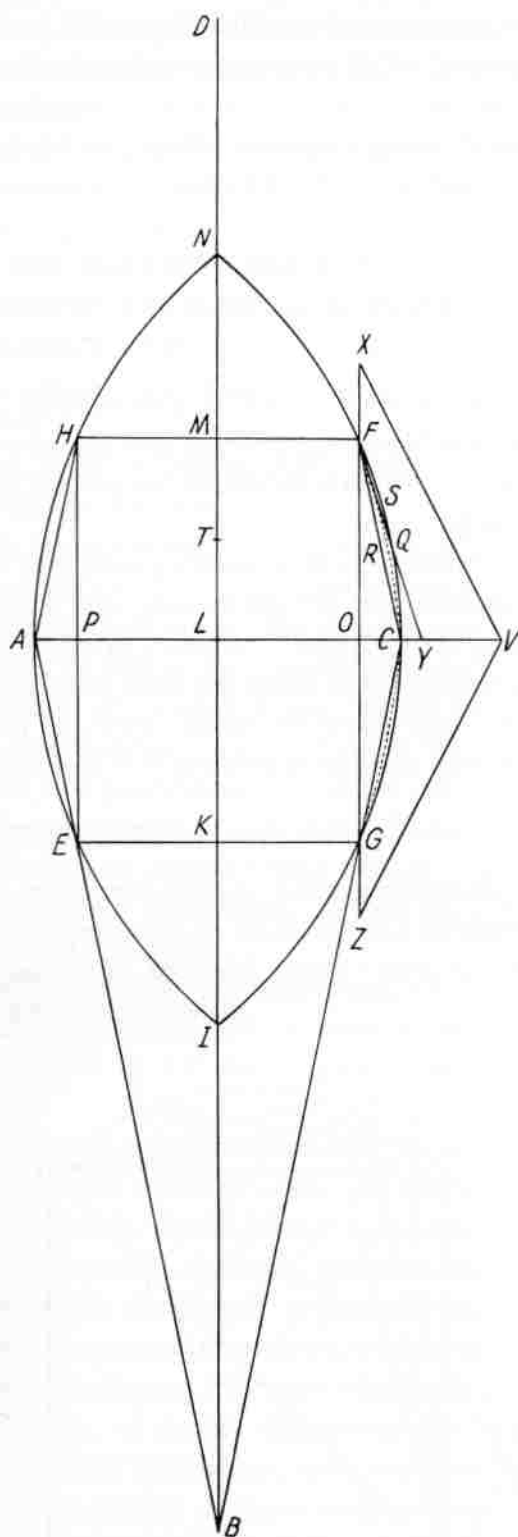
Quae igitur de Cylindris et de Conorum truncis vera sunt, eadem etiam ad figuram dolij possunt applicari, quippe quae parum à Cylindro, minusque à trunco conico abit, dum asserum conniventia, hic per rectam CRF intellecta, extrorsum versus, in buccositatem nonnullam flectitur.

Accuratissimè, omnis dolij figura, est medius truncus, vel Citrij ex circuli segmento, vel Pruni ex verticali parte Ellipsis, vel Fusi Parabolici, plerumque verò Hyperbolici, praesectione utrinque verticibus aequalibus. Ratio cur Fusum Hyperbolicum dicam, est haec; quia dolia buccositatem plerumque recipiunt in ventrem medium: versus extrema et orbes utrinque ligneos, magis ad rectitudinem conicam accedunt, ut circuli lignei facilius trudi adstringique adigendo possint. Hoc verò facit et Hyperbola, et nata ab illa, Conoides et Fusum, ut brachia eius à medio flexu sensim degenerent in rectitudinem Asymptotôn. Facit idem ex parte et Fusum Parabolicum et Prunum Ellipticum, sed evidentissimè Hyperbolicum Fusum: Prunum verò Ellipticum minus minusque nec omne, sed gracile tantum, et quod à segmento verticali Ellipsis est,

cuius axis post truncationem ad Focum usque non pertingat: quae cautio etiam in Parabolico Fusoloco habet. Oliva verò, ex Ellipsis segmento inter vertices medio creata, contrarium facit, nam versus extrema magis flectitur, quàm in medio, quod abhorret à dolij figura.

10 Etsi non negaverim, propter insensibilem differentiam istarum figurarum, esse dolio quandoque etiam ex Olivae trunco figuram; at non studio artificis, sed aberratione manus constitutam. Nunquam vero
 H 3 v ullum do'llium constitutum puto ex ventre Sphaeroidis Archimedei; quam, ut verae
 20 proximam (nondum notis alijs, quarum genesin supra docui)
 † CLAVIVS subiecit: *paratus tamen interim* (verba CLAVII), *si quis accuratiorem invenerit, eam libenti animo et grato acceptare*. Nam Sphaeroidis longi, quod in medio justam et dolijs aptam habeat buccositatem, flexura versus truncatos vertices nimia
 30 est, nec ulla vincula in ea possent diu haerere. Sin autem sumseris medium ventrem sphaeroidis valde gracilis; minues quidem hoc incommodum flexurae nimiae in extremitatibus dolij, at vicissim ventrem dolio nullum permittis, ac si ex puro puto Cylindro illud construeres.

40 In hac igitur figura, duo arcus HAE, FCG circuli, cuius



Schema XVIII

in N, et centro N, spacio NA scribatur semicirculus AIC, qui per I transibit, quia AIC rectus. Et quia AI, IC aequales, erunt igitur arcus AI, IC quadrantes circuli; et connexis punctis N, I, anguli INA, INC erunt recti, et IN perpendicularis in AC.

Eligantur jam puncta quaecunque unius quadrantis: et sint verbi gratia H, B, connectanturque cum terminis diametri A. C. lineis HA, HC, BA, BC: sic, ut manente eadem diagonio AC, quadratum AICO, vel eius pars dimidia, sc. triangulum AIC, mutetur in alias figuras AHC, ABC, angulo I manente recto, etiam apud H et B, quippe omnibus
 10 in semicirculo eodem constitutis; ut ita AHC, ABC, sint iterum rectorum Cylindrorum sectiones dimidiatae, sintque jam diametri Basium CH, CB, altitudines Cylindrorum HA, BA.

Dico aream AIC esse maximam, AHC minorem, ABC (puncto B remotiori ab I quadrantis termino) iterum minorem.

Demittantur enim à punctis H. B. perpendiculares in diametrum AC, quae sint HM, BK. Igitur per demonstrata EVCLIDIS, area cuiusque trianguli aequat Rectangulum sub dimidia basi AC, et altitudine triangulorum, sc. NI, MH, KB. Quare ut IN ad HM et BK, sic AIC area ad
 H 4 v AHC, et ABC areas. At in quadrante AI omnes Rectae, parallelae
 20 semidiametro IN, ut sunt HM, BK, sunt minores ipsa semidiametro IN, et minor BK, remotior ab illa, quam HM propinquior illi. Minor igitur est area AHC, quam AIC, iterumque minor ABC, quam AHC. Rectangula igitur horum triangulorum dupla, sunt eodem ordine maiora.

Dico etiam Cylindris, qui proportionem altitudinum ad diametros Basium habent permutatam, esse sectiones aequales.

Esto enim AB diameter Basis, et BC altitudo Cylindri: patet, triangulum ABC, quod est dimidia sectio Cylindri per axem, manere idem quod antea, cum BC esset diameter Basis, et AB altitudo, eoque proportio harum linearum permutata.

30 Porro non celandus est error in quem me coniecit primo die supina Theorematis huius consideratio. Nam haec commemoratio admonebit lectorem, ut à similibus sibi caveat etiam alibi. Sic enim sum ratiocinatus perperam: Cùm arearum similium proportio sit dupla proportionis laterum, Corporum verò similium tripla: fore etiam in dissimilibus, eadem tamen diagonio AC utentibus, corporum proportionem proportionibus arearum linearumque semper analogam. Hoc verò falsum est: et ego si victoribus id consilij dedissem, ut semper diametrum orbis lignei constituerent subduplam longitudinis Tabularum; quod securitas
 40 prospectum esset: plurimum ipsorum arti nocuissem, longiusque illos

à scopo abduxissem. Non enim ubi maxima est area plani, secantis cylindrum, ibi est et maximum cylindri corpus. Sed id postea apparebit; nunc quae de cylindro recto sunt dicta, accommodabo etiam ad Truncum Conicum.

THEOREMA II

In Truncis Conicis reliqua omnia manent, nisi quod inter truncos proximos ab illo, qui latus diametro basis minoris habuerit aequale, plus variatur arearum suarum proportio, quàm si Cylindri pro Truncis Conicis essent, inter truncos remotiores minus.

Cùm enim angulus comprehensus à latere Trunci et à diametro basis minoris, sit maior Recto, competet non in semicirculum, sed in arcum semicirculo minorem. Ducatur igitur ipsi AC parallela PQ, secans semicirculum in punctis P, Q, et perpendiculares IN, HM, BK, in punctis R. S. V. et connectantur puncta I. H. B. cùm punctis P. Q. Repraesentat igitur jam PQ Virgam mensuriam, QI, QH, QB diametrum basis detruncati Coni; IP, HP, BP, latus trunci, dimidia longitudo Tabularum in dolijs: et anguli QIP, QHP, QBP obtusi et aequales inter se, quippe in eodem segmento PQI stantes, causam praebent aequalem per has omnes figuras variationis eius, quam hic explicandam sumpsì.

Rursum igitur area PIQ, est ad aream PHQ et PBQ, ut IR ad HS et BV: cùm igitur ab inaequalibus IN, HM, ablata sint aequalia RN et SM: ¹ residua IR et HS erunt in proportionem maiori: magis igitur est sensibilis differentia arearum PIQ, PHQ, quam arearum AIC, AHC. Contra decremента perpendicularium sunt maxima apud A: minora igitur erunt apud P. Et apud P evanescunt perpendiculares Truncorum, apud A verò evanescunt perpendiculares Cylindrorum: minori igitur proportionem decrescunt areae PBQ, propiores fini P: quàm areae ABC, propiores fini A. At prius propiores initio I, maiori proportionem decrescebant PHQ, quam AHC. Hoc theorema praecipuè notabile est propter hallucinationem aliam diuturniorem, circa comparationem Truncorum conicorum inter se, cuius infra fiet mentio.

Porrò elenchum hallucinationis dictae continet sequens

THEOREMA III

Cylindrorum Rectorum, quorum sectiones habent eandem Diagonium, Corpora non habent inter se proportionem analogas proportionibus Arearum, quibus secantur per Axem: nec cujus est maxima sectrix area, ejusdem et corpus maximum est.

In Schemate priori, cum AIC sit dimidium areae IO, secantis Cylindrum IO per axem, IC Diameter Basis: ductâ igitur AICO area in IC

7) minoris *fehlt*

23) AGC *statt* AHC

38) Diametrum

Diametrum Basis, creatur Parallelepipedum rectangulum, quod Cylindrum stringit. Vt igitur 14 ad 11, sic hoc parallelepipedum ad cylindri sui corpus, per III. praemissae stereometriae Regularium. Ergo in qua figura, ex ijs, quae habent eandem diagonion AC, maximum est hoc parallelepipedum, ibi et Cylinder est maximus. At in figura cuius AIC est dimidia sectio, non est maximum hoc parallelepipedum, quantumvis area sectrix AICO sit maxima: quod sic demonstro.

Sit in quadrante IA punctum H, proximum puncto I, quippe ad finem Quadrantis. Cum ergo AHC sit alia figura quam AIC, et habeat eandem cum illa diagonion AC, sint vero AIC, AHC areae ad se invicem, ut perpendiculares earum IN, HM: erunt in fine quadrantis inter se in minima proportionem, et proximè aequales, quia etiam lineae IN, HM intervallo certo inter se remotae, in minima ad invicem sunt proportionem; quae proportio inter easdem semper evadit maior, quo propius illae ad A initium quadrantis, eodem inter ipsas intervallo manente, accesserint.

Atqui, ut corpus creetur, lineae CI, CH ducendae sunt in areas AIC, AHC, et per aequipollentiam, ut Rectangulum sub NI, IC, ad Rectangulum sub MH, HC, sic corpus Parallelepipedum AICI, ad corpus AHCH; atqui maior est proportio HC ad CI, quam IN ad HM. Nam CI subtendit quadrantem, CH paulò plus, et ipsarum dimidia sunt perpendiculares dimidij quadrantis et paulò plus: illae verò non sunt in minima inter se proportionem, quippe quae in medio quadrantis maior est quàm in fine, eodem utrinque perpendicularium intervallo supposito. Ergò existente eodem perpendicularium intervallo, quod sit dimidium arcus HI, perpendiculares circa finem quadrantis I sunt in minore proportionem, quam dimidia CI, CH circa medium quadrantis, distantes etiam dimidio arcus HI. Et cum dimidiarum CI, CH differentia sit maior, quàm perpendicularium ad I, quae dimidio arcus HI distant, totarum igitur CI, CH differentia, prioris duplex, erit maior quàm perpendicularium IN, HM, toto arcu HI distantium. Ita conficitur, maiorem esse differentiam inter IC et CH, quam inter HM et IN. Itaque etsi HM secundae figurae est paulo minor quam IN primae: vicissim tamen CH secundae figurae est multo maior quàm CI primae. Maius est igitur Rectangulum MHC quàm NIC, et sic maior Cylinder, eiusque parallelepipedum AHCH, quàm AICI cum è contrario ipsius Cylindri AHCH, area sectrix AHC, minor antea fuerit, quam AIC. Non est igitur proportio Corporum AICI, AHCH analoga proportioni arearum AIC, AHC. Et AIC quidem est maxima arearum super eadem diagonio, corpus verò AICI non est maximum, sed AHCH est eo maius.

3) stereometricae

21) quadrantem CH, paulò

Praxis et per eam successus

Cùm corpora ex I adhuc crescant versus H, inquisivi logisticè, ubi esset corpus maximum; non enim crescit corpus continuè usque in A, sed in vicinia ipsius A rursum attenuatur, et unâ cum area ABC, tandem in A in nihilum redigitur, quando altitudo Cylindri, analogicè loquendo, punctum est, sc. A, diameter verò Basis AC, coincidens cum diagonio.

Processus hic fuit: sinum arcus AH, AB, multiplicavi in sinum + dimidij arcus HC, BC, per omnes quadrantis gradus ordine.

Cùm autem sit taediosa multiplicatio sinuum, accipe processum 10 breviorē: sit diagonios 20, quadratum 400, sit altitudo AG 1, quadratum 1, hoc ablato à 400, restat quadratum ipsius GC 399: quod

duc in altitudinem, venit 399, pro corpore huius columnae, + in comparatione cum caeteris.

Sed in priori processu attendi, ubi primùm consisterent quotientum, seu corporum, incrementa; ab eoque termino iterum decrescerent; illos igitur 20 sinus notavi. Quos cùm interpositâ una nocte repeterem sub aspectum; apparuit, G punctum circumferentiae, apud quod maximum corpus terminabatur, connexum cum AC, praebere GA, latus cubi in Sphaeram AIC inscripti, et GC diagonium plani cubici, seu latus Tetraedri in eadem. Id igitur sequen- 30 tibus Theorematibus demonstrabitur. Et nota quod hisce Theorematibus tradatur

Hoc pacto si fuerit		
Altitudo	Basis diameter	Erit corpus columnae
1	20 —	399
2	20 —	792
3	20 —	1173
4	20 —	1536
5	19 +	1875
6	19 +	2184
7	19 —	2457
8	18 +	2688
9	18 —	2871
10	17 +	3000
11	17 —	3069
Subsemi-	dupla	3080
12	16.	3072
13	15 +	3003
14	14 +	2856
Aequa-	les	2828
15	13 +	2625
16	12	2304
17	11 —	1887
18	8 +	1368
19	6 +	741
20	0.	0

6) cioncidens

19) 794

23) apparavit

35) 2364

RATIO PROPORTIONIS VSITATAE IN FABRICA DOLII AVSTRIACI

THEOREMA IV

- 12 *Omnium Parallelepipedorum¹ seu columnarum inscriptarum sphaerae eidem, quae binis ex opposito quadratis Basibus constant, Cubus est maximo corpore.*

Theorema est hactenus desideratum: etsi habet dixin evidentem ex Analogia. Circulus est omnium planorum, aequalibus perimetris contentorum, capacissimum, ut demonstravit PAPPVS, libro V. Sed et planorum aequali laterum numero contentorum, et aequali perimetro, quae sunt circuli similiora, capaciora sunt.

- 10 Rursum et segmentorum ex diversis circulis, quorum circumferentiae sunt aequales, capacissimum est, semicirculus.

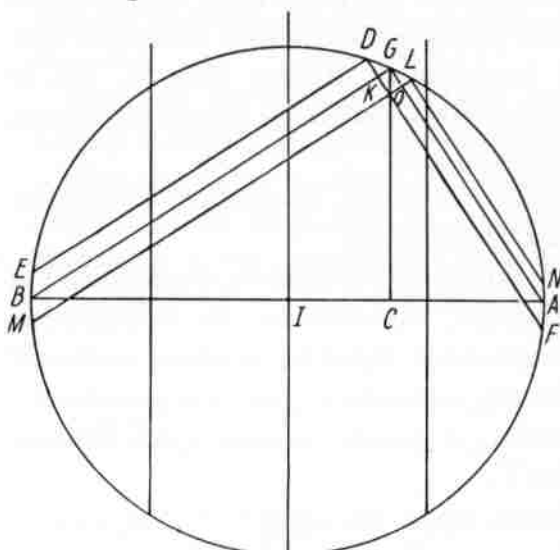
Ad eundem modum et Cubus est solidorum omnium, quae aequalibus cum illo superficiebus continentur, capacissimus. Et Polyedrorum Isoperimetrorum, quo fuerit quodlibet Sphaerae similis, ordine et numero laterum: hoc capacius est: Icosaedron quidem capacissimum, quia plurimis Basibus contentum, ut circulus infinitis quasi Basibus. Haec omnia PAPPVS habet libro V.

- Sed et de segmentis diversorum globorum isoperimetris demonstravit ARCHIMEDES, capacissimum esse Hemisphaerium omnium globi segmentorum, quae aequali superficie contineantur.

- Haec quidem praestat figuris caeteris circuli et globi natura, cum sunt Isoperimetrae. Quando verò remittitur ijs aequalitas superficiei, vicissimque datur Polyedris eadem sphaera circumscripta: contrarium contingit nonnullis, ut Dodecaedron sit maius Icosaedro, quod demonstrarunt APOLLONIUS et HYPsicLES ad EVCLIDEM: at hoc propter eandem globi naturam accidit, et propter similitudinem figurae cum globo, quae hic regnat. Prius enim cum aequales essent superficies, similitudo cum globo consistebat in multitudine superficierum. Hic cum angulorum in varijs figuris ponatur orbis aequalis, et dispositio per illum ordinata: 30 similitudo cum globo consistit in multitudine angulorum, quae maior est in Dodecaedro, quàm in Icosaedro.

Cum haec sic habeant, facile apparet, etiam inter corpora, quae planorum aequali numero continentur, id esse capacius in globo, quod est globi similis: Vbi similitudo consistit in aequalitate et similitudine superficierum et ordine angulorum. Haec igitur Cubo adsunt, prae reliquis globi Parallelepipedis. Quare Cubus erit capacior. Haec quidem dixi est ex Analogia. Nunc plenam subijcio demonstrationem, quae sanè difficultatem aliquam habet ex eo, quod solidi sectiones minutae concipiendae sunt in Schemate plano.

In Schemate proximè subjecto sit Sphaerae circulus maximus AGB, diameter huius, idemque et axis sphaerae AB, et sit Latus Cubi in Sphaera AG, diagonios unius quadrati Cubici GB. Columnae igitur binis quadratis Basibus, quae sphaerae eidem inscribuntur, aut sunt altiores Cubo, Basesque quadratas Cubicis minores habent, aut sunt humiliores Cubo, Basibus quadratis laxioribus.¹



Schema XX

Sit primò Columna altior Cubo. Ducatur igitur ipsi GA altitudini Cubi, parallela longior in circulo quae sit DF, secans GB in K: Similiter et ipsi GB, diagonio quadrati Cubici, ducatur parallela ex puncto D, fine altitudinis columnae, quae sit DE, diagonios quadrati Columnaris: dico columnae FDE corpus, esse minus corpore cubi AGB. Est enim DK ad BK, ut GK ad KF; et vicissim ut FK

ad KB, sic GK ad KD: sed AG est minor quam FK, et GB est maior quam KB. Maior est igitur proportio AG ad GB, quam FK ad KB. Maior igitur est earundem AG ad GB proportio, quam GK ad KD: sed AG ad GB est proportio subsemidupla. Minor igitur est proportio GK ad KD, quam subsemidupla, et GK vel plus potest dimidio ipsius KD, vel aequat KD, vel ea etiam longior est.

Facta verò est appositio ad corporis cubici altitudinem per ductum duorum quadratorum columnarium utrinque, in particulam altitudinis KD. E contrario facta est diminutio à corporis cubici crassitie, per ductum quatuor Quadratorum, columnaribus aequalium, circa corpus columnae, in particulam decrementi, qua semilatus quadrati cubici differt à semilaterere quadrati columnaris: quod decrementum est ad GK decrementum semidiagonij, ut AG ad GB, nimirum ejus subsemiduplum. Neque tamen hic expressa est omnis diminutio, quia quatuor hosce laterculos speciei quadratae minoris, quam est quadratum cubicum, circumjacent adhuc duodecim columellae, quae itidem de crassitie cubi sunt diminutae. Quod si laterculi quatuor circa columnam, diminuti de corpore cubi, maiores sunt laterculis duobus supra et infra adjectis ad corpus cubi; multò magis tota diminutio de corpore cubi, superabit adjectionem altitudini factam. Atqui maiores sunt quatuor laterculi

laterales duobus laterculis altitudinis, quod sic probo. Est enim unus-
 quilibet laterculorum lateralium ad laterculum altitudinis, ut decre-
 mentum lateris cubici, ad incrementum altitudinis, sc. cuius dimidium
 est KD. Sed decrementum lateris cubici, ad incrementum altitudinis,
 habet proportionem compositam ex proportionem AG ad GB, et GK ad
 KD. Nam ut decrementum semilateris ad decrementum semidiagonij
 GK, sic AG ad GB, quae est pars proportionis una: altera est ipsa pro-
 portio GK ad KD. Atqui proportionem hae duae junctae constituunt
 aliquid minus subdupla. Est enim AG ad GB subsemidupla, et GK ad
 10 KD minor quàm subsemidupla. Semis autem et minus quàm semis
 composita, faciunt minus quam totum. Si ergo unus laterculus lateralis
 ad unum altitudinis, habet proportionem minorem subduplâ: unus
 13 ergo altitudinis, non est ¹ planè duplum unius lateralis, et unus altitu-
 dinis, non planè aequat duos laterales, sed minor est: et per consequens
 duo altitudinis sunt minores quatuor lateralibus: Et igitur adjectio
 facta altitudini minor est diminutione factâ de lateribus cubi. Columna
 igitur Sphaerae, altior cubo, est minor corpore cubi.

Sit secundò columna Cubo humilior, et ducatur ipsi GA altitudini
 Cubi parallela in circulo minor LN, pro altitudine columnae, et ipsi GB
 20 diagonio plani cubici, ducatur ex L parallela LM, pro diagonio quadrati
 columnaris cubico maioris, secans GA in O.

† Rursum igitur, ut prius, est ut MO ad OA, sic GO decrementum
 altitudinis ex una parte ad OL incrementum semidiagonij. Sed BG est
 minor quam MO, et GA est maior quam OA. Ergo proportio BG ad GA,
 quae est in Cubo semidupla, minor est quàm GO ad OL. Maior est igitur
 proportio GO ad OL, quàm semidupla.

Sed proportio inter incrementum semidiagonij OL, et incrementum
 semilateris quadrati, est semidupla. Ergo compositis semiduplâ et plus
 quàm semiduplâ in unam, erit proportio GO decrementi dimidiaie altitu-
 30 dinis ad incrementum semilateris, maior duplâ. Sed per ductum duorum
 quadratorum cubicorum in GO, creantur laterculi duo diminuti de
 altitudine corporis cubici. Contrà per ductum quatuor quadratorum
 cubicorum in incrementum semilateris, creantur laterculi quatuor, qui
 sunt maiores ea adjectione et circumpositione, quae facta est circa
 corpus Cubi. Nam etsi appositis his quatuor laterculis, adhuc hiat
 columna, deficientibus quatuor columellis, apud quatuor erecta colum-
 nae latera; tamen vicissim excedunt hi laterculi altitudinem columnae,
 octo alijs columellis aequaleis cum illis deficientibus, crassioribus tamen
 quàm illae. Harum enim crassities est GO, illarum crassities est ad OL,
 40 ut AG ad GB, minor sc. quàm OL, multo igitur minor quam GO. Tribus
 igitur nominibus octo crassae columellae excedentes, sunt maiores

quatuor exilibus deficientibus. Quatuor igitur laterculi dicti, sunt maiores appositione, facta ad corpus cubi. Quod si igitur incrementum semilateris esset praecisè dimidium ipsius GO: quod creatur à GO, ductâ in duo quadrata, aequale esset ei, quod creatur ab incremento semilateris, ducto in quadrata quatuor. At minus est incrementum semilateris, dimidio ipsius GO, ut demonstratum. Quare et quatuor laterculi quadrati minores sunt duobus laterculis altitudinis. Multo igitur minor est adjectio, facta ad latera cubi, quàm diminutio, facta de altitudine. Columna igitur Sphaerae, humilior cubo Sphaerae, minor est corpore Cubi in eadem Sphaera. At prius etiam altior Cubo, minor erat illo: 10 nulla igitur Columna sphaerae, quadratarum basium et rectangulorum laterum, assequitur corpus Cubi in eadem Sphaera: quod erat demonstrandum.

THEOREMA V

Omnium Cylindrorum, diagonium eandem habentium, maximus et capacissimus est is, cujus diameter Basis est ad altitudinem in proportionem semidupla, seu¹ ut 13 v
latus Tetraedri aut diagonios quadrati cubici ad latus cubi in eadem sphaera.

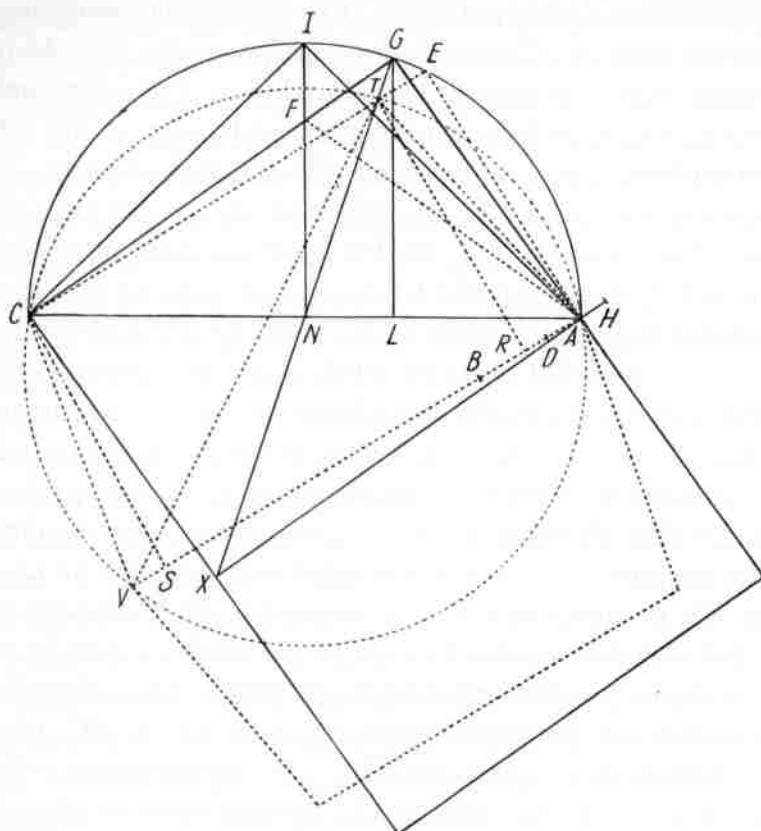
Repetatur Schema Theorematis primi, et sit AC linea diagonios Rectanguli, quo Cylinder secatur per axem, repraesentans virgam mensurariam, et super AC constituatur semicirculus AGC, dividatur verò AC 20 in partes tres aequales, et sit AL pars una, LC duae, et ex L erigatur perpendicularis LG, secans circulum in G, et connectatur G cum A et C. Quia igitur CL ipsius LA est dupla, erit CA ipsius LA tripla. Vt verò CA ad AG, sic AG ad LA. Tribus autem existentibus proportionalibus continuè, ut prima est ad tertiam, sic quadratum primae est ad secundae quadratum, quia ergo CA prima, est triplum tertiae LA, quadratum etiam ipsius CA diametri erit triplum quadrati AG, secundae. Et quia quadratum AC aequat quadrata AG, GC juncta, quorum AG est tertia pars, erit GC duae tertiae ipsius AC, et sic quadratum GC duplum erit quadrati AG. Igitur AG est latus Cubi inscripti sphaerae AGC, et GC est 30 diagonios quadrati Cubici, vel latus Tetraedri inscripti eidem sphaerae. Dico Cylindrum, cuius diameter baseos est GC, altitudo GA, esse omnium Cylindrorum, quibus est haec diagonios AC, capacissimum, seu maximo corpore. Nam quia G, C puncta sunt in superficie sphaerae, et linea GC est diameter basis unius: tota igitur circumferentia illius basis stabit in circumferentia sphaerae; sic et basis opposita, cuius unum punctum A. At si AG latus est Cubi, et GC diagonios lateris Cubici, necessario in circulo GC, et sic in Sphaera, inscriptum erit quadratum

19) conus statt Cylinder

30) AC statt GC

31) Tetraedri

cubicum, cuius oppositi duo anguli G, C , sic et in circulo basis oppositae per A traductae. Itaque Cylindrus jam definitus, habebit inscriptum



Schema XXI

Cubum eiusdem secum altitudinis, cuius omnes anguli stant in superficie sphaerae.

Eodem modo etiam in alio quocunque sphaerae circulo, cuius verbi gratia IC diameter, intelligitur inscriptum quadratum columnae, cuius ¹ altitudo IA , et quadrati unius anguli duo I, C oppositi, quadrati alterius anguli A, X : itaque Cylindro AIC columna aequalta inscripta est.

Atqui omnium Columnarum ad Cylindros aequaltos, quibus inscribuntur, eadem est proportio; Cubus verò omnium in sphaera Columnarum est maximus, Cylinder igitur AGC , cubo sphaerae circumscriptus, omnium aliorum Cylindrorum in sphaera, ut AIC , maximus est.

Eadem demonstratio potest etiam per Schema XIX. in hunc modum institui. Cylindri tres terminentur in H, G, B , punctis, eandem habentes diagonion CA , bases CH, CG, CB , altitudines HA, GA, BA . Sit autem quadratum CG duplum quadrati GA , et CH brevior, CB longior ipsâ CG . Descendant perpendiculares in CA , quae sint HM, GL, BK . Cùm igitur sit CGA rectus, erit ut quadratum CG ad quadratum GA , sic recta CL ad rectam LA , dupla scilicet eius; et ut quadratum CH ad quadratum HA ,

sic CM ad MA, et ut quadratum CB ad quadratum BA, sic CK ad KA. Vt verò quadrata CH, CG, CB inter se, sic sunt etiam bases Cylindrorum circulares inter se. Quare ut CM, CL, CK inter se, sic etiam sunt bases cylindrorum inter se. Componitur autem proportio Cylindrorum ex proportione basium et proportione altitudinum. Ergo rectangula tria, sub CM, CL, CK, quae habent proportionem basium, et sub HA, GA, BA altitudinibus, habent inter se proportionem Cylindrorum.

Permutatim autem, ut AM, AL, AK inter se, sic sunt inter se etiam quadrata altitudinum AH, AG, AB. Est igitur quantitas eadem LM, quae adijcitur ad LA, et aufertur ab LC; et vicissim quantitas est eadem LK, quae aufertur ab LA, et adijcitur ad LC. Cùm autem CL sit dupla ipsius LA, proportio igitur CM brevioris, ad CL longiorem, est maior dimidia proportione eversa ipsius MA tanto longioris, ad LA brevioris. Vt si CL sit 20, LA 10, deinde CM 19, MA 11, proportio 20 ad 19 maior est dimidia proportione ipsius 11 ad 10, hoc est 22 ad 20. Nam proportio 22 ad 20 habet duo elementa, 22 ad 21, et 21 ad 20, quorum utrumque minus est proportione 20 ad 19. Est igitur proportio MA ad LA, et sic quadrati HA ad quadratum GA, minor quàm dupla proportionis CL ad CM. Sed rectarum ipsarum HA ad GA proportio est dimidia quadratorum, et duplae proportionis dimidia est simpla. Ergo altitudinis HA ad altitudinem GA proportio minor est, quàm LC ad MC, proportio basium. Rectangulum igitur sub HA, CM, repraesentans cylindrum CHA, minus est rectangulo sub GA, CL, repraesentante cylindrum CGA, quia CM est brevior in sua proportione, HA longior in suâ.

Idem demonstratur versis argumentis etiam de cylindro CBA. Nam proportio CK longioris ad CL brevioris, est minor quàm dimidia proportionis eversae AK brevioris ad AL longiorem. Vt si CL sit 20, LA 10, deinde CK 21, KA 9. Proportio 20 ad 21 minor est quam dimidia ipsius 9 ad 10, vel 18 ad 20. Nam proportionis 18 ad 20 elementa duo, 18 ad 19, et 19 ad 20, sunt singula maiora proportione 20 ad 21. Proportio igitur LA ad AK, hoc est quadrati GA ad quadratum AB, maior est quam dupla KC ad CL: et sic linearum GA ad AB proportio maior est, quàm KC ad CL; nec quanto BA brevior est ipsa GA in proportione sua, tanto vicissim longior est CK quàm CL in sua; et rectangulum sub BA, CK minus est rectangulo sub GA, CL, cylinder igitur CBA minor cylindro CGA: solus igitur CGA omnium maximus.

Corollarium I

Dolia Cylindracea sine Ventre, sive longioris fuerint figurae quàm Austriaca sive curtioris, minus sunt capacia Austriacis.

21) BA *statt* GA

Corollarium II

Patet hinc bono quodam et Geometrico genio esse factum, quod Austriaci Vietores Regulam hanc observent construendi dolij; ut tertia parte de longitudine Tabulae utantur pro semidiametro Orbis lignei. Nam hac ratione fit, ut Cylinder inter duos orbes ligneos mente adumbratus, quàm proximè habeat duas medietates, ad Regulam Theorematis V. quadrantes, et figurae capacissimae participes, etsi à perfectione Regulae nonnihil recedant. Nam figurae aliae, terminatae ad puncta ipsi G proxima cis et ultra, minimum variant capacitatem; quia capacitas
 10 figurae AGC maxima est: circa maximam verò utrinque circumstantes decrementa habent initio insensilia.

In Schemate sequenti CG ad GA habeat rationem semiduplam, eam nempe quam 100000 ad 70711: duplicata AG ex hac regula debebat habere 141421; at vietores pro hoc sumunt longitudinem 150000. sesquialteram basis, pro duplicata longitudine tabulae GA, quod paulò plus est, quam 141421. Et hoc ipsum facit ad figurae capacissimae imitationem accuratorem. Nam tabulae et curvantur et marginibus utrinque extant et procurrunt super crenas, quibus capiunt et stringunt orbes ligneos. Quod igitur nimium est in hac tabularum longitudine, quae est ad
 20 diametrum basis in proportionem sesquialtera, id his marginibus imputatur, qui in examinatione figurae ad regulam Theorematis V. non censebantur.

Quis neget Naturam instinctu solo, sine etiam ratiocinatione docere Geometriam? cùm Vietores nostri, solis oculis et speciei pulchritudine ducti, capacissimam in dimidiato dolio figuram exprimere didicerint? Prodeat Geometra, doceatque faciliorem Methodum construendi dolij, quod dimidiâ sui parte ad capacissimum Cylindrum propius accedat, quàm est haec ipsa, quam Vietores Austriaci ex antiquo tenent, proportionis sesquialterae: doceat idem Geometra figuram ad compen-
 30 diosè mensurandum aptiorem, quàm est illa quam struit Austria.

Credere poteram, extitisse olim praestantissimum aliquem in Austria Geometram, qui Vietores ista docuerit; nisi me hoc retinuisset, quod pulcherrimae demonstrationis vestigia nuspiam extant in libris Geometrarum: quodque ratio haec construendi dolij, quod equidem sciam, ad Rhenum caeteraque loca vitifera, usitata non est; ferè enim longiora dolia factitant. Quod igitur publicè receptum non est, quî possit esse verisimile, ex libris aut institutione Geometrarum, ab una sola natione petitum esse?¹

15) pro longitudine tabulae GX

Admonitio

K

Quis tam est ingenio perspicaci et circumspecto, qui eluctatus ex hallucinatione ista, qua Cylindrorum eandem diagonion habentium illis maximum corpus tribuerat, quibus est area maxima sectionis per axem; postquam didicit, ijs Cylindris esse maximum corpus, in quibus diameter basis est semidupla altitudinis, per Th. hoc V. ijs verò, qui lineas has habeant aequales, aream sectionis esse maximam, per Th. I. huius partis: et verò eandem esse circa areas et Truncorum Conicorum rationem, per Th. II. huius: qui inquam his perspectis, non statim etiam de corpore Trunci conici praesumat idem, quod de corpore Cylindri: 10 quòd scilicet etiam Trunci conici illius corpus sit maximum, in quo diameter basis minoris, sit semidupla lateris acclivis? Atque id ego et credidi per hunc sesquiannum, et secutus sum: jamque in hoc eram, ut hoc nixus fundamento, dolia Rhenensia promiscuè omnia, sine discrimine ventrium, Austriacis postponerem in capacitatis censura: quod nullà quidem illorum cum iniuria fecissem, sed tamen iure non aequali. Itaque commoditati Typographiae praesentis acceptum fero, quod aurem hic vulsit Geometria editionem curanti, sequentiaque Theoremata, velut augendo supplemento ad ARCHIMEDEM, mihi suppeditavit; quibus simul altera, multoque priore mirabilior proprietates dolij Austriaci 20 traditur.

Definitio

Cylinder et Trunci Conici coniugati dicantur, quando sectionibus utrorumque per axem fuerit eadem, vel aequales diagonij, et ut diameter basis cylindri ad eius altitudinem; sic diametri minoris basis Truncorum, ad eorum latera acclivia. †

THEOREMA VI. PROBLEMA

Dato Cylindro et Trunci coniugati latere, vel basis minoris diametro, invenire trunci coniugati lineas reliquas. Oportet autem proportionem lateris vel basis in Cylindro ad datum latus vel basin Trunci, esse minorem proportionem diametri 30 et altitudinis Cylindri junctarum, ad diagonium.

Datus esto Cylinder AGCX, basis diametro CG, altitudine GA, diagonio AC: et Trunci data esto diameter basis CT; et proportio CG ad CT sit minor proportione CG, GA junctarum ad CA. Oportet

12) dupla statt semidupla

cuius sectio per axem ATCV, et cylinder, cuius sectio AGCX, coniugati erunt.

THEOREMA VII

Si fuerint Cylinder et Truncus Conicus coniugati, et differentia diametrorum in basibus trunci secetur in proportionem, quam habent inter se quadrata diametri Basis et altitudinis Cylindri; erit hoc diametri quadratum, aequale rectangulo, sub minore diametro Trunci, et sub composita ex hac et segmento, quod diametro Cylindri respondet. †

Sit AGCX cylindri sectio, diagonios AC: dividat autem hanc perpendicularis à G in partes CL, LA, sic ut CL respondeat ipsi CG. Formetur etiam sectio Trunci ATCV, super eadem AC diagonio, per VI. praemissam, cuius diametri, minor CT, maior AV, et ablata ab AV, ipsi CT aequali VB, residuum esto BA.

Cum igitur ATCV quadrilaterum stet in circulo, quadratum ab AC, erit aequale rectangulis duobus, et sub TC, AV, et sub TA, CV, id est ¹ quadrato de TA vel CV, junctis. Ablato igitur quadrato ipsius AT, ^{K 2} à quadrato ipsius AC, restabit rectangulum sub TC, AV, hoc est sub BV, VA. Atqui etiam quadrato ipsius AG, maioris, quam est AT, ablato ab eodem quadrato AC, relinquitur rectangulum GC, AX, hoc est quadratum GC, quod ideò minus est rectangulo BVA. ²⁰

Erit igitur rectangulum aliquod minus quam BVA, aequale quadrato GC; sit BVD, residuum igitur sub DA, BV, erit excessus rectanguli BVA, super quadratum GC. Sed excessus hic est aequalis excessui quadrati GA, super quadratum AT. Et quia rectangulum BVD, positum fuit aequale quadrato GC, et rectangulum DBV, est excessus rectanguli BVD, super quadratum BV vel TC; est igitur DBV etiam excessus quadrati GC super quadratum TC. Componendo igitur, cum sit quadratum AG ad quadratum GC, ut quadratum AT ad quadratum TC; erit etiam, ut quadratum AG ad quadratum CG, hoc est, ut AL ad LC, sic excessus quadrati AG super quadratum AT, hoc est, rectangulum ³⁰ sub DA, BV, ad excessum quadrati GC super quadratum TC, hoc est ad rectangulum DBV. Vt igitur AL ad LC, sic rectangulum sub AD, BV, ad rectangulum DBV; quare cum rectangula habeant eandem longitudinem BV, erunt etiam ut AL ad LC, sic latitudines AD ad DB. Quare reflectendo si fuerit divisa AB in D sic, ut sit BD ad DA, sicut est CL ad LA, hoc est, ut quadratum CG ad quadratum GA; rectangulum BVD, aequabit quadratum GC, quod erat demonstrandum.

36) DBV

Corollarium I et Praxis

Si dantur quadrata altitudinis et basis Cylindri, cum diametro basis minoris in Trunco, divide quadratum basis per diametrum basis trunci datam, à quotiente aufer divisorem, quod restat, multiplica in summam
 † quadratorum, factum divide per quadratum altitudinis cylindri, provenit differentia diametrorum, adjicienda ad minorem datam, ut componatur diameter Trunci maior.

Exemplum

10	Sit quadratum AG 20000. quadratum GC etiam 20000	167	Quotiens
	Et sit TC	120	120 Divisor
		BD	47 Differentia
	Summa quadratorum 40000		
	Factus 1866664	93	+ Quotiens AB
	quadratum AG 20000	120	TC
		213	+ composita, AV.

Corollarium II

Si verò econtrà datur solùm proportio quadrati altitudinis ad quadratum basis diametri, et diameter utraque basium Trunci; Diameter
 † Basis Cylindri sic invenitur. Adde numeros, quibus expressa est quadrato-
 20 torum proportio, et multiplicatâ differentiâ diametrorum trunci in numerum quadrati maioris, factum divide per summam utriusque Numeri, quotientem multiplica in minorem Trunci diametrum, proveniet quadratum diametri in basi Cylindri.¹

K 2 v

Sit CG ad GA ut 3. ad 2.	
quadrata ut 9. ad 4.	
Sit CT 130, VA 156, differentia 26.	
Factus 234.	18. Quotiens 130. CT
Summa 13.	
Factus 2340. quadratum CG.	

30

Vel quod idem est, numerum quadrati maioris multiplica in diametrum minorem, et fac, ut summam quadratorum ad differentiam diametrorum trunci, sic factum ad quartum, qui erit quadratum CG.

11) AD

13) 1866667

23) base

12 Kepler IX

Corollarium III

Si quadratum AG, ad quadratum GC, est ut 1. ad 2. DV est duarum + medietatum arithmeticarum inter TC, AV maior; hinc Praxis brevior.

$$\begin{array}{r} \text{Dia- 19.} \quad 20. \quad 21. \quad 22. \text{ metri} \\ \quad \quad \quad 19. \\ \hline \quad \quad \quad 399. \text{ quadratum GC.} \end{array}$$

Corollarium IV

Sicut se habet basis minor Trunci, ad basin Cylindri, aut quadratum lateris acclivis Trunci, ad quadratum altitudinis Cylindri, sic se habet diameter minoris basis, ad compositam DV. 10

THEOREMA VIII

In Cylindro et Trunco conico conjugatis, altitudinum proportio componitur ex proportione Diametrorum in Basibus, minori Conici trunci, et utraque Cylindri, et ex proportione perpendiculari ad latus acclive Trunci.

In Schemate XXI. sint figurae conjugatae CGAX et CTAV, in quibus diametri baseon, Cylindri CG, XA, Trunci minor CT, maior VA, sitque perpendicularum Trunci TR, latus acclive TA. Dico proportionem altitudinum Cylindri GA, ad Trunci TR, componi ex proportione GC ad CT, et ex proportione AT ad TR. Theorematis ipsius facilis est demonstratio, nec minus tamen separatim fuit tradenda, ob Corollaria et Ana- 20 logiam notabilem. Cum enim sit CG ad GA, sicut CT ad TA, permutatim igitur, erit GC ad CT, ut GA ad AT: Sed proportio GA ad TR, composita est ex proportione GA ad AT, et ex proportione AT ad TR: ergo etiam ex GC ad CT, et ex AT ad TR.

Corollarium et Praxis quaerendae altitudinis

Datis CT, et VA, per praemissam, datur etiam quadratum ipsius CG; data verò proportione huius quadrati CG, ad quadratum GA, datur etiam ¹ quadratum GA, et quadratum TA. Sed et differentia ipsarum CT, κ , VA, nota est, sc. BA: et quadratum TA maius est quadrato TR, parte quarta quadrati BA, in omni conjugatione. Anguli enim ad C et T aequales 30 sunt, et CT, VB aequales, ex Hypothesi, atque etiam parallelae: connexis igitur B, T, erit BT aequalis ipsi CV: sed haec est aequalis ipsi TA, ex hypothesi: Ergo BTA isosceles est cuius TR perpendicularum: itaque BR

2) AC statt GC

16) VCT statt CT

29) TA, minus est

est aequalis ipsi RA, eòque quadratum BA, quadruplum ipsius RA. Ab-
lata igitur parte quarta quadrati BA à quadrato TA, restat quadratum
TR, altitudinis Trunci, quod comparatum cum quadrato GA, constituit
quaesitam proportionem.

Exempla

Sit TC 19. AV 22. Quod si quadratum GC fuerit ad GA duplum: erit qua-
dratum GC ut prius 399. Erit igitur quadratum GA 399 semisses, vel 798 qua-
drantes: proinde cùm quadratum de 19 sit 361, erit etiam quadratum TA 361
semisses vel 722 quadrantes. Denique cum differentia CT et VA, sc. 19 et 22,
10 sit 3, quadratum 9, pars quarta 9 quadrantes: aufer hos à 722, restant 713
quadrantes pro quadrato TR. Ita constituitur proportio quadrati GA ad qua-
dratum TR, quae 798 ad 713.

Sit verò alia conjugatio, quadrata sc. AG, GC aequalia, et sic etiam quadrata
AT, TC: et maneat CT 19. VA 22. Erit quadratum TA 1444 quadrantes, eoque
quadratum TR 1435 quadrantes: Et proportio quadrati GA ad quadratum TR,
quae 1596 ad 1435, vel in minimis, quae 228 ad 205.

Aliud Exemplum. Sit TC 19. AV 20. seu quod idem est 57, et 60. ut com-
municent cum ternario, propter usus secuturos. Deinde sit quadratum GC ad
quadratum GA, non duplum, ut 2. ad 1. vel ut 8. ad 4. sed minor, ut 7. ad 4.
20 Cùm ergò per praemissam differentia, quae hic est 3, sit dividenda in propor-
tione 7 et 4, tota igitur est ut 11. eòque alij termini sunt assumendi, communi-
cantes cum 11, scilicet 627. et 660. ut sit differentia 33. de qua pars respondens
quadrato GC est 21. Composita igitur VD est 648. quam duc in minorem
diametrum 627, provenit 406296, quadratum GC, quod est ad quadratum GA,
ex hypothesi, ut 7. ad 4. Ergo quadratum GA 232169 cum septimâ, seu 928677 –
quadrantes. Est autem quadratum minoris TC 393129, et ut 7 ad 4, sic qua-
dratum TC ad quadratum TA, quod erit ideò 224645 et 1 septima, seu 898581 –
quadrantes. Differentia diametrorum est 33, cuius quadratum 1089, et eius
quarta pars totidem quadrantes. Aufer hoc à quadrato TA, relinquuntur
30 897492 –. Hic ergò est proportio quadrati GA ad quadratum TR, quae 928677
ad 897492 vel 3714708 ad 3589968; in minimis, ut 464338 ad 448746.

Sit autem proportio quadratorum non ut 7. ad 4, sed ut 9. ad 4. ipsarum
sc. linearum GC ad CT, quae 3. ad 2. et sit TC 19. AV 20. Oportet ergò differen-
tiam 1 dividere in proportionem 9. ad 4. Tota ergo secunda est in particulas 13,
et propter communionem cum ternario, in 39. Fient autem termini VA 780,
TC 741, quadratum 549081. Vt autem 9 ad 4, sic quadratum hoc ad quadratum
TA 244036, de quo aufer quartam de quadrato 39, sc. 1521 quadrantes, restant
974623 quadrantes, pro TR. Iam pars differentiae, respondens quadrato GC,
est 27: composita igitur est 768, qua ducta in diametrum 741, provenit
40 quadratum GC 569088, ut verò 9 ad 4, sic hoc ad 252928 seu 1011712 quartas.
Ergo proportio quadrati GA, ad quadratum TR, est illa, quae 1011712 ad
974623.

8) etiam TA 28) diametrorum 29) relinquuntur 31) 464377 statt 464338 33) VC statt TC

Corollarium II et Analogia

In conjugatione aequalitatis pulchra existit series proportionum inter quadrata altitudinum: talis nempe.¹

Si fuerit TC ad AV	Erit quadr. GA ad qdm. TR	In conjugatione dupla talis					Increm:		K 3 v
		TC	AV	quadr. GA	diff.	quadr. TR	1 ^{ma}	2 ^{da}	
ut 1 ad 2	ut 1 ad 2	1	2	ut 3	7	ad 10	22		
2	3	2	3	21	11	32	34	12	
3	4	3	4	51	15	66	46	12	
4	5	4	5	93	19	112	58	12	10
5	6	5	6	147	23	170	70	12	
6	7	6	7	213	27	240	82	12	
7	8	7	8	291	31	322	94	12	
8	9	8	9	381	35	416	106	12	
9	10	9	10	483	39	522			
Quia puncta D, R hîc coeunt.		Tale quid occurrit in unaqualibet Conjugatione.							

THEOREMA IX

Si differentia diametrorum Trunci secetur in proportionem quadratorum laterum Cylindri conjugati, et addatur pars respondens diametro Basis Cylindri ad minorem, fiantque rectangula, I. sub minore et maiore, II. sub minore et modo composita: Proportio rectanguli primi, aucti tertia parte quadrati à differentia diametrorum, ad rectangulum secundum, et proportio altitudinis Cylindri ad altitudinem Trunci, in unum compositae, constituunt proportionem corporis Trunci ad corpus Cylindri conjugati.

In Schemate XXI. manentibus caeteris, ut praecedenti Theoremate, sit BA differentia divisa in D sic, ut sicut quadratum AG ad quadratum GC, sic sit AD ad DB. Dico proportionem rectanguli sub CT, AV, unâ cum tertia parte quadrati à BA, ad rectangulum CT, VD, et proportionem GA ad TR, in unum compositas, constituere proportionem corporis Trunci ad Cylindri conjugati corpus. Nam per XVII primae partis, est ut rectangulum CT, VA, junctâ tertiâ parte quadrati de BA, ad quadratum CT, sic corpus Trunci CTAV, ad corpus Cylindri aequalti et inscripti, super basi eadem CT. Vt verò quadratum CT ad quadratum

2) cnnjugatione 13) 13 ad 13 19) quadratorum fehlt

CG, ita corpus Cylindri super CT basi, ad corpus Cylindri aequale, super basi CG, per dicta ad III. et XVI. p. primae. Vt ergo rectangulum CT, VA, junctâ tertiâ parte quadrati de BA, ad quadratum CG, hoc est, per VI. praemissam, ad rectangulum CT, VD, aequale quadrato GC: ita corpus Trunci, basibus CT, AV, ad corpus Cylindri aequale. Si ergo Truncus haberet altitudinem Cylindri conjugati, sc. GA; valeret haec jam dicta proportio sola. Iam verò ut GA, altitudo Cylindri conjugati, ad TR, altitudinem minorem, sic Cylindrus conjugatus, ad Cylindrum altitudine Trunci, basibus iisdem, per Th. XVII. p. primae; et sic
 10 etiam Truncus altitudine GA, ad Truncum conjugatum, altitudine TR. Haec igitur est proportionis pars altera.¹

K 4 Corollarium I et Praxis

Data proportione Trunci ad Cylindrum aequale, basi CG, per praemissas: data etiam proportione quadrati GA, altitudinis Cylindri, ad quadratum TR, altitudinis Trunci conjugati, quia quadratorum proportionalium radices etiam proportionales sunt, sed proportionis dimidia: quadrabimus igitur numerum, quo effertur corpus Trunci, et faciemus, ut quadratum GA ad quadratum TR, sic quadratum numeri Trunci, altitudine GA, ad quadratum numeri justî Trunci, hoc est conjugati,
 20 altitudine TR: Radix ex hoc quadrato numero prodit numerum corporis Trunci, in proportione, ut quadratum GC valet Cylindri conjugati corpus.

Sit CA quadratum ad quadratum GA ut 7. ad 4. et sint CT. 19. AV. 20, vel ut in exemplo Th. VII. 627. 660. differentia 33. Minore ergò medietate Arithmetica 638 in 627 ductâ, addito quadrato de 627, vel totâ 660 in eandem 627 ductâ, addito rectangulo ex 11 in 33, conflabitur 414183 pro corpore Trunci. Supra verò quadrati altitudinis cylindri conjugati, ad quadratum altitudinis Trunci proportio erat quae 464338 ad 448746. Si feceris ergò, ut illum ad hunc, sic quadratum numeri Trunci hic inventi ad quartum, proveniet
 30 165773240994, cuius radix 407153 pro Trunco: cùm quadratum GC, diametri cylindri, repraesentans eius corpus, esset 406296. En Truncum maiorem cylindro, plus quàm parte quingentesima, cum in eadem proportione diametrorum, sed conjugatione proportionis duplae, in hoc Theoremate proposita, Truncus esset minor cylindro, minus quam parte termillesima.

Age verò etiam conjugationem tentemus proportionis dupla maioris. Sit TC 19. AV. 20. et quadratum GC ad quadratum GA, ut 9 ad 4. Erant supra Th. VIII. termini TC 741, AV 780. Et quadratum GC 569088. Et quadratum GA ad quadratum TR, ut 1011712 ad 974623.

Ducto autem 741 in 780, et differentiâ 39 in partem tertiam 13, factisque
 40 additis, conflatur numerus Trunci 578487. Denique huius quadrato multiplicato in 974623, et facto diviso per 1011712, prodit 322399007006. Et hinc radix

28) 464377 statt 464338

30) GC, diametri fehlt

37) TC 641 . . . GC 869088.

567802 est argumentum Trunci conjugati, cùm 569088 sit argumentum cylindri. Truncus igitur hic minor est plus quam parte sexcentesima. Minor autem erat in conjugatione proportionis duplae, minus quam parte termillesimâ.

Corollarium II

In conjugatione duplae proportionis duarum medietatum arithmeticarum utraque servit calculo, minor pro Tunicae corpore, maior pro quadrato GC, et corpore cylindri conjugati.

Exempla.

Differentia.	Dia	-	-	-	metri,
3	19.		20.		21.
3	19.	Diff.	3.		19.
9	361.		60.		399.
4	4.		361.		4.
	1444.		421.	†	1596.
	9.		421.	in minimis per 7.	
	*1435.		177241.	†	228. *205.

Multiplicato 177241 per 205, facto diviso per 228, provenit 158362 cuius radix 398 + denique arguit corpus Trunci in ea proportionem, ut Cylinder conjugatus valet 399.

In hac ergo conjugatione et		†
Proportione	reperitur	10
Diametrorum	Cylinder, Truncus	
1. 2.	15. 11 +	
2. 3.	48. 46 +	
3. 4.	99. 97 s.	
4. 5.	168. 167 —	
5. 6.	255. 254 —	
6. 7.	360. 359 —	
7. 8.	483. 482 —	
8. 9.	624. 623 +	
9. 10.	783. 782 +	20
etc.		
19. 20.	3363. 3362 +	1

Corollarium III

K 4 v

In figuratione proportionis aequalitatis, seu cum altitudo aequat diametrum basis, utiles sunt, primò duarum medietatum arithmeticarum minor pro Tunica, deinde unica medietas arithmetica pro diametro GC.

Dia-		-metri	
Media		duo	
Diff.	Vnum		
3	19. 20. 21. 22.		
vel 6	38. 40. 41. 42. 44.		
6	38. 6. 38.		
36	1444. 240. 1558.		
4	9. 1444. —		
9	1435. 1684. —		
In minimis	35. - - - - 38. per commun. divisorem 41.		

Tunica est 240. inscriptus Cylinder 1444. Truncus ergo 1684, cuius numeri quadratum 2835856 multiplicatum in 35, et factus divisus per 38. prodit 2611972, et hinc radix 1616 + pro corpore Trunci, qualium corpus Cylindri conjugati est 1558.

36) 1846 statt 1946

Exemplum.		
Hoc pacto reperitur		
in pro-	Cylinder:	
port.	Truncus	30
1. 2.	54. 60	
2. 3.	180. 197 +	
3. 4.	378. 405 +	
4. 5.	648. 685 —	
5. 6.	990. 1036 —	
6. 7.	1404. 1456 +	
7. 8.	1890. 1946 —	
8. 9.	2448. 2521	
9. 10.	3078. 3160 +	40
etc.		
Deniq.		
19. 20.	13328. 13468 +	

pars minor centesimâ secundâ in excessu est.

Consideratio Analogiae

Hactenus fuerunt Theoremata aliquot, quibus utitur Calculus inquirendae proportionis inter Conicum Truncum et suum Cylindrum conjugatum. Ex hoc verò calculo multa desumuntur consideratione dignissima. Nam primùm per Corollaria II. et III. praxesque varias inter se comparatas, apparet, non semper eandem esse proportionem Trunci ad Cylindrum, in una aliqua conjugatione, sed variari cum variata proportionem Diametrorum Trunci. Et in Corollario quidem II. inventus est
† decrescere Truncus manente Cylindro: in Corollario verò III. crevit
10 Truncus, rursum manente Cylindro. Nam in infima linea excessit Cylindrum parte minus centesima, superius parte minus tricesima octava, inde tricesima tertia, et sic semper maiori, usque ad summam lineam, ubi erat pars omninò decima in excessu. Necesse autem est, si continuetur calculus ulteriùs, Truncum tandem fieri iterum minorem Cylindro, in eadem conjugatione. Quaeritur ergo quis Truncus in qualibet conjugatione sit maximus, quis item Cylindro conjugato aequalis. Secundò apparuit ex tribus Corollarijs et calculo adjuncto, vicissitudinem hìc aliquam esse inter conjugationes proportionis dupla maioris et inter conjugationes minoris. Nam in qua conjugatione regnat proportio dupla,
20 in ea primùm omnium, Truncus omnis videtur minor existere Cylindro, licet insensibiliter, sic, ut Cylinder ipse, veluti Truncorum omnium primus, et proportio diametrorum eius, quae est proportio aequalitatis, sit Truncorum omnium maximus et sibi ipse aequalis: in qua verò conjugatione regnat proportio maior ¹ duplâ, Trunci omnes, etiam proximi ipsi Cylindro, sensibiliter minores fiunt Cylindro conjugato: an ergò vicissim, in qua proportio regnat minor duplâ, Trunci primùm cylindro evadant maiores, usque ad certam metam; inde rursum decrescant, fiantque tandem cylindro suo aequales, deinde minores; donec tandem Trunci penitus evanescant, manente cylindro conjugationis? Tertiò, cum
30 omnium conjugationum caeterarum cylindri sint minores cylindro conjugationis duplâ proportionem usae: crescant verò Trunci aliquarum conjugationum supra suos cylindros conjugatos: quaeritur num hic excessus tantus sit, ut aequet vel superet cylindrum per conjugationes omnes maximum, et si hoc, quae sint ergo diametrorum proportionem, in quibus Truncus fiat cylindro maximo aequalis? Haec igitur sequentibus aliquot Theorematis nobis sunt expedienda, quantum quidem eius per meam scientiam fieri poterit: sunt enim ad aestimationem et comparisonem doliolum cumprimis necessaria.

THEOREMA X

In omni conjugatione, Trunci per augmentum proportionis diametrorum tandem fiunt minores quacunque data quantitate solida.

Sit coniugatio quaecunque, cuius proportio CG ad GA: dico dari truncum, ut CTA, eiusdem coniugationis, scilicet in quo sit CT ad TA, ut CG ad GA, minorem quacunque proposita quantitate solida. Hoc verò demonstratu est facile. Nam minui possunt latera figurae CT, TA, semper manente inter ea proportionem, quae est inter CG ad GA, eòusque, dum CT, TA aequant junctae diagonion CA, quando tria latera VC, CT, TA juncta, aequant quartum VA, quae est proportio diametrorum CT, 10 ad VA, quanta potest esse in hac coniugatione, maxima: quo casu truncus omnis in basin seu in planitiem circuli VA subsidit. Superficies verò quantacunque, minor est omni quantitate solida.

THEOREMA XI

Cylinder aequalis Trunco aequalto, basin habet compositam ex duarum basium Trunci et earum medij proportionalis Trientibus singulis.

Nam rectangulum sub diametris Trunci, est aequale quadrato mediae proportionalis inter diametros, per 17. VI. EVCL. et duo talia rectangula, unâ cum quadrato differentiae, constituunt duo quadrata duarum diametrorum, sub quibus rectangula continentur per 7. II. EVCL. Tria 20 ergo rectangula, una cum quadrato differentiae, sunt aequalia tribus quadratis, et duarum diametrorum in basibus, et mediae proportionalis. Rectangulum igitur unum, cum triente quadrati differentiae, aequat tertiam partem summae quadratorum proportionalium, et sic iunctos singulos singulorum Trientes. Vt vero

3. 5.	15. bis 30.	rectangulum cum triente dicto, ad qua-
3. 5.	Diff. 2. 2. 4.	drata basium trunci, sic corpus trunci ad
9. 25.-34.	34.	corpora Cylindrorum aequaltorum, super
		trunci basibus, per XVII. p. primae. Quare

etiam ut tres dicti trientes ad quadrata basium, sic ¹ corpus trunci (et sic 30 LV etiam cylindri trunco aequalis) ad corpora Cylindrorum super trunci basibus aequaltorum. Cùm autem talium bases ipsae sint ut corpora; etiam sic erit basis cylindri, trunco aequalis, ad bases duas trunci: itaque constabit ex earum et mediae proportionalis trientibus singulis.

CLAVIVS lib. V. Geometriae Practicae, cap. III. utitur hoc theoremate nonnihil transformato, quod et supra tetigi: sed principia demonstrationis adhibet difficiliora, nec evidenter cum meis connexa; lucis ergo causa meis principijs uti malui.

Exemplum. Sint diametri 19. 22. duc utramque in seipsam, et in se mutuò: erunt quadrata 361. et 484 et medium proportionale 418. Summa omnium 1263, cuius pars tertia 421 pro corpore Trunci, ut 361 est corpus Cylindri minoris.

THEOREMA XII

Cylindri habentis altitudinem eandem cum Trunco recto, et diagonion eandem, diameter basis est medium arithmeticum inter diametros basium Trunci.

Sit cylinder CEAS, diagonium habens CA, et super ea truncus rectus CTAV, cuius altitudo TR aequalis altitudini cylindri EA vel CS. Dico
 10 basis cylindri diametrum CE, medium esse arithmeticum inter CT, AV, diametros basium trunci. Cum enim truncus ponatur rectus, et latera acclivia CV, TA, aequalia, aequales vero etiam EA, et CS, et anguli S, E, recti, quippe in sectione cylindri per axem: quare etiam VS et TE, latera triangulorum VSC, TEA, erunt aequalia. Est autem aequalis CE ipsi SA: quantum igitur CE excedit CT, sc. quantitate TE; tantum etiam ipsa AV excedit AS vel CE, quantitate sc. aequali VS. Est igitur CE medium arithmeticum inter CT, VA, q. e. d.

THEOREMA XIII

*Excessus trunci, habentis eandem cum Cylindro altitudinem, eandemque diagonion, proportionem ad illum habet, quam pars duodecima quadrati differentiae
 20 ad quadratum de diametro Cylindri.*

Concipiatur cylinder, basi CT, altitudine eadem TR, quam habet truncus CTAV: erit huius cylindri proportio ad cylindrum, basi CE, altitudine eadem, quae quadrati CT ad quadratum CE: et ut haec quadrata ad communem differentiam, sic cylindri CT, CE ad limbum, quem maior cylinder CE minori CT circumponit. Sed differentia quadratorum constat rectangulis duobus sub CT, TE, et quadrato TE, quae est dimidia differentia CT, AV, dimidia scilicet AB, hoc est AR. Vicissim cylindro basi CT, circumjecta est tunica trunci CTAV, cuius Tunicae proportio ad
 30 inscriptum Cylindrum CT est eadem, quae rectanguli sub AB, BV (vel CT) cum Triente quadrati de AB, ad quadratum CT. Rectangulum verò sub AB, CT est aequale duobus rectangulis sub ET, TC; quia AB est dupla ipsius ET. Ablatis igitur his utrinque aequalibus; illic quidem
 L 2 quadratum CE maioris superaddit quadrato CT quadratum¹ AR, hoc est, quartam partem quadrati AB: Hic vero superadditur eiusdem quadrati AD Triens. Sed Triens quadrantem superat Vnciâ: unâ igitur Vnciâ de quadrato AB plus additur hic, quàm illic. Tanto igitur maior est Tunica Trunci, limbo cylindri super basi CE. Quare communi utrin-

metico inter diametros, quando scilicet CT in punctum vanescit, VA verò fit duplum diametri CE, in basi cylindri dicti: tunc enim venit ad terminum truncorum omnium, scilicet ad Conum, qui diagonion eandem habet cum latere, creante superficiem Coni.

Talis verò Conus, altitudine eâdem cum cylindro CE, basi verò, cuius diameter sit dupla, uti dictum, ad diametrum cylindri CE, est ad illum suum cylindrum in proportionem sesquitertia. Cùm enim diametrorum sit proportio dupla, circulorum erit quadrupla, quare et Cylindrorum aequaltorum super ijs basibus, si cylinder staret super
 10 basi Coni. Per Th. III. et XVII. p. primae. At coni corpus, per IV. illius, est subtripulum Cylindri huius quadrupli, basi sc. et altitudine ijsdem.¹

L 2 v Hic igitur terminus est, quem nullus Truncus assequitur. Nullus inquam truncus Cylindro aequalto, medium arithmeticum habenti in diametro basis, adjicit partem corporis tertiam.

THEOREMA XIV

Cylinder aequalis Trunco et aequaltus, maiorem illo diagonion habet.

Nam per praemissam, Cylinder eandem habens cum illo diagonion aut aequalem, minor est Trunco, si aequaltus; maior igitur aliquis,
 20 Trunco scilicet aequalto aequalis, maiorem etiam habet diagonion.

THEOREMA XV

Omnes proportionem diametrorum Trunci, locum habentes in coniugatione proportionis certae, locum etiam habent in coniugatione proportionis maioris.

Nam quia CT, TA in qualibet coniugatione minui possunt, ab aequalitate, usque dum junctae fiant aequales ipsi CA; AV verò vicissim augeri, usque dum aequet AC, CV, vel AT, TC, CV: quibus ergò coniugationibus maior est proportio AT, ad TC, maior scilicet AT, respectu TC: illis etiam plus variari potest diametrorum CT, AV proportio. Omnis igitur mutatio proportionis, quae valet, ubi AT est parva, valet etiam, ubi AT
 30 est maior; sed ibi ubi AT est maior, plures valent.

Propter hunc igitur concursum Coniugationum variarum, in ijsdem proportionibus diametrorum, locum habet sequens comparatio.

11) quadranti

18) diagonion *fehlt*

27) minor est proportio

THEOREMA XVI

Omnis Cylinder, altior maximo, super eadem diagonio, habet ex Cylinderis maximo humilioribus, socium sibi aequalem, quem subcontrarium dicemus.

Nam cum proportio basium permutata est proportionis altitudinum; Cylindri aequales existunt. Respiciatur igitur Schema XIX, in quo sit CGA Cylinder maximus, basi CG, altitudine GA. Sumatur altior illo CHA, dico inveniri humiliorem, ut CBA, cuius BA altitudo sit ad HA altitudinem prioris, ut est basis vel quadratum CH, ad quadratum CB. Nam ubi maius datur et minus, ibi datur et aequale. Sed CH quadratum crescit à quantitate nulla continuè, cum lineis CQ, CI, CH, CG, CB, CP, 10 usque ad quadratum diametri CA faciens proportionem omnis generis. Vicissim altitudo, initio sumpto à longitudine diametri AC, decrescit cum lineis AQ, AI, AH, AG, AB, AP, per omnes itidem proportionem, sic ut fiat proportio quacumque data proportionem maior, donec altitudo absu'matur in punctum A. Ergò ubi decrementsa altitudinum AB, prae- L 3 cipitantur per omnes proportionem, in infinitum crescentibus proportionum augmentis, ibi incrementa quadratorum CB, magis magisque minuuntur, et incrementa proportionum decrescunt. Et cum detur Cylinder humilior, quàm CHA, idemque maior eo, ut est CGA, eoque minori proportionem HA ad GA, quam quadrati CG ad CH: descendendo igitur 20 versus B, transitus erit per aliquod punctum, ubi proportio HA ad BA, quae prius erat minor (quippe plus crescens), fiat aequalis proportioni quadrati BC ad quadratum HC, quippe minus crescens, cum prius esset † maior. Exemplum sunt in calculo ad Th. IV. et V. Cylindrorum aequalium.

THEOREMA XVII

In unaqualibet coniugatione, quae quadratum diametri habet minus, quam duplum quadrati altitudinis, omnes Trunci ab ipso Cylindro proximi, paulatim fiunt Cylindro coniugato maiores, non obstante quod minuitur eorum altitudo, postea decrescunt iterum, semper adhuc maiores Cylindro coniugato, quoad altitudinem habuerint maiorem, quam Cylinder coniugati subcontrarius. 30

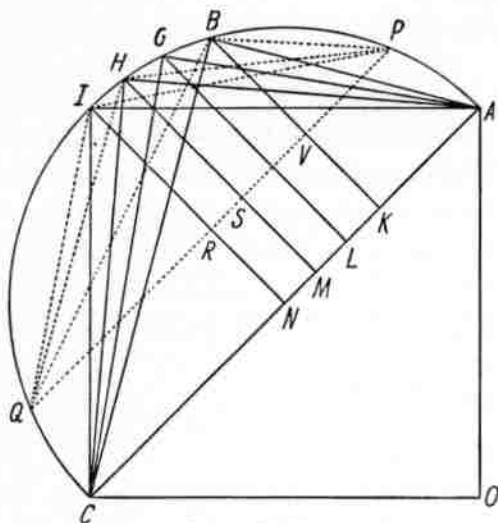
In Schemate XIX. sit coniugatio, in qua quadratum diametri HC minus est duplo quadrati HA, et Cylinder huius coniugationis CHA; illi verò sit socius, hoc est aequalis corpore, ex alia coniugatione, Cylinder CBA, basi CB, altitudine BA. Dico primùm; omnes Truncos coniugationis CHA, quibus altitudo fuerit inter HA et BA, maiores esse Cylinderis CHA vel CBA. Nam inter socios CHA, CBA aequales, interest Cylinder

10/11) nulla, continuè cum . . . diametri CA, faciens

17) magis magis

21) BA ad HA

maximus CGA, in quo quadratum CG est duplum quadrati GA. Omnes igitur Cylindri CGA, inter CHA et CBA, sunt maiores extremis ad H et B terminatis, per Th. V. huius: Et habent ij altitudines medias inter HA et BA, quemadmodum et Trunci. Per XIII. verò
 10 huius, Trunci aequali Cylindris super eadem diagonio CA, sunt ijs maiores. Quare multò maiores sunt extremis minoribus ad H. B. terminatis.¹



Schema XIX

L 3 v

THEOREMA XVIII

In conjugatione proportionis semidupla minoris, Truncus aequalis Cylindro conjugato habet altitudinem minorem altitudine Cylindri, qui conjugati socius, eidemque aequalis est, conjugationis tamen diversae.

Nam truncus aequaltus tali socio cylindro, qui conjugato sit aequalis,
 20 maior est illo, per XIII. Maior igitur est etiam conjugato suo cylindro. Qui igitur conjugato suo est aequalis corpore, non erit eiusdem cum illo altitudinis. Aut igitur altior aut humilior. Non verò altior, per XVII. praemissam: Ergo humilior. Ex eo verò Trunci, per X. huius, fiunt minores cylindro conjugato, donec tandem evanescant.

Corollarium

Posito quod dolia constent puro Trunco conico duplicato: dolia oblonga, ventribus modicis, capaciora sunt cylindricis eâdem figurae longitudine, ventre carentibus: nunquam verò fit, ut habeant ventres adeò immanes et prodigos, per quos rursum fiant minus capacia dolijs cylindricis eâdem figurae longitudine.
 30

THEOREMA XIX

In omnibus conjugationibus Truncorum et Cylindri, quibus diameter basis minoris est minor semidupla lateris acclivis, datur bis aliqua proportio diametro-

16) dupla statt semidupla

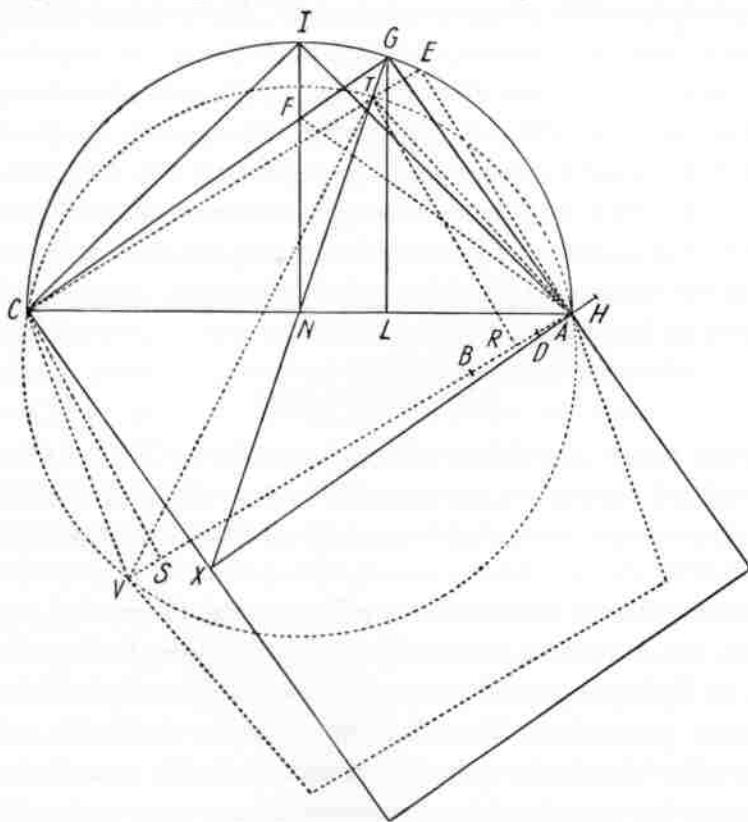
rum Trunci, per quam Truncus fiat aequalis Cylindro ex omnibus conjugationibus maximo.

Sit GC diameter basis Cylindri, ad GA altitudinem (in hoc quidem + Theoremate) minor quàm semidupla. Dico in hac conjugatione duas occurrere proportiones diametrorum CT, AV, quibus possit fieri Truncus aequalis cylindro maximo, cuius diameter basis est dupla ad altitudinem. Nam si GC minor est semidupla ipsius GA, maior est itaque GA, quàm subsemitripla ipsius CA: potest itaque sumi aliqua minor ipsa AG, quae sit AT, et ad AT comparari TC, in ea proportionem, in qua est AG ad GC; sic ut perpendicularum ex T, hoc est TR, sit subsemitripla 10 ipsius CA: Et truncus ATCV fiet aequalis cylindro maximo, cuius diameter ad altitudinem semidupla. Erit itaque talis truncus adhuc maior hoc cylindro maximo, per Th. XIII. huius partis. Et quia, per XIV. huius, cylinder aequandus, si fuerit Truncus aequalis, diagonium habet maiorem: diagonium igitur habens minorem, scilicet eandem cum Truncus aequali futuro, debet habere altitudinem Truncus maiorem, ut quod amisit abbreviatione ¹ diagonij, recuperet incremento altitudinis: L 4 Id est, Truncus illi futurus aequalis, debet fieri minor eo, qui est aequalis cylindro maximo, super eadem diagonio constructo. Id autem fieri potest duobus modis. Etenim, cum Cylinder in unaqualibet conjugatione 20 sit Truncorum omnium principium; sit verò in conjugationibus hic propositis cylinder minor cylindro maximo, erunt etiam Trunci, à cylindro suo conjugato proximi, eoque altiores, cylindro maximo minores. Inde verò per augmentum AB differentiae diametrorum CT, AV crescunt, usque dum fiant majores cylindro maximo, ut jam est demonstratum. In hoc igitur incremento ipsius AB, quoad TR minor fuerit altitudine GA, cylindri sui conjugati, maior verò altitudine cylindri maximi; contingit semel, Truncum aequalem fieri cylindro maximo. At non crescunt in infinitum trunci ejusdem conjugationis, crescente AB, sed per X. et XVIII. huius, iterum decrescunt: qua in variatione contingit secundò, 30 Truncum fieri aequalem cylindro maximo. Et quia, qui aequalis erat maximo (cuius TR subsemitripla ipsius AC) maior erat illo maximo: minoris igitur factus altitudinis quàm cylinder maximus, fiet illi aliquando iterum aequalis. Adhuc igitur est minuenda TA amplius. Minutà verò TA, et cum ea TC proportionaliter, minuitur quadratum TA: manet verò quadratum CA: augetur igitur rectangulum TC, AV residuum: sed eius latitudo TC minuitur, ut dictum: vicissim igitur, et duobus quidem nominibus, augetur longitudo rectanguli AV: qua ratione constituitur proportio certa TC ad AV, qua usus Truncus, fit aequalis cylindro maximo secundò. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XX

Trunci variarum coniugationum, eandem habentes inter se diametrorum proportionem, quo propius assecuti fuerint altitudinem Cylindrum super eadem diagonio maximum, hoc erunt maiores; quo altiores illo, hoc minores.

- † Inopinabile et hoc est. Quis non dixerit maiorem esse Truncum, cuius altitudo sit IA , trunco alio, cuius altitudo GA : si eadem utrique diagonios CA , eademque proportio basium minorum ad maiores? Atqui diversum est verum. Sit enim Cylinder maximus, cuius CG diameter basis, ad GA altitudinem, per Th. V. semidupla: et sit truncus, cuius diameter minor in CG lineâ, maior in AX (continuâtâ) sitque earum proportio quaecunque, mediumque inter illas arithmeticum GC , per Th. XII. Cùm igitur basium binarum inter se per diversos Truncos eadem ponatur esse proportio: erit etiam differentiae earum ad medium arithmeticum proportio per omnes eadem. Ac cum omnis talis Truncus superet cylindrum aequale in proportionem Vnciae de quadrato differentiae dia-



Schema XXI

metrorum trunci, ad quadratum medij eorum arithmetici, per Th. XIII. huius; maior igitur erit hic excessus trunci, ubi maior cylinder. Sed cylinder CGA est omnium¹ super eâdem diagonio maximus: ergo excessus

Trunci huius seu Vncia dicta, erit omnium reliquarum per reliquos truncos, eandem diametrorum proportionem habentes, maxima. Ac proinde, quamvis maior sit altitudo trunci quam GA : quia tamen minor cylinder huius altitudinis; minor etiam erit truncus.

Verbi causa, sumatur proportio diametrorum trunci omnium maxima, hoc est, infinita, sumatur inquam Conus pro Trunco, finis omnium truncorum. Sit Coni altitudo IA , cuius quadratum est semissis quadrati AC . Sitque basis cylindri CIA aequale lineae CI , aequalis altitudini AI . Et quia CI est medium arithmeticum inter diametros trunci, earum verò altera est 0. erit igitur reliqua, sc. diameter basis Coni, dupla ipsius CI .¹⁰ Hic igitur pro corpore huius coni ducenda est pars tertia de AI in quadratum duplae CI , quod est quadruplum quadrati CI : duplum ergo quadrati CA .

At Conus alius (rursum pro trunco eiusdem proportionis diametrorum) altitudinem habens GA , cuius quadratum est triens de quadrato CA , similiter duplam ipsius GC habebit diametrum basis, quadratum ergò quadruplum. Est autem quadratum GC bes quadrati AC ; quatuor ergo besses, sunt octo tertiae, quae duplum seu sex tertias prioris coni superant duabus tertijs, cum è contra illius quadratum altitudinis, semissem habens quadrati CA , huius altitudinis quadratum, quod est triens²⁰ quadrati CA , superet tantum unâ sexta quadrati CA . Nec hoc tamen detrimentum omne est censendum: quia non quadrata, sed altitudines ipsae ducuntur in bases; imò nec altitudines ipsae, sed trientes tantum. Maius igitur lucrum est Coni in basi CG longiori, quam damnum in GA altitudine breviori.

THEOREMA XXI

Ex omnibus truncis conjugationis eiusdem, maximus est ille, qui habet altitudinem Cylindri maximi,¹ subsemitriplam scilicet Diagonii: Ab hoc vero M fastigio caeteri omnes, tam qui altiores, quam qui humiliores, iterum decrescunt. †

Demonstrationem legitimam aut refutationem, si opus est, expediant³⁰ SNELLIVS, aut ADRIANVS ROMANVS, Apollonij Belgae. Parergon quidem est hîc, et Episagma, quod scopum attinet libelli; cognationis tamen causa cum praecedenti hîc adscriptum: cuius similitudo cum hoc primam mihi fidem fecit: etsi trunci praecedentis Th. non sic coniugati sunt, ut nos hactenus hanc vocem usurpavimus; super eadem tamen et ipsi diagonio sunt descripti, et habent eandem inter se proportionem basium: quemadmodum caeteri coniugati habent eandem inter se proportionem diametri basis minoris ad latus acclive.

9) diametrum

Altera dixis est ex proprietate coniugationis cylindri maximi, et quod in praecedentibus demonstravi, esse aliquam altitudinem trunci coniugati, maiorem altitudine cylindri maximi, aliquam illâ minorem; quarum utrarumque trunci sint aequales cylindro maximo: illum ipsum verò, qui est aequaltus maximo truncus cylindro, corpus habere maius: et utrinque tam versus cylindrum coniugatum, quam versus truncos humilimos, decrescere truncos. Causa igitur nulla apparet, cur alibi in vicinia consistat meta corporis incrementorum, quam in hac ipsa.

† Adde indicium calculi. Sit coniugatio, in qua diameter CI aequet
 10 altitudinem IA, et sit huius coniugationis truncus aequaltus cylindro CGA, hic maximo, sc. cuius diameter CG semidupla ad GA altitudinem. Ergo minor trunci diameter erit in CG, est autem aequalis lateri acclivi, quippe ponitur ad id esse, ut CI ad IA. Est igitur CF diameter minor, secans IN, perpendicularem ex centro N, in puncto F, et FA latus acclive. Vt igitur CL ad CG sic CN ad CF. Sed CL est bes de CA, et quadratum CL quatuor nonae de quadrato CA; et quadratum CN est quarta pars de quadrato CA, denique quadratum CG est bes de quadrato
 † CA. Vt autem CL, quatuor nonae, ad bessem CG, sic pars quarta CN ad CF tres octavas. Ergo quadratum CF erunt tres octavae quadrati CA:
 20 tantum verò est etiam quadratum acclivis lateris FA. Ablatae igitur tres octavae de quadrato CA, relinquunt quinque octavas, rectangulo sub CF diametro minore et opposita diametro maiore, quae cum AX coincidit, excurrens ultra X. Cùm ergo quadratum CF, et rectangulum diametrorum CF et maioris, habeant latitudinem eandem CF; longitudines earum erunt ut plana ipsa, scilicet ut tria ad quinque. Haec est igitur proportio diametrorum trunci, qui ex hac coniugatione est aequaltus cylindro maximo. Quare, per XIII. huius, ut quadratum 16, medii eorum arithmetici 4, sc. ipsius CG, ad Vnciam quadrati 4, differentiae diametrorum 2, (uncia verò de 4 est triens) sic corpus cylindri CGA maximi ad excessum
 30 CFA trunci aequalti: truncus ergò excedit cylindrum maximum triente unius sedecimae, seu parte quadragesima octavâ corporis cylindri CGA. Quaeratur igitur proportio cylindri maximi CGA ad cylindrum coniugatum CIA. Est quadratum basis CI semis quadrati CA; sed quadratum CG est bes quadrati CA: quare proportio basium CI ad CG
 M V ut 3 ad 4. Vicissim quadratum altitudinis IA est semis, ¹ quadratum altitudinis GA est triens quadrati CA: proportio igitur quadratorum, IA ad GA est ea quae 3. ad 2. vel quae 9 ad 6: ipsarum igitur linearum IA ad GA proportio est dimidia, sc. quae 30000 ad 24495, vel huius ad 20000. Componitur autem proportio corporum ex proportionibus basis
 40 et proportionibus altitudinum. Ductis igitur in se mutuò terminis analogis,

33) semissis

35) semissis

proportio cylindri CIA ad cylindrum CGA, provenit eadem, quae 9000 ad 9798. Supra Theor. III. Columnarum ex his conjugationibus, proportio erat quae 2828 ad 3080. Quòd si hunc numerum cylindri CGA, commuto in 16, seu in 48 trientes, numerum priorem, erit in hac proportionem numerus cylindri CIA 44. Est ergo cylinder CIA, ad truncum CFA conjugatum, ut 44 ad 49, et truncus maior parte paulò plus nonâ. Id verò consonum est huic Theoremati et Corollario III. Th. IX. huius partis; ibi enim cum esset proportio diametrorum, quae 2 ad 3, hoc est quae 20. ad 30, truncus excedebat parte paulò plus undecimâ, crescens: crevit igitur usque dum esset proportio quae 3. ad 5, id est, 10 quae 18 ad 30, tunc maximè truncus excessit parte plus nonâ; ut hic probatum. Vltèrius, quando fuit proportio, quae 1. ad 2. hoc est quae 15 ad 30, truncus iterum decrevit, ut excederet parte tantum nonâ. Quod igitur in una conjugatione fit, ut truncus aequaleus cylindro maximo plurimum excrescat super cylindrum conjugatum, id in omnibus fieri consentaneum est.

THEOREMA XXII

In conjugationibus, quae quadratum diametri cylindri habent duplum quadrati altitudinis aut maius, trunci omnes sunt minores cylindro maximo, conjugato scilicet suo: et hoc tanto plus, quanto recesserimus à proportionem dupla. 20

In Schemate XIX. sit CGA conjugatio proportionis duplae quadrati CG ad quadratum GA, et sit CHA proportionis minoris, et subcontrarij cylindri ad H et B: sunt igitur omnes cylindri inter H et B, et proinde etiam trunci illis aequalei, maiores cylindro ad H vel B terminato, et paulo infra B usque in A, omnes trunci minores cylindris H et B, per XV. et XVI. praemissas.

Quo propius verò fuerit H ipsi G, hoc etiam propius erit B ipsi G, et hoc minor arcus HB, in quo trunci maiores: tandem ergò cylinder CGA est idem ipse et suus subcontrarius, vicem et H et B sustinens. Quemadmodum igitur omnes cylindri post B, minores sunt ipso H, et trunci 30 omnes paulò infra B, sic etiam hic omnes cylindri post G, et cum ijs trunci aequalei, erunt minores ipso CGA conjugato. Quod enim illic trunci non in B, sed paulo infra B incipiunt evadere minores; causa est, quia in ipso B datur cylindro truncus aequaleus, conjugationis CGA. At hic in ipso G, non datur truncus cylindro aequaleus ex conjugatione CGA; primi igitur à cylindro CGA trunci, statim sunt humiliores lineâ GA, plus amittentes per altitudinem, quam acquirant per adjectionem trientis.

18) cylindri *fehlt*30) I *statt* H

34) CIA

Primùm itaque quadratum TR vel AE minus est quadrato TA, ipso quadrato toto AR. Sed et quadratum CE minus est quadrato CE cum triente quadrati AR, ipso hoc triente quadrati AR. Differentiam igitur illic inter terminos, facit aliqua quantitas, quae est tripla quantitatis, quae hic terminos differre facit. Et sunt praeterea hi termini maiores duplis illorum terminorum. Nam cùm quadratum CG sit duplum quadrati AG, hic quadratum CE, maius est quadrato CG, et quadratum AE, minus quadrato GA. Cùm autem inter aliquos terminos ut 25. 26. differentiam facit aliqua quantitas, ut 1, eius vero quantitatis triplum, ut 3, differentiam facit inter terminos minores dimidijs, vel saltem posteriorem 10 posterioris dimidium, ut inter 10. 13. proportio minorum terminorum est maior sextuplâ proportionis maiorum; ut 10 ad 13, vel 20 ad 26, proportionem habet maiorem, quàm sextuplam proportionis 25 ad 26: et multo esset maior, si etiam posterior terminus 13 minor fuisset dimidio posterioris 26. Manente enim aequali differentia, quo minores fiunt termini, hoc magis augetur proportio. Est ergo proportio quadrati TA ad quadratum TR vel EA, maior sextuplâ proportionis quadratorum CE et trientis de AR ad CE. Ipsarum igitur linearum TA ad TR vel EA, M 2 v proportio est maior tripla quadratorum CE et trientis de AR ad quadratum CE.

20

Eodem modo demonstrabimus etiam, quadratum de CE ad quadratum CG minorem habere proportionem, quam rectas GA ad AT. Nam quadratum CG est aequale rectangulo BVD, divisa BA in D, ut sit AD dimidium ipsius DB, sicut quadratum AG dimidium est ipsius GC, per Th. VII. huius. Sed CE est medium arithmeticum inter VB et VA, per Th. XII. huius. Ergo quadratum CE aequat rectangulum BVA totum, et insuper quadratum AR, dimidia ipsius AB: si ergo ad BV vel CT adiiciatur parallelogrammum, aequale quadrato AR, accedet ad VA, latitudo parallelogrammi, quae sit AH. Quadratum igitur CE aequale erit rectangulo BVH. Sed et quadratum CG erat aequale rectangulo 30 BVD. Ergo ut HV ad VD, sic quadratum EC, ad quadratum CG. Dico HV ad VD proportionem esse minorem, quam DV ad VB. Est enim BD dupla ipsius DA, et BA dupla ipsius AR: ergo etiam AD dupla ipsius DR; quod si AH aequalis esset ipsi AD, eoque aequalis HD ipsi DB: tamen minor esset HV ad VD, quam DV ad VB: Iam verò AH est minor quàm AD, adeoque etiam minor quàm DR. Nam quadratum CT vel VB semper maius est duplo ipsius BA, per Th. X. huius. Nam si esset duplum, altitudo trunci esset nulla, corpus nullum: semper igitur quadratum VB est maius octuplo ipsius quadrati AR. Cùm igitur sint continuè proportionales, VB, AR, AH, erit etiam ipsa recta VB semper 40 maior octuplo ipsius AH, ac proinde AR medium proportionale inter

AH 1, et BV 8+. Qualium igitur est AR radix de 8+, talium AH est 1. Sed radix de 8 est inter 2 et 3. in altitudine trunci nulla, corpore nullo, et cito fit, vel in minima altitudine trunci, ut ex 8 fiat 9, quando radix eius est 3, et in altitudinibus maioribus semper maior. Ergo AH ubi maxima, inter dimidiam et tertiam partem ipsius AR consistit, fitque, per augmentum altitudinis truncorum conjugatorum, quacunque parte ipsius AR minor, sic ut tandem cum ipsa AB evanescente (trunco in merum cylindrum transeunte) fiat infinitae parvitas portio de AR. Atqui si absque AH esset, proportio AV ad VD esset minor dimidia
 10 ipsius DV ad VB, quia AD est dimidium ipsius DB: et cum proportio DV ad VB sit dupla ipsarum GC ad CT, vel GA ad AT: ergo si absque AH esset proportio AV ad VD, et sic etiam quadratum EC ad quadratum CG, semper esset in minori proportionione, quam rectae GA ad AT.

Cum autem inter AR et AH, per diversos truncos, sint omnis generis proportionones: fit alicubi, sc. in truncis proximè aequaleis cylindro, ut AH non tantum adiciat, ut proportio HV ad VA aequet proportionem GA ad AT, et tunc res est certa, duo enim elementa sunt proportionis GA ad AE, alterum AT ad EA vel TR, alterum GA ad AT, duobus elementis proportionis, quadrati CE cum triente quadrati AR, ad qua-
 20 dratum GC, singula singulis maiora.

In truncis igitur proximis à cylindro conjugato decrevit altitudo maiori proportionione, quam qua crevit basis cylindri, aequantis truncum: atque hoc solum demonstrandum fuit, dato enim initio truncorum cylindro minorum, deinceps trunci continuè minuuntur, donec evanes-
 M 3 cant. Sequen'tes tamen casus pertinent ad demonstrationis maiorem evidentiam.

Vel aequatur proportio HV ad VD proportioni GA ad AT, in truncis humilioribus; et sic proportionum dictarum elementa posteriora sunt aequalia, sed priora adhuc inaequalia, et plus triplo maior excessus
 30 rectae AT super TR, in comparatione cum TR, quam triens quadrati AR, in comparatione cum quadrato CE, et id sine compensatione; tota igitur altitudinum proportio, adhuc maior est proportionione altitudinis basium.

Vel denique superat proportio HV ad VB, proportionem GA ad AT, sed in truncis adhuc humilioribus, quando CE longa efficitur, TR brevis: ubi quadratum AR magis magisque aequatur quadrato TR, idque tandem superat, magnam efficiens proportionem inter TR et TA; quae quidem statim initio, et semper, est maior triplo proportionis inter quadratum CE cum triente quadrati AR, et inter solitarium quadratum CE: cum
 40 augeat quadratum CE, quippe hoc ipsum per se crescens. Et cum citò

19) GE statt CE

31) GE

fiat, ut elementum proportionis altitudinum, quod est proportio AT ad TR, fiat maius tertia parte proportionis GA ad AT: ex eo deinceps semper fit, ut excessus elementi huius in proportionem altitudinum, non tantum compenset, sed etiam superet magis magisque excessum elementi illius in proportionem basium: Hic enim totus as crescens quadrati AR, auget proportionem terminorum minorum et decrecentium; illic triens saltem, aequaliter crescens, auget proportionem terminorum maiorum et crescentium. Plus igitur hic potest proportionis augmenti pars tertia, quam illic totum proportionis augmentum.

Haec igitur de illa conjugatione fuerunt demonstranda, in qua quadratum CG duplum est quadrati GA. Quod si quadratum CG fuerit maius duplo illius; multo ista omnia magis obtinent. Nam quod analogiam attinet, Truncorum talium cylindri aequale (in Sch. XIX. CBA.) sunt aequalium sed altiorum cylindrorum CHA subcontrarij, de quibus Th. XVIII. demonstratum, quod trunci ab illis incipiant fieri minores, etiam ij, qui cylindros altos CHA conjugatos habent: quanto magis illi, qui sunt cum his illorum subcontrarijs CBA conjugationis eiusdem, et qui hic demum oriuntur, primo ortu facti humiliores conjugato cylindro CBA.

Iam verò quod reliquam demonstrationem concernit: cùm in 20 Schemate XXI. cylindri ipsi, conjugationum capita, ponantur humiliores esse cylindro CGA: crescit igitur in ijs CG, sed incrementis decrecentibus, minuitur GA, sed decrementis crescentibus. Diminutâ verò GA et secundum eam et TA, etiam AB differentia diametrorum, licet crescentium, crescit, sed incrementis decrecentibus, per Th. X. huius. Fit igitur diminutio corporis cylindri conjugati, per curtationem ipsius TR, magna, quippe et secundum basin CG magnam, et secundum differentiam ipsarum TR et AG multo maiorem: appositio verò ad corpus cylindri conjugati, secundum Trientem quadrati AR, et augmentum quadrati CE per BA, fit parva et minoris aestimationis. Retexat, qui vult, 30 omnia demonstrationis praemissae elementa ad hunc modum; inveniet non minus lucis, quam supra Th. IX. huius, ex calculo emicuit, super huius partis veritate.¹

Corollarium

M 3 v

Posito, quod dolia Vinaria constent truncis conicis puris, in ijs quidem, quae curta sunt, venter omnis diminuit aestimationem capacitatis; in Austriacis verò perinde ferè est, sive ventrem habeant, sive cylindricam figuram propius imitentur: quia nunquam usu venit, ut

20) domonstrationem

22) GA statt CGA

28) ipsium TR

venter in tantam excrescat amplitudinem, ut habeat profunditatem duplam diametri orbis lignei: quo casu sanè, per Corollaria ad Th. IX. amitteret plus quàm quartam partem. Sed nec unquàm profunditas fit sesquialtera diametri orbis lignei, quo casu venter amitteret partem circiter tricesimam. At si sesquitertia, quod valde insolens, jam attenuatum est damnum ventris ad partem septuagesimam.

Atque haec est altera illa, et nobilissima quidem proprietas dolij Austriaci. Sicut enim Th. V. nihil magnum potuit ei nocere variata nonnihil figura per errorem artificis, propterea, quod Lege et
 10 More ducibus, ad figuram omnium capacissimam aspiravit artifex, incidens in figuras capacissimae proximas, in quibus, ut proximis, defectus ex legibus circuli non est observabilis inter initia: sic nunc etiam nihil ferè in hoc dolio variat venter amplius an strictus, res cumprimis grata opifici; quia non ita facile est, ut proportionem tabularum ad orbis, sic ventris amplitudinem pro lubitu exprimere: nec ad amussim praevidet, quantus dolij venter sit evasurus, redigereturque in angustum, si lex amplitudinem certam ventrium praescriberet. Quòd igitur lege tali tam molestâ non est opus, id commoditati proportionis Tabularum ad Orbis, quam observat Austria, acceptum est ferendum.

20 THEOREMA XXIII. PROBLEMA GEOMETRIS PROPOSITVM

*Data proportione diametrorum Trunci, coniugationem invenire, in qua talis truncus
 † aequet Cylindrum coniugationis maximae.*

Primùm in ipsa coniugatione Cylindri maximi, jam truncus omnis, et sic etiam truncus datam habens proportionem diametrorum, est minor cylindro maximo, per Th. XXI. huius. Ergo coniugatio quaesita est supra G, coniugationem cylindri maximi, versus coniugationem trunci maximo aequaealti, datam diametrorum proportionem habentis. Vt si truncus aequaealtus cylindro maximo CGA, fuerit CFA, et coniugatus ei cylinder CIA, fuerit verò etiam in coniugatione CGA truncus CTA, et
 30 fuerit ut CF ad diametrum oppositam parallelam per AX, sic etiam CT ad AV: corpus trunci CTA, coniugationis G, minus erit cylindro maximo CGA. Coniugatio ergo quaesita cadet supra coniugationem G, versus I. Quare quaesitus truncus habebit altitudinem maiorem quam GA. Et
 M 4 cylindri aequaealti diameter basis, quae medium est arithmeticum inter diametros trunci quaesiti, longitudinem habebit minorem quam CG. Dico coniugationem quaesitam esse etiam ultra I, et altitudinem trunci quaesiti maiorem quàm AI, quod mirum videatur. Nam quia datur proportio diametrorum trunci, semper etiam datur earum proportio ad medium suum arithmeticum. Vt igitur CF ad CG, sic erit etiam quaesiti trunci

diameter minor, ad sui aequali cylindri diametrum. Atqui minor haec est, quàm CG, et remotior ab A: minor igitur etiam illa, quàm CF, et remotior ab A: minor ergo proportio CF ad FA, vel CI ad IA, quam diametri trunci puaesiti ad latus suum acclive, hoc est, diametri cylindri conjugati ad suam altitudinem. Maior ergo quaesitae conjugationis altitudo, quàm AI, minor diameter, quàm IC. Hactenus demonstratio: reliquum huius Problematis ADRIANO ROMANO, et si quis alius est, cui GEBER placet, expediendum transmittito.

Cùm enim truncus omnis sit maior cylindro suo aequalto, in portione Vnciae de quadrato differentiae diametrorum, ad quadratum 10 diametri cylindri aequalti: Quare quadratum CA sic jubemur dividere, ut pars una, aucta portione per differentiam diametrorum datâ, et ducta in latus partis alterius, aequet quadratum CG, ductum in rectam GA. Consultus hac de re GEBER respondit ex Cossa sua, inveniendam altitudinem tantam, ut, tribus post illam continuè proportionalibus existentibus, in portione, ut est ipsa ad CA, primae aliqua certa multitudo, aequet datum numerum absolutum, cum aliqua certa multitudo tertiarum: huiusmodi verò aequationes in Geometria adhuc quaerunt consistae, nec, me iudice, invenient unquam.

THEOREMA XXIV. PROBLEMA GEOMETRIS PROPOSITVM 20

Data coniugatione, in qua quadratum diametri in basi Cylindri minus est duplo quadrati altitudinis, invenire proportionem duas diametrorum, quae Truncos coniugationis eiusdem efficiant aequales Cylindro maximo.

Data sit coniugatio CIA, in qua quadratum CI minus sit duplo quadrati IA, oportet invenire truncorum coniugatorum diametros, aequantium cylindrum CGA maximum. Erit igitur altitudo trunci unius maior quàm GA altitudo cylindri maximi, alterius minor, per XXI. huius. Per consequens igitur, illius proportio diametrorum erit minor portione diametrorum aequalti cylindro CAG maximo, huius maior: 30 uterque suum habebit cylindrum aequaltum: qui non erunt subcontrarii ipsi, sed subcontrariis proximi: quia si essent subcontrarii, essent aequales, per XVI. huius. At cùm illorum trunci sint proportionis inaequalis diametrorum, quippe in eadem coniugatione diversas habentes altitudines; inaequales igitur adjicerent uncias quadratorum differentiis suis, per XIII. huius: itaque trunci ipsi fierent inaequales. At requirimus aequales, utrumque quippe uni CGA aequalem.¹

Hactenus demonstratio: reliquum Cossistae conficiant. Data enim 30 M 4 v esto CF, quae quaeritur: datur igitur et FA ex coniugatione, et qua-

12) portione statt portione

23) efficiat

dratum eius: quare et rectangulum diametrorum, et hoc diviso per datam CF diametrum minorem, etiam diameter maior: quare nota erit et differentia maioris et minoris, et eius quadrati uncia, et quadrans; quo subtracto à quadrato AF, restabit quadratum altitudinis; quod cum quadrato GA comparatum, ostendet corporum proportionis partem unam. Sic data utraque diametro, datur cylindri, qui habet trunci CFA altitudinem, diameter basis, eius sc. quadratum, per XII. huius: cui adjecta Vncia prius inventa, facit compositum, quod cum quadrato CG comparatum, ostendet corporum proportionis partem alteram: Oportet
 10 verò partes istas proportionis corporum esse subcontrariè aequales, ut in unum conflatae constituent proportionem aequalitatis.

† Tollite Cossistae, quam fixi, crucem ingenij, et me sequimini: invenietis, nisi me aversa respexit Minerva, continuè proportionalium primas, secundas et quintas, aequari numero absoluto cum proportionalium tertijs et quartis, certo quibusque numero sumptis. Nec igitur Geometrica est aequatio, sed stochastica NIC. RAIMARI VRSI, aut mechanica IVSTI BYRGII: nec problema, qualia PAPPVS ex more antiquorum, Plana appellavit, id est, absolutè Geometrica et scientifica; sed solidum, et cum conditione Geometricum, datis sc. duabus medijs, continuè pro-
 20 portionalibus, quod explicatum scientificum habet nullum. Et praeterea non una est resolutio huius aequationis: demonstratum enim est, Truncos huiusmodi esse duos.

THEOREMA XXV

Si diversarum conjugationum Trunci habuerint eandem inter se proportionem diametrorum, constituti super eadem diagonio: proportio corporum erit composita ex tribus elementis, ex proportionem Cylindrorum conjugationis, et ex proportionibus Cylindri cuiusque ad suum Truncum conjugatum, prioris quidem Cylindri eversa, posterioris vero directa.

Sit truncus CFA, conjugationis CIA, truncus verò CTA, conjugationis
 30 CGA, super eadem diagonio CA; et habeat se CF ad diametrum maiorem per AX prolongatam, sicut se habet CT ad AV: dico corporis CFA proportionem ad corpus CTA trunci, compositam esse ex proportionibus tribus, 1. CIA ad CGA, 2. CFA ad CIA, 3. CGA ad CTA. Simplex est subsumptio ad axioma tritissimum, quod quatuor quantitibus ordine collocatis, proportio primae ad quartam, sit composita ex proportionibus interjectis: tantum in collocatione cautio est adhibenda: quia enim de proportionem satagimus truncorum inter se, oportet truncorum alterum collocare loco quarto, alterum loco primo, cylindros in medio, cuique suum conjugatum proximum. Nam per Coroll. ad Th. III.

columnarum, et¹ sic etiam cylindrorum datur proportio, sc. CIA ad N CGA. Sed per Th. IX. datur proportio eversa CIA ad CFA, scilicet CFA ad CIA, et proportio directa CGA ad CTA: datae verò proportionis corporibus deinceps collocatis, resultat dicta series.

Corollarium et Praxis

Ritè collocatis terminis, quibus exprimuntur proportiones tres, multiplica tres antecedentes, duos inter se et factum in tertium; sic etiam age cum tribus consequentibus, et comprehendent, qui prodeunt, proportionem quaesitam.

Sit CIA conjugatio aequalitatis, CGA conjugatio proportionis semiduplae¹⁰ linearum, duplae quadratorum. Est igitur in Corollario Th. III. proportio CIA ad CGA ut 2828 ad 3080. vel 101 ad 110. In Corollario verò III. ad Th. IX. cum est proportio diametrorum, quae 1 ad 2: Truncus est ad cylindrorum priorem CIA ut 60 ad 54, hoc est ut 10 ad 9. In Corollario altero, cum est eadem proportio diametrorum, quae 1 ad 2, cylinder posterior CFA est ad Truncum ut 15 ad 11 +, ergò

Trunc. Cylindri Trunc. Term. antec. 10. 101. 15. factus 15150 Trunc. CFA.
 10—9 | 15—11+ conseq. 9. 110. 11+ factus 10890+ Trunc. CTA.
 101 — 110 In minimis, ut 505 ad 363+ sic Trunc. CFA ad Tr. CTA.

Corollarium II

20

In conjugationibus aequalitatis et duplae quadratorum vel semiduplae linearum proportionis, ratio corporum per diversas diametrorum proportionem est ista.

In Proportionem diametrorum	Truncus aequalitatis
1. 2	superat plus triente
2. 3	superat nonadecimâ
3. 4	aequalis est Trunco alteri
4. 5	deficit parte 42 ^{da} .
5. 6	deficit parte 26 ^{ta} .
6. 7	deficit parte 23 ^{tia} .
7. 8	deficit parte 20 ^{ma} .
8. 9	deficit parte 18 ^{va} .
9. 10	deficit parte 17 ^{ma} .

30

Exinde continuè plus deficit, usque dum cylinder, conorum omnium principium, deficiat parte undecima.

In proportionibus verò diametrorum maioribus: praevertitur truncus conjugationis duplae, evanescendo.

12) I. statt III.

Corollarium III

Posito, dolia esse ex puris truncis Conicis duplicatis, si eandem habuerint proportionem diametrorum, capacius plerumque est, quod Austriacam figuram, proportionis sc. semiduplae diametri orbis lignei ad dimidiam tabularum longitudinem; quàm Rhenense, quod aequalem habet diametrum dimidia tabularum longitudini. Rarissimè verò et
 N v forte nunquam ¹ fit, ut aequentur capacitate; quia vix unquam profunditates ventrium ad diametrum orbis lignei attingunt proportionem sesquiertiam.

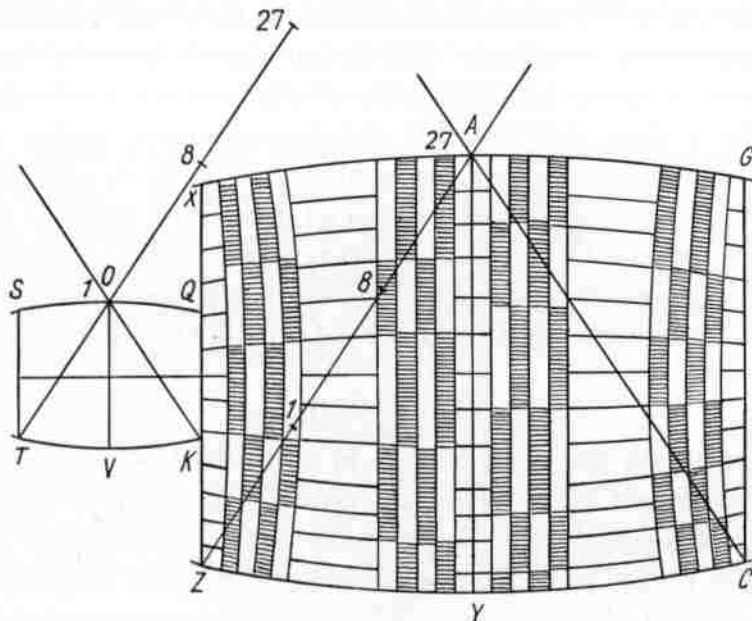
10 Hactenus de figura Dolij Austriaci, sequitur

De virga cubicâ eiusque certitudine

THEOREMA XXVI

In dolijs, quae sunt inter se figurae similis: proportio capacitatum est tripla ad proportionem illarum longitudinum, quae sunt ab orificio summo ad imum calcem alterutrius Orbis lignei.

Sint dolia diversae magnitudinis, specie eadem SQKT, XGCZ, quorum orificia O, A, diametri orbium ligneorum QK, ST et GC, XZ, eorumque ima T, K et Z, C longitudines OK, OT aequales, sic et AC,



Schema XXII

AZ. Dico, capacitates doliorum esse in tripla proportionem longitudinis
 20 OK, AC. Agantur enim per O, A, plana OV, AY, parallela orbibus ligneis,

et sint duo trunci Conici SV et VQ, sic XY et YG inter se similes. Quae igitur de proportionibus dimidiorum doliorum sunt vera, illa etiam de duplicatis erunt vera. Sint igitur propositae figurae OVKK, AYCG, conici trunci, sintque latera figurarum OQ, VK, et AG, YC. Diametri Basium minorum QK, GC, diametri basium maiorum OV, AY; et OQKV, AGCY sectiones quadrilaterae figurarum per suos axes, similes inter se, earumque diagonij OK, AC.

Ergò cum figurae similes sint ad se invicem in tripla proportionibus analogorum laterum, erit proportionis AG lateris ad OQ latus, aut GC diametri, ad QK diametrum tripla, proportio GY corporis ad QV corpus. At in figuris planis trilateris AGC et OQK similibus, ut GC ad analogum QK, vel ut AG ad analogum OQ, sic etiam diagonios AC ad analogon¹ diagonion OK. Quare etiam proportionis AC longitudinis² ad OK longitudinem, tripla est proportio GY corporis ad QV corpus: et sic etiam totius GZ dolij ad totum QT dolium.

Corollarium I et structura virgae

Manifestum hinc est, si virga mensoria dividatur in partes aequales tantas, ut prima et infima illarum sit longitudo OK dolioli, quod capit Amphoram unam: ad singulas verò partium aequalium adijciantur numeri, qui sunt inter se in triplicata proportionibus numerorum divisionis²⁰ aequabilis, nimirum ad finem primae partis Vnitas, ad finem partium 2, numerus 8, ad 3, Numerus 27, ad 4, Numerus 64, ad 5, Numerus 125. et sic consequenter, et numeri reliqui, qui cadunt inter hos cubicos, ordinentur in spacia intermedia; sic ut pars secunda subdividatur in particulas 7 alias, non aequales, sed proportionales, quibus apponi possint numeri 2. 3. 4. 5. 6. 7, medij inter 1. et 8. et sic de caeteris: quod Virga in dolium rite immissâ, numeri ad quos usque pertingit interior tabulae superficies O, A, principio virgae in K, C vel T, Z stante, sint indices Amphorarum, quas capit dolium, proportionis nimirum eius, quam habet dolium, verbi causa, GZ ad dolium QT Amphorae unius.³⁰

Corollarium II

Eodem recidit res, quod quidam in triangulo AGC, pro latere AC metiuntur laterum AG, GC summam, pro virga circumgestantes limbum ex pergamina convolutum, amphorarum numeris eadem lege inscriptum, cuius evoluti principium apud calcem C affigunt, longitudinem à C in G et porro ad A extendunt, de nota eius quae tetigerit punctum A, pronunciantes numerum amphorarum. Nam marginis apud G procurrentem longitudinem, et circulorum ligneorum, viminibus revinc-

13) OX statt OK

34) numeros

torum, tabularumque et orbis lignei GC crassitiem, quam amplectuntur circumductu limbi, praesupponunt per omnia dolia similem.

THEOREMA XXVII

Etiam si binae medietates dolij Austriaci non plane fuerint similes, sed orbium ligneorum alter paulo minor et angustior reliquo, dummodo longitudo in mensoria sit eadem, insensibilis erit capacitarum in utraque medietate differentia.

Dictum enim est in Corollario ad Theor. V. secundae partis, dolium Austriacum versari circa figurationem capacissimam, à qua figurationes omnes ad latus utrumque, hoc est, dolia tam longiora quàm breviora Austriaco, omnia sint minus capacia, quàm Austriacum. ^{N2v 10} In ijs verò articulis, in quibus à minori ad maximum iterumque ad minus fit mutatio, lege aliqua circuli, semper est aliquousque insensibilis illa differentia. Quod igitur verum est de dolijs integris, eandem habentibus diagonem: id etiam verum erit de binis unius dolij truncis, ut de AYG, AYG; ut etsi orbium alter, puta GC, fuerit minor reliquo XZ; dummodò AC, AZ aequales, capacitas tamen sit utrinque ad omnem sensibilitatem aequalis.

THEOREMA XXVIII

At si longitudo virgae per utrumque dolij truncum non sit aequalis, quod usu venit: medium proportionale inter utramque virgae longitudinem, id est medius numerus inter duos ab una et ab altera medietate notatos, sine errore pro indice capacitarum usurpatur.

Nam minor longitudo inscriptum habet capacitarum, quae est sui trunci, duplum; maior itidem sui trunci duplum habet inscriptum. Vtraque ergo longitudo, junctis numeris, inscriptum habent duplum [†] capacitarum totius dolij. Medium igitur arithmeticum inter numeros utriusque longitudinis, quod aequivalet medio proportionali inter lineas, arguit simplum totius dolij.

THEOREMA XXIX

Curvatura Tabularum, seu buccositas inter orificium medium et orbem utrumque ligneum, in dolo Austriaco nihil derogat indicio Virgae, in Oblongis dolijs auget capacitarum à virga indicatam (per se quidem, caeteris paribus), in Curtis minuit.

Nam etsi, per XXIX. partis primae, dolium figura Citrij, Pruni, Olivae, Fusi Parabolici aut Hyperbolici, truncatorum, superat capacitate

²⁷⁾ aequivalet

dolium Cylindraceum, vel meri trunci duplicati figuram habens, his gradibus, quo hic ordine figurae sunt recensitae; illud tamen et per se est perparvum, uti apparet ex Th. XXII p. primae; et quicquid eius sensibile est, jam in virgae numeros ingestum est. Nam primum dolium, cuius capacitas pro unius Amphorae indicio virgae fuit inscripta, similiter ut caetera omnia, suam habuit buccositatem: arguit igitur Virga dolia omnia buccositatis similis; quae etsi non omnibus Austriacis est similis, omnibus tamen est aliqua, eoque minor error circa illam. At cum dolia fuerint longiora Austriacis, longior etiam in ijs flexus est tabularum ab orificio ad orbes, itaque maioris capacitatis, etiamsi similis 10 utrinque ponatur flexura; quemadmodum etiam, si breviora fuerint Austriacis, flexus iste est brevior. Atqui virga flexum longitudinis medio-cris arguit, qualis est in dolio Austriaco: non assequitur igitur virga (caeteris paribus) longitudinem flexus in dolio oblongo; superat in dolio brevi.¹

3) perparum

VSVS TOTIVS LIBRI CIRCA DOLIA

I. Comparatio doliorum per virgam transversalem
exploratorum

Si dolium sit proportionis Austriacae, fidito virgae sine respectu vel ventris inter orbem utrumque, vel buccositatis sive curvaturae inter Orificium infusorium et orbem utrumlibet ligneum; et tale dolium alijs omnibus praefer, excepto illo Rhenensi, quod habet profunditatem ventris maiorem sesquiertia diametri orbis lignei, si tamen ullum habet.

10 Ex caeteris igitur elige Oblonga cum multo ventre, qualia sunt aliqua Rhenensia: compensat enim nonnihil gracilitatem et prolixitatem corporis amplitudo ventris medij, et longitudo buccarum. In contemptis habeto dolia oblonga et cylindracea sine ventre: post haec Curta tibi censenda, cuiusmodi aliqua veniunt ex Vngaria, parum aut nihil à cylindro puro puto differentia. At curta ventricosa fugito modis omnibus; tres enim notas paupertatis habent, unam ex Th. V. magnitudinem proportionis Orbium ad dimidiam longitudinem Tabularum; secundam ex Th. XXII. ventris magnitudinem, tertiam ex Th. XXIX. buccarum brevitate.

20 II. Consideratio methodi mensurandi per virgam
transversalem cubicam

Colligitur igitur ex his omnibus, simul consideratis, nullam inter rationes mensurandi dolia compendiosiore simul atque circumspiciore esse, usu virgae transversalis cum divisionibus cubicis, in dolijs Austriacis. Omnes enim cautelas mensorum in se continet. Primùm virga introrsum immissa eliminat crassitiem tabularum, circulatorum, qui vincula sunt, viminumque, quibus circuli lignei stringuntur. Eliminat et excessum Marginum, quorum in crenis haerent orbes seu Bases lignae. Hoc autem ratio alia mensurandi, unâ et eadem opera praestare nulla

30 potest; quae non rationes mensurae apud orificium A exigit, ubi intima superficies tabularum in aperto est. Itaque Menses aliqui regulas hic nonnullas memoriae mandant et sequuntur, aestimandi caecam hanc tabularum Orbiumque crassitiem: quarum incertitudine circa incon-

stantia exempla omnis reliqua in mensurando scrupulositas eluditur. Secundò modus iste cavet de inaequalitate basium ligneorum seu orbium, idque citra taediosam multiplicationem, citraque repetitionem explorationis, unâ et eadem opera, ut Theor. XXVI. huius dictum. At reliqui mensores in hoc multi sunt, ut doliorum orbis inter se aequent, mediumque eorum proportionale, denique inter capacitates medium conicum invenient; usum virgae planimetrae conjungentes cum calculo N 3 v molestissimo. Vide recentissimum, JOANNIS HARTMANNI BAYERI Medici † Francofurtensis librum de Stereometria Inanum.

Tertiò, neque dissimilitudo Cadurum (quantula quidem in Austriaca 10 dolia cadit, dum doliorum Opifices Regula sua crassè utuntur, aut dolia vetera praecisis marginibus sarciunt) multum derogat fidei huius mensurationis, ut dictum Corollario I. ad Th. V. et Th. XXII. huius. Quartò, non negligitur hic, sed ipsa methodo adsciscitur amplitudo ventris, seu circulus maximus AY: ab illius enim summo A, instituitur mensuratio ad alterius imum C. Eius rei fundamentum pendet ex Th. XXII. huius partis.

Quintò nec buccositas Trunci Conoidis hic quicquam nocet, per Theor. XXIX. Est enim et per se exigua, et per omnes omnium doliorum medietates, fere similis conniventia Tabularum, ad structurae ra- 20 tiones pertinens, quae nec meram Conicam rectitudinem, nec insignem aliquam ventricositatem, magis tamen illam, quam hanc requirit. At de hac buccositate plerique mensores valde sunt solliciti: adeo ut CLAVIVS, † ut supra dictum, ad Ellipses et Conoidea confugiat: neque tamen quisquam illorum adhuc genuinas doliorum figuras calculando secutus est, quas ego nunc primùm et cognoscendas dedi demonstrationibus spinosissimis, et in numeros conieci operosissimo calculo; sed quod Austriaca nostra dolia attinet, ingeniosa magis quàm utili vel necessaria machinatione, tantum ut ex comparatione calculi cum usu virgae Austriacae, et commoditas huius dimensionis tantò magis elucesceret, et caeteri 30 scrupulosi computatores sese respicerent, perpendentes, quàm hactenus frustra cerebrum fregerint computationibus laboriosissimis, culicem excolantes fractionum minutissimarum, sed camelum errorum deglutientes: sola hac altera re, pariter ipsis ignoratâ foelices, quod nullius ferè momenti sunt pleraeque tam scrupulositates, quam errores circa illas.

Plurimum igitur ad privatorum securitatem fraudesque eliminandas refert; ut lex illa dolij construendi, quae tertia parte longitudinis tabularum jubet describere circulum orbium ligneorum, Magistratuum auctoritate diligentiaque conservetur, poenisque et proscriptione vasorum, 40

quae hanc figuram non habent, vindicetur: aut certè, ut virgae mensoriae in enormibus illis dolijs dimetiendis, fides publico decreto abrogetur.

III. Quòd usus virgae transversalis, inscriptas habentis divisiones Cubicas, sit Austriae proprius

Patet hinc etiam, cur virgae transversalis usus multò sit Austriae familiarior, quàm nationibus caeteris: Nimirum quia hanc dolij figuram receperunt, ad quam collineantes Vietores, minimum nocent capacitati manuum aberratione. At penes nationes caeteras aliae etiam doliorum figurae in usu sunt; in quibus ventriam amplitudo tabularumque longi-
 10 tudo mutata, statim sensibile quid nocet. Quare etsi verum est, usum
 N 4 virgae transversalis universalem esse, in omnibus dolijs ¹ inter se simili-
 bus, secundum Th. XXVI. huius partis: at nulla lex, nulla institutio sufficit Opificibus, ut semper teneant eandem praecisè proportionem tabularum, multoque minus profunditatis ventris ad Orbes: ut in qua conformandâ casus plurimum valet, consilium opificis minimum. Cùm itaque figurae institutae proprietas non subveniat aberrationi manuum, ut in Austria, sic ut figurae dissimiles aequipolleant similibus: dissimi-
 libus igitur figuris quotidie provenientibus doliorum, nec capacitatis si-
 milis, non potest Virgae transversalis cubicae solitariae penes nationes
 20 caeteras tam latus esse usus, sine erroris aleâ.

IV. Ratio metiendi quodvis dolium circularium Orbium, sine Virga divisionis Cubicae

Sed cum generalem hoc libro speculationem proposuerim, praxis etiam ad omnes alias doliorum figuras extendenda videtur, cùm ut fructum aliquem Stereometriae huius percipiant etiam nationes caeterae: tum etiam ut Austriaci nostri circa dolia peregrina (quae identidem vel se-
 cundo vel adverso Danubio invehuntur in Austriam, aut vino exotico plena, aut exportatura vinum Austriacum) tanto magis juventur: neve usu virgae suae damnum vel inferant alijs, vel ipsi accipiant. Etenim
 30 Iustitiae simulachrum pingitur cum balance, mensurarum omnium exactarum symbolo; pertinetque cura haec circa mensurarum fidem, ad huius virtutis, suum cuique tribuentis, cultum; ut, quae et salvas praestat Respublicas, et ornat, ipsa quovis Sole pulchrior; ab eius amico et sereno vultu, omnes nubeculae errorum quàm longissimè dimoveantur, discutianturque.

Virga igitur in parato sit, divisa in partes aequales minutissimas; cum illa in orificium dolij immissâ metire primo profunditatem ventris medij,

7) collimantes

37) imissâ

deinde transversas longitudes, ab infusorij medio, ad imos calces utriusque orbis lignei; tertio virgam extractam siste foris ad calces orbium ligneorum, acie etiam in crenas impressâ, si potest, metiens utriusque orbis lignei diametrum in altitudinem porrectam seorsim; cui aequales ponuntur esse omnes aliae diametri unius orbis lignei, propter structurae rationes, et quia hîc non de lagenis agimus. Si tamen aliqua notabilis diversitas esset in diametris unius et eiusdem orbis lignei, orta vel ex aberratione artificis, vel ex natura ligni, quae cum venarum longitudinem praestet invariabilem, latitudinem tamen tabularum habet aurae mutationibus obnoxiam; tunc etiam transversas orbium ligneorum dia- 10 metros metire.

Et quia fit interdum, ut ipsa etiam ventris medij amplitudo non ordinetur in perfectum circulum: tentet igitur accuratus mensor, (cui ad omnem curiositatem instrumenta modosque possibiles suppeditare animus est) viam aliam discendae areae, qua dolium in medio sectum esse intelligitur. Ea possit esse talis.

Limbo ex pergamento, aut alia materia flexili, non tamen, ut fila, ductili, circumdato medium ventrem dolij, metiarisque, quot partes virgae contineat limbus talis. Posito igitur, quod dolium in medio foris exactè¹ sit circulare, ex numero partium harum facile per Th. I. disces, 20 N4v quanta diameter debeat esse huius circuli: Vt si partes in ambitu invenisses 6283 cum una quinta, diameter deberet habere partes 2000. Atqui jam exploratam habes diametrum interiorem seu profunditatem ventris: aufer igitur à computata crassitiem ligni, quam potes metiri in infusorio, et pro altera tabula in dolij imo aufer tantundem; quod si diameter profunditatis invenitur aequalis huic computatae, ex ambitu exteriori, et diminutae: dolij venter exactè circularis credi potest; quia si deflectit à circulo, causa nulla est, cur potius obliquae diametri (quod tamen etiam fieri potest) quam erecta et transversa sint inaequales. Sed omnem certitudinem huius rei (si fortè sit materia metienda preciosior auro, quanti- 30 tatis eiusdem) disces lignis parallelis, intervallo, quantum requirit dolium, firmiter inter se coassatis, quibus omnes circumcirca diametros, si trabes binae dolium sustineant, explorare poteris. Quod si igitur deprehendantur inaequales diametri, erecta et transversa, vel alia quaecunque; tunc figura est Ellipsis: quare per Epis. ad Th. I. p. primae diameter computata medium erit arithmeticum inter erectam et transversam. Itaque quantò computata et diminuta longior est diametro profunditatis, tantò vicissim haec erit longior diametro transversâ.

Ex cognita igitur diametro vel diametris cuiusque circuli vel Ellipsis, sic elicies aream, tam orbis lignei, quàm sectionis imaginariae per me- 40

4) porrectam

30) precior

dium ventrem, per Th. II. et Episagma III. partis primae. Multiplica
 diametrum erectam in transversam, sive fuerint aequales, sive inaequales:
 eritque factus ad summam parvulorum quadratorum, quae sunt unam
 virgae divisionum aequalium longa et lata, contentorum in area talis
 orbis lignei, sic ut 14 ad 11 ferè. Accuratus, (quod dicto Theoremate
 omissum hinc supple) ut numerus post quaternarium ordinatas habens
 Cyphras sedecim, ad dimidium numeri, quo effertur circuli circum-
 ferentia Th. I. Nam ut obiter hoc dicam à nemine adhuc demonstratum,
 † nescio an à quoquam observatum: In omnibus figuris regularibus, cir-
 10 culo circumscriptis, et sic etiam in ipso circulo, quasi in figura infinit-
 angula, usu venit, ut ipsarum perimetri, quando diameter habere poni-
 tur partes 2, numero contineantur, qui duplus est numeri, quo conti-
 netur area figurae.

Proxima tibi cognitio necessaria, est longitudinis dolij, quam non
 ita facile foris, vel intus metiri datur virgulâ, quia curvantur tabulae,
 procurrunque ultra crenas orbesque ligneos, quorum etiam crassities
 ignoratur. Veram igitur longitudinem sic discas; quadra longitudinem
 transversalem, ab hoc quadrato aufer factum ex diametro orbis lignei
 et diametro ventris (sumpto medio arithmetico, si non fuerint omnes
 20 unius figurae diametri aequales) residuum serva, deinde orbis lignei
 diametrum aufer à diametro ventris, residuum quadra, quadrati partem
 quartam aufer à residuo prius asservato: radix eius quod remanet, est
 longitudo medietatis illius, cuius orbem ligneum adhibuisti; technicè
 dicitur altitudo trunci. Quod si dolium est regulare, duplum erit huius,
 longitudo totius dolij; sed tutius ages, repetendo processum eundem
 cum altera longitudine transversali, alteroque orbe ligneo: quo patefiet
 alterius medietatis longitudo, hoc est alterius Trunci altitudo.¹

O Exemplum. Sit inventa in Sch. XXII. transversalis AZ longitudo partium
 aequalium virgae 24 semis et paulò plus: ut sit eius quadratum 602 s. Sint etiam
 30 inventae diametri AY 22, XZ 19 partium earundem. Hae in se mutuò multi-
 plicatae faciunt 418, quem aufer à 602 s. restat 184 s. Differunt diametri per
 3, cuius quadratum est 9, et hinc pars quarta, 2 cum quartâ: quam aufer ab
 184 s. restat 182 cum quartâ, cuius radix 13 s. dimidij dolij longitudo interna,
 ut tota GX sit 27 longa. Et cum quadratum de 22 sit 484, de 19 sit 361: Vt
 igitur 40000 ad 31416, sic 484 et 361 ad 380 + et 283 s. areas circulorum
 AY, et XZ.

Inventis areis circulorum, et longitudine medietatis utriusque, trivium
 occurrit; aut enim pro Truncis Conicis habentur binae dolij cuiusque
 medietates, aut pro Truncis Citrij, aut pro figuris intermedijs, pro Pruno,
 40 Oliva, Fuso Parabolico, vel Hyperbolico, truncatis: hoc est, curvaturae
 tabularum tribuitur vel mera rectitudo ab infusorio ad marginem, vel

merus circulus inter utrumque marginem et infusorium, vel figura ex utroque mixta.

Illa viâ semper paulò minus iusto colliges, istâ promiscuè vel plus iusto, vel iustum attingitur; hac semper iustum attingeretur, si tam facile per hanc incederetur, quàm per illas.

I. Prima viâ dividitur Truncus quilibet in cylindrum regularem, quasi stantem super basi, orbe ligneo, et in circumjectum illi segmentum Limbi Cylindracei Conicum, quod Tunicam appellavimus. Ergò Cylindri corpus, per Th. III. partis primae, computatur, ducta altitudine dimidii dolii, in basin orbis lignei supra inventam: nam numerus inde factus, 10
summam continebit parvulorum Cubiscoreum, qui sunt in proposito cylindro, quorum quilibet unam virgae particulam divisionis aequalis longus, latus et profundus sit. Trunci verò, seu dimidii dolii proportio ad Cylindrum super basi, orbe ligneo, habetur per Corollarium ad Th. XVII. partis primae, ducta diametro orbis lignei, et in se, et in diametrum seu profunditatem ventris; ducta etiam differentia harum diametrorum in sui partem tertiam: et numero Cubiscoreum in cylindro prius invento, multiplicato in summam factorum posteriorum, factoque diviso per quadratum diametri orbis lignei: prodit enim summa Cubiscoreum in dolio. Eodem verò modo agendum etiam cum altera dolii me- 20
diatate, si fuerit dissimilis, aut inaequalis.

Quot autem huiusmodi Cubiscoreum faciant unam mensuram, non aliter disces, quàm si ex lamina ferrea vasculum oblongum, Cylindraceum exactè, et aequaliter rotundum struxeris, cum fundo optimè complanato, deinde infuso liquore unius mensurae in vas siccum, virga tua mensus fueris altitudinem quam signaverat liquor ante immissionem virgae in vasculum; mensus etiam fueris amplitudinem circuli in summo, debet enim aequalis esse imo. Nam ex amplitudine disces aream circuli, modo supradicto, ex hac et altitudine, corpus seu numerum Cubiscoreum in una mensura: quo numero si divideris numerum Cubiscoreum cuius- 30
cunque solidi, habebis in quotiente numerum talium mensurarum, quas capit locus solidus, seu dolij seu Cupae. Atque haec est prima methodus, qua dixi colligi minus iusto. Exemplum habes post Th. XXII. partis primae.

Sed continuabimus hic etiam prius inceptum. Duc igitur 13 semis in 283 s. basin minorem, orbis scilicet lignei XZ, fiet Cylinder 3685 s. In hac verò proportionem diametrorum est cylinder ad Truncum, ut 361 ad 421. Ergò si 361 fit 3685 s. quid 421? sequitur 4298, tot cubiscos valet dimidium dolium: totum ergo 9596. Quod si 30 huiusmodi cubiscoreum impleant unam mensuram, diviso 9596 per 30, prodiret 320 fere, tot mensuras caperet dolium totum.¹ 40

8) apellavimus

Ov II. Altera methodus, qua dolium consideratur, ut Citrium utrinque truncatum, quaeque frequenter justum pronunciat, sed aequè frequenter plus justo; jam supra in Exemplo ad Th. XXII. et XXV. p. primae prolixè et scrupulosissimè fuit tradita: nec alia repetitione est opus, nisi ut moneam, dolium illic appellari Citrium Truncatum, dolij ventrem illic esse circulum maximum per medium corpus Citrij; Orbes verò ligneos illic appellari circulos Truncantes. Deinde et hoc est addendum, si orbes lignei non fuerint aequales, operandum esse bis, semel per minorem orbem, ac si uterque tantus esset, iterum per maiorem, ac si
 10 uterque maior; quodque posterior calculus differens prodeat à priori, eius parte dimidia hinc detracta vel inde adjecta, justum (ut in perfecta Citrij figura) constitutum iri.

III. Quod si tibi scrupulositates istae nondum sufficiunt, eo quod curvatura tabularum non semper habeat figuram Circularem exactè, et si, ut est Geometricorum ingeniorum natura, non ex aliena et conficta, sed ex genuina et propria cuiusque dolij figura lubet argumentari et calculare: age, prius inquirito, qualis omninò figura sit huius curvatis Tabularum?

Quasdam igitur visu simplici dignosces, quibusdam indagandis opus
 20 tibi erit instrumento et dexteritate manuum, circaque hoc exercitium, subtilitate curiosissimâ: quasdam denique et plerasque quidem, nullo ingenio discernes à perfecto circulo, propter rudem tabularum coassationem, impedimenta circulorum ligneorum et viminum, inaequalem tabularum crassitiem, et ipsarum figurarum affinitatem inter se.

Quod si in oculos incurrat curvaturae tabularum in medio ventre dissimilitudo à curvatura versus extremos margines, dolium erit Truncus Fusi Hyperbolici, et quo angustius haec curvatura ventrem circumsteterit, hoc maior Hyperboles pars erit, hoc propius etiam capacitas dolij ad capacitatem Trunci Conici accedet.

30 Reliqua hoc instrumento expedies. Cape regulam ex ferro vel orichalco, quadratam, benè politam, longitudine dolij, non flexilem suo pondere; in illa sint stili ferrei graciles et acuti ut clavi, trusatiles per longitudinem regulae, sic ut in quacunque eius parte haereant firmi non vacillantes; possint autem cochleis à regula extrudi reduciue ad illam: sint numero, cùm minimum, quinque; melius si septem; quorum medium sufficit fixum adhaerere Regulae mediae, longitudine, quae superet crassitiem omnis circuli lignei in dolijs. Statuto igitur stilo fixo in una commissurarum, qua duae tabulae coeunt in medio dolij ventre, reliquos stilos trusatiles, binos et binos, vel si adsunt, ternos, ordina versus dolij mar-

2) quaeque frequentur

5) appellari

28) proprius

gines, intervallo illis indulto modico et utrinque aequali; cochleisque extrude, ut omnes tangant commissuram eandem, extimi aequaliter à medio remoti, in marginibus extremis; caeteri in punctis vicinis, insinuantes se inter binos circulos ligneos, quâ datur eorum tantulum intervallum. Ita comprehensa stilorum extremitatibus quina vel septena figurae puncta, cum Regula transfer in planiciem tabulae bene complanatae, factis in ea punctis totidem; ut si sint in Schemate XVIII. puncta extrema F, G, medium C, interjecta Q, S, et respondentia in parte alterâ. Et ne quis scrupulus supersit, metire etiam crassitiem tabularum, tam in orificio infusorio quàm in marginibus; ea quanta fuerit, tanto intervallo 10 versus interiora et centrum veluti curvaturae, facito puncta alia, deletis prioribus, ut interiorem curvitatē dolij, quinis vel septenis punctis in 2 plano habeas propositam.

Primùm igitur connecte puncta F, G, per rectam FG; deinde cùm CG, CF ex processus descriptione sint aequales; ex C perpendicularem duc in FG, quae sit CO, continueturque extrorsum aliquousque. Tertiò per bina puncta extrema, ut F, S, et respondentia ex altero latere, duc rectas, et continua illas, usque in perpendicularem CO continuatam. Quod si reliqua puncta non fuerint intra complexum harum linearum inventa omnia, vel saltem exteriora in hac ipsa linea; aut si duae hae 20 lineae concurrerint alibi, quàm in ipsa perpendiculari CO continuatâ, ut in Y; tunc operam lusisti, certumque habes, vel dolij figuram, vel instrumentum, vel manus tuas, ad hanc subtilitatem esse ineptas. Possumus autem his duabus lineis, etsi, accuratè loquendo, secant Hyperbolen in punctis singulae binis, uti loco contingentium; utique in dolijs, quae mihi videre contigit. Quare per Th. XXVII. partis primae, diligenter metire, quae sit proportio CO (dimidiaē differentiae diametrorum, ventris et orbis lignei) ad CY. Secto enim angulo OGY in aequalia, si secans transiverit per punctum C, figura ex circulo erit, pertinebitque ad methodum secundam propriè. Sed quod maximè facit ad comparisonem cum 30 caeteris, quaeritur tunc segmentum Globi FGC, deinde per Th. XXV. p. primae, fit ut GO ad OC, sic numerus segmenti globi ad numerum, qui exprimet dimidium corpus Citrij parvi: cuius proportio ad Zonam circa cylindrum HFGE docetur in Exemplo ad Th. XXII.

Si verò fuerint aequales OC, CY, figura est ex Parabola: quare per Th. XIII. Epis. II. quaeritur Parabolicum Conoides ex cono aequaleto: Nam area circuli cuius diameter FG, ducta in partem tertiam OC, creat numerum corporis Coni, at Conoides est sesquialterum Coni: ergo corpus Conoidis habetur, ducta area FG in semissem CO. Tunc ex Conoide

quaeritur Fusum parvum in Conoide, per Analogiam Th. XXVII. partis primae: scilicet ut GO ad YO, duplum ipsius CO, sic Conoides inventum ad Fusi eius corpus dimidium. Invento corpore Fusi parvi, processus reliquus idem est, qui cum Trunco Citrij; Zona enim circa Fusum habet partes duas, altera est Fusum parvum, jam inventum, reliqua et maior quidem pars creatur ducta circumferentia circuli orbis lignei in figuram planam FGC, quae parabola dicitur; cuius area habetur ex Epis. II. ad Th. II. Ductâ enim parte dimidia, id est tribus sextis de CO, in rectam FG, creatur area trianguli FCG, cuius sesquitertia cum sit area Paraboles, creatur igitur ductis quatuor sextis, hoc est besse ipsius CO, in
 10 rectam FG.

Quòd si fuerit CO maior quàm CY, figura erit ex Hyperbola, proximèque accedet dolium ad conum duplicatum: idque tanto magis, quanto maior fuerit CO quam CY. Eritque Conoidis Hyperbolici proportio ad corpus dimidij Fusi inscripti, paulò minor quàm GO ad OY, maior tamen quam GO ad OV, si V centrum sit figurae. Hoc solum lucratur ex hac scrupulositate circa Hyperbolam: de caetero, cùm nondum determinata sit recta inter OY et OV, quadrans ad proportionem convenientem; non etiam animum adieci hactenus ad quadraturam Hyperboles,
 20 cuius cognitione insuper opus esset, ad Zonam Fusi Hyperbolici ex arte
 † computandam. Opitulamini Apollonij.¹

O 2 v Rursum si CO minor quidem fuerit, quàm CY, maior tamen ad CY quam OG ad GY (quod quis qua diligentia discernet?) figura erit ex Ellipsi recta; cuius segmenta ad circuli segmenta facta per rectam axi parallelam, semper habent proportionem eam, quam brevior eius diameter ad longiorem, per ea quae ARCHIMEDES adhibet ad demonstrandum Episagma III. ad Th. II. perque dicta à me in commentarijs de motu Martis, quod ad dictum Th. II. primae partis erat etiam superinducendum. At cum linea proportionis segmenti Sphaeroidis recti ad
 30 Prunum Ellipticum, inter C. Y. nondum sit determinata, ut et prius in hyperbola, nullum hic ingeniosis, et omninò Apollonijs, exitum monstrare possum, quàm quem ipsi sibi sollertissimi ingenij acie, superius Th. XXVI. provocati, exciderint et patefecerint: mediocribus ingenijs nullus hic thesaurus utilitatis aut compendij latet absconditus. Idem denique teneto, cùm CO minor ad CY fuerit, quam OG ad GY: figura enim erit ex Ellipsi transversa, et Sphaeroidis segmenti proportio ad Olivam maior erit, quàm GO ad OC, sed genuina linea nondum est nota: quod tanto minoris momenti impedimentum censi debet, quanto minus verisimile est, dolia Sphaeroidis, quàm Hyperboles aut circuli figuram
 40 imitari.

V. Qua ratione quis artificiosè metiri possit proportionem partis vacuatae ad residuum liquoris, strato dolio, erectisque ad perpendiculum diametris Ventris et Orbium ligneorum

Desiderata hactenus, quantum ego scio, doctrinae huius pars: utilis tamen patribus familias ad arguenda et cavenda furta: si tamen Bacchus à Thetidis ditione suas opes procul collocaverit, eique suis finibus interdixerit: solet enim haec dea sic tegere sui vernae maleficia, ut cùm partem ille subduxerit, ista refundendo corrumpat reliquum. COIGNETI † aliorumque modus, qua certus est, angusti est usus: ut verò ad omnis generis dolia extenditur, sine errore et absurditate, quod facile fatebuntur 10 auctores, exerceri non potest. Incipiamus tamen ab illo: Nimirum si dolium sit figura cylindri, aut insensibiliter ab ea deflectat, superficies plana liquoris, secat orbis ligneos, ventrisque amplitudinem, in bina segmenta circuli; quare, per Th. XVII. p. primae, segmenta duo totius Cylindræci dolij, vacuum et plenum, sunt in proportionem segmentorum planorum in basibus.

Sed quia dolium est compositum ex duobus veluti Truncis Conicis, quorum reputatur altitudo technica, quantum est longitudinis inter circumulum ventris et orbem ligneum: Truncus verò quilibet constat ex cylindro medio, super basi Trunci minori, et circumiecta Tunica (sic enim appello in dolio dimidiam ventris protuberantiam supra molem 20 intimi cylindri: si totum dolium eiusque genuinam figuram consideres, tota ventris protuberantia, constans ex duabus talibus veluti tunicis adversis, in superioribus mihi dicta fuit Zona). Animadvertite igitur, quod Tunicae vel Zonae huius margo primùm subsidit, priusquàm ab intimo cylindro, qui est inter orbis ligneos, quid defiat: postea quàm cylinder incipit minui, semper unâ † minuitur etiam Tunica: ad extremum toto 30 cylindro exhausto, restat in faecibus adhuc margo Tunicae vel Zonae. Quis in hac irregularitate speret ab arte subsidium?

Atqui non plus unico Theoremate nobis opus fuerit, ut de vacuatione 30 Dolij, cum figura Trunci conici duplicati, demonstrativam planè praescribamus Methodum. Dictum est supra Th. XVI. partis primae, nondum esse factam à Geometris disquisitionem de soliditate segmentorum quorundam Coni: quae inter sunt etiam ista segmenta Truncorum Conicorum, seu dolij, quae determinantur per planam superficiem liquoris defluentis, parallelam axi Truncorum conicorum, rectam ad communem basem Truncorum, seu circumulum medium Ventris.

De his itaque segmentis Coni, lubet aliqua disserere etiam hoc loco, ad provocandos Geometras; ut qui hactenus non satagendum putarunt

5) Bacchus

10) absurdis

23) protubernantia

de his segmentis, usu, quod supra dicebam, non exigente; ij jam tandem, postquam manifestum vident usum eorum, e somno evigilent, demonstrationemque soliditatis eorum quaerant. Primùm itaque consideravi, si fortè tale coni segmentum, quod fit plano ad axem parallelo, eoque Hyperbolico, proportionem ad Conum totum habeat compositam ex proportionem segmenti suae basis ad basim Coni, et ex proportionem suae altitudinis ad Coni altitudinem. Haec opinio vero quidem est proxima, sed tamen falsa. Nam portio haec est segmenti Coni scaleni humilioris, scilicet per verticem secti, ad conum propositum altiore: atqui tale
 10 segmentum Coni scaleni per verticem secti, est minus segmento Coni altioris, super eadem basi stanti; exit enim in mucronem; cùm hoc exeat sursum in quandam aciem latam Hyperbolicam; illud continetur superficie Coni minoris et plano triangulari; hoc portione superficiei Coni maioris, et plano Hyperbolico.

Secundò consideravi, num segmentum Coni propositum sit aequale segmento consimili cylindrici segmenti, habenti eandem basin et altitudinem: de quibus segmentis secundis egimus Th. XVII. p. prioris; quorum spectat etiam Th. XXII. ex parte: et an non tam Cylindraceum quam Conicum segmentum, stantia super eodem segmento circuli, et
 20 terminata segmentis planis, illud Elliptico, hoc Hyperbolico, quodlibet aequet partem tertiam segmenti cylindrici recti, per planum axi parallelum facti, super basi eadem. Sed nec hoc ipsissima veritate nititur, utcunque prope accedat. Nam si verum hoc esset de uno, non posset esse falsum de semicylindro, quem determinat planum per axem, transiens etiam per inscripti Coni axem et verticem. Nam diviso hoc semicylindro in partes 33, semiconus eodem plano per axem determinatus, est talium partium 11, per Th. IV. p. primae: at segmentum cylindrici segmenti est
 † talium partium 14, per Th. XVII. Quod igitur interest corpusculum geminatum, terminatum intus Conica superficie, foris planâ et portu-
 30 culis Cylindraceae, est partium tantum 8. Etsi verò hic conus dimidius est praecisè triens semicylindri, tamen hoc in alijs segmentis non obtinet, eo ipso, quod tunc Conus non amplius per Verticem secatur; segmentum igitur Coni propositum maius est triente segmenti cylindrici recti aequale: et videntur ista successivè magis magisque fieri aequalia, vicissimque corpuscula interposita magis magisque attenuari, quo minus sit segmentum ipsum rectum Cylindricum, cuius ista sunt partes.¹

O 3 v Tertiò igitur videtur inquirenda quadratura Hyperboles, quae segmentum coni determinat, qua inventa facile est, cuilibet Hyperbolae triangulum super eadem basi assignare, cuius area sit aequalis areae Hyperboles.
 40 Nam proportio segmentorum Coni ad Conum totum, videtur esse

8) hac

27) 1 statt 11

36) fit

composita ex proportione baseon planarum, et proportione altitudinum triangulorum istorum, hyperbolas aequantium. Interim dum hanc praedam venatu referant Apollonij; nos fidem reliqui Theorematis, etiam non demonstrati, secuti, id eligemus, quod ad veritatem aspirat; et segmenta circulorum quae sunt bases Conicorum propositorum, ducemus non in altitudines eorum, qua ratione minora justo constituere-
mus; sed in lineas longiores, scilicet in continuatas has altitudines, usque ad arcum circuli, per vertices conorum continuatorum, perque orificium dolij traducti, ut si in Sch. XVIII, circulus maximus traduceretur
per B, C et oppositum verticem ultra D, ut sit CL sagitta, et LB sinus 10
arcus, determinantis nostras lineas: cui circulo expedit peculiare nomen esse; dicatur Metator. Manifestum enim est, talem arcum non tangere dolum in G, orbe ligneo, ac proinde altitudinem OG technicam segmenti conici COG, continuatam in hunc arcum, fore longiorem, veluti si OZ esset. Segmentum igitur CA ventris, cuius altitudo CO, ducemus in trientem linearum OZ, pro soliditate segmenti Conici. Si quis metuit, ne OZ nimis sit longa, is cogitet segmenta nobis hic proposita non esse merè conica, sed his maiora ex Citrio et Fuso.

Nascetur igitur processus iste. Ante omnia notam esse oportet, ex superioribus praeceptis, amplitudinem ventris CA, et diametrum orbis 20
lignei GE, cum dimidia differentia CO, et per transversalem CE, ipsam etiam altitudinem technicam Trunci OG. Est autem CO ad OG, ut CL ad LB altitudinem Coni continuati. Igitur scientur areae circulorum CA et GE, ex superioribus, in mensura una; quae areae ducendae sunt in suarum altitudinum LB et KB partes tertias, et auferendus conus GEB, deficiens à Cono CAB continuato, ut restet truncus CAEG, in numeris aptis praesenti negotio. Iam pro inveniendis lineis OZ opus est diametro Metatoris: quadratum igitur ipsius LB, divide per CL, et prodibit in quotiente residuum diametri. Adde igitur CL ad hoc residuum, compositus erit diameter Metatoris. Igitur si proposita sit altitudo vacui CO, 30
per eam inquirenda sunt, segmentum circuli ventris, per praecepta superiora, et linea ex O perpendiculariter per superficiem liquoris defluentis exiens in Metatorem. Aufer igitur CO à diametro Metatoris, ablatam multiplica in residuum, facti radix est linea quaesita; in cuius partem tertiam multiplicanda est area segmenti circuli Ventris, pro soliditate segmenti Conici. Quod si altitudo vacui CO non superat dimidiam differentiam diametrorum CA, GE, sufficit hoc laboris. At si superat, labor geminatur. Segmentum enim Coni tunc excurrit ultra Truncum CGE, in Conum GBE deficientem: quare pars eius deficiens
inquirenda, et à segmento toto auferenda erit. Aufer igitur dimidiam 40

differentiam diametrorum ab altitudine liquoris; cum residuo tanquam sinu verso, quaeratur area segmenti orbis lignei, quod extat supra superficiem liquoris; nanciscatur autem eandem dimensionem cum area segmenti plani ventris. Tunc quae est proportio altitudinis liquoris ad excessum suum supra dimidiam diametrorum differentiam; in eadem
 04 proportionem admettite huic minori segmento orbis lignei, portionem de linea OZ, cuius tertiam partem duc in segmentum lignei orbis, pro soliditate partis de Conico segmento deficientis: qua ablata à toto segmento Conico, relinquitur segmentum Trunci inanitus.

10 Denique si tibi cognitus est numerus mensurarum, quas capit dolium totum, cum multiplica in segmentum Trunci, vel una vel duabus operationibus inventum: factum divide per soliditatem Trunci totius, prodibit in quotiente numerus mensurarum, quae defluerunt.

Cùm autem et hîc et supra saepius usuveniat, ut quaerenda sint segmenta circulorum, per sinus versos dimidiorum arcuum, quae res molestias magnas creat; ut hac te molestia ex parte liberarem, tabellam hic confeci, quae singulis centesimis partibus sinus versi seu sagittae, à summo versus centrum, assignat quantitatem areae segmenti in ea proportionem, ut circuli illius totius area valet partes 15710: nec enim
 20 aptior numerus mihi exivit, utenti facili et expedita via computationis; nec nunc vacat, hunc numerum cum rotundo aliquo permutare.

†	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0.	0	294	818	1478	2237	3072	3964	4900	5868	6856	7855
1.	10	339	879	1550	2318	3159	4056	4996	5966	6956	
2.	27	386	941	1623	2399	3246	4148	5092	6065	7056	
3.	49	434	1004	1697	2481	3334	4241	5188	6163	7155	
4.	76	484	1069	1772	2563	3423	4334	5284	6262	7255	
5.	105	536	1134	1847	2646	3512	4428	5381	6360	7355	
6.	138	589	1201	1923	2730	3601	4521	5478	6459	7455	
30 7.	173	644	1269	2001	2815	3691	4616	5575	6558	7555	
8.	211	701	1337	2079	2900	3782	4710	5673	6658	7655	
9.	252	759	1407	2158	2985	3873	4805	5770	6757	7755	

Vsus tabellae: segmenti sagittam seu sinum versum, seu quod est loco eius (ut in Ventre altitudinem vacui, in orbe ligneo altitudinem extantis partis supra liquorem) duabus Cyphris auctum, divide per semidiametrum circuli, cuius est segmentum: quod prodit, eius denarios quaere in fronte, digitos in margine, et area communis exhibebit aream segmenti, qualium area totius illius circuli valet 15710; quae si valeret minus aut plus, reductione aliqua opus esset ad communem dimensionem.

Exemplum huius processus. Sit venter dolij CA altus 22, diameter orbis lignei GE 19, dimidia ergo differentia CO sesqui: Et OG 13 s. Vt autem CO sesqui ad OG 13 s. vel ut 3 ad 27; 1 ad 9. sic CL 11 ad LB 99, ergo KB est 85 s. Ponemus autem, aream circuli CA valere numerum Tabellae, sc. 15710. Erit ergo ut quadratum 484 de CA 22. ad quadratum 361 de GE 19, sic area circuli CA 15710, ad aream circuli GE 11718. Duc 15710 in trientem de 99, prodit 518430, pro corpore CBA: duc 11718 in trientem de 85 s. prodit 333963, pro corpore GBE, quod aufer à CBA, restat 184467, pro Trunco CGEA. Iam pro diametro Metatoris: ipsius LB 99, quadratum 9801, divide per CL 11, quotiens erit 891; cui adde 11, erit Metatoris diameter 902.

Sit primò altitudo vacui minor quam CO, sc. 1. Vt igitur possis excerpere eius segmentum ex tabella, dic, CL 11 fit 100, quid 1? prodit 9 cum undecimâ: haec immissa in tabellam, refert segmentum Ventris 256 ferè. Aufer deinde 1 à 902 diametro metatoris, restat 901 quod duc in 1. fit 901. cuius radix 30 +. Duc igitur eius ¹ tertiam 10 in 256. prodit soliditas segmenti 2560. Quia ergo altitudo vacui minor est, quàm CO: valet tota haec soliditas. Et ut 184467 ad numerum mensurarum dolij, sic 2560 ad numerum mensurarum quae defluerunt. Sed nota, si operareris per simplicem segmenti altitudinem, quae esset 11, tunc non multo plus tertia parte huius colligeres, quod est certò minus iusto.

Sit secundò altitudo vacui maior quam CO, sc. 6. Vt autem 11. ad 100, sic 6 ad 54 cum 6 undecimis. Ergo in tabella quaesiti, 50 in fronte, et 4 cum appendice in margine, exhibent segmentum 3468. Aufer deinde 6 à 902 restat 896, quod duc in 6, fit 5376, cuius radix 74, minus sexta parte: duc huius tertiam partem in segmentum, prodit soliditas segmenti Conici 85351, sed ultra truncum conicum excurrentis, quia 6 superat CO. Ergo aufer CO sesqui à 6, restant 4 s. cum hoc quaerendum segmentum orbis lignei. Si semidiameter eius 9 s. fit 100, tunc 4 s. fit 47 cum triente ferè: cum quo ex tabella eruitur segmentum 2843, qualium area orbis lignei, quae minor est areâ ventris, habet 15710. Duc igitur 2843 in 361, quadratum de 19; factum divide per 484, quadratum de 22, prodit 2120 s. Et quia segmento toti, cuius erat numerus 6, tribuebatur 74, eius parti, cuius est numerus 4 s.tribuendum erit pro altitudine 55 s. cuius tertiam duc in 2120 s. fiet 39229 s. soliditas apicis de segmento excurrentis in conum deficientem. Aufer hanc à segmento toto, restat segmentum Trunci conici 46121 vacuum. Rursum igitur, ut 184467 ad numerum mensurarum totius dolij, sic 46121, ad numerum exhaustarum mensurarum. Si per simplicem altitudinem segmenti operareris, ea fuisset non 74, sed 66, segmenti soliditas 76312, deficientis verò apicis 36400, soliditas ergò segmenti de Trunco 39912, certò minor iusto. Nos igitur quod hic maius invenimus, pro vero amplectimur.

At enim excipient Apollonij ne sic quidem, hac soliditate segmentorum conicorum concessâ, satisfactum diversitati in dolijs; quippe haec soliditas, cum ex unius formae metatore computetur, non plus quàm uni figurae doliorum quadrabit? Scio equidem; quare ut et illis satisfaciam, ad Th. XXX. partis primae illos ablego; illic invenient

(Apollonij inquam, quaerentes, invenient) unde suppleant, quod scientificae demonstrationi huius artificij adhuc deest.

Conclusio libri

Constitueram errores aliorum, cum circa doliorum integrorum, tum etiam circa partis vacuae dimensiones, detegere, fundamentaque Elenchorum monstrare in Theorematibus huius libri. At cùm una veritas sufficiat vel tacens, contra omnes errorum strepitus; et jam antea liber, vix decem initio Theorematum, praeter opinionem excreverit: habeant igitur sibi suos errores, quicunque ijs delectantur; fruamur nos nostris
10 commodis; et ut fruendi materia, salvis corporis animique bonis, affatim suppetat, precabimur.

Et cùm pocula mille mensi erimus,
Conturbabimus illa, ne sciamus.

FINIS.

MESSEKVNST ARCHIMEDIS

Auszug auß der Brasten

Messe Kunst Archimedis

Vnd dero selben newlich in Latein außgangener
Ergenzung / betreffend

Rechnung der Cörperlichen Figuren / holen Gefassen vnd Weinfässer / sonderlich des Oesterreichischen / so vnder allen anderen den artigsten Schick hat.

Erklärung vnnnd bestättigung der

Oesterreichischen Weinvisier Ruthen / vnd dero selben sonderbaren gang leichten vnd behenden Gebrauchs an den Landfässern: Erweiterung dessen auff die außländische / so auch auff das Geschütz vnnnd Kugeln.

Sampt einem sehr nützlichen

Anhang

Von vergleichung des Landtgebräuchigen Gewichts / Elen / Klafter / Schuh / Wein vnd TraidMaß / vnder einander / vnd mit andern außländischen / auch Alt Römischen.

Allen vnnnd jeden Obrigkeitten / Beampteten / KriegsObristen / Handelsleuten / Büren / Münz / Barz vnd RechenMeistern / Weinvisierern / Haußwirthen / vnd meniglichen in vnd außser Lands / fast diensilich: sonderlich aber dem Kunst vnnnd Antiquitetliebenden Lesern annämlich.

Gestellt durch

Johann Kepplern / der Röm. Kayf. Mt. vnd Dero getreuer Löbl. Landschafft des Erzhertzogthums Oesterreich Ob der Enß Mathematicum.

Proß. XVI.

Rechte Waag vnd Gewicht ist vom Herren / vnd alle pfunde im Sack sind seine Werck

Vom Authore verlegt / vnnnd gedruckt zu
Linz durch Hansen Blancken.

A N N O

M. D C. XVI.

Mit Aans. Freyheit auff XV. Jahr nicht nachzudrucken.

Denen Edlen / Besten / auch Ehrnvesten / Ersamen /
Fürnemen / Fürsichtigen vnd Wolweisen /

Herrn Burgermeistern / Richtern vnd Rähten /

der Löblichen Stätte des Ertzhörzogthums Oesterreich Under
vnnnd Ob der Enß:

Meinen Groß vnnnd Günstigen Herren

Edle / Beste / auch Ehrnveste / Ehrsame / Fürneme / Fürsichtige / Wolweise /
Groß vnd Günstige Herren. Das Bralte Mütterlein aller vnd jeder Obrig:
10 keiten / Gemainden / guter Warte / vernünftiger Kauffleute / Freykünstler vnd
Handwerker / namens Geometria, mein gebietende Fraw / leset E. W. E. F. W.
vnd G. als einem grossen vnd sehr lieben thail ihrer Kinder vnd Angehörigen / ihren
mütterlichen Gruss / vnnnd nebens soviel vermelden: wann es der Löb. Obrigkeit in
ihrer Regierung / vnd jedem nachgesetzten inn seinem Handel vnd Wandel wol
ergehe / vnd er sich also / wie Sie ihne gelehrt / ehrlich vnd reichlich mit den seinigen
nehre vnd hinaufbringe / solches ihr ein sonderliche Frewde sey zu vernemen. Ferners
vnnnd demnach sie von mir verstanden / das Ich / als ihr geschworne Diener / mich
kurzer Jahren im Land Oesterreich Ob der Enß / vnd dessen Hauptstatt Linz / ver:
mittelt Kayserlicher / vnd von derselben Löbl. Landschafft habender Bestallung /
20 nidergerichtet / in Hoffnung / alda die von Ir mir aufgetragne Raittungen / betref:
fend alle theil jres Gebiets inn der Obern vnd Nidern Welt / mit mehrer ruhe / ver:
mittelt Göttliches willens zuvoßführen vnnnd zuschliessen: Als hat sie ihr baides /
diese einer gangen Löblichen Landschafft gutwilligkeit vnd ehrerbietung gegen Ir /
so auch mein resolution vnd entliches verfahren wol gefallen lassen: mit vermel:
dung / daß sie das ganze Land Oesterreich / sonderlich von des edlen Nebensaffts
wegen / vor andern Ländern lieb habe / vnd zu auffzucht eines von Leibsgehalt vnd
guten Sitten wol proportionirten Volks / grossen fleiß angewendet / auch jr eigene
Herberg in dem Oesterreichischen Weinsaff habe / alda sie ordentlich pflege einzu:
30 kehren. Derohalben vnd obwol Sie alt / vnd nunmehr unvermüglich / als die ihr
Haab vnd Gut maisten theils ihren Kindern übergeben / dem Tischler das Winkel:
maass / dem Binder den Cirkel vnnnd Hemstaf / dem Wagner die Leichsel vnd das
Rad / dem Schiffman das Ruder / dem Mahler die perspectiv vnd Sonnenuhr /
dem Kauffman die Waag vnd Arithmetic, dem Bürenmeister den Maassstab / dem
Bawmeister die ¹ Mechanicam, vnnnd so fort an: Jedoch zu müglicher belohnung für
die empfangene Ehr / vnd damit Sie jr noch mütterliches Herz gegen ihren Kindern

auch einmal mit einem geringen erzeigete: hat sie hiermit noch einen alten Deut-
 pfenning auß ihrem Schatz herfür gesucht / den sie einsmals / als sie in besagter irer
 Herberg mit einer Wissterruthen ombgestüret / ohn gefehr gefunden: solchen mir auff
 ein Teutsche Manier fleißig außzupoliren / vnd E. W. vnd G. samptlich / mit gebüren-
 der Ehrerbietung / von Ihr vnnnd Mein selbstwegen / zuverehren gestattet vnd be-
 fohlen: freundlich ansinnend / solchen von Ihrentwegen auffzubehalten / inn für-
 fallenden Gelegenheiten / zu befürderung alles Handels vnd Wandels zugebrauchen /
 vnd Ihr als einer wolverdienten getreuen Mutter darbey danckbarlich zugehenden:
 dessen fernern erbietens / jren lieben Kindern auch fürders / wo Sie etwa ansehen
 wurden / mit Raht vnd angreiffung ihres vbrigen Schazes (der gleichwol noch nicht
 erschöpffet) notdurfftiglich benzuspringen: Vnnnd versihet sich hingegen / E. W. auch
 E. F. W. vnd G. werden eintheils / im Land ob der Enß / nach der Röm. Keyß. Mt.
 vnserß Allergnädigsten Herrenß wolgefallen / mit vnd neben andern fürnemen Gli-
 dern deß Landes / in angefangner günstiger beschuß vnd befürderung jhrer der
 Geometriae getreuer Diener / vnd denen obligender anderer / obwol nicht gemeiner /
 doch zur Ehr Gottes reichender verrichtungen continuiren: andern theils aber / im
 Land Vnder der Enß / disem rühmlichen Exempel nachvolgen / weil jhnen Gott hierzu
 viel bessere Mittel bescheret / vnd sie mit vberfluß Traids vnd sonderlich deß köstlichen
 Dest. Weins so reichlich gesegnet.

Welches ich hiemit / empfangnen Befelch nach / verrichten / vnnnd besagten Deut-
 pfenning E. W. auch E. F. W. vnnnd G. inn nachfolgendem Teutschen Außzug mit
 vieler mühe vnnnd vnkosten außpoliret / vnnnd mit seinem Anhang gefasset vnd ver-
 mehret / zu einem Glückseligen Frewdenreichen Newen Jahr vnderdiensflich praesen-
 tiren wollen / hochfleißig bittend / Die wollen mit meinem auff die polierung ge-
 wendten fleiß / wie er gerahten / großgünstig für lieb nemen / Denen mich zu Gun-
 sten befehlend. Datum Linß 1. Januarij Anno M. DC. XVI.

E. W. auch E. F. W. vnd Gunsten

Vnderdienstbefliffener

Johann Keppler

Mathematicus. 30

1. Von Notwendigkeit der Visierruthen.

Auß der dedication
im Lateinischen.

Um Reinstrom vnnnd sonst hin vnnnd wider in Teutschen Landen / wa es grossen Weinwachs hat / führet man die newe läre Fässer zu der Eyck / an die Brunnenkästen auff offnen Markt: da ist ein geschwornen / der hat sein gewisse Statt: oder Landmas / mit deren füllet er das Faß / vnd zehlet / wievil in allem darein gehe; was sich nun findet / das brennet er drauff mit einem kennlichen Brandzeichen / dessen ein jedes ort sich gebrauchet. Wirdt also die Rechnung vnd der Kauff gemacht nach diser Eyck / vnd diß haissen dann Geeychte Fässer. Diß ist der gewisseste vnnnd sicherste weg / wann man nur allemal denselben brauchen vnd gehen kan.

10 Es taugt aber dise weise maissen theils nur für die / welche innerhalb einer Statt oder eines Landes mit einander handeln / vnd es begeben sich sehr vil fälle / da man darmit nicht vergnüget sein kan.

Dann erstlich kan geschehen / das etliche Frösche abgestossen werden; wil dann der Binder das Faß nicht gar zu hauffen schlagen / so muß er ein andere Saag streichen / vnd den Boden weiter hinein setzen / vnd alsdann helt das Faß sein auffgestämpfte Eyck nicht mehr.

Zum andern / so werden etliche Fässer so groß vnnnd in die gewölbte Keller hinein gebawet / das sie nimmer ans taglicht kommen: zu geschweigen / das man ein solches grosses gebew solte an einen Brunnen führen / allda anfüllen / da oft ein 20 ganzer Röhrkasten nicht sovil Wassers in sich helt / ja inn etlichen wilen stunden oder tügen nicht Wassers gnug zuerinnen möchte.

Fürs dritte / vnd wann dann ein Faß nicht geeychet / oder die Eyck nit mehr helt / oder wann das zeichen auff einem Markt / dahin man das Faß verführet / nicht erkennet oder passiert wirt / solte man alsdann müssen den Wein außlähren / mit Wasser eychen / oder warten / biß der Wein außgetrunken / vnnnd hernach allererst rechnung machen / oder nach dem Gesicht handeln? Was were diß in einem vnd anderem für eine vnleidenliche verwirrung vnd schädliche hinderung?

Zu abhelfung dieser Inconvenientien, vnnnd zu befürderung deß Handels vnnnd Wandels hat man die Visierruthen erdacht / vnd es seind bey allen wolgeordneten 30 Stetten geschworne Weinvisierer bestellt / die ihr genants darvon haben / vnd mit ihrer Visierruthen / die ihnen ein jede Statt: oder Land Obigkeit fürlegt / den Käufer vnnnd Verkäufer auff erfordern entschaiden müssen / was ein Faß in sich halte.

2. Das insonderheit bey der Oesterreichischen Visierruthen oder Hemstab vor andern örtern ein erwünschte behendigkeit mit lauffe.

Auß derdedication.

Ob nun wol die Visierruthen weit vnd breit / an allen orten / da es grossen Weinwachs hat / gebraucht wirt / so hat es doch mit derselben nicht iberall einerley Art.

2 Dann am Reinstrom / vnnnd wa ein grosser ¹ Weinhandel / da messen sie die breite

an baiden Böden / vnd die lenge der Laugen oder Laufeln / also auch die tieffe zum Spontloch oder Beihel / gerad hinunter: Wann dann ihr Maaß / oder Wiserruthen inn viel kleiner vnnnd gleicher theil abgetheilet ist / dann so gibt es viel Multiplicirens, dividirens, quadrirems, cubirens, quadrat vnd Cubic oder Conicwurgel suchens / auch viel neben Regeln vnd erinnerungen von vngleichen Böden vnd Beichen der Fässer / da immer ein Wisierer genawer vnd fürsichtiger sein wil dann der ander; also daß je einer wider den andern schreibt / vnd ihm sein verfähen entdeckt. Inmassen dann auch in diesem Büchlein für die Lande so es bedürfftig / dergleichen verbesserte / aber sehr schwere Rechnungen mit eingeführt werden / deren jede an seinem orth mit ordnung folgen solle. Etliche seind auch so vnvorsichtig / trawen 10 ihren vngleichen oder Kunsttheilungen an der Wiserruthen allzuviel; vnnnd dörfen sich von ihres langen vndencklichen brauchs willen / ganz freventlich wider einen Kunstverständigen legen / ihme widersprechen / ihne deß fürwizes beschuldigen / gleich als wann solche Kunstmessung nur allein inn ihrem Handtwerck zulernen / oder von ihnen selber were erfunden worden / ohne empfangnen vnterricht von den rechten Meßkünstlern. Da doch sie die notwendige absätze / die es mit solchen kunstlichen Theilungen hat / nimmermehr begreifen oder practiciren könden / sondern begehen offtermahlen mit denselben groffe Irrthumbe / weil sie sich nicht also durchauß ohne vnderscheid brauchen lassen.

Hingegen helt man in Oesterreich disen gebrauch. Erstlich hat man ein durch 20 gehende gleiche form einer Wiserruthen von vngleichen Cubischen Theilungen / auff die Oesterreichische Maaß / Emmer / oder Eych gerichtet / vnd müssen die Binder vnd Weinwisierer angeloben / dieselbige vnd kein andere verfälschte zugebrauchen / vnd sich nach deren zurichten.

Nachmalen wann ein Kauff geschicht / vnd die Fässer in die Keller eingeschossen vnnnd geöffnet worden / dann kompt der Weinwisierer oder der verkauffer mit einer gerechten / vnnnd bey der Statt approbirten Wiserruthen / die sendt er oben zum Spontloch vberzwer gegen dem einen Boden hinunter: vnnnd stüret so lang / biß er deß windels / oder vndersten theils vom Boden gewar wirdt: dann so merckt er / mit welcher ziffer die Ruthe oben an das Beihel raiche; versucht es auch gegen dem 30 andern Boden / ob etwa die eine zwer lini lenger wer / als die ander. Welche ziffer nun an der Wiserruthen zu baiden malen gezeiget wirdt / oder das mittel zwischen baiden (wann die zwerlinien vngleich weren) die gibt ihme die anzahl deren Emmer / so im Faß seind: vnd nach derselben ziffer wirt die Kauffsumma / deren man nach dem Emmer eins worden / zusamen gerechnet.

Diß ist nun eine gar behende weise zu Wisieren / weil sie gar keiner Rechnung bedarff.

3. Fürnembster Zweck dieses Büchlins.

Wann mir dann zu gemüth gangen / ob dann dise weise auch also gewiß / als man ins gemein darauff bawet vnd handelt / vnd ob nit etwa die Wisierer disen 40 gebrauch der Wiserruten bey den Obrigkeiten auß vnvorsichtigem verlassen auff die künstliche Cubische theilung / allzufreventlich eingeschlaiff / commendirt vnd gelobt /

1) lenger

darinnen ſie aber ſich vnd andere auch verführen möchten / als hab ich mich vor
 3 anderthalben Jaren hinter den rechten Grund diſer weiſe ¹ zu viſieren / gemacht / vnd
 dieſelbe / wie ſie in Deſterreich / vnd an Deſterreichiſchen Fäſſern geübt wirt / juſt /
 ſicher / vnnnd gewiß befunden / welches ich dem kunſtliebenden Leſer in einem
 lateiniſchen Tractat mit Geometriſchen Demonſtrationibus nach art der kunſt
 erwiſen / die ſummen aber eines jeden poſtens / vnd was ſonſten nützliches oder
 notwendiges darbey zu mercken / dem Teutſchen Leſer zum beſten (auff etlicher der
 ſachen verſtändiger Herrn vnd Landleute gutachten) in diſem Teutſchen Büchlein / ſo
 einerley format hat mit dem Lateiniſchen / für Augen geſtelt: damit alſo ein jeder /
 10 nach ſeinem verſtand vnd glegenheiten / das Lateiniſche oder das Teutſche Exemplar /
 oder beyde zuſamen erkauffen vnnnd gebrauchen könne: Verhoffend / beydes glehrte
 vnd Idioten werden mit meinem wolgemeinten fleiß zuſtriden ſein / vnnnd deſſen
 genieſſen beim Deſterreichiſchen külen Wein.

Demnach aber von der alten Römischen Republica bekandt / das ſie ihre gewichte /
 Elen vnnnd Maas alſo an einander gehengt vnnnd verknüpft / das eines ohne das
 ander nicht hat können verlohren oder verendert werden. Als haben jeztvermelte Kunſt-
 verſtändige vnnnd dem Vaterland gewogne Herren für gut angeſehen / das ich der-
 gleichen auch an den Deſterreichiſchen viererley Meßſorten / darauff aller Handel vnd
 † Wandel beruhet / verſuchen ſolle: wie dann hierin I. Das Gewicht / Centner / Pfund /
 20 Lot / etc. II. Die Elen / Claſſter / Schuh vnd Zoll. III. Die Weinmaaß / Emmer /
 Achtering vnnnd was dem anhengig. IV. Die Traidmaaß / Viertel / Strich / Regen /
 Ruth / etc. inn kurzen runden zahlen welche wol zubehalten ſeind / alſo zuſamen
 gebracht / das eines auß dem andern hergenommen / erkundigt / bewäret vnd ver-
 beſſert werden / vnnnd alſo alle mit einander zu mehrer beſtändigkeit gereichen können.

4. Von eußerlicher geſtalt eines jeden Weinfasses in gemein / auß dem Erſten Theil deß Büchlins.

Diſer erſte Theil lehret zu eingang von dem furn eines Weinfasses / dann wann
 diſer furn ſich nicht nach dem Cirkel artete / ſo kondte man mit der Wiſierruthen
 keine kunſt daran üben. Dann alles was man behend meſſen ſoll / da man auß
 30 wenigen bekanten ſachen / viel unbekandtes errathen ſolle (zum Exempel auß der
 bloſſen tieffe deß Fasses / ſein ganze fähigkeit oder ſeinen halt) das muß ſich eint-
 weder nach dem Circul oder nach der Geräde arten vnd ein wolgeſchickte gleichheit
 im umbkraiſe haben.

Vnd wirt angezeigt daß ein Weinfas ſich am Boden nach einem Cirkel / vnnnd am
 Bauch nach einer runden Seul oder Wellen / das halbe Faß aber vom heihel an /
 nach einem Regel arte / welche drey ding / nemlich Cirkel / Regel vnd Wellen / den
 Künſtlern wol bekandt ſeind / darumb ſie ihre Kunſt auch an den Weinfäſſern
 brauchen vnd erweiſen können.

Darneben werden vſachen angezeigt warumb die Fäſſer ein ſolche vnnnd kein
 40 andere form haben müſſen / welches vnnot Teutſch zugeben: dann es wol einem
 gemeinen Binder lächerlich fürkommen ſolte / wann er gefragt wurd / warumb er

4) Leſern

16) Als hat

18) Deſterreichſchen

25) 3. ſtatt 4.

das Faß rund mache vnnnd nicht anderst / ohnzweifel wurde er nichts anders antworten / dann allein diß / weil er nie kein anders gesehen. Das macht / er hat nicht gelebt zu Josua oder Christi zeiten / da man Wein vnnnd Wasser in Schleüchen vber Land geführt vnnnd aufgehalten. Er ist nicht in der Türckey ge'weßt / da man noch heut zu tag lederne Taschen braucht / lederne grosse Lägeln an der Cameln vnd Eseln seiten anhenget / hat villeicht auch nie der sachen nachgedacht / warumb man die Welsche Wein in breiten vnd nicht runden lägeln zu vns heraußbringe; sonderlich wirt er nie betrachtet haben was die Alte Römer für Weinfässer müssen gehabt haben / darinnen sie den Wein offtermals vber die hundert Jahr im Rauch hangen gehabt. Wann heutiges tags ein Buch fürhanden were / darinnen solche geschirr vnd die ganze Manier klärlich beschriben were / wie ich im lateinischen Exemplar vnser heutiges tags gebräuchige Fässer beschriben / wurde dasselbig den gelehrten lieb vnd wol befohlen sein.

5. Von Künstlicher Messung allerhand runder sachen.

Vnd weil dann die Wisfertunst auß dem Cirkel: Walger: vnd Regelmessen herflusst / vnnnd ohne dieselben nicht mag recht verstanden werden / so folgt nun ferners im ersten Theil ein Außzug / wie man solche formen recht verstehen vnd behend messen solle.

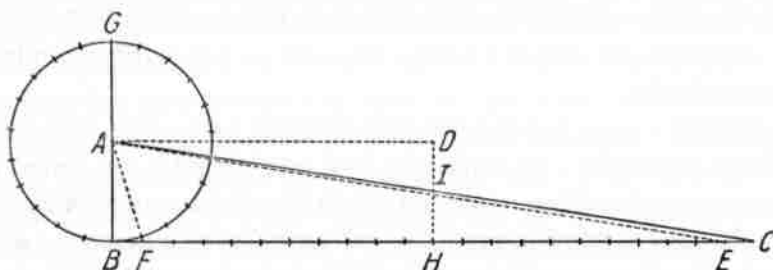
Dabey dann der einfältige wol mercken solle / das alles was hie im ersten Theil / so wol auch ein grosser theil dessen / was hernach im andern vnnnd dritten Theil des lateinischen Exemplars nacheinander folget / vom künstlichen Messen / nicht allein der Weinfässer / sondern auch anderer dinge: solches nicht dahin gemeinet / oder eingeführet werde / als müste ein jeder / der die Oesterreichische Wissterruthen an Oesterreichischen Fässern recht brauchen wil / solches alles vnd jedes zuvor verstehen vnnnd üblich practiciren müssen. Mein es bedarff sich für gmeine Leuth so viel mühe vnd Kopffbrechens gar nicht: sondern dahin ist es gerichtet / dieweil ich dem Kunstliebenden vnnnd nachsinnenden Leser im Lateinischen tractat hab erweisen wollen / das die Oesterreichische weise / ein Weinfäß zu visiren / gewissen vnnnd guten grund habe / vnnnd niemand verführe / so hab ich müssen die Oesterreichische weise gegen andern weisen halten / so inn den Kunstbüchern bekandt oder an andern orten üblich seind / sovil deren ihren vnfehlbaren grund haben. Dann solte ich diß erweisen haben nicht durch künstliche Messungen vnnnd Rechnungen / sondern mit dem Werck selbst / vnd mit abeydung vieler vnderschiedlicher Weinfässer / deren eins also / das ander anderst gestaltet / das hette mir viel zeitverderbung / vnkosten / mühe vnd verdrießlichkeit verursacht / vnnnd hette ich manchmal naß von der Donaw heimkommen müssen: hette lezlich dannoch nicht gewußt / waran ich were / dann es leichtlich hette sein können / das noch ein form eines Fasses hinter bliben were / dergleichen mir niemalen vnder die Hände kommen / an welchem ich mit meinem fürgeben auß vnwissenheit hette verfahren mögen.

Weil dann zu behauptung meines fürhabens in disem ersten Theil allerhand schöner vnnnd nützlicher Kunstmessungen haben müssen eingeführt werden / die sonst einer / der nur ein wenig künstelt / gern in einer kürz bey einander hat / als hab ich

dem Teutschen kunstliebenden Leser den außzug auß solchen Theorematibus, deren in der anzahl dreissig / inn diesem Teutschen tractat nicht mißgunnen / sondern meisten theils nach ordnung des Lateinischen tractatins hie einführen wöllen: guter hoffnung / die andere mehr einfältige Leser / werden sich solche außschweiffe nicht irren lassen / sondern die oberhupffen / biß sie im andern Theil zu der Visierruthen selber kommen.¹

6. Vom Umfrais des Circels.

Zu wissen wie weit es umb ein Rad herumb sey / das ist zwar dem Schmid / Wagner vund Fuhrman ein leichte sache. Sie schalten den Wagen fürsich nach der



Auß dem 2. Theor.
Die 2. Figur im
lateinischen.

10 gerade / so lang / biß der eine Nagel / der anfangs zu vnderst gestanden / einmal
herumb / vnd wider vnder sich kompt; der trucket zu baiden malen einerley grublin
in den Boden; so hat man dann die ganze krümme des Rades zwischen beyden
grublein in die gerade aufgestreckt / vnd mag sie dann mit Schuchen oder mit Elen
abmessen / wie man wil / oder dessen bedürfftig ist.

Wann aber nicht allwegen dergleichen Mittel fürhanden weren / zum Exempel wann der Binder nicht allwegen mit einem Band umb das Faß herum messen kan / sondern es ligt etwa unten auff / oder im Raat oder im Wasser: wolan wann ime nur sovil wirdt / daß er die weitte oder breite am Boden messen kan / mitsampt den Fröschchen / so kan er darauff auch den umbkreiß an den eussersten Fröschchen wissen 20 durch dise Regel / nimb die breite drey mal / theil sie auch in sieben gleicher stuck / setz das ein von disen sieben stucken zu den dreyen gangen / so hastu den umbkreiß oder die weite deß raiffs / die er dann zumal haben wirdt inwendig / wann er an die Frösche zu eusserst angelegt vnd angetriben sein wirt.

Also hingegen auß dem umbkreiß zu lernen die breite oder höhe deß gerechten
Cirkels: Zum Exempel / wann ein Faß verbeihelt were / vnd nicht köndte auff-
gemacht werden / zuwissen / wie tieff es am Bauch seye. So zeuch ein Band vmb
die mitte am Bauch herumb / theil solche lenge in 22 gleiche theil / nim̃ darvon 7
solcher theil / so hastu die höhe deß Fasses mit sampt dem Holz: wiltu die innerliche
höhe deß Weins haben ohne das Holz / so misse die dicke der Taufeln an Fröschen /
30 (frag aber den Binder zuvor der das Faß gemacht / wievil die Taufeln am Bauch
dinner oder dicker seyen dann aussen an Fröschen) zeuch also die dicke beyder Tau-
feln von der gefundenen höhe deß Fasses ab / so bleibt dir die innerliche höhe.

31) *sey statt seyen*

Behalt die zahl
dann du wirst irer
oft bedürfen / son-
derlich jren halben
theil

3141592653589793.

Dabey zu wissen daß es nicht nach der scherffe zuverstehen / wann man sagt der umbkreiß halte sich gegen dem diameter oder breite wie 22 gegen 7. Dann es ist nicht möglich einen einigen gleichen theil von dem diameter zunemen / welcher den umbkreiß gerad außmesse; ja wann man gleich den diameter theilete in zweinsig tausent tausent tausent tausent mal tausent gleicher stücklein / so wirt doch etwas überbleiben / das weniger ist / dann ein solches kleines stücklein / dann der umbkreiß wirdt alsdann sein 62 831 853 071 795 861 solcher kleiner theil vnd noch ein wenig drüber / doch nit so vil / das es gar / etc. 862 werden.

7. Vom Umbkreiß einer Eylinien.

Ein Eylini / oder ablänger Cirkel hat nicht einerley breite mit der höhe; deren leng inn die gerade außgestreckt / helt gleich das ¹ mittel zwischen beyden gerechten Cirkeln / deren der eine oben vnd vnden / der ander zu beyden seitten von jenen an der Eylini anstreicht. 10 1

Zum Exempel / wann das Faß kein runden Boden hette / vnnnd man solt einen raiff anlegen vngemessen / so müste man doch zum wenigsten am Boden messen könden wo er am breittesten / vnnnd wo er am schmälesten were: zwischen baiden solchen breittinen das mittel in 7 getheilt / vnd deren stück 22 genommen / geben die inwendig weitte von dem raiff / der an ein solchen boden gerecht ist.

8. Wie das Maß zuverstehen.

Merck hiebey das man den diameter oder dessen ein gewisses stück hie für das Maas brauchet / abzumessen die Krümme: dann also helt es sich allwegen / das maas sol vns bekant sein / dann dasjenige so man misset / vnd das gerade ist vns allwegen mehr bekant dann das krumme / die lenge mehr bekant dann des Feld / das Feld mehr bekant dann ein volles Corpus oder innerlicher raum. Dann dem Menschen ist ein solche gerade lange Maas angewachsen / sonderlich der Finger / Spannen / Schuh oder Fuß / vnd Elenbogen / daher die Elen den namen hat. 20

Merck fürs ander / das man nicht gleich anfangs ein ding mit Werckschuhen außmisset. Dann es seind solche Werckschuhe gar vngleich vnd vnderschiedlich / wie auch die Menschen mit ihren schuhen vnnnd Elenbogen vngleich auffwachsen.

Sondern darinnen bestehet alles kunstliche messen / das ein jede form / die sich nach dem Cirkel oder nach der gerade artet / ihr gerades Maas inn ihr selber hat / ist sie groß so ist auch ihr Maas groß / ist sie klein auch also. Als zum Exempel der Cirkel / er sey klein oder groß / hat seinen diameter zu seinem Maas / vnd man fraget anfangs nicht / wie groß der Cirkel sey / verstehe gegen einem Werckschuh zu rechnen / sondern / man fragt / wie sich ein jeder umbkreiß gegen seinem diameter oder durchzug (breite) vergleiche. 30 40

9. Von den Bögen auß einem Cirkel vnd ihren untergespannenen Sennen.

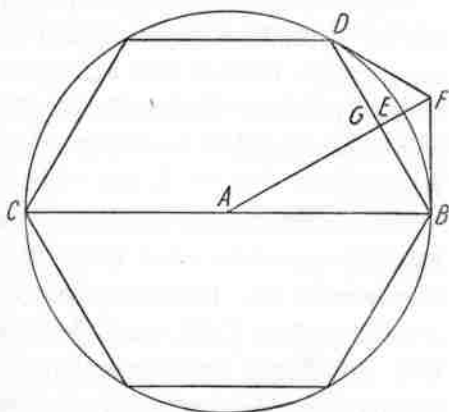
Es ist zu wissen / das ein jedes stück vom Cirkel seine gemessene untergespannene Senne hat: Auß welchen etliche nach der scherpfte mit voller kunst benennet werden /

11) das zum mittel

etliche aber nicht nach der scherpffe / nicht mit völliger Geometrischer kunst / als mit offenen Augen / sondern allein bey nahe (wie es sich auch mit dem ganzen Cirkel gegen seinem diameter verhält) vnd durch die Cossa / welche vns den weg weist / wie einem blinden sein führer / oder zuwo enge wände in der finstere / wann ich den kopff zur linken anstosse / so weiß ich / das ich mich zur rechten wenden soll / den weg aber sehe ich nicht / kan auch das rechte mittel von mir selber nicht treffen.

Ob nun wol beyder orten es ein schöne übung gibt / für scharpffsinnige Ingenia, daß sie eines jeden bogens Senne von grund auß durch Geometrische scherpffe / oder durch die Cossa / jede nach ihrer art / rechnen mögen: Jedoch weil es gleichwol viel
 10 kopffbrechens gibt / vnnnd man nicht nur von lusts wegen an disen Sennen oder
 7 subtensis, oder ihren halbtheilen den sinibus behangen ¹ kan / sondern man muß auch nach dem gebrauch solcher gerader Cirkellinien trachten / vnnnd die zeit dahin sparen / als haben vor zeiten Ptolemaeus vnnnd die Arabier, hernach vnser Deutsche Mathematici von anderthalbhundert Jaren her / dise Arbeit einmal für allemal auff sich genommen / damit sie andere deren / so oft es vonnöthen / vberhebeten vnnnd ein eygen Büchlein Canonem sinuum geschriben / vnnnd denselben nach vnnnd nach verbessert: welcher Canon sinuum bey nahe in alle Mathematische kunstbücher ein- verleibet wirdt vnnnd zu finden ist / vnnnoth denselben hieher zuubersehen. Aller-
 † newlichst ist er an Adriani Romani vnnnd Bartholomaei Pitisci Trigonometriam
 20 gehendt worden. Etliche haben einen eignen tractat darauß gemacht / welches Rheticus angefangen / Valentinus Otho volführet in einem grossen Folio, sehr weitlenffig / Philippus Lanspergius kürzer vnnnd verständlicher / aber die zahlen einer jeden lenge / sonderlich der kurzen / hat er nicht allerdings gnugsamb subtil außgerechnet: der letzte ist gewest Bartholomaeus Pitiscus, der noch den preiß vor allen behelt: doch wann Jost Bürgi mit dem seinen ans taglicht kompt / wirdt er die zahlen vil scherpffer geben.

Dise alle nun theilen den Cirkel in 360 gleicher grad / einen grad in 60 minuten / eine minuten in 60 secunda: den diameter aber CB, in der folgenden Figur / theilen sie in zweyhundert tausent gleiche theil / bißweillen aber / wann sie scharpff rechnen
 30 sollen / setzen sie noch eine zuwo oder 3 nullen darzu / darmit der theil 10. 100. oder 1000mal mehr werden: da findet sich nun bey jedem grad vnd Minuten von 0 an biß auff 90 (ist das viertl vom Cirkel) wie lang der sinus oder halbe Senne sey zu einem jeden halben bogen. Als zu einer jeden lenge des bogens EB oder ED, die lenge des sinus oder halben Sennen GB oder GD, gemessen
 40 nicht mit des Cirkels BE, sondern mit des halben diameters AB theilen oder vniteten. Da findet man auch / sonderlich bey Pitisco, in schöner ordnung beygestellt / die lini BF Tangentem, oder den Ausstreicher / vnnnd AF secantem den Durchschneider / wie auch GA den sinum



Die Erst Figur.

complementi deß übrigen Bogens oder restß auff 90. / etc. Weil dann in nachfolgendem Büchlein der Künstler bißweilen zu disen halben Sennen oder sinibus arcuum gewisen wirdt werden (wann er sie mit dem Reißzirkel nit scharpff gnug messen kan) hab ich ihne dessen hie an seinem gewidmeten ort erinnern / vnd im übrigen denselben an die benennte Bücher / da solche sinus zu finden / verweisen sollen.

10. Zu rechnen die Sennen / den Volsz / oder den diameter deß Cirkels.

Doch seind etliche stück / dazu man gewonlich die sinus brauchet / welche wann sie runde vnnnd kurze zahlen haben / mit gnugsamer behendigkeit auß ihrem eignen grund gerechnet werden. 10

Zum Exempel ich wuste die breite oder den diameter eines Cirkels / als CB 902 / vnnnd den volsz oder die höhe eines schnitzes von demselben / in ainerlei maß / als EG 6. darauff solte ich rechnen wie lang der sinus GB sey. Nim 6 von 902 / bleibt 896 / das Multiplicir in 6 / kompt 5376 / darauff such die wurzel / kompt 74 weniger ein 6 theil / da hab ich den sinum GB, vnnnd 148 weniger ein 3 theil ist die senne DB.

Hingegen so mir bekandt die höhe EG 3, vnd die leng GB 27, zuwissen den Durchzug oder diameter, so Multiplicir ich 27 mit sich selber / kompt 729 / das dividir ich in EG 3 / so kompt 243: setze EG 3 darzu / so kompt der diameter CB 246, halb 123 nemlich AB. 1

Item so mir GB bekandt wehre / nemlich 27 / sampt dem halben diameter AB 123, zu wissen den Volsz oder die höch deß schnitzes EG, so multiplicir beide bekante zahlen / jede in sich selbst / so kompt 729 vnnnd 15129 / da zeuch ab das kleiner vom größern / bleibt 14400 / von dem such die wurzel 120, die zeuch ab von AB 123, bleibt dir EG 3. 20

11. Ein gemeine Regel vom vnterscheid der quantiteten.

Lateinisch Linea.
Deutsch Ein strich
Ein riß Ein zug.
Wann sie gerad ist
Ein strecke Ein ge-
rade. Wann sie zu
einem feld oder
Corpus gehört Ein
schranten Ein zaun
Ein seiten Ein lan-
ges Edh Ein scher-
pffe Ein reißen Ein
lengte Ein breite
Ein höhe Ein tieffe
Ein durchzug Ein
zwerlini.

Lateinisch Super-
ficies Deutsch / Plaz/
feld Feldung.
Wenn sie zu einem
Corpus gehörig
Ein Wand Ein boden
Ein lähn. Ist
zweyerley / eints

Bißhero haben wir nur von einerley Maaß oder quantitet gehandelt / nemlich von der blossen leng. Als wann einer nur allein fragte / wie viel Elen / vnbedacht ob die gemessene Leinwat breit oder schmal. Vnnnd wie man im sprichwort sagt / von Lins biß gen Steir seien vier langer Meylen / sein aber nicht breit: vnnnd biß ist der erste Verstand auff die wort Elen / Schuh / Spannen / Zoll / Ruthen / Meil / vnd dergleichen. 30

Die andere sorten der Maaß oder quantitet ist der plaz / das feld oder die feldung / Lateinisch superficies vnnnd Griechisch επιφάνεια, als das / so ins Gesicht kompt oder kommen kan / sonst gar deutlich ἐπίπεδον, was auff dem boden ligt wie ein gemähld auff der Tafel / vnnnd sich nicht erhebt wie ein geschnitztes oder gegossenes Bild. Dife Sorten der quantitet leffet sich durch das vorige einfache Maaß messen in die leng vnd in die zwerch oder breite: vnnnd solchen verstand haben bey vns Deutschen die Wort / Tagwerck / Jauchart / oder Morgen / verstehe eins Ackers / Weingarten oder Waldes vnnnd dergleichen. Item wann man im sprichwort sagt / nicht eines Fuß 40

24) vom AB

27) namlich

30) (Randnote) geräder

38) (Randnote) Teutscher

breit / verstehe / nicht sovil Landes als einer mit seinem Fuß bedeckt. Inn diesem andern verstand wirdt auch bey den Kunstmessern gebraucht ein jeder Nam der im ersten verstand eine lenge bedeutet. Als zum Exempel / der Schuh bedeutet bißweilen ein vierecktes Feld / das eines Schuchs lang vnnnd breit ist / vnnnd wann der diameter des Cirkels getheilt wirt in 200000 gleicher theil oder Vniteten, so wirdt ein jede solche Vnitet auch geviert verstanden / also das im gevierten Feld / welches von solchen vier diametris vmbschrencket wirdt / 4000000000 solcher kleiner gevierter Vniteten stehen.

weder ein fläche
oder ein rundung.

Die dritte Sorten der Maaß oder quantitet, ist das innere Corpus, so man nicht
10 sihet (es sey dann durchsichtig) daher es Griechisch στερεόν heisset: sondern das man
fühlet oder greiffet / danen mans die Fülle / oder mit den Fleischhackern / den Griff
nennen mag / vnser teutsche Werckleuthe haissens auch den Leib; weil aber die Figur
nit allwegen innen voll ist / mag man es besser den Raum tituliern. Wann der Zeug
inwendig durchauß gleich ist / dann so mag mans auch das Gewicht oder die schwäre
heissen. Dann nicht die leng / nicht die eussere Wandt oder Feld / sondern die ganze
innere fülle oder Leib gibt das Gewicht. Dife Sorten der quantitet leffet sich durch
9 das erste einfache maaß messen / in die lenge / in die zwehr oder breite vnnnd in die
höhe oder tieffe / vnnnd also in drey wege. Von solcher dreyfachen messung wegen /
weil hiemit die Messsorten ein end haben / wirdt auch die zahl / drey / für vollkommen
20 gehalten.

lateinisch Corpus.
Teutsch Der Leib
Die fülle Der griff
Der Raum
Das Gewicht
Die schwäre.

Diesen verstand haben bey vns Teutschen die wort Eimer / Achtering / Seydl /
Tme / Mut / Mehen / Strich / Viertel etc. vnnnd also verstehen auch die Kunstmesser
bißweilen einen jeden namen / der im ersten verstand eine lenge / im andern eine
breite bedeutet / als zum exempel der zoll in diesem dritten verstand genomen / be-
deutet einen würffel / eines zols lang breit vnnnd hoch.

12. Wie fern ein jede quantitet sich in die regel detri schicke / Item mehrsers von der lenge eines jeden Bogens oder Cirkels.

Wann nun von einerley sorten gehandelt vnnnd gefragt wirdt / vnnnd es ist nur
die theilung oder das Maß zu derselbigen zweierley / so hat die Regel detri statt /
30 nach art der gemeinen Rechen Kunst.

Zum Exempel ein bogen wäre vnderzogen von einer lenge 54 zoll / vnnnd ich
wusste / das der ganze diameter des Cirkels lang wehre 246 solcher zoll / wolt gern
wissen den sinum oder halbe Sennen des bogens / das ist / die zahl mit deren diser
vnderzug im Canone sinuum genennet wirt / diß seind lauter solche zahlen / die da
bedeuten blosser lengen da mag ich wol sprechen

246 gibt im Canone	200000 was 54?
oder 123 gibt	100000 was 54?
oder 41 gibt	100000 was 18?

so kompt die Senne (subtensa) 43902 / dife halbiert gibt den sinum 21951, der zeigt
40 den halben bogen im Canone, das er sey 12 grad 40 Minuten / 51 secunden, wehre
also der ganze bogen 25 grad 21 minuten 42 secunden.

22) Item statt Tme

Item der umbkreiß am Cirkel / oder seine 360 gradus seind lang kleiner stücklein / auß der gewonlichen theilung des diameters (wie bey No. VI) 628318 53072 etc. wievil solcher kleinen stücklein oder theilungen wirt ein bogen halten / der nur einen grad hat / oder auch ein ganzer Cirkel / welcher aber 360 mal kleiner ist / dann der vorige? Sie bedeuten abermals beide zahlen nur einerley maß nemlich nur bloße gebogene lengen / folgt derhalben durch detri 17453 29252. Also in einer minuten oder sechzigsten theil eins grads sein solcher theilungen 29088820 / in einer secunden 484814. Vnd lassen sich diese zahlen lang oder kurz brauchen / also das ich von einer jeden mag hinweg werffen die eufferste zur rechten in gleicher anzahl. Als zum exempel / wann der ganze umbkreiß hat 628318 so hat ein grad 17453 vnd ein 10 minuten hat alßdann 291.

Diß hat auch statt / wann gleich krumb vnd gerade vndereinander gemenget werden.

Alß der diameter 200 hat einen umbkreiß 628 / was für einen umbkreiß hat der diameter 100 / folgt 314.

Dann es sein doch beides / diameter vnd umbkreiß nur bloße lengen.

Sie mag dich das folgende Täfelin viler schwerer rechnungen vberheben / zu wissen / wievil solcher theil ein jeder bogen habe / deren der diameter hat 200000. Item wann in einem feld oder in einer erhabenen vollen figur mehr dann ein Cirkel fürkommen / da alle andere kleinere Cirkeln mit solcher theilung zumessen seind / die dem allergrößten vnder jnen seinen diameter in 200000 theil theilet. Dann 20 neben einem jeden bogen stehet eine zahl die mußt du dupliren / so hast du desselben bogens lenge in solcher maß wie der diameter hat 200000. Doch wann der Bogen im ersten fach stehet / so laß die 11 letzte ziffer zur rechten hand nur 1 fahren / stehet 10 der bogen im andern fach so laß die 12 letzte ziffer fahren / im dritten 13 / im vierten / fünfften / sechsten / laß fahren 14. 15. 16. ziffer. Also neben einem jeden halben diameter, welcher inn ein zahl von 1 biß auff 10 / mit zusatz noch 15 Nullen getheilet wirdt / stehet ein zahl die mußt du dupliren / so hastu desselben Cirkels leng inn einerley Maas / wie der halbe diameter. Vnd so viel weniger nullen die theilung hat am halben diameter, soviel ziffer schneid hinten ab von der neben gesetzten zahl.

Nimb hievon zwai Exempla. Zusuchen die lenge des bogens 25 grad / 21 minuten / 30 42 secunden, versteh wann des Cirkels diameter heist 200000.

Der bogen ist 25. G. 21. M. 42. S.

Auß der Tafel 25. 12. 0 gibt 219911

Bleibt noch 9. 42

Auß der Tafel 8. 38 gibt 1256

Bleibt noch 1. 4

Auß der Tafel 0. 52 gibt 125

Bleibt noch 12

Auß der Tafel 12 gibt 28

Bleibt nichts. Summa 22132

Nimb doppelt 44264

diß ist die lenge des bogens.

Also zusuchen die lenge des Cirkels / dessen halber diameter ist 21951.

Neben 2 stehet 062832

1 03142

9 2827

5 157

1 03

Summa 68961

doppelt 137922

ist die lenge des Cirkels.

Dann es ist zu wissen / daß ein Cirkel / dessen halber diameter helt 21951 / gleich so lang ist als fünff andere Cirkel zusamen / deren halbe diametri seind 20000.1000.900.50.1.

Täfelin zu den Cirkelbögen / kleinen Cirkeln / zum runden Feld
an der Kugel / zum Leib der Kugel / auch zum Cirkel-
vnnnd Kugelzänden

Die ganze Cirkelfläche Multipliziert		Die Bögen in 6 fachen					
mit		I	II	III	IV	V	VI
		Gr.	gr.mi.	g. m. s.	mi.se.	m.se.	sec.
10	31 4 etc.	360					
9	28 27433 38823 08137	324	32.24	3.14.24	19.26	1.57	12.
8	25 13274 12287 18344	288	28.48	2.52.48	17.17	1.44	10.
7	21 99114 85751 28551	252	25.12	2.31.12	15. 7	1.31	9.
6	18 84955 59215 38758	216	21.36	2. 9.36	12.58	1.18	8.
5	15 70796 32679 48965	180	18. 0	1.48. 0	10.48	1. 5	6.
q 4	12 56637 06143 59172	144	14.24	1.26.24	8.38	0.52	5.
3	09 42477 79607 69379	108	10.48	1. 4.48	6.29	0.39	4.
* 2	06 28318 53071 79586	72	7.12	0.43.12	4.19	0.26	3.
§ 1	03 14159 26535 89793	36	3.36	0.21.36	2.10	0.13	1.

20 q Die zahl zur Kugelrundung vnd ihrem Leib trittoppelt.

* Die zahl zum vmbfrais.

§ Die zahl zum Feld des Cirkels.¹

11 Merck die vrsach warumb die lenge der Bögen im Täfelin nur halb zu finden seye. Dann es seind dise ziffern vnd gar lange zahlen nit fürnemlich auff die lenge der Bögen angesehen / sondern auff das Feld in einem Cirkel / vnnnd Cirkelzaan / theils auch auff die eusserliche rundung an einer Kugel vnd auff derselben vollen Leib / deshalb haben sie auch mit so vilen ziffern erlengert werden müssen / weil der Leib allezeit drey mal vnd das Feld zwey mal sovil ziffer brauchet / als der halbe diameter.

30 Bisshero ist gehandelt worden von solchen zahlen die alle nur lang bedeynten / es verheilt sich aber auch mit der andern sorten oder zweyfaltigem Maas vnd ihren zahlen also: dann ich kan gleichfalls die Regel detri also brauchen / ein vierung 14 gibt ihres Cirkels feld 11 wie folgen wirdt / was gibt die vierung 400 ihrem Cirkel / folgt 314 solcher kleiner vnd gleicher Felder.

Also auch mit der dritten Sorten / oder dreyfaltigen maas / wann ein wirffel helt 21 pfunde / so helt die Kugel im wirffel 11 pfund / wann dann ein groß Quaderstück hielte 8000 pfund / wiewil wurde daran bleiben / wann mans zur Kugel haben solte? folgt durch detri 4190 pfund. Dann das gewicht / wie gesagt / folget her auß der innerlichen fülle / gehört derhalben vnder die dreyfache raumliche maas.

40 Es gilt aber die Regel detri auch weiter in etlichen fällen / da die zahlen so da lang / vnd die so da lang vnd brait / oder lang brait vnd hoch bedeynten / vnder:

einander gemischt werden. Dann es kan ein kleines Corpus so oft in einem grossen / jenem ehnlichen / stecken / als oft sonst etwa ein lenge in einer andern lenge begriffen ist. Wann ich dann weiß / das ein bekanter Leib sich helt gegen einem andern Leib / wie auß zweyen bekanten linien oder feldern eins gegen dem andern; dann so mag ich wol sprechen durch detri: die eine lini gibt ein solche lini / was gibt das bekante Corpus / folgt im facit das andere Corpus das ich hab rechnen sollen.

Aber hie ist zu wissen / das solche linien nicht seyen baiden Leibern gleichgenennete linien / sondern sie seind für sich selber / oder ob sie schon in baiden raumlichen Leibern stehen / so stehen sie doch nit an gleichen einander ehnlichen orten. Als in zweyen Kugeln / wann die eine lini were der diameter zu der grossen Kugel / so wirt die andere gewißlich nicht der diameter zu der kleinern Kugel ganz sein / sondern eintweder nur ein stück daran / oder auff einer seiten stehen. ¹⁰

13. Das die Sorten vnder einander vermengeset / sich nicht in die Regel detri schicken / ohne sonderliche vorthail.

Wann aber die eine zahl von der Feldung gemeint / die andere vom Jaun darzu / oder die eine von der Wand / die andere vom innerlichen Raum / die eine von der Hautt / die andere vom Gewicht; die eine von der geraden höch oder dicke / die ander von dem Leib oder Fülle / so das ein jede Sorten der einfachen oder zwisfachen Maaß gegen seiner drysfachen Maaß in gleicher würden gehalten werde: als zwo Kugeln / vnd von jederen der diameter ganz / item zwen Cubi vnd von einem jeden sein leng oder seiten / dann so gilt nicht die Regel detri, sondern vilmehr einmahl die Regel decinque vnd andern mals die Regel desept, also zu reden; vnderweilen baide vndereinander vermischet. ²⁰

Der Erste fall / wann eine zahl nur die einfache leng bedeutet / die ander ein Feldung / so gilt regula quinque, dann jede einfache leng muß zweymal gesetzt vnd zusammen multiplicirt werden / damit sie auch zum Feld werde / vnd alsdann gilt erst die regel detri. Exempel: in einem Cirkel 19 Schuh breit am diameter wurden eingefangen 100 stück Feldes einer gewissen Maaß / wievil deren stück kämen einem Cirkel / dessen braitte am diameter 22 Schuh. Alhie gelten die 19 vnnnd die 22 nur eine einfache zwerlini des diameters / da doch der Cirkel oberzwer vnnnd den langen weg so brait ist / vnnnd mit disem beding genommen wirdt. Hingegen die 100 / bedeuten das vmbzirckte Feld / setz es derhalben durch die regula quinque also ³⁰

19.	19	gibt 100	was 22.	22
Multiplicirt			Multiplicirt	
361				484

folgt 134 / sovil ist des Feldes im Cirkel von 22 Schuchen / mit der vorigen Maß gemessen.

Ein anders / Hans braucht 12 Elen zeugs zu einem Klaid / vnnnd sein Sohn Hänßl ist gleich halb so lang als der Vatter / wolst ihme gern auß einerley Zeug ein gleiches Klaid machen lassen / der Schneider macht ihme die rechnung / weil der Sohn halb so lang / muß er auch halb sovil Zeugs das ist 6 Elen haben / obs recht gerechnet sey? Antwort / der Schneider hette an dem Sohn 3 Elen zum besten. Dann der ⁴⁰

Vatter ist nicht nur an der leng grösser dann der Sohn / sondern auch an der zwehr vnd dicke. Derohalben ist er zweymal so lang / so hatt er viermal sovil an der Haut vnd achtmal sovil am Leib. Weil aber die Klaidung nach der Hautt gehet / vnd nicht nach dem innerlichen Leib oder schwäre / so kompt derowegen auff den Sohn nur der vierte theil zeugs / nämlich 3 Elen.

† Noch eins / vnd zwar ein vermischtes. Ein Binder hat ein gerades feuchters Faß ohne Boden / wann ers auff das Flösch stürzet / so gehen drey Mezen Habern darein. Er schneidet daß Faß oder die Taufeln mitten enzwey / vnd macht ein anders Faß oder Botung darauf / also das die Taufeln alle darein kommen / wievil Habern wirdt in diß nider Faß gehen. Setz anfangs es sey so hoch als das vorige. Demnach nun ein jede Tafel zwifach inn das newe Faß kommen / so ist sein umbkreiß zweymal so weit als des vorigen / das runde Feld aber am Boden ist viermal sovil als zuvor. Wann es nun die vorige höch behielt / so lägen auff jedem vierten theil am Boden drey Mezen Habern / das weren also 12 Mezen / weil es aber nur halb so hoch / so seind der Mezen noch 6. Wirt also das nidere Faß 2mal sovil fassen als das höhere / vnangesehen einerley runde feldung oder Taufeln aussen herum geordnet seind.

Doch merck / das diser proceß nur alsdann zuverstehen / wann die Felder baider orten einander ehlich seind / als im ersten vnd dritten Exempel / seind baider orten Cirkel / im andern Exempel baider orten gleich gefurmbte Klaiden.

20 Sonsten wann sie einander nicht ehlich / bleibt es bey der regula quinque nach gewonlicher weise. Als 12 Elen halb Elen brait geben ein Klaid / was geben 42 Elen zwo Elen brait. Sprich 12 halb nemlich 6 / gibt 1. was 42 zweymal / das ist 84 / kompt 14.

Der ander fall / wann einfache lengen / braiten oder höhen / vnd dreyfaltige Maaß als Gewicht / Raum oder Leib vndereinander kommen: so setze die einfache jede drey mal / das es regula septem werde / vnd multiplicir vnder einander / damit wann auß der einfachen auch ein dreyfache wirt / man hernach die rechnung durch die Regel detri vollführen könne.¹

13 Ein Exempel / vnd gesetzt ein stück geschüßes / zwen Zoll weit offen / schieße ein 30 Kugel von 5 pfunden / eins gewissen zeugs / Bley Zinn Eysen oder Stein / wann dann ein anders 3 Zoll weit / was wirt sein Kugel wegen einerley zeugs.

Hie merck / gleich wie droben die vierung von 19 / der vierung von 22 Schuchen / vnd jener Cirkel disem Cirkel / Item des Vatters Klaid / dem Klaid des Sohns gleich gesehen oder ehlich gewest / also findet sich hie abermalen Kugel vnd Kugel einander ehlich / aber die 2 vnd 3 Zoll bedeuten nur einfache dicke / oder lenge des diameters durch die Kugel vnd mitten durch das Muntloch der Stücke: da doch die Kugeln ein dreyfaltige Maaß oder quantiteten / nämlich Leiber seind / die nicht nur in die leng sondern auch in die zwehr vnd in die höch aufgespannen seind / vnd nach solchen Leibern jede ihr gewicht helt. Setze es derhalben also

40 2. 2. 2. gibt 5 was 3. 3. 3.
zweymal zwey zweymal ist 8 / vnd drey mal drey drey mal ist 27 / stehet derhalben
entlich in der Regel detri also
8 gibt 5 pfund was 27 / kompt 17 pfund so vil wigt die grössere Kugel.

21) 41

22) 41

33) diseren Cirkeln

Dieser fall begibt sich im Faßmessen oder mit der Oesterreichischen visier. Gesezt du hettest kein Visierruthen zur hand / hettest aber für Augen zwey Faß / da dir nur deß einen halt bekant were / doch das sie durchauß einander ehnlich seyen / wie hievor zwey Kugeln: dann wann diß nicht ist / so gehört es hinunter inn den andern Thail / allda besser zu bedencken. So messe nun baide am Boden mit einerley maaß / vnd was dann eines jeden diameter für eine zahl bekompt / die multiplicier in sich selber Cubicè, hernach dividir den grossen durch den kleinen Cubum, so kombt dir wievil der kleinen Fässer im grossen stecken; als der diameter am Boden deß kleinern / finde sich inn dem diametro deß größern zweymal vnnnd 2 sibentheil / das also das klein Faß am Boden hielte 7 / das grosse 16. Sprich 7 mal 7 ist 49 / diß 7mal ist 343. 10 Also 16 mal 16 / ist 256 / diß 16 mal ist 4096 / das theil inn 343 kompt beynahe 12. Wann dann das klein Faß hielte einen Eimer / so würde das grosse nicht vil weniger dann 12 Eimer halten.

Der dritte fall / wann die eine zahl die Wand oder Feld bedeutete / die andere aber den innerlichen Raum oder Leib / von der Wand umgeben / da muß entweder die Wand zum Leib oder Raum werden / wann man der zahl wurzel suchet vnnnd solche in die zahl multiplicirt, oder der Raum muß zur Wand werden / wann man der zahl Cubische Wurzel sucht vnnnd in sich selber multiplicirt: Alsdann mag es erst in die Regel detri gesezt werden. Exempel.

Ein Goldschmid hette eins mahls ein silberne Kugel verguldet / am gewicht 6 Mark / 20 darzu er verbraucht 64 gran Golds / auff ein andermal gebestu ihm ein Kugel von 12 Markten / gleichfalls innen voll / zuvergulden / der kan dir nicht zweymal 64 gran Gold abfordern / gleich wie die andere Kugel 2 mal 6 Mark helt / dann das gewicht gehet nach der innerlichen fülle / das Gold aber wirt nur auffen vmb die Wand oder runde Feld herum gedehnet / sondern such die Wurzel von 64 die ist 8 / multiplicir in 64 / kompt 512. jeho sprich durch detri, 6 gibt 512 / was 12. kompt zwar 1024 gran / gelten aber nicht also / wie sie seind / nämlich ein zahl einer vollen Figur; sondern müssen wider zur Feldung werden. Such nun die Cubicwurzel von 1024 die ist 10 vnd zwey 25 theil / mit deren dividir 1024 / oder multiplicir sie in sich selber / so kompt baider orten 101 vnnnd drey fünfftheil / so vil gran Goldes gehet auff die 30 Kugel von 12 Markten / wann baide gleich stark verguldet werden / vnnnd soviel ist deß Feldes vmb die Kugel herum die der vorigen schwere zwey hat von einerley zeug. Das thuts / das baide Figuren / Kugel vnnnd Kugel einander ehnlich seind.¹ Sonsten wann die 6 Mark ein außgedehnter Becher wehren / die 12 aber bleiben 14 ein kugel / wurde wol mehr Goldes auff die 6 Mark gehen / denn auff die 12.

Auß dem 2. Th.

14. Von der Feldung in einem Cirkel.

Zuvor hat der diameter oder durchzug vns das Maaß geben zu der krümme oder lenge deß umbkrais: Jeho gibt vns abermal das gevierte Feld von vier diametris winkelrecht eingeschlossen / diß Feld / spreche ich gibt vns das maaß zu der Feldung seines Cirkels / dann Feld muß durch Feld gemessen werden. Hette das gevierte 40 Feld den Namen eins / so wirdt deß Cirkels feld ein Bruchzahl / vnnnd were aillff

6) multiplicier

16) Raum wenden

28) wenden

29) vnd ein 125 theil

30) baiden

vierzeihen theil vom gevierten Feld bey nahe. So aber das gevierte feld in etliche gewisse gleichgültige Thail getheilet / vnnnd mit einer zahl außgesprochen wurde / als so es hette an der schätzung 14. So kämen dem runden Feld drinnen bey nahe 11. vnd so fortan.

Exempel / du hettest einen gevierten Garten / das ist / der da Winkelrecht vnd an allen seitten gleich. Ein Gartner aber machte dir einen runden Irrgarten drein / der mit seiner krümme an alle vier zeune des Gartens anstreichet: ist die frag / wievil Feldes er dir an den vier abgeschnittenen spizen vbergelassen. Antwort / wann der ganze Garten in vierzeihen stück Feldes getheilt wurde / deren eins soviel hielte als
10 das andere / so wurde der einfang des Irrgartens soviel halten als der gemachten stück aiffse / vnd die vberbleibende vier spizen wurden samptlich sovil halten vn- gefährlich / als die vberige drey stücke.

Inn diser theilung / vnnnd was deren gleichen / gilt es gleich / die gemachte stücke Felder haben eine gestalt wie sie wollen / wann nur alle einander an der fläche oder platz gleich / das ist gleichgültig seind.

Dieweil aber dise zahl 14 / gegen 11 / nicht gar auff alle scherffe gefolget / auch keine andere nicht: so haben die Künstler ein andere mehr künstliche vnd gar subtile Thailung des gevierten Feldes vom diameter eingeführt / nämlich in solche stücke / welche nicht allein vndereinander alle gleich oder gleichgültig / sondern auch alle mit-
20 einander dem ganzen gevierten Feld gleich sehen oder ehlich seind / das geschicht / wann man alle seitten des gevierten Feldes mit einerley Thailung theilt / vnnnd nach den- selben thailungen das gevierte Feld Creuzweis in stücke zerschneidet / da werden die stücke auch geviert. Also wann der diameter in zwey stück gehet / an allen vier seitten / so werden auß dem Feld zwey mal zwey das ist vier stück / vnd so der stücke am diameter 3. wurden / so gewunne das Feld 9 stück. Dieweil aber die Künstler den diameter in die lange zehener zahlen theilen / die da rund behend vnd gut zu rechnen seind / nämlich gemeinglich in 200000 / so gewinnet das gevierte Feld nach diser subtilen thailung 40000000000 auch gevierter stück / vnd so fortan / allewege zweymal
30 sovil Nullen am Feld als an dem diameter. Im Täflein No. 12 gegen 1. vber findestu wievil solcher Thail in des Cirkels feld kommen / nimb nur sol che zahl nicht lenger oder mit mehrern ziffern / als dein diameters vierung gewinnet / nämlich hie nur aiff ziffer. Im besagten Täflein ist auch zusehen / wie die zahl zum vmb- traiff gerad zweymahl soviel sey als die zahl zum Feld / allein kürzer genommen. Hast also den Zaun vnd das Feld fein zusamen verknüpft / kanst eins ohne das andere nicht vergessen.¹

17

15. Wie groß die Feldung im Ablengen Cirkel.

Ex Episag. 3.

Da mache auß zween seiner lenge vnd zween seiner braite ein ablenge vierung / die theil in 14 / vnd nimb für den Ablengen Cirkel deren stück Aiffse / wie beim Cirkel.

Es vergleicht sich aber der Ablenge Cirkel gegen einem gerechten Cirkel gleicher
40 höch / wie sein braitte oder kürzere diameter sich helt zu dem lengeren / oder wie die ablänge vierung gegen der gerechten vierung gleicher höch. Gilt derhalben hie
† die Regel detri wie No. 12 / dann Geviert vnd Ableng seind einander nicht ehlich.

1) aber des Cirkels feld

16. Zurechnen allerhand Feldungen von geraden strichen eingeschlossen.

Wann das Feld geviert vnd rechtwinkelig / so multiplicir die leng in die braitte. Als zum Exempel / wann die ablenge vierung (bey No. 15. gedacht) hette an der leng 9 / an der braitte 7 schuch: 7 mal 9 ist 63 / soviel gevierter Schuch wären in der ablängen vierung.

Dise höch versteht sich nur gleichnuß weiß inn dem Gemäld / welches doch warhafftig kein höch nicht hatt.

Geviert / aber nicht rechtwinkelig / doch mit parallelis oder gleichlauffenden zäunen oder schranken eingefangen / das man theils Rauffen = Rhombos nennet / solche zurechnen ist nicht gnug / das du die lengte der schranken habest / sondern du mußt wissen wie weit zwo bekante gegen vberstehende schranken von einander stehen / das ist / wie hoch die Figur seye / dann so multiplicir die bekante schrancke in die höch / so findestu das Feld wie zuvor. 10

Dreyeckete rechtwinkelige felder. Da multiplicir die eine schranken des winkels in die andere halbt. Also thue jm auch wann du ein vierecket feld hast / welches ungleiche seiten oder schranken / aber zwen rechte winkel hat; da rechne zwen solcher rechtwinkeligen Triangeln / vnnnd schlag beide feldungen zusammen.

Dreyeckete Felder / von scharffen oder stumpffen winkeln / oder so sie sich naigen / da mußt bekant haben den einen strich oder seyten / vnnnd die höch des spizes vber solche seiten erhaben / nach dem saiger / Multiplicir deren eins halb / inn das ander gang.

Also thue auch wann du allerhand spießeckete Felder / oder von vielen ecken hast / theil solche inn ihre Triangel mit strichen von einem eck zum andern / als / ein vierung gehet durch einen riß inn zwen Triangel / ein fünffeck inn drey / durch zwen risse / vnd so fortan. 20

Exempel / bey der 1. figur sey ein dreyecket Feld BDF, das zurechnen / so zeuch auß dem einen spiz (gilt gleich / sey aber jeso F,) den saiger inn die gegenuberstehende seiten BD winkelrecht herunter / der wirdt sein FG, meß beide FG vnnnd BD mit einem Maas / gesetzt FG halte dessen Masses 2 / vnd DB 6 / halb 6 ist 3 / vnd 3 mal 2 ist 6 / oder halb 2 ist 1 / vnnnd 1 mal 6 ist 6 / hette also das Feld DBF 6 uniteten, deren jede deines gebrauchten Maßstabs lang vnd brait / das ist Geviert / verstanden wirt. 30

Auß dieser lehr kompt die gange Kunst des Feldmessens auff ebenen flachen feldern vnnnd zwischen geraden schranken / die vberige fundamenta finden sich von da an biß No. 23.¹

Einmal wirdt dir diß maas / darmit du solche strich messest / an die hand gegeben / nach gestalt der sachen / ein andermal wirt es dir frey stehen. Gesezt die lini DB hielte dein maas / vnd were also 1. GF aber were davon ein drittheil / multiplicir 1 halb in 1 drittheil / kombt 1 sechstheil / were also das Feld DBF ein sechstheil von deren vierung die so lang vnd brait ist / als dein maas DB. 16

Sonderlich gehet es geschwind zu / wann die höch ein runde zehnerzal ist / als 10. 100. / etc. Dann da sezet man nur ihre Nullen zu der zahl der ligenden seiten / vnd nimpt darnach das halbe thail von der erlengerten zahl / also kan man behend rechnen alle geordnete Figuren vmb den Cirkel herum. 40

26) die wirdt

36) EF

Ein Exempel vom zwölffeck / da ist ein jede seiten ein doppelter Tangens oder Anstreichende lini an das 24te theil des Cirkels / das ist an 15 gradus / nämlich auß dem Canone Tangentium 26795 / wann der halb diameter hat 100000 / nim diß 24 mahl / so hastu 643078 darzu setze die fünff nullen des halben diameters / vnd halbirs hernach / so kompt dir 32153903091 / ich hab hie für die 5 Nullen den Bruch außgeführt / den kanstu wol aussen lassen vnd also schreiben 32153903000.

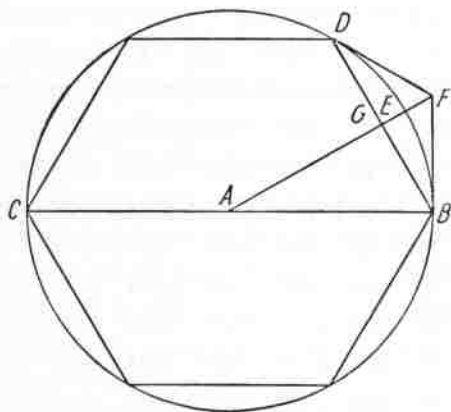
Mit denen Triangeln vnnd Figuren welche in den Cirkel hinein geordnet werden / vnnd mit allen spizen am umbkreiß anstehen / bedarff es nicht viel mehrers; zum Exempel sey der zwölffeck im Cirkel drinnen. Nimb den secantem oder Durchschneider
 10 auff 15 gradus auß dem Canone, mit demselbigen dividir das Feld des euffern zwölffecks / was kompt / nämlich 310582848 etc. das dividir noch einmal mit demselben secante, setze aber allemal zuvor des diameters Nullen hinzu / damit dir widerumb sovil ziffern kommen als zuvor: wirt dir entlich kommen 300000 / etc. sovil ist des Feldes im innern zwölffeck.

17. Zu rechnen die Feldungen so halb mit geraden strecken / halb mit runden gezirkten umbgeben.

Ex Coroll. 1.

Zu wissen wieviel Feldes in einem stuck Cirkels stehe / das mit geraden zween linien auß dem Centro geschnitten / als BEA, welche Figur Griechisch Τομεύς, lateinisch sector, genennet wirdt / Teutsch der Schuster Werckmesser / wir köndens
 20 aber füglich einen Cirkelzaan tauffen / da mustu wissen wie groß der Bogen sey / der vom Cirkel abgeschnitten ist. Gesezt nun / es finden sich an dem abgeschnittenen Bogen EB, 30 grad / deren 360 im ganzen Cirkel seind. So sprich nun / 360 grad halten 11 vierzehende thail von der vierung von CB, was werden 30 grad halten / folgt nicht gar ein vierzehender thail / sondern 11 zwölffthail von einem.

Wann nun das quadrat des diameters
 30 getheilt wirdt inn ein zahl die vorn an 4 hat / vnnd hinten auß etliche Nullen inn gerader anzahl / so dienet dir das hievor
 17 gesezte Täflein / das hat zur rechten sechs Fläche von Bögen. Vnd stehet neben denselben gegen der linken ein lange zahl deren theilen / so inn jedem gesezten Bogen seind / doch mit diesem vnderscheid: wann der halbe diameter hatte 100000 / so wirff von der langen zahl die 6 letzte ziffer hinweg für die Bögen im ersten fach / 7 für die im andern / vnnd so fortan / entlich 11 für die im sechsten fach; vnnd sovil der halbe diameter mehr oder weniger Nullen hette als jeß gesezt / sovil mehr oder
 40 weniger ziffer müßtestu iversal nemen.



Die Erst Figur.

Eigentlicher nutzen
des obrigen Täf-
lins.

3) Tangentium

9) secanten

23) dern statt deren

Ex Coroll. 2.
Schnitt vnnnd Schnitt
ist hie zweierlei.
Der erste vnnnd ge-
wisse aber mühe-
selig weg.

Zu rechnen das Feld am Cirkelschnitt / diser heißt lateinisch Segmentum nämlich das Feld zwischen einem bogen vnnnd geraden schnitt / als da ist die Drrtafel von einem Fassboden / allhie DEBG. Da besthe abermal wie groß der Bogen sey gegen dem umbkreis / auß demselben rechne erstlich seinen Sectorem oder Zaun BEDA, wie du jeso bist gelehret worden / hernach rechne das Feld des Triangels ADB, durch No. 16 / das zeuch ab vom ganzen Zaun ADEB, so bleibt dir das Feld im Schnitt GDEB.

Zum exempel / der bogen BD sey 25 grad / 21 minuten, 42 secunden, vnnnd der halbe diameter sey 100000 / so wirdt das feld des ganzen Cirkels sein von eilff ziffern im Täfeln zusehen / da ein jede vnitet ein kleine vierung bedeutet / lang vnnnd 10
breit einen hunderttausentisten theil des halben diameters AB. Brauch das obige Täfeln / da wirstu finden in Summa 2213220609. So groß ist der zaun ADEB doch die fünff letzte ziffer seind ungewiß / denn das eine secundum ist nicht genau.

Vnnnd wann dann AB, oder AE ist 100000 so findet sich der sinus BG auß dem †
canone auff disen halbirten Bogen 21951. vnnnd AG der sinus complementi 97561. Dise beide zahlen den sinum des halben Bogens vnnnd den sinum seines comple-
menti multiplicir in einander / so kommen 2141682393 / so groß ist das feld BDA, zeuch es ab vom feld BEDA, so bleibt 71538200 oder 71540000 / so groß ist der
schnitt DGBE, vnder dem ganzen Bogen stehende.

Der ander nähere
aber nicht so ge-
naweg.

Dise rechnung ist fast verdrießlich vnd lang / wil derhalben hie ein Täfeln bey- 20
fügen auß welchem du behend rechnen kanst / wie groß ein jeder Schnitt ungefahr-
lich seye / dann man braucht disen schnitz zum offternmal.

Täfeln zu den Cirkelschnitten

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0		587	1635	2955	4473	6142	7927	9799	11735	13711	15708
1	19	676	1756	3100	4634	6316	8110	9990	11931	13911	
2	53	769	1880	3244	4796	6491	8295	10182	12128	14110	
3	97	866	2007	3392	4959	6667	8480	10374	12324	14309	
4	150	967	2135	3541	5124	6844	8667	10567	12522	14509	
5	209	1070	2266	3692	5291	7022	8854	10761	12719	14708	
6	274	1177	2400	3845	5459	7201	9041	10954	12917	14908	
7	345	1287	2535	4000	5628	7381	9230	11149	13115	15108	
8	421	1400	2673	4156	5798	7562	9419	11344	13314	15308	
9	502	1516	2813	4314	5969	7744	9609	11539	13512	15508	

Wer lust hette diß Täfeln zu erweitern / der thue jm also. Theil den sinum
versum in 1000 (oder so dich die Haut noch beisset / in 10000) gleicher theil / setze
neben einen jeden seinen sinum Complementi, mit welchen auß dem Canone sinuum
Pitisci die sinus recti gerad gegenüberstehend / außgeschriben / vnd der kleinste
(oder vilmehr 2 drittheil von demselben) zum nechsten hernach addirt werden muß /

3) DEGB

14) EG statt BG

18) 716 20000 statt 715 38200

37) Canone sinum

die summa zum dritten / vnd also fortan. Wann sie alle 1000 oder 10000 zusammen kommen / so wirt endlich das viertel von der Eirkelsfläch (fol. 10) drauß / vnd gilt also ein jede vorgehende summa das feld jres Schnitzes halb.¹

18 Diß Täfelin brauch also / wan DGBE ein gerechter Eirkelschnitt ist / so messe sein breite oder höhe EG, vnnnd die lenge AB (das ist / messe EG vnnnd GD mit einerley maasß vnnnd auß disem rechne den halben diameter AB, wie du bey No. 10 gelehrt bist) hernach multiplicir EG mit 100 vnnnd dividir was kompt / mit AB.

Gesezt die breite EG sey 6 vnnnd AB 11. 6 mal hundert ist 600 / diß mit 11 dividirt macht 54 vnnnd 6 eilfftheil / nun such die 50 inn der obern zeil vnnnd die 4 mit dem bruch zur linken am rand / fahr von oben herunder vnnnd von der linken nach der rechten zusammen / so findest du im Creyßwege 6941. Soviel vierungen finden sich im schnitz DGBE jede den hundertisten theil des halben diameters BA lang vnnnd breit.

So aber dein halber diameter ein andere theilung hat / (als hie ist sein theilung 11.) so multiplicirs in sich selber (wie du bey No. 13 gelehret) / kompt 121 / das multiplicir in das gefundene feld / wirff die vier letzte ziffer hinweg / so kompt dir 84. Sovil vierungen / da jede den eilfften theil des halben diameters lang vnnnd breit ist / finden sich im schnitz DGBE.

Also im vorigen Exempel da der halbe diameter gewesen ist 100000 vnnnd AG 20 97561 / da ist die breite des schnitzes EG die vberige 2439. wann dann der halbe diameter jecho im Täfelin nur 100 theil hat / so ist dise breite nur 2 vnnnd nicht gar ein halbs / such 0 oben / vnnnd 2 mit dem bruch zur seitten / da findest du 72. wann dus in das quadrat von 100000 multiplicirest vnd 4 figuren weg wirffest das ist / wann du 6 nullen zusehest / so hast du disen weg 72000000. zuvor 71538200.

Vnd weil diß Täfelin nur ainhundert Schnitze vermag vnd zwar auch dise nicht mit aller scherffe / wie es dann in kurzen zahlen nicht sein kan / also wil ich dir für die gar kleine schnitze noch einen bequemen weeg zeigen / dessen fundament ist dieses: Der dritte Weg. wann mit einer jeden Sennen vnnnd mit ihrem holz / Subtensa et Sinu verso, ein ablenge vierung beschloffen wirdt / so helt das feld des Eirkelschnittes so darinnen 30 stehet / mehr dann zwei dritte theil deroselben ablenge vierung / vnd weniger dann ailff vierzeihen theil / dann wann der schnitz erslich anfahet / so helt er zwey dritte theil / das ist 6667 von 10000 wie unten bey No. 18. ein jeder Regelschnitt / wann er aber gar zu einem halben Eirkel wirdt / so helt er ailff 14 theil / das ist 7854 von 10000. wechß also vom anfang biß zu end vber die 2 drittheil hinauff vmb 1187 von 10000.

Wann dann nun jecho der Eirkelschnitt einen gar kleinen bogen hat / als 2 grad 15 Minut / so nimb sein halbe senne / oder den sinum auff den halben bogen 1 grad 7 Minut 30 secund. der ist 196375 wann der halbe diameter sibem nullen hat. Sein des halben Complementum ist 88 grad 52 Minut 30 secunden vnnnd gibt in Canone 40 den sinum 9998072 / was disem abgehet zu ergengung des halben diameters, ist der holz oder sinus versus, nemlich 1928. Multiplicir mit 4 / so wirdts 7712 / multiplicirs in den dritten thail des sinus, nemlich in 65458 / so kompt dir 504720000 / das ist nun gar vmb ein vnkennliches weniger / dann das feld vom schnitz.

6) halben 8) EB statt EG 20) halbe fehlt 24) 71538000

Für die kleine
schnitze.

Ein anders / der halbe diameter sey 100000 / die höch des schnitzes 2439 (diß 4 mahl ist 9756) also das sein oberiges 97561 / vnd der rest zu des schnitzes halben bogen sey 77 Grad. 19 minut. 51 sec. vnd des schnitzes halber bogen 12 grad. 40 min. 9 sec. dessen sinus 21951. dessen dritter theil 7317 in 9756 multiplicirt macht 71385 etc. solte 715382 etc. sein. Ist doch nähener getroffen dann durch das Täfelin / dann das gibt 72000; dieweil die höch ist nur dritthalb von hundert. Magst also disen process von dem Bogen 25 gr. an bey den kleinern Eircelschnitzen brauchen.¹

Auß dem 1. Zusatz.
Schnitt vund nit
Schnitz.

18. Von der Feldung im Regelschnitt.

19

Was ein rechtwinkliger Regelschnitt sey / Parabole genennet / findestu besser vnden. Ist ein fläche oben mit einem vngleich gebognen zug (in der 10. figur bey No. 29. mit PCQ) vmbzogen / vnten aber stehet sie auff einem geraden strich PQ, anzusehen wie ein Schorsschauffel. So nun diesem geraden strich PQ, ein anderer LC oben gleich lauffet oder parallel ist / vnd gerad an dise fläch am obersten güpfel C anstreichet / vnd man zeucht solchen güpfel C, vund baide ende des grundes PQ zusamen / also das es einen Triangel gibt / so helt die ganze Parabole vmb ein drittheil mehr / als der Triangel / oder wie droben beim Eircelschnitz meldung gethan worden / helt es zwey drittheil von der ablenge vierung.

Derhalben so messe sein höch / oder wieweit die gleichlauffende linien PQ vnd CL von einander stehen / messe auch seinen geraden strich PQ, darauff er stehet / zeuch ein drittheil davon / das vbrige multiplicir in die höch / so hastu das Feld.

20 †

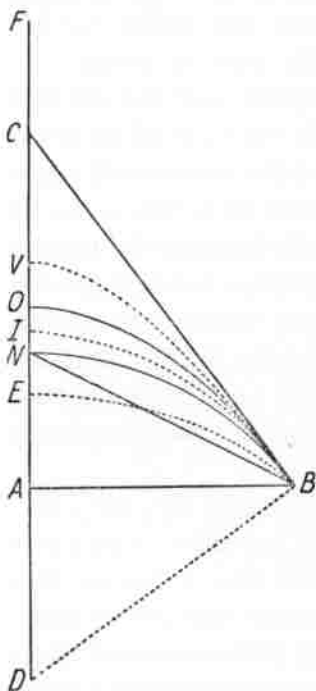
Am Eircel vund an der Parabole ist diß ein gemeiner vortheil / man schneid einen schnitz darvon auff welcher seyten man wölle / wann die Grundstriche durch welche der schnitz gegangen / einander gleich / so seind auch die vom Eircel abgeschnittene Felder einander gleich / so auch die Felder von der Parabole abgeschnitten / seind vndereinander gleich.

Noch ist ein solcher Regelschnitt Hyperbole, von einem stumpffen Regel / ist No. 29 / bey der 10. figur mit V SX oder MCN bezeichnet / dessen rechte Messerkunst noch nicht erfunden ist / er hat aber mehr dann drey vierte thail eines solchen Triangels in jhne hinein gerissen / hingegen helt er mehr dann zwey drittheil des eussern Triangels bey der 17. Figur / mit ABC halb auffgerissen / vnd der Bogen mit BV bezeichnet.

19. Von runden Feldungen an einem Regel.

Regel heißt inn der Kunst nicht ein solcher Regel / darnach die Duben mit der Kugel zilen / vnder deren der mittlere ein Cron hat vnd König ist / sondern ein solche Figur die einen gerechten Eircelrunden boden hat / vnd von demselben vmb vnd vmb mit gerader strecke / auff einen spitß hinauß laufft. Ist also sein eusserlich Feld oder Dach nach der seiten

Die 17. Figur.



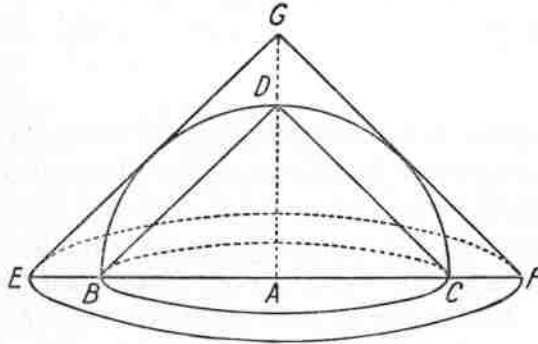
Auß dem 5. Th.

rund / nach der höhe aber gerad / vnnnd also gemischet: diß feld laffet sich leichtlich auff die fläche außbraitten / gibt einen ludechten Cirkel / der einen Sactorem als gleich einen Jaan verlohren. Messe die Lähn vom ombkrais am boden / biß oben an den spigen / messe auch deß bodens braitte oder den diameter mit einerley maaß. So dir nun das feld aines Cirkels durch die Lähn als einen halben diametrum fund worden / so dividir es in die lähn / vnd multiplicir, was kompt / in den halben diameter deß Cirkels am boden / so hastu das runde Dach vom Regel.

Lähn latus acclive cuius circumductu creatur superficies Coni.

Exempel / ich sol einen runden zugespigten Thurn mit Blech decken lassen / der am diameter 7 schuch hat / die lähn aber 10 schuch / weil dann der diameter hat 7 schuch / so hat des Dachs boden 38 s. gevierter schuch / multiplicirs in 10 kompt 385 / dividirs mit halb 7 / kompt 110. sovil Bleche jedes eins schuch breit vnd lang / wirstu brauchen.¹

Wann nun ein halbierte Kugel were / vnnnd auff ihrem Cirkelrunden boden stünde ein Regel wie hie zusehen / der biß an den würbel D reichete. Es striche aber außserhalb ein anderer Regel an die Kugel / der dem innern gleich sehe / nemlich baide rechtwinkelig weren: So ist deß feldes am innern Regel halb so viel / als deß am euffern.

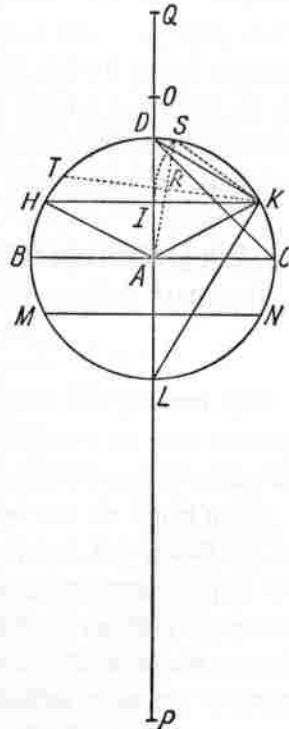


Die 5. Figur.

Zu vergleichen aber das Dach gegen dem Boden wann der Regel winkelrecht / so duplir den Boden / such die Wurzel davon / also kombt dir das feld am Dach deß Regels / ohne abmessung der lähn.

20. Vom ganz runden feld vmb die Kugel.

Aussen vmb die Kugel herum ist viermal so viel rund des feldes / als innen am Cirkelrunden schnitt / wann man die Kugel mit einer fläche BDCL durchs Centrum A enzwey schneidet.



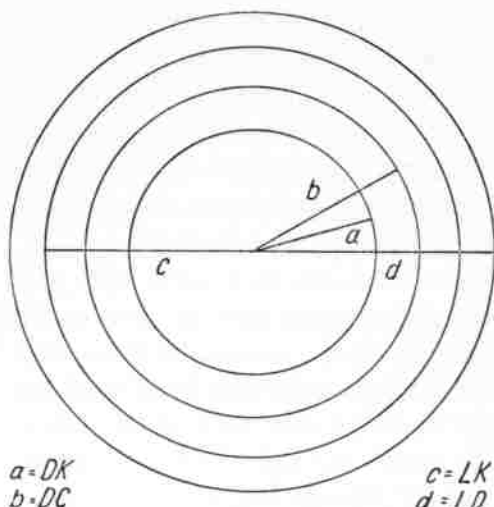
Die 6. Figur.

Exempel. Die Erdkugel ist 1720 teutscher Meilen dick / helt derohalben am schnitt durchs mittel 23 mal hundert tausent gevierter Meilen / vnd ist aussen herum 92 mal hundert tausent vierecketer meilen breit.

Ein anders. Der Mond ist 400 teutscher meilen dick / helt also innen am Cirkelrunden schnitt bey einhundert tausent / vnd ferners fünff vnd zweingig tausent teutscher gevierter meilen / diß viermal genommen / macht fünff mal hundert tausent teutscher gevierter meilen aussen herum / da gehöreten nun auch etliche vil par Dachsen zu /

5) das feld am Boden durch den diameter fund 6) so multiplicir . . . vnd dividir 11) 27 etc.
statt 110 26) tach statt Dach

Die 7. Figur.



soviel Feldes zu haben / wann gleich
das halbe thail Wasser wäre.

21. Vom runden Feld oder Hütlein des Kugelschnittes.

Ein Kugel nit eben allein durchs
Centrum, sondern auff der seitten ge-
köpfft: wie hieoben zusehen bey HKD,
da setz den einen Fuß des Circkels in
D, ist der wirbel oder höchste punct
am Hütlein HDK, den andern Fuß
streck herunter an schnitt / als an K
oder H, darmit reiß auff der fläche einen
Circkel D, auß dem Centro K, wie hie

zusehen: so wirt das runde Feld am hütlein disem flächen gleich sein. Also thue ihm
auch mit dem stumpff oder größern übrigen thail der Kugel HLK, begreiff mit dem
Circkel die leng LK oder LH, vnnnd reiß auff der fläche einen Circkel K auß dem
punct L, der hat gleiche feldung mit dem runden Feld am stumpff. Nicht anders ist
es auch mit DC, vnnnd mit dem Circkel C, auß dem Centro D auff die fläche gerissen.

Hettestu aber ein gürtel als BHKC inn die fläche zubringen / so thue fürs erst mit
dem hütlin HDK wie du jecho gelehret bist / hernach thue dergleichen mit dem
größern schnitz BDC, magst baide auß einem oder auß zweyen puncten L, D auff die
fläche auffreißen / nur das der kleiner frais in dem grossen stehe. Was nun für Felds
zwischen beyden Circkeln stehet / dessen ist soviel als des runden an der gürtel BHKC,
sie sey jecho rings herum gleich brait / oder an einer seite schmeler als BHKC: da
dann ein jeder schnitt seinen besondern wirbel haben wirdt / als TSK den puncten S
vnd BDC den puncten D.

Auß dem 8. Th. 22. Ein sonderliche behendigkeit / bald zu wissen wie groß das Feld sey in einem solchen Hütlein oder Gürtel / gegen der ganzen Kugel zurechnen.

Sihe nur auff den diameter oder höhe der ganzen Kugel / vnd auff die höhe des
Hütlines oder der Gürtel / welche rings herum ein gleiche braite hat / dann so viel
die ganze höhe größer ist / so vil ist auch die ganze Feldung vmb die Kugel größer.

Wiltu wissen wie viel Landes in der verbrennten Gürtel oder Zona Torrida lige /
da die Sonne des Jahrs ein mal oder zwey gerad vber die Köpffe gehet / vnd in
die tieff außgegrabne Schöpffbrunnen auf den Boden hierinn scheint / vnd die
thürne zur mittags stund keinen schatten haben: so laß dir nur einen Astronomum
sagen / wie brait solche Zona Torrida sey / nach der gerad vnderzognen lini: das
wäre an der nider gestürzten Gürtel die höch. Nämlich wann der diameter helt
200000 / so helt dise höhe 79815 / gleich ein so groß stück von der ganzen runden

Feldung des Erdbodens gehört vnder das verbrante theil / nämlich weniger dann der halbe / vnd mehr dann der dritte thail. Hingegen das kalte Land / da im Winter die Sonne vnderweilen gar nit auffgehet / ist vil kleiner. Dann das Hütlin von der Kugel ist nicht höher / als 8311 / wäre das fünff vnd zweingigste thail von der ganzen rundung / doch seind ihrer zwey. Wann nun haisse vnd kalte Länder von der ganzen rundung abgezogen werden / so bleiben zwey temperirte Gürtel: die machen ein wenig mehr / dann die halbe rundung des ganzen Erdbodens.

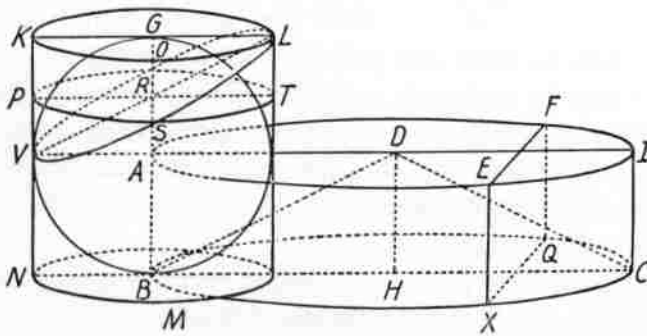
Wann nun jeho die ganze rundung oder Feldung vmb die Kugel herum in einem gewissen Maaß bekant ist / so mag leichtlich durch die Regel detri erkundiget werden / wie groß in solcher Maaß / das runde Feld vmb einen schnitz oder hütlin sey.

Zum Exempel / der Cirkel BDCL flach verstanden hat am Feld 3 14159 26536 solcher gevierter thail / wie sein diameter DL oder BC hat 200000 langer thail / als bey No. 14 gemeldet worden. Nu bistu bey No. 20 gelehret / das des runden Feldes auffen vmb die Kugel herum gerad viermal so viel sey: nämlich 12 56637 06144. So setze nun / die höhe DI vom schnitz HDK sey 78049.¹ Multiplicir sie inn das runde Feld von der ganzen Kugel / was kombt / dividir durch der ganzen Kugel höhe 200000 / durch hülff des Täfelins No. 12. dann was dir durch das Täfelin kombt / das duplir / vnd wirff die fünff letzte ziffer hinweg / so findestu / das die rundung am schnitz oder hütlin inn sich habe 490396 33004 solcher thailungen / jede ein Vnitet lang vnd breit verstanden.

23. Vom Feld an einer Wellen / Walger oder Cylindro.

Auß dem 9. vnd 10. Th.

Ein Wellen oder Walger / so hoch als breit am Boden / vnd ein Kugel gleicher höhe oder dicke mit ihr / haben gleiche rundungen: oder deutlicher / des halbrunden Feldes vmb den Walger herum (die zwey flache Böden nicht darzu gerechnet) ist gleich sovil als des ganz runden Feldes vmb die Kugel.



Die 8. Figur.

Vnd wann durch beide in einander gesetzt / ein schnitz geschicht / als POTS, welcher rechtwinkelig auff den innern graat RB (als in R.) zutrifft / so werden abermals beider orten gleich groesse Felder abgeschnitten / nämlich an dem walger KP, LT, an der Kugel PGT als ein hütlin.

7) halben 25) vnd statt vmb

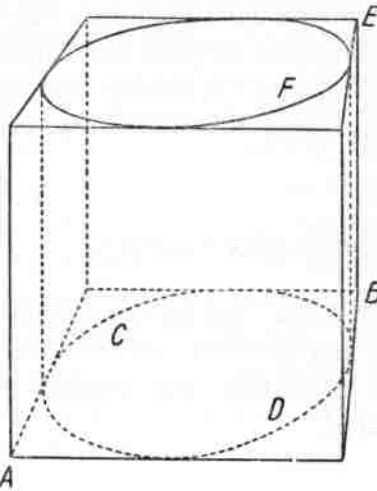
Aus dem 3. Th.

24. Vom Raum / fülle oder Corpus der geraden Seulen vonn Wellen (Walger / Walzen oder Täller).

Wann es rund ist /
vnd nider / so wöl-
len wirs ein Täller
nennen / oder ein
Rad. Ist es aber
hoch oder lang / so
heißt es ein runde
Seule / wann es
aufrecht stehet: ligt
es aber / so haist
mans einen Wal-
ger / eine Walzen /
eine Wellen.

Das innerliche Corpus oder Fülle / oder der Raum / welchen ein jeder zeug oder erhehte Figur einnimpt / ist noch weniger bekant vnnnd sichtbar / dann zuvor das flache Feld. Derohalben muß das Maaß / mit welchem man einen solchen Raum misset / abermal mit dem mehr bekanten langen Maaß verbunden sein. Vnd misset man einen jeden Raum / er sey mit runden oder flachen feldern eingeschlossen / durch ein raumliches Maaß / oder erhehte Figur / in sechs flache vierungen winkelrecht eingeschlossen / also daß es in der lenge / breite vnd höhe das Maaß halte / das dem Messer zur hand gehet.

Dieses maaß oder figur haisset Cubus: teutsch könden wirs von gleichnuß wegen / einen würffel nennen. Wann dann ein runder Walger in einem Cubo stehet / vnd



Die 3. Figur.

an dessen vier auffgerichtete Felder ab vnd ab anstreichet / auch unten vnnnd oben an der fünfften vnd sechsten vierung mit zweyen flachen Eirkelrunden Feldern oder Böden anstehet / alsdann hiebey zusehen: so ist es gleich als wie mit der blossen flachen vierung / vnnnd ihrem Eirkel.¹ Dann der Cubus AC²³ gibt das Maaß / vnnnd wann du denselben in 20
14 stück theilest / gleiches raums oder ge-
wichts / so werden deren 11 auff den runden
Walger / die vbrige 3 auff die vier auffgerichtete
ecke gehen.

Sprichstu / wie solicheinen Cubum in 14 stück
thailen? Antwort / nicht also / das 14 junger
Cubi oder gerechte würffel drauß werden /

dann diß kan durch die Kunst nicht geschehen / bestehet auff einem gerathwol. Ein vierung kan nit getheilet werden ohn vnderscheid in andere vierungen soviel man der-
ren wil / sondern nur allein in 4 / oder 9 / oder 16 / oder 25 vierungen vnd so fortan /³⁰
in die quadrat zahlen: Also ein Cubus kan gleiches fals inn kleinere Cubos an-
derst nicht / dann in 8 / getheilet werden / oder in 27 / oder in 64 / oder in 125 vnd so
fortan / inn die Cubische zahlen.

Es würden dir auch solche 14 cubi wenig nutzen / dann sie weder mit ihrer lenge /
breite vnd höhe sich in dein fürhabendes langes Maaß / nämlich inn die lenge des
grossen cubi, schicketen / noch auch mit ihren flachen Feldern auff das flache Feld
des grossen cubi: sondern es verstehet sich diße zahl 14 / nur allein auff den zeug
gewicht oder raum / ohn ansehung / wie er von aussen gestaltet.

Was nun gesagt worden vom Cubo vnnnd seinem runden Walger / soll auch ver-
standen werden von einem jeden quaderstück vnd seinem runden Walger oder Wellen⁴⁰
sie sey höher oder niderer / wann nur baide zwen gleich schwebende / das ist parallel
böden haben.

Zum exempel / du hettest ein geviertes stück silber / am gewicht 70 quintlein / auß demselben wurde ein runder Zaller herauß geschrotet oder gepresset welcher an alle vier seiten des gevierten stückes anstriche / der wurde 55 quintlein vnnnd das abgeschneitel von vier ecken / 15 quintlein halten / dann 70 ist 14 / 5 mal / vnd 11 / 5 mal ist 55.

Ein anders / ein groß quaderstück / 14 Centner schwer / soll zur runden seulen oder walger werden / was wurde sie wegen? antwort 11 Centner.

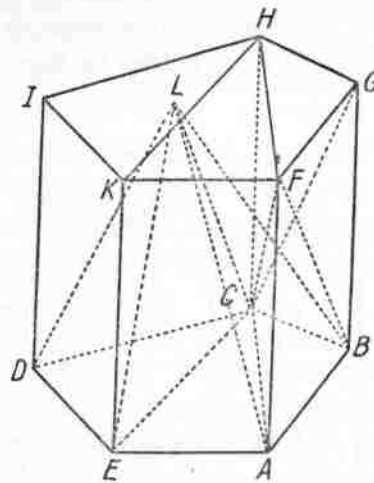
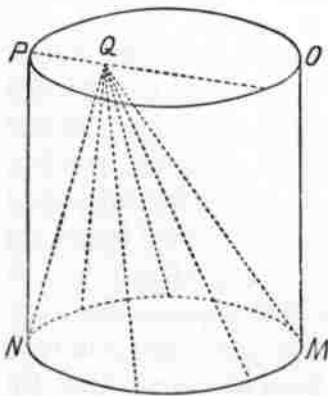
Wie sich nun helt die runde Seulen zu ihrem geraden quaderstück mit gevierten gleichen Böden / also helt sich auch ein jede gedruckte Seulen / die zwen Böden von 10 Ablengen Circeln oder Eyllinien hat / zu ihrem rechtwinkligen quaderstück mit Böden von ablenge vierungen / an dessen seiten sie anstreicht / nämlich auch wie 11 gegen 14.

Wie dem aber / wann nicht das ein auß disen Geselleten von gleicher höch / das andere / sondern ein gewisses Maasß oder cubus alle baide messen soll? So messe mit der lenge deines cubi oder maasß / baides die lenge vnd die braitte an böden / dann auch die höch der Seulen oder quaderstücks. Auß der lenge vnd braitte wann die Böden recht windelig / oder auß ihren triangeln / wie bey No. 14. 15. 16. erlehrne erslich wie vil gevierte Feldungen deines Maasses der Boden halte. Darnach multiplicir den Boden in die höch / so kompt dir die anzahl deiner vollen Maasse / welche in dem Leib oder Fülle des quaderstücks oder Seulen seind.

20 25. Vom Raum der zugespitzten Regeln vnd Seulen / Pyramides genannt.

Auß dem 4. Th.

Ein jede gerade Seulen von gleichschwebenden Böden hat drey mahl so viel raums / als ein zugespitzte Seulen oder Regel / auß ihrem Boden stehend / vnd mit dem spiz



Die 4. Figur

an ihren obern Boden reichend / oder an des obern Bodens höch / wann man denselben fürgehen leset. Besiße hierumb dise Figur / da stehet ein gerade vnnnd ein zugespitzte Seulen auß einem fünffeck / darnebens ein Walger vnd ein Regel auß einem

2) Zaller

4) 14 statt 15

Eirkelrunden boden. Die gerade Seul vnnnd der Walger fasset drey mal soviel als die zugespitzte vnnnd der Regel.

Zu rechnen einen jeden Regel oder zugespitztes. Wann dir bekant ist das Feld am Boden / auß No. 14. 15. 16. vnnnd zumal die höhe inn einerley langem Maaß / so multiplicir den Boden inn das dritte theil der höch / oder das dritte theil deß Bodens in die ganze höch / oder multiplicir beide ganz inn einander / vnd nimb hernach das dritte theil auß dem was kompt / so hastu die zahl der vollen maaße im Leib vnd raum der zugespitzten Seulen.

Auß dem 11. Th.

26. Vergleichung deß Walgers vnnnd seiner Kugel.

Ein Walger so hoch / als breit an den flachen Böden / helt nach dem Raum 10 anderthalb Kugeln / die inn dem Walger anstreichen oder gleiche höch haben / besitze die 8. Figur am 22. blat / vnd hie die 9. Da ist der runde Walger KY, vnd KL, NY seind die braitte der böden / so groß als die höch GB, oder KN.

Auß dem 13. Th.

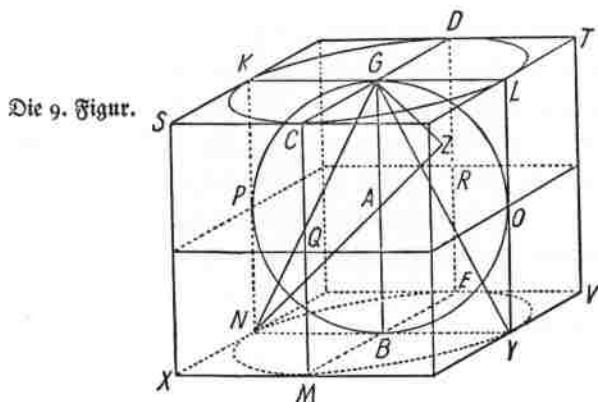
27. Vergleichung der Kugel vnd deß Kegels.

Ein Kegel gleicher höch mit der Kugel / wann er auch einen boden hat so groß / als die Kugel am mitteln schnitt ist / helt das halbe theil von der Kugel / besitze hie die 9. Figur.

Auß dem 12. Th.

28. Vergleichung deß Wirffels mit seiner Kugel.

Wann ein Kugel an deß Wirffels 6 Wänden innen anstreicht / so ist sie ein wenig 20 mehr dann das halbe theil vom Wirffel / besitze hie die 9. Figur. Da ist der Wirffel STVX, seine 6 mittelpuncten an den 6 Wenden seind / oben G, vnden B, neben P, Q, O, R, an welchen die Kugel anstreicht.¹



Deutlicher wann der Wirffel wigt 21 27 pfund / so wigt die Kugel 11 / doch nicht nach der scherffe zuverstehen / welches allhie abermahl vnmöglich zutreffen; dann nach der gewonlichen auftheilung deß diameters / oder eines langen eckß deß Wirffels in 200000 langer theil / so bekommt der Wirffel 800000000000000 30 theil / jeden ein Vnitet lang brait vnnnd hoch / die Kugel aber nimbt deren fast 4188790204786301 hinweg.

Dise zahl zu behalten / so merck auß Villalpando, das sie zusamen gesetzt sey 4 auß vier drittheilen deren zahl welche No. 17. das Feld deß Eirkels bedeutet. Das nun hie flaches vnnnd rundes also genau mit ganzen zahlen miteinander eintreffen / das

1) als das

14) (Randnote) 31.

24) Kugel die 11

geschicht nicht vons Garten sondern vons jauns wegen. Dann ob schon das Feld am Cirkel flach außgebreittet vnd also gerad ist / so wirdt es aber doch mit einem runden kreiß vmbzeunet: vnnnd vergleicht man also auch hie krummes mit krummem / vnd wie sich helt der diameter 7 / gegen dem sechsten theil des vmbkreißes 22 / also auch der Würffel gegen seiner Kugel.

Summa von gedächtnus wegen. Der Regel 1 / die Kugel 2 / der Walger 3 / der Würffel nicht gar 4. Sondern nehener also: wann der Regel wigt 11 / so wigt die
† Kugel 22 / die wellen oder walger 33 / der Würffel 42 / nicht 44.

29. Von Walger: vnnnd Regelschnitten.

Auß dem Supple-
mento.

10 Noch seind andere figuren / nicht so perfect wie die vier jetz abgehandelte / die sich doch auch etlicher massen nach den hievorgesezten arten: die entstehen / wann man den Regel durch eine gerade fläche entzwey spaltet / oder wann man ein Lehr / dannen hero genommen / an Drähstock anschlegt / vnnnd nach solcher Lehr ein stück zeugs am Drähstock abdrähet.

Ich wil aber den Regelschnitt beschreiben / vmb besserer richtigkeit willen / nicht wie
† Archimedes, sondern wie Apollonius ihne beschreibet / dann also gedunckt es mich leichter zufassen. Es seind der recht runden Regel mancherley / etliche stumpff / wie ein Kampffrad oder Thürangel / der mit dem spiz in seiner pfannen vmbgehet / vnnnd die ganze Thür tregt / etliche spizig wie ein Gewirzscarnigel von Papir. Dife alle
20 ohne vnderscheid / die mögen auff fünfferley weise gespalten werden / verstehet durch einen geraden strach oder schnitt / mit einem flachen Beihel / Art oder Messer. Eint: weder du triffst auff den spiz zu / so gewint der Schnitt die Figur eins rechtlinischen Triangels / oder du triffst neben dem spiz auff die rundung / wann dann der strach oder schnitt ganz durchgehet / vnnnd der Regel ganz geköpffet ist / dann so nimb den Schniz an welchem der Spiz gebliben / stürz ihne auff den Schnitt den er gewonnen; stehet er gerad auffrecht / so ist sein Schnitt gewiß Cirkelrund / neiget er sich aber auff ein seyten / so ist sein Schnitt oder Boden ein ablenger Cirkel / oder Hylini /
genannt Ellipsis, ist in der folgenden Figur zusehen bey den Buchstaben CHIO. Vnd ob es sich alsdann begeben / das der streich durch des Regels boden gangen wäre:
30 so wurde diser Schnitt ein stück sein von einem Ablengen Cirkel / vnd so man den Regel erlengerte / daß er vmb vnd vmb die durchschneidende fläche erraichete / so wurde alsdann auch der Ablenge Cirkel am Schnitt ergänhet sein.

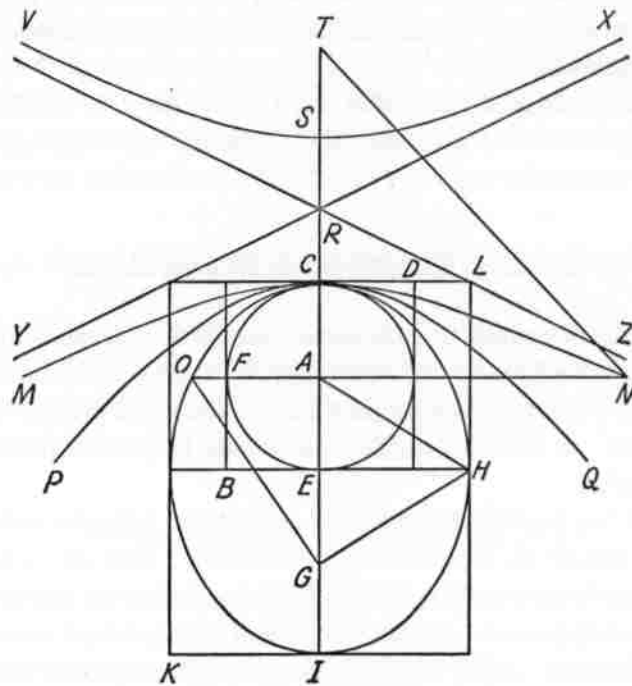
Schnitt Sectio.
Schniz Segmen-
tum.

Hettestu aber den Regel also getroffen / das der runde rucken am abgehawenen
26 Schniz / der den spiz behalten vnd auff den schnitt gestürzet ist / vom spiz an / ¹ ab vnd ab einerley höch behielte / so wurde der Schniz Parabole haissen / dessen furn (des Schnits sprech ich / vnnnd nicht des Schnizes) hastu allhie bey PCQ. So aber der rucken des Schnizes gegen dem spiz am niderigsten wäre / vnnnd gegen dem braiten theil in die höche stige / so ist alsdann der Schnitt ein Hyperbole, dessen gestalt sihestu bey MCN, besser aber bey VSX.

40 Diser Regelschnitte wirt hie gedacht von zweyerley vrsachen wegen. Erstlich erfordert es die notdurfft / das man wisse die weise / zumessen einen jeden herab gehawenen Schniz an vnd für sich selber / nicht weniger als den ganzen Regel / Kugel oder

Wellen. Fürs ander / als kurz hievor gemeldet / so kommen auß disen Regelschnitten andere mehr Figuren / die man auch nach der Hand messen oder betrachten muß /

Die 10. Figur.



wollen derhalben jezo die Schnitze beseits setzen / vnnnd auß dem Sinn raumen / vnnnd vorerst nur von disen Schnitten handeln: allein vorher zuerinnern / auß Sereno, † das ein Wellen oder Cylinder, schlims geschnitten / keinen andern Schnitt gewinn / dann auch einen Ablängen Cirkel oder Cylini / ganz oder abgestuget.

Wurde sie aber gerad nach der zwey geschnitten / so gibt es einen gerechten Cirkel / wann anderst die Wellen recht Cirkelrund. Entlich so sie (die Wellen oder Walger) gerad abwärts gespalten wurde / es wäre durch den mittlern graat / oder auff einer seitten / so gewinnt der Schnitt eine rechtlinische gerechte oder Ablenge vierung / nach 10 dem die Wellen lang oder kurz.

Auß dem Supple-
mento.

30. Ordnung und Eigenschafft der Regelschnitte.

Der Cirkel gehet voran / auff ihn folgen allerhand Ellipses oder Ablenge Cirkel / deren furmen seind vnendlich viel / nicht allein an der gestalt vnnnd maas der braitte gegen der leng / sondern auch in jeder Sorten an der größe. Nach allen Ellipsibus kompt die Parabole, die ist / der gestalt nach / einig / wie der Cirkel / allein der größe nach seind ihrer auch vnendlich vil. Nach der Parabole gehen die Hyperbolae an / seind ihrer gleichsals vnendlich vil / leztlich beschleußt ein gerade lini den ganzen hauffen.

Cirkel / gleiche vnnnd ablenge / kommen in sich selber wider zusamen / Parabole 20 und Hyperbolae strecken ihre Bögen immer fürbaß hinaus / vnd begehren nicht zu-

1. Randnote) 11. Figur

4) von ersten

samen / wann man sie auch über den eussersten Himmel hinaus erstreckete. Je weiter man sie erstreckt / je geräder sie werden / doch nimmermehr gar allerdings gerade: mit diesem onderscheid / daß in der Parabole die gerade Hylini CI, so durch den wüpfel C gehet / beide Bögen CP, CQ zu sich locket / die endlich der CI fast gleich / doch nimmermehr völlig gleich lauffen / dann ob sie sich wol je mehr vnnnd mehr nach der gerade CI richten / kommen sie doch je mehr vnnnd mehr vntentlich weit von ihr hindan / hingegen inn der Hyperbola lassen sich die Bögen SV, SX, oder CM, CN
 27 von den ¹ linien RY, RZ laiten / die da im R zusammen fallen / vnnnd bey einer jeden Hyperbola einen gewissen winkel schließen / der ist allhie stumpff / kan auch recht
 10 oder spitzig sein / vnnnd alle Hyperbolae die auß jedem solchen winkel einerley sum haben / die haben auch nur ein par solcher linien / Asymptoti genannt / da eine weit von den asymptoti entan stehet / die andere nahe bey ihnen ist / jene wirdt grösser geschätzt / dise kleiner. Je weiter nun der Bogen CM in seiner art erstreckt wirdt / je näher kompt er zu der lini RY, vnd kompt doch in ewigkeit nimmermehr gar an sie / also das sie zusammen fallen.

31. Die drey Kegelschnitte mit behendigkeit auff ein eben Feld auff zureissen.

Auß dem Supplemento vnnnd Parali-
 pomenis ad Vitel-
 lionem.

† Wann du hefftest einen faden in dem puncten A, vnd nimmest die lenge AC, steckst auch einen spiz bey C durch den faden / vnnnd fehrest mit dem spiz vnd auß-
 20 gestreckten faden umb das A herum / so wirstu mit dem spiz einen gerechten Cirkel aufreissen / das sag ich von verglichung wegen / sonst ist es einem jeden zuvor bekant.

Nimb jeso zwen steffe / stecke sie auff das Reißbrett in zwen puncten / A vnd G, deins gefallens weit von einander / nimb einen Faden / schlag ine umb den stefft G, strecke von da an zwey trümmer des Fadens über den andern stefft A hinauff / eins zur linden / das ander zur rechten baider steffe / laß baide über den stefft A deins gefallens weit hinauff gehen / als zum Exempel biß ins C, da knüpf baide trümmer zusammen / vnd setz einen spiz hinein / streck mit demselben den Faden an / vnd fahr also herum mit gestrecktem Faden von C in H vnnnd I, so wirdt ein Ellipsis oder
 30 gerechter Ablenger Cirkel oder Oval lini drauß.

Wann ein Cavalliero wider auß Italia kompt / vnd hat in Mathematicis soviel proficirt, daß Er ein solche Oval- vnnnd etwa ein spiral lini darzu / reissen kan / lesset er sich die raise desto weniger dauern: Man pflegt auch solche stücklin drinnen wol zu bezahlen / das wär aber allein die Ellipsis, ich wil hie noch die vbrige Conicas hinzu setzen.

Nimb abermal zwen steffe / stecke sie auff das Reißbrett in zwen puncten A vnnnd T deins gefallens weit von einander / knüpf an jeden stefft einen Faden. Theil die leng TA inn zwey ungleiche thail deins gefallens / im puncten S, vnnnd strecke von beiden angeknüpfften Fäden A vnd T, zwey trümmer AS, vnd TS zusammen biß ins S,
 40 steck einen spiz zwischen baide bey S, vnd von diesem spiz in S erlengere die zwey trümmer der Fäden / zusammen gelegt / so weit als dir beliebet / strecke also baide

fäden mit einer hand an / vnd laß sie den spizen auß dem puncten S gegen V hinauß ziehen / biß er dir an die Finger kompt / mit welchen du die Fäden gefasset hast / so wirdt der spiz ein Hyperbolam auff einer seiten auffreißen / so lang du die Fäden gefasset hast; das andere halbe theil auff der anderen seiten SX mach auch also.

Die Parabolon aber reiß also / zeuch ein gerade lini CI so lang du wilt / steck einen stefft in deren puncten einen / als A, mache die lini CA so groß du wilt / vnd wa du die lini endest / als in I, da reiß ein andere lini IKP recht windelig auff. Hernach knüpff einen Faden an den stefft A, den streck hinauß biß ins C, da setz einen spiz an / schlag den Faden vmb ihn herum / vnnnd streck ihne biß ins I, da mach einen Knopff / jeso nimb den Knopff inn die eine ¹ hand / den spiz C in die andere / streck den Faden mit dem spizen C an / fahr mit baiden henden von der lini CI entan / also das der faden zwischen dem spiz vnnnd knopff allezeit der lini CI gleich oder parallel stehe / bleib mit dem knopff inn der lini IP, so wirdt der spiz auß C ein Parabolon reißen / biß inn die lini IP, also das knopff vnd spiz entlich in der lini IP, nämlich in P zusamen kommen.

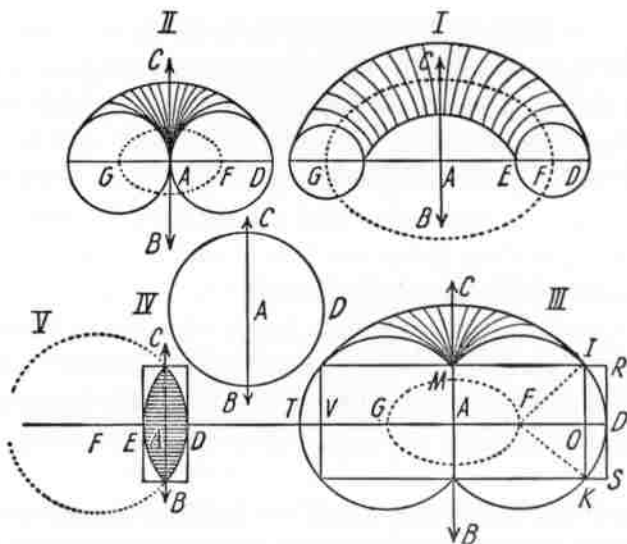
Diz zuerhalten magstu auch ein windelmaß brauchen / wie man die proportional linien findet.

32. Was für Figuren aus den flachen Regelschnitten kommen / wann einer nach dem andern auff vnderchiedliche weise zur Lehr gebraucht / vnd die Massa oder Zeug am Drästock nach solcher Lehr abgedrät wirdt.

Auß dem Supplemento.

Deren Regelschnitte seind vier / ein Cirdel / ein Ablenger Cirdel / ein Parabole, ein Hyperbole: auß disen vier figuren kan jede auff fünfferley art herum getriben / oder zur Lehr angeschlagen werden: besitze hie die 11. Figur.

Die 11. Figur.



Dann eintweder lauffen sie aussen vmb die $\mathcal{A}$ herum / wie hie bey No. I. Da gibt jede einen Ring; oder sie stehen mit dem einen End oder puncten gleich an die $\mathcal{A}$ an / da gibt es beschlossene Ringe / wie hie bey No. II. Oder sie werden besser

4) SA

10) den Knoff S

über die *Ar* hinein gerucket / also das sie nicht ganz umbblaffen / sondern es gehet innen ein Schnitt ab / dann so wirdt ein Apffelrunde figur auß dem Cirkel / besihe hie bey No. III. Oder die *Ar* gehet gar durchs Centrum, also das nur ein halber Cirkel umlauft / oder die Lehr nur auß einem halben Cirkel genommen wirt / da wirdt ein gerechte Kugel darauß / wie hie bey No. IV. zusehen. Oder entlich gehet weniger umb / dann das halbe theil / nämlich nur ein Schnitt / da wirt ein Citronenrunde figur drauß / wie bey No. V. allhie zusehen.

Wann nun die drey vbrige Regelschnitte auch so perfect vnd einfeltig weren / wie der Cirkel / so hetten wir der figuren in einer Summen zweinzig: demnach aber ein grosser unterschaid ist am anschlagen deren anderen figuren / vnnnd viel dran gelegen / nach welchem strich man ihr halbes theil / weniger oder mehr / nemen solle: Als erstreckt sich die anzahl diser gedrähten figuren / so allein auß dem Regelschnitt herkommen / auff zwo vnd neunzig / einer jeden absonderliche wunderbarliche kleine theil oder Spältlin / item die figuren selber umbgekehrt / vnd ire holaußgedräte furmen nicht mit eingerechnet. Ob es nun wol vnnoth dieselbige noch lengs zu beschreiben / wie im lateinischen Werk beschehen / so kan ich doch der fürnemsten hie nicht geschweigen / sonderlich von der Fässer wegen.¹

Ein halber Ablenger Cirkel oder Ellipsis nach der leng angeschlagen / gibt einen Leib wie ein Ey / doch ordenlicher / vnnnd oben so dick als unten / artet sich nach der Kugel / darumb es Griechisch *Sphaeroides longum* genennet wirdt / Teutsch ein Ablenge Kugel. Die sihestu hieunten zur Rechten.

Selbige figur nach der zwer also halbirt angeschlagen / gibt einen Leib / wie fast eine Linse / oder wie sich etliche Rißlingstein im Bach abstoßen / Griechisch *Sphaeroides latum*, möchtens Teutsch eine gedruckte Kugel nennen / oder einen runden polster oder Küss. Hie unten zur linken ist sie Radweis auffgericht.

Wurde aber weniger dann das halbe theil angeschlagen / das gibt nach der leng die gestalt einer Oliven / oder lenglechten Zwespen: nach der zwer / die gestalt einer Kriechen / oder Curren / wie mans hie zu land haist.

Ein halbe Parabole oder Hyperbole COP nach der *Ar* lini CI angeschlagen / geben zwey Griechisch genennete Conoidea, oder rund abgeribne Regel / das Conoides Parabolicum sihet wie ein runder Hewschober oder Hewschoch / das Hyperbolicum wie ein Miß / oder geschwer / oder wie ein ordenlich auffgeschitteter Arbischaußen / oder ein runder Bergfüßel.

Dise figuren ganz recht nach der zwer NO angeschlagen / geben die gestalt einer Spulen OINC. Soviel wirt vns zu betrachtung des Fasses dienslich sein. Sonsten kommen vnder die obbesagten 92 Sorten allerhand Rüttenrunde / Birenrunde / Zirbelnußrunde / allerhand Kernrunde / dann zapffenrunde / Brait-Kürbisrunde / Judenterschenrunde / vnnnd dergleichen figuren: deren fast jede ihr eigene weise hat / dardurch sie kunstlich mag gemessen werden; also das es nicht noth sey sie gegen andern Sorten gleichzeugs / zuwegen / oder inn ein Wasser zuwerffen / vnnnd die erhöhung des Wassers / durch sie beschehen / warzunemen / welches sonsten die zwey / aber nit kunstliche / mittel vnd handgriffe seind / allerhand vnordenliche ungestalte figuren nach ihrem Leib Raum oder Fülle zu messen.

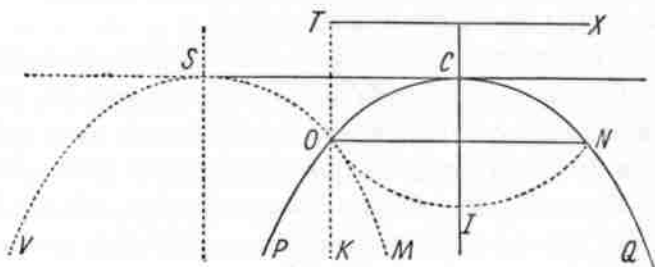
Handgriff die vngestalte figuren nach ihrem raum zu messen.

15) nach statt noch

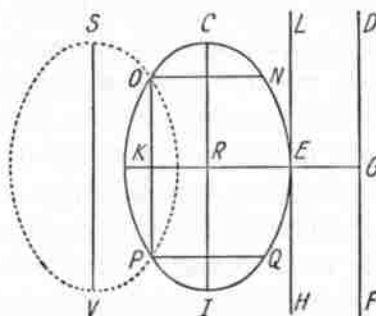
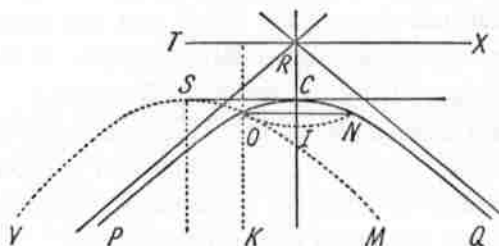
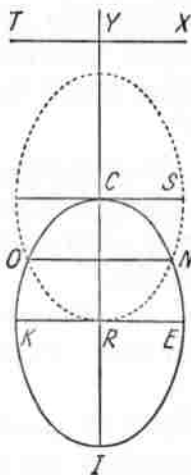
Auß dem Epis 1.
ad Th. 13.

33. Vom Leib der Ablengen und Gedruckten Kugel oder deß Ayes / und der Linsen.

Als nu gesagt / daß das Ay (verstehe es Geometrisch / wolgeordnet / oben so dick als vnden / wie inn hie bey gesetzter Figur vnden zur rechten) Kugelart habe: also



Die 12. Figur.



ist es auch gleich wie die Kugel / gang oder halb / jedesmahl zweymal so viel als der Regel von gleicher höch / dessen boden dem mittlern schnit deß Ayes gleich ist. Muß also die feldung am boden deß halben Ays bekandt sein / sampt ¹ der höch deß halben theils durch einerley lenge / dann auß dem diameter deß Cirkelrunden bodens hastu seine Feldung / als du bey No. 14. gelehret bist. Dann so multiplicir die zahl der Feldung am Boden in zwey drittheil von der höch / so hastu den raum deß halben Ays. Also auch von der Linsen / die ist bey diser 12 Figur vnten zur linken gemahlt. 30
10

34. Vom Hewschober.

Conoides Parabolicum (in hie beygesetzter 12. Figur oben an / PCQ) wirt auch durch einen Regel gemessen / der mit dem Conoide auff einem flachen runden Boden

7) der höch fehlt

PQ stehet / gleicher höch mit ihme / dann das Conoides oder Hewschober PCQ füllet oder raumet solcher Regel andertthalbe. Multiplicir derohalben die zahl der feldung am Boden PQ des Hewschobers PCQ in sein halbe höch / so hastu den raum
† von dem ganzen Corpus.

Wie wär aber das feld am Boden zu finden? Meß aussen herum / kanstu nicht mitten hindurch / dann auß dem umbkraisß wirdt dir bekant der diameter, wie bey No. 6. Hernach suche das Feld durch No. 14.

35. Vom Berg oder Arbißhauffen.

Auß Epis. 2.

Mit dem Berg oder Arbißhauffen Conoide Hyperbolico (in hie beygesetzter
10 12. Figur in der mitte gebildet / vnd droben in der 17. Figur am 19. blat / durch BV verstanden) hat es mehr wonders / dann diß Conoides gilt nicht gar anderthalb seiner Regel / sonder je gespitzter / je weniger / vnd entlich gar vmb ein vntennliches mehr dann sein Regel.

Muß derohalben fürs erst / einem jeden solchen Conoidi, deren vnentlich vilerley
sorten / zum Exempel inn der 17. Figur dem Conoidi VB (halb gemahlet) noch ein
anderer Regel gesucht werden / nämlich ACB (halb gemahlet) auß welchem solch
Conoides gleichsam geschelet ist / nämlich höher dann es: der vnderscheid CV baider
höchinen CA, vnd VA, muß einerseit zweymal genommen werden / anderseit drey-
mal / baider orten wirdt die kleinere / nämlich des Conoidis vnd seines inwendigen
20 gleich hohen Regels höche / nämlich AV hinzu gesetzt. Dann helt sich allererst in der Regel detri das Corpus des gleichhohen Regels zu dem Leib des Conoidis, wie die zusammen gesetzte kürhere zahl zu der grösseren / oder multiplicir das feld in das drittertheil der höch des Conoidis, was kompt / multiplicir wider in die grössere zusammen gesetzte zahl vund diuidirs durch die kleinere / so hastu das Corpus vom Conoide.

Tragstu / wie wirt aber der besagte höhere Regel ACB, auß welchem das Conoides AVB geschelet ist / zusuchen sein? Antwort / das ist zwar hie zu weitlaufig nach der scherffe abzuhandlen / doch nach dem Augenmaaß / vnd von des Handgriffs wegen / ist es ein Traidhauff / so stecke oben auff den wüpfel V ein stecklin FV, truck
30 es so lang hinunter / biß die mittlere runde vom hauffen VB, nach dem obristen theil des stecklins C abgesehen / anfahet den vnderen rand des Traidhauffens B zubecken. So weit nun das stecklin CV ober den Traidhauffen V außgehet / das ist vngesehrlich die maaß / die (nach vnserer bekandten maaß abgemessen vund numerirt) man zweymal vund drey mal zu des hauffens höch VA setzen muß. Die höch aber des
31 hauffens VA findestu leicht / truck nur ¹ das Stecklein biß an boden A. Were es aber ein Berghügel / da müstestu oben mitten darauff bey V eine Stange auffrichten / so hoch / das man das oberste theil darvon / mit einem zeichen kenlich gemacht / nemlich das C, vnten am Berg rings herum / nämlich bey B, ersehen könnte vor der runde des Bergs. Oder so diß vnmöglich / könnte man die Sonne zu hülff nemen /
40 wann sie gleich anfahet vbern Berg VB herein zustreichen mit dem streim CB, vund der Berg keinen schatten mehr in die ebne von sich hindan wirfft: in diesem Augen-

8) (Randnote) Epis. 22

31) Traidhauffens BG

blick nimbt man durch die Astronomische Kunst der Sonnen höh ABC, vund mit deren ihren Tangentem auß dem Canone, das ist eins. Fürs ander misst man wie weit es vmb den Cirkelrunden Berg (dann von einem solchen reden wir) herumb sey / auß disem umbkrais erlerne (wie bey No. 6) den diameter, oder wie weit es gerad durch den Berg hindurch sey: Multiplicir dessen halbes theil BA in den gesuchten Tangentem, vnd wirff die fünff letzte ziffer hinweg / so hastu wie hoch es sey von dem mittelpuncten A am boden des Bergs / biß an den obristen güpfel C des Kegels / auß welchem der Berg geschelet ist / oder biß an denjenigen Sonnenstreimen CB, welcher das vnderste am Berg B erleuchtet / neben dem Berg hinunter streichend. Fürs dritte mustu vom Berg entan stehen an ein ort / da du des Bergs güpfel V 10
ersehen kanst / vnd alda durch die Kunst altimetram, messen die höhe des Bergs VA an ihr selber.

Zum Exempel / ich sehe / ich finde die Sonne hoch 16 gr. 42 min. wann sie / wie gesagt / gerad vbern Berg gegen mir herunder streicht: da find ich den Tangentem von 16 gr. 42 min. sovil als 30000 / auß dem Canone, ich sehe fürs ander / es sey vnden vmb den Berg herumb 3142 schrit / finde derhalben mitten durch den Berg hierauß 1000 schrit / vund biß ins Centrum hinein halb sovil nemlich 500. also das feld am boden des Bergs wurde sein 78 53982 gevierter schrit / multiplicir 500 in 1
30000 kommet 150 00000 / wirff fünff ziffer zu letzt hinweg / bleibt 150 schrit / die höhe vbern Berg hinauß / biß an den obgesagten Sonnenstreimen. Gesezt fürs 20
dritte / es funde sich auß der kunst altimetra die höh des Bergs 120 schrit. Machs nun fürder also.

Bergs höhe 120	Bergs höhe 120	120	Feld am Boden
Erste höhe 150	übermaß 2 mal 60	übermaß 3 mal 90	78 53982
Übermaß 30	gibt 180	gibt 210	dritttheil der höhe 40
Zweimal 60	oder 6	oder 7	gibt 3141 59280
Drey mal 90			

sovil Cubischer schritt / oder würffel / deren ein jeder einen schrit lang breit vnd hoch / seind im Regel / der vnderm Berg steckt.

Nach verrichteter Regel detri kompt des Bergs Corpus vmb das sechste theil 30
größer / nämlich 3665 19160 Cubischer schritte / da ein jeder einem Mann einen ganzen Tag zu arbeiten gibt / wil er ihne nur einen roßlauff lang hindan bringen / vund deren 366 geben einem Mann ein ganzes Jahr zuthun / vnverschonet des Sontags / hetten also vber zehenmal hundert tausent Mann zuthun lenger dann ein ganzes Jahr / wolten sie einen solchen Berg abtragen / des brechens zuges
schweigen. Ich halte man laß ihn stehen.

Auß dem 15. Th.

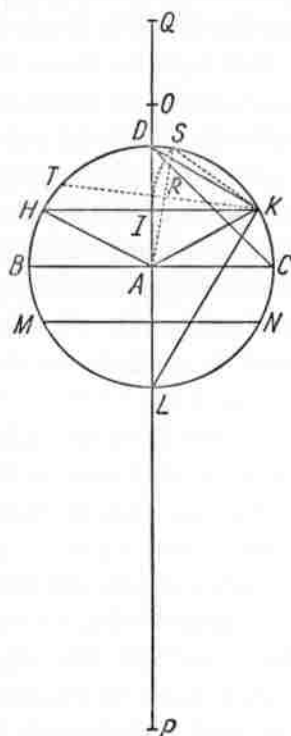
36. Vom Kugelzaan vund seiner Fülle oder Raum.

Ist zuverstehen / wann ein stück auß der Kugel Regelweiß herauß geboret vnd geschrottet wirt / also das es mit dem spitz außs Centrum treffe / das sey bey der
Am 20. blat. 6. Figur HAKDH ganz voll vund erhebt zuverstehen.¹ 40

14) Tangenten

37) (Randnote) 25. Th.

32 Merck derohalben / das ein solcher Zaun HAKD hat zwey stuck / das ein HKD ist ein Kugelschnitt / das ander HKA ist der Regel der mit dem Schnitt HKD einen gemeinen Cirkelrunden Boden hat durch die lini HK verstanden. Messe derohalben den diameter HK von diesem Cirkelrunden Boden / sampt der leng AK vom spitz A biß an den umbkreisß des Bodens K oder H, ist der halbe diameter der Kugel: auß welchen beiden du leichtlich durch die 10 Lehr finden kanst die höch des Schnittes DI, dise ist die gemeine höch vom Kugelschnitt und vom Cirkelschnitt / dann wann du den Kugelschnitt mittlen entzwey schneydest / so gibt es im Schnitt ein Cirkelschnitt: beide Schnitte hie bey HKD zuverstehen.



Die 6. Figur.

Vnd ob du nicht rechnen woltest / so reisse mit der linien AK nach der jungen Maaß / auff ein papir / einen Cirkel HKN, vnnnd setze die lini HK darein / laß auß A einen winkelrechten strich AI biß an Cirkel D hinunter gehen / so kanstu DI nach dem jungen Maaß durch den Cirkel messen.

40 Nun ist dir bekandt / das die ganze Kugel halbe 418879 etc. besitze No. 28. Dise zal multiplicir in die höch DI, was kompt / das dividir inn die ganze Kugelhöch DL, so kompt dir der Leib des Zauns in der Maaß / damit dir der ganzen Kugel Leib bekant ist.

Zum exempel die höch DI am schnit HDK habe 78049 / nach der sinus zal / multiplicirs in die Kugel zahl 418879 etc. / dividir was kommt mit 200000 oder behender multiplicir auß den zwo ersten die eine ganz in die ander halb / vnd wirff die 5 letzte figuren hinweg / so werden dir kommen 1 63465 44334 66830 / so groß ist der zaun HAKDH. Doch die 10 letzte seind ungewiß / dann das letzte 9 an DI ist nicht genau.

30 Noch behender auß No. 28. dividir solche höch mit 3 / was kompt das duplir und multiplicirs in die zahl des Cirkels Feld / doch das sie so viel ziffern habe / als vil dein fürhabende Kugelzahl ziffer hat. Dise Multiplication verrichdestu durch hülff des Tafelins No. 12. mit lauterm addirn, wirff endlich die 5 letzte ziffern hinweg / so bleibt abermal der Zaun.

37. Vom Leib oder Raum des Kugelschnittes.

Zu wissen den Raum am Schnitt HKD, such erstlich nach der 36. Lehr / den Raum des Zauns HAKD, hernach such den Raum oder Leib des Regels HKA, dann weil du waissest DI die höhe des Schnittes / so waisstu auch IA die höhe des Regels / dann beide in DA seind sovil als AH. Zuech ab den Leib HKA von dem Leib HAKD, so bleibt dir der Leib im Schnitt HKD.

Der Erste gewisse aber mühselige weg. Auß dem 15. Th.

Ein Exempel / der bogen KD sey 77 grad, 19 min. 9 secunden der hat einen sinum (auß dem Canone darvon No. 9 gesagt) nemlich IK 97561 / diß ist der halbe

20) der höch

36) (Randnote) Der fehlt

diameter zum gemeinen boden des schnitzes HDK, vnnnd des Kegels HAK. So sprich durch detri, die vierung von AC 100 etc. gibt ihrem Cirkel am feld 314 etc. / was gibt die vierung von 97561, nemlich 95181 48721 ihrem Cirkel? wie du gelehrt bist / bey No. 12. 13. so kompt das Feld des Cirkels HK 299021 46098. das behalt.

Weil dann der Bogen DK bekant / so weistu auch sein vberiges stück KC zum 1 quadranten oder vierten theil des Cirkels DC, nemlich 12 grad 40 min. 51 sec. 33 dessen sinus findet sich auß dem Canone 21951, so lang ist AI. multiplicir das dritte theil hievon / nemlich 7317 in das jeh gefundene Feld des Cirkels HK, so hastu den Leib des Kegels HKA, nemlich 21879 40029 99066. Nu hastu zuvor gefunden / wann die höch DI am Schnitz HKD ist 78049 (welches mit der höch IA 21951 gerad 10 100000 machet) das alsdann der Leib im Zaan HAKD seye 1 63465 44334 66830. So zeuch nun jecho ab / den Leib des Kegels HKA, wirdt dir bleiben 1 41586 04304 67764, soviel ist des Leibs am Schnitz HKD, wann sein halber Bogen DK ist 77 grad 19 min. 9 sec.

Laß dich die langen zahlen hie nicht irren / es ist nicht allwegen dein (wie jecho mein) notdurfft / mit so langen zahlen zurechnen. Es seind auch die 10 letzte ziffern nicht genaw / dan sie folgen auß dem letzten secundo des Bogens / vnnnd auß der letzten Vnitet des sinus, die ist nicht so gerad / wie wir sie hie brauchen müssen / sondern umb etwa ein halbs weniger oder mehr / vnd wann du dann dem diameter nicht 200000 / sondern nur 20 theil gibest / so kompsu mit dem Leib nicht vber 20 8000 / mit dem Feld nicht vber 400 / wie bey No. 13 gemeldet ist.

Der andere weg für
die kleine Schnitze /
deren Bögen vnder
25 gr. sind.

Doch wann die Kugelschnitzlein gar klein seind / so kompsu neher zu / wann du nur thust / als seyen sie lauttere Conoidea Parabolica, darvon droben No. 34 / nemlich multiplicir das Feld des runden Bodens inn die halbe höhe des Schnitzes / so kompt der Raum oder Fülle des Kugelschnitzes. Dann der kleinste Kugelschnitz raumet seine Wellen oder Täller / in dem er stehen mag / gerad halb auß / der grössste Schnitz aber / nemlich die halbe Kugel / raumet die zwey dritte thail von ihrer Wellen oder Täller.

Auß Th. 14. vnd
Cor.

38. Zu verwandlen einen Kugelschnitz in einen Kel auff einem Boden mit jme.

30

Der dritte weg. Diß gibt zumal auch noch einen Weeg zurechnen das Corpus des Kugelschnitzes. So merck nu / wann ein Kel auff dem boden HK stehet / vnd nit weiter mit seinem spizen reichet / dann biß inn den Würbel D, so kan er nicht so groß sein / als der runde Kugelschnitz HKD, auch auff dem Boden HK stehend. Soll dann der Kel so groß werden als der Schnitz HKD, so muß er vber das D hinaustrachen / zum Exempel biß ins O: ist nun die frag / wie lang IO, des Kegels höch / sein werde? das rechne also.

Wann du hast die höch ID 78049, so zeuchst ab von DL 200000, bleibt dir IL 1 21951. Nu multiplicir ID mit DA, was kompt das dividir inn IL, so kompt dir 64000, nemlich DO, setz es zu DI, so hastu IO, 1 42049: jecho nimß das dritte theil / 40 nach der Lehr No. 25, multiplicir in das Feld des Bodens HK, wie du jhne droben

7) den statt dem

14) 40 min. 51 sec.

No. 37. gefunden / so kompt dir der Leib des Kegels HKO, oder des Schnitzes HKD 1415860000000000 fast wie zuvor.

Sonsten ist es gar gemein / wann man ein seltsame Figur irem Leib nach messen wil / so muß man sehen / das man sie inn einen solchen Regel verwandlen könne.

Noch ein Exempel. Ein Kugelschnitt sey am Boden 18 mal so breit als hoch / halte am Boden nach der Feldung 1513764977 / so wirdt die Kugel 82 mal so hoch sein als der Schnitt. Sprich nun also / wie sich helt das lenger Trumm 81 zum halben diameter 100000 / nach der sinus zal / so helt sich die höch oder das kürzere Trumm 1 / zu 1234. Diß ist die erlengerung des Kegels / der dem Schnitt gleich ist / nu ist die
 10 höch nach der sinus zal 2439: setz es zusamen so kommt des Kegels höhe 3673 / dessen drittes theil ist 1224 ein halbs / darmit multiplicier die obgefundene Feldung 151 / etc. so kompt der Raum oder Fülle des Kegels / vnd also auch des Schnittes 185000000000.¹

34 Ein vorthail. Multiplicir gleichfalls IL mit LA, was kompt das dividir mit ID, Der vierte Weg. so kompt dir LP, 156250 / setz LI darzu / so hastu auch die höch zum Regel HPK, der dem größern Schnitt HLK gleich ist / nämlich 278201. Setze beide höchin zusammen so hastu OP 356250.

So dir nun das Gewicht von der ganzen Kugel bekant wäre / so multiplicirs inn die ein höhe IO, dividir was kompt durch OP, so hastu wie vil der schnitz HKD
 20 wege. Als / die Kugel wege 100 pf. Multiplicirs mit 142049, kompt 14204900, das dividir mit 356250 / so kompt bey nahe 40 pf. so vil wigt der Schnitt HKD, also bleibt dem größern Schnitt HLK 60 pf.

Diweil es aber doch allerseits viel grosser mühe vnd arbeit gibt / hab ich dir hie
 zum besten ein Täfelin auff einhundert Kugelschnitze außgerechnet / wie droben
 No. 17. ein gleiches auff einhundert Circelschnitze zufinden. Darbey soltu aber mit
 fleiß mercken / wann der halbe diameter von der Kugel / getheilet wirt in 100 langer
 sein vierung in 10000 gebierter / vnd sein Cubus in 1000000 gewürffelter theil /
 so findestu zwar im Täfelin / wievil solcher gewürffelter theil in einem jeden Schnitt
 stehen / doch nicht anderst / du sehest dann zuvor noch ein Nullen daran / welche hie
 30 von des Formats wegen außgelassen ist: Zum Exempel / der erste Schnitt hat solcher
 theil nicht nur 33 / sonder 330: der letzte oder die halbe Kugel nicht nur 209439
 sondern 2094390 / etc. Wäre aber der diameter getheilt in 100000 theil / so müßtestu
 gehen nullen zu einer jeden zahl setzen / zuwissen den Raum des Schnittes nach
 solcher Theilung.

Nota.

† Täfelin zu den Kugelschnitzen.

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
	0	3036	11728	25446	43562	65446	90479	118019	147443	178126
	33	625	1156	1622	2030	2367	2657	2871	3021	3115
1	33	3661	12884	27068	45592	67813	93136	120890	150464	181241
40	92	682	1205	1667	2065	2399	2679	2890	3034	3120

19) höhe ID . . . durch GP

21) mit fehlt

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
2	125	4343	14089	28735	47657	70212	95815	123780	153498	184361
	155	736	1254	1712	2103	2428	2700	2907	3045	3125
3	280	5079	15343	30447	49760	72640	98515	126687	156543	187486
	217	791	1303	1753	2140	2458	2720	2917	3057	3129
4	497	5870	16646	32200	51900	75098	101235	129604	159600	190615
	275	846	1354	1796	2176	2488	2739	2932	3067	3132
5	772	6716	18000	33996	54076	77586	103974	132536	162667	193747
	336	899	1400	1835	2207	2519	2762	2949	3075	3135
6	1108	7615	19400	35831	56283	80105	106736	135485	165742	196882
	394	950	1443	1873	2242	2552	2785	2966	3083	3139
7	1502	8565	20843	37704	58525	82657	109521	138451	168825	200021
	453	1002	1492	1915	2275	2583	2812	2985	3091	3140
8	1955	9567	22335	39619	60800	85240	112333	141436	171916	203161
	512	1055	1532	1952	2307	2605	2833	2999	3102	3139
9	2467	10622	23867	41571	63107	87845	115166	144435	175018	206300
	569	1106	1579	1991	2339	2634	2853	3008	3108	3139
									100	209439

Dieß Täfelin brauche also / wann du hast von dem Kugelschnitt HDKI, seine höch DI, vnd den halben diameter zur Kugel DA oder HA, inn deinem fürhabenden 20
Maaß / so setze zwo nullen zu der höch DI, was kompt / das dividir mit HA, das
facit bekompt alsdann nicht ober zwo ganze ziffer / da such die zehener oben im
Täfele / die zahl aber vnder zehen such zur linken abwärts / so findestu im Creutz
wege den Leib des Kugelschnittes sampt der differenz zwischen zweien ganzen zahlen /
durch welche man partem proportionalem auff den Bruch ¹ suchet / so einer für 35
handen. Multiplicir hernach den gefundenen Leib inn die Cubiczahl von HA, vnnnd
schneid vom facit fünff ziffer hinten ab / so hastu wie groß dieses Schnittes Leib sey
in deiner fürhabenden Maaß.

Zum Exempel / die höhe sey 1 / der halbe diameter 41 / setze zwo nullen zu 1 vnnnd
dividir was kompt / mit 41 / so kompt dir 2(439 / suche oben im Täfelin 0 (dann 30
du hast nur eine ziffer ganzer zahlen) / vnnnd 2 zur linken / so findestu du den Kugel-
schnitt 125 vnnnd die differenz 155 / darvon auff den Bruch mit (439 bezeichnet /
ungefährlich 60 kompt: wirt also der schnitt 185 / das multiplicir mit der cubiczahl
von 41 nemlich mit 68921 / vnnnd würff die 5 letzte hinweg / so findet sich 127(5,
sovil ist des leibs vom kugelschnitt in deinem Maaß.

Muß Epis. 1.

39. Von zerschnittenen gleichen vnnnd Ablengen Kugeln / item von Conoidibus.

Zerschneid eine Kugel wa du wilt mit einer geraden fläche / so gewinnet sie einen
Cirkelrunden schnitt. Zerschneide die ablenge Kugel gerad neben ihrer Arlini / so

gewinnet sie einen solchen Schnitt / wie der Regelschnitt gewest / nach welchem sie gedræet worden / nãmlich demselben ähnlich.

Zerschneide die Ablenge / oder Gedruckte Kugel / oder die Conoidea, wie du wilt / nur das die fläche gang durchgehe / so wirt der Schnitt ein ablenger Cirkel sein / doch von vnderschiedlichen Sorten.

40. Von Ablengen Kugelschnitzen.

Wann die Ablänge Kugel gerad geköpfft wirt / so thut man ihme durchaus wie bey No. 38. gleich als wann LD der lengere diameter oder Arlini wäre / vnd BC der kürzere: allein das man die linien nicht auß den Bögen nemen kan / sondern
10 man muß sie messen mit einem instrument, wie hoch nemlich ID, oder wie lang HK sey.

Auß Epis. 2.
In der 6. Figur am
32. Blat.

Wann aber der Schnitt sich lännete vnnnd die Arlini DL schlims traffe / müste man baide Schnitze auff ihre böden stellen / vnnnd zwischen zweyen gleichschwebenden Feldern (als da seind die zwey Bretter inn einer Press) einsetzen / zu erkundigen wie hoch ein jeder wäre / baider höchinne zusamen gesetzt / geben mir hernach einen diameter etwas kürzer dann die Arlini: mit dem man hernach calculiren müste /
† anstatt der lengsten / oder Arlini.

41. Von schnitzen deß Conoidis Parabolici.

Wann du dise Figur köpffest nach der Hand / wie es gereth / nur mit einer geraden
20 fläch / zuwissen wie groß der Leib inn jedem Schnitt seye / schaw nur das du erlernest / wie lang der mittlere abgeköpfft Graat oder Arlini sey / er sey jeh nach der geraden zwer oder schlims getroffen. Multiplicir die grätte / deß ganzen vnd deß Schnittes / jeden in sich selber / darnach die kleinere vierung multiplicir in die zahl / darinnen dir das ganze Conoides bekant / was kompt diuidir durch die größere vierung.

Auß Epis.
ad Th. 15.

Zum Exempel. Ein Conoides wege 54 pf. vnnnd sey der Graat also getroffen / das 2 von 5 stücken hinweg gehawen seyen. 2 mal 2 ist 4 / vnnnd 5 mal 5 ist 25 / multiplicir 4 in 54 kompt 216 / das diuidir in 25 kompt 8 vnnnd schier 2 drittheil / sovil wigt der abgehawene Schnitt.¹

36 42. Wan ein stück von der Kugel mit mehr dann einem Schnitt 30 heraus geschrottet wirdt.

Das könten wir Desterreichisch ein Spältel haissen / wie die Apffel vnd Birn spältlen geformiret seind. Wann die Schnitte in einem diameter DL zusamen gehen / wie alsdann dem mitteln Cirkel BC geschicht / oder auch dem ganz runden Feld oder schelffen omb die Kugel aussen herumb / also auch dem Leib oder innerlichen Raum / bedarff nicht viel rechnens: wann aber nicht baide Schnitt auff den diameter oder innern graat hinein gehen / da schreibt Lucas nichts darvon.

Auß dem Coroll. 1.

In der 6. Figur am
32. blat.

Aus dem Coroll. 2.

43. Einen Riemen oder Gürtel um die Kugel herum / nach ihrem Raum oder Leib zu messen.

Durch N. 37. 38
und 24.

Bedenk das die Kugel oben und unten geköpft / oder beide Schnitze HKD vnd MNL ihr abgenommen / vnd hernach noch auß dem stumpff HKNM der mittlere Walger oder Cylinder, oder so die hütlin HKD vnd MNL nicht gleich wären / der mittlere Regelartige stoß heraus geschleut werde / alsdann bleibt erst die Schelff / Riemen oder Gürtel HM, KN. So such nun den Leib beider Schnitze / vnd den Leib der innern Wellen / nimbe alle drey von dem Leib der Kugel / so bleibt dir der Leib an solchem Riemen.

Zum Exempel / wann der Bogen DK so groß bleibt wie oben No. 37 vnd 38. so ist der Schnitt HKD dannen auch bekant / vnd MNL ist hie gleich soviel / vnd beide zusammen 283171 00000 00000. Das zeuch ab von der ganzen Kugel 418879 02047 86301. So bleibt der stumpff HKNM 135708 00000 00000. Nu seind HK vnd MN gleichschwebende Eirkelrunde Böden / derhalben steckt zwischen ihnen in diesem stumpff drinnen ein gerader Walger / zweymal so hoch als IA, die ist droben gewest 21951 / ist derhalben dieses Cylinders hoch 43902 / die multiplicir nach der 24. Lehr / in den Boden HIK, droben No. 37. zu finden / oder multiplicir nur den Leib des Regels HKA mit 6 / so kompt dir der Wellen Leib 131278 00000 00000 / den zeuch ab vom gefundenen stumpff / da wirt dir bleiben die Gürtel um ihne her / 4430 00000 00000 / oder die letzte 13 ziffer hinten hinweg geworffen / noch 4 thail vnd 2 fünfftheil von 419 thailen der Kugel / das wär etwas mehr dann der hunderteste theil der Kugel.

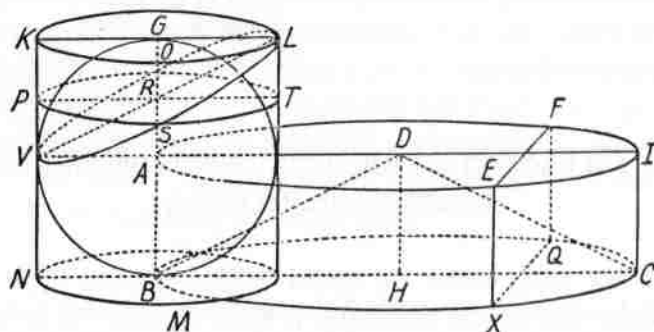
Wären aber die hütlin oder Schnitze nicht einerley groß / vnd also die Gürtel oben enger dann unten / da mustu zuvor auß folgenden Lehren den Regelstoß lernen rechnen / welcher vnter einer solchen Gürtel steckt.

Aus dem 17. Th.

44. Von Spalten oder Scheittern auß dem Walger oder Seulen: item von Röhren.

Wann sie gerad abwerß gespalten werden / das also das Weibel (oder der Schnitt) durch FOXQ dem innern Graat oder Amlinien DH gleich laufft / wie alsdann dem

Die 8. Figur.



Boden BQCX geschicht / also auch dem ganzen Leib oder Raum BAIC. Ist der Boden halbirt / so ist die ganze Wellen halbirt / vnd so fortan / bedarff nicht vil

14) stumpff

19) 4430 60000 00000

rechnens. Doch Multiplicir den abgesspaltenen Cirkelschnitt QCX am Boden in das ganze Corpus oder Gewicht BAIC, vnd dividirs mit dem ganzen Boden BQCX.

Nicht anderst helt es sich auch dann zumal / wann der Schnitt nach der Wellen abwärts Cirkelrund ist / wie in einem außgeborten Teichel / oder bleyenen Brunnenröhren oder runden Kasten / Mörser oder stuck Geschüßes / wann es ab vnd ab gleiche dicke hette.

Zum Exempel es stünde ein hülsgener rundholer stifel im Wasser / eines Schuchß weit offen / der hette vnden am Boden ein rundes loch eines Zolls weit / das gieng inn eine Röhren / in die höch gerichtet. Es wolte aber ein vnerfahner ihme für-
 10 nemen / das Wasser in die höch zudrucken mit einem Centnerstein oben in den Stifel auff das Wassergehüb hinein gesendet / vermeinend / das ganze Wasser im Stifel solte dem Gewicht weichen / vnd inn die höch vbersich gehen / der kan auß diser Lehr soviel rechnen / daß er nicht vber 20 lot Wassers vber des Gewichtes höch hinauff bringen wurde. Dann der Stifel ist am diameter seiner hôle / 12 mal weiter dann sein loch am Boden: derhalben hat der Boden in des Stifels hôle 144 mal mehr
 20 Felds dann das Feld im loch. Derowegen auch das ganze Corpus des Wassers inn dem Stifel / geformirt wie eine runde Wellen / wirt 144 mal mehr sein / dann das Corpus des Wassers auff dem loch / welches auch eine runde Wellen ist / wie das loch Cirkelrund ist: nun ligen 100 pfund auff diesen 144 stucken des Bodens oder
 darauff stehenden Wassers: wirdt derhalben auff jedem stuck / vnd also auch auff dem
 loch vnd darauff stehendem Wasser / mehr nicht dann vngesfahrlich 20 lot gewichtes
 auffligen. Wann aber das Wasser inn der Röhren nit in die höch gehen darff / son-
 dern sich in der nidere außgüßen kan / so verstehet es sich ohne rechnung / das es
 vom Gewicht ganz hinauff gedrucket werde / doch nicht geschwinder als sonst auß
 einer Röhren nur eins Zoll weit / wann nur 20 lot darauff lägen.

Ein gleiches. Ich hab einen Würffel auß Bley eines Zolls lang breit vnd hoch /
 darauff soll gegossen werden eine Bleyene Röhren auch eines Zolls dick nach dem
 diameter, aber nach dem Leib in der runde ein zehendtheil Zoll dick / wie lang wirt
 sie werden mögen. Die ist der Boden am Würffel das Maas / vnd ist eine vierung /
 30 eines Zolls lang vnd breit. Derhalben ein Cirkel auch eines Zolls breit / wirdt an
 der Feldung haben aißf 14 theil Feldes / nach der 14 Lehr: weil aber die hôle am
 Rohr vmb zwey 10te theil eines Zolls weniger haben soll / dann die eussere rundung
 des Rohrs / nemlich nur acht 10theil oder vier 5theil Zolls / so such auch dises engern
 Cirkels Feldung nach der 13 Lehr / nämlich quadrir vier 5theil / thut 16. 25theil.
 Wann dann des diameters vierung 1 / gibt seinem Cirkel aißf 14theil Feldes / so wirt
 des kleinern diameters vierung 16. 25theil / seinem Cirkel geben 176. 350theil Feldes.
 Diß ist das außgenommene Feld in der Röhren / so nimb es von dem Feld 11.
 14 theil / das ist von 275. 350 theil hinweg / bleibt 99. 350 theil / soviel ist des rund
 außgenommenen grundes / auff welchem die Röhren stehet. Du hastu in diser 44. Lehr
 40 vernommen / das ein gerader Würffel vnd ein gerade Wellen auß ihme Cirkelrund
 herauß geschnitten / item ein dickere Wellen / vnd ein schmalere auß ihr geschnitten /
 sich nach dem Leib zusamen halten / wie sie sich nach dem Feld am Boden vergleichen.
 Folgt also / das ein solches Rohr nicht höher dann einen Zoll sey / von dem für-

33) vier 4theil

habenden Würffel auch 99. 350 theil. Das ist / wann der Würffel getheilt wurde in 350, so giengen deren 99 auff ein Rohr / eins Zolls hoch. Wann dann 99 geben eins Zolls lenge / so werden alle 350 ein Rohr geben vierthalb Zoll lang ungefährlich.

Was ich hie von der Figur des Würffels gesagt / das verstehe auch vom Gewicht. Dann nach Villalpandi anzeigen / sol ein solcher Würffel von Blei / der eines Finger Zolls lang breit vnnnd hoch / wegen 6 Vncen vnnnd drey quintlen / das wäre beynähe ein drittheil eines Finger pfundes. Gebe also ein Finger pfund eine Röhren 10 Zoll lang / wann sie geformirt wäre wie obstehet.¹

Auß dem 17. Th.

45. Von Trümmern einer jeden Seulen.

38

In der 8. Figur am
36. Blat.

Wie dem innern Graat GB geschicht / oder der Arlinien / also auch dem Leib KLN: 10
nur das der Schnitt LSV oder TSP auff beiden seytten an der runden Feldung auß
lauffe / vnd nicht durch den einen Boden gehe. Sonsten mag er schlims / wie LV, oder
nach der geraden zwer / wie TP, durchgehen: ist alsdann die mittlere lini oder Graat
halbirt / so ist das ganze Corpus halbirt / vnnnd so fortan. Derothalben so multiplicir
das trum GR vom Graat GB, inn das ganze Corpus KLN, was kompt / das
dividir durch den gangen Graat GB so hastu den Leib am trum KVL oder KPTL.

Auß dem 17. Th.

46. Zu rechnen das Zwerstück (Speidel / Keil / oder Wecken) von einer jeden runden oder solchen Seulen die gleichschwebende Flächen oder Felder hat.

Die Griechen haiffens vom Sägen Prisma, weil man mit hawen oder spalten einen 20
solchen zwerschnitt von vnden zur rechten biß oben zur linken nicht verrichten mag /
sondern man muß die Saag brauchen vnd mit ganzem fleiß ziehen. Es ist aber
ein solches zwerstück (das vnten den einen Boden behelt / oben aber mit einer Schneid
gleich am obern Boden hinauß laufft / vnd ihne doch ganz leffet) gerad das halbe
thail von der Seulen / dann es werden zwey stück auß der Seulen / vnd baide stück
einander ehnlich vnd gleich. An dem stück von einem zerschnittenen Walger / ist die
Schneid rundlecht / wie hie bey YZSX zusehen: ein solcher Schnitt / wie No. 29. ge-
meldet / ist ein Ablenger Cirkel / als hie MSN, verstehe vnten auch ganz wie oben /
wann der Walger vnten erlengert wäre.

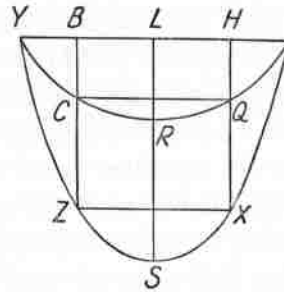
Zu rechnen das Corpus vom zwerstück / multiplicir die Feldung des Bodens in 30
seine halbe höch.

Zum Exempel / die Tonaw sey oberhalb des Kalenbergs 6 Elaffter tieff / vnd man
wolte von vnden hinauß gegen dem Kalenberg einen Graben führen 10 Elaffter
weit / der oben 2 Elaffter tieffer sey dann die Tonaw / damit sie oben einen Fal
hinein gewinne / vnd hernach das Land hinab nach Wienn lauffe / zurechnen wie
groß der feil / oder wievil Erden sey / die man auß einem solchen graben herauß
nemen sol: da muß ich wissen wie weit ich zugehen habe / biß ich gegen Wien 8 Elaff-
ter in die nidere komme: setze es wäre ein halbe Teutsche Meilen / gerades vnnnd
nicht bürgeriges feldes / oder 2000 Elaffter / dann fast sovil falt ein wasser / das

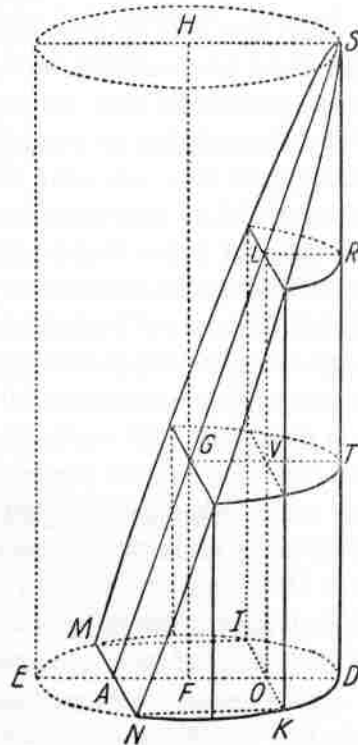
3) 3 vierthalb

38) niderr . . . habe Teutsche

füglich ist zuschiffen / nemlich 8 Clafter in 1600 Claftern: fellet es höher so ist's
 gefeherlich: lasse es aber doch gar 2000 Clafter sein / damit es weniger falle. Hiermit
 formir ich mir ein halbe Seul 10 Clafter breit /
 oben 8 Clafter hoch / 2000 Clafter lang / die
 unten auff ein Schneid hinauß lauffe / vnd sich
 also verliere. Such das feld des Bodens / 10 mal
 2000 ist 20000 / disen Boden in die höch 8 halb /
 nemlich in 4 / macht achzig tausent Clafter lang
 breit vnnnd hoch: das were mit zwey tausent
 10 Mannen inner Jahrs frist noch wol zubrechen
 vnnnd zuraumen / dann ich achte das ein Mann
 inner 8 tagen mit einer Clafter wol möge fertig
 werden. Doch stehet es auff dem abmessen / ob der
 arbeit weniger oder mehr werden möchte.¹



39 Hieher gehört die ganze hochnotwendige rech-
 nung auff die Schantz vnd Lauffgräben / auff-
 geworfene Schanzen / halbe Monde / vnd was
 dem anhengig: dann es leffet sich in derselben
 materi der Leib nicht also leichtlich mahlen vnd
 reissen / wie die pianta: es bedarff aber auch das
 20 selbstst keiner mehrern Kunst / den Leib oder die
 Schitte zurechnen / dann allein sovil / das man
 ersilich alle stuck an der Schanzen recht verneme
 vnnnd nennen lerne / wie die Kriegsleuthe ein
 jedes nennen / fürs ander / das man die fürgebne
 Schanzen wisse zutheilen in ire Geometrische
 stücke / dann ein Schantz ist zusamen geflickt (so
 zu reden) auß Geometrischen Seulen / zwers-
 tücken / vnd zugespizten Seulen / oder Trümmern
 30 von denselben / vnd leffet sich ganz vnd gar in
 dise formen eintheilen / vnnnd also per partes
 rechnen.



Die 14. Figur.

Weil aber mein fürhaben in diesem Buch nicht
 ist / von Bestungen zuschreiben / dann es gehört nicht nur das Schüttmessen / son-
 dern auch anders messen vnd formiren darzu; als wöllen wir Exempla dannenhero /
 zu erklerung meiner jeh fürhabenden regeln zu weitleuffig sein.

47. Von kleinern Walger/Spältlin oder Schnitzlein.

Auß dem 17. Th.

Hie beginnet vns die Kunst zuschwinden / da wir deren am nöttigsten bedürfftig
 wären: dann es ligt viel an dergleichen Schnitzlein / als zum Exempel / Ich hette
 40 ein ganzes zwersstück von einer Wellen / das würde aber noch einmal nach der geraden
 zwers zerschnitten / nämlich durch NKDIMA, oder durch GT, oder durch LR, also

1) im 1600

37) (Randnote) 7. Th.

das alle Schnitte rechtwinkelig auff den runden Rücken DS zutreffen / wußte gern / wie groß ein jedes wäre / gegen der ganzen Wellen.

Wann nun vnden der Cirkelrunde Boden ganz / so ist bey No. 46. gesagt / das er gerade das halbe theil sey von einer gleichhohen Wellen. Wann aber der Schnitt gleich ein halber Cirkel wirt / als bey GT zusehen / so helt sich der abgestuete Gupffel GTS gegen dem gleichhohen Cylinder YT, wie 14 gegen 66 vnd gegen dem halben Cylinder HGTS wie 14 gegen 33 / also das dem vbrigen stück vom halben Cylinder HGS die 19 bleiben / vnnnd den andern halben Cylinder YHG am gewicht 33 darzu geschlagen / so wirdt das größere stück YSG des Cylinders (so da gleich ist dem stumpff GTA, vnden ganz zuverstehen) die 52 darvon bringen / hab also durch GT etwas mehr dann das vierte theil herab geschnitten / da doch der Boden nur halbirte worden. Vnnnd diß gilt allwegen / der zerschnittene Cylinder sey hoch oder nider. 10

Wäre aber nicht der halbe Cirkel / sondern ein kleinere stück LRS abgestuete / da kan ich mit der Kunst nicht mehr gerade zugehen / sondern ich muß thun als wann in einem jeden solchen stück / die höch TS gleich wäre dem umbkreiß am ganzen Cirkel des Bodens MDN, in die gerade außgestreckt / alsdann so muß ich rechnen den Cirkelschnitt IDK, vnd wann dann eine Kugel wäre / deren halber diameter wäre FD oder GT, da muß ich suchen / wie groß jr Gürtel sein werde / welche die braitte IK hat. Dese Gürtel ist gleich dem spalt LVTS. Hernach muß ich rechnen den spalt LVTR, als ob TS nochmahlen dem umbkreiß des Cirkels MDN gleich wäre / diesen spalt LVTR von LVTS abgezogen / so bleibt mir das schnittlin LRS oberig / verstehe wann TS dem außgestreckten Cirkel MDN gleich ist. Wil ichs hernach auff ein jede höch TS richten / so muß ich solche fürgebne wahre höhe in das gesunde Corpus des Schnittlins LRS multiplicirn, was kompt mit dem außgestreckten Cirkelkreiß TS dividiren, da bleibt mir erst der gerechte Raum oder Gewicht des Schnittlins in der rechten fürgebnen höhe des Schnittes GTS. Dann diß ist sonsten richtig; ein jeder solcher Walgerschnitt / wie MSDN, zerschnitten von einer Schneide an / als von MN, gegen dem runden rücken SD, als gegen T, gewinnt am Gewicht eben solche theil oder Schnittlin / als an den Lengen deren Rücken ST, vnd TD, an diesen Rücken hastu das maas zum innerlichen Raum oder Gewicht richtig. 20 30

Zum Exempel / so sey vns fürgelegt ein Cylinder oder Walger YT gleich so hoch als breit / nemlichen 200000 / diser sey erslich zerschnitten von dem Gupffel S nach dem Centro des Bodens G, also das YGS, wie jeso gemeldet / sey 52 / vnd GTS 14 / diesem aber sey oben nach der geraden zwer abgestuete ein Schnittlin LRS so groß / das sein halbe braitte LY oder OI, OK am Boden seye 21951. So seze nun die Wellen sey nicht eben so hoch als brait / sondern sey so hoch als lang der umbkreiß am Boden ist / vnnnd dise 21951 seyen die halbe braitte einer Gürtel vmb die Kugel herumb / deren diameter halte 200000. Such den Leib von diser Gürtl / nach der 43. Lehr / alda er allbereit gerechnet siehet / vnd ist 4429 etc. mit noch 10 ziffern. So groß ist nun der Spalt LVTS. 40

Ferners vnd weil gesetzt ist worden / die höhe TS sey gleich dem außgestreckten Cirkel / dessen halber diameter ist GT, demnach so muß die höch VL oder TR demjenigen außgestreckten Cirkel gleich gesetzt werden / dessen halber diameter ist GV oder FO. Nu wiß ich auß dem Canone, wann OI ist 21951, das alsdann FO sey

97561, das multiplicir ich nach der 12. Lehr / in den umbkraiß des größern Cirkels /
 vnd wirff die 5 letzte ziffer hinweg / findet sich alsdann der umbkraiß des kleinern
 Cirkels / dessen halber diameter ist FO, nämlich 612994, so lang muß ich die höch
 VL oder TR setzen. Nu multiplicir ich nach der 24. Lehr / diese höch in den Boden
 VT, oder IKD, oder HYR (dann sie seind alle gleich) diser Boden oder Cirkelschnitt
 ist droben bey No. 17 gefunden worden 71620000, so kompt mir für den Leib des
 Scheitts oder Spalts LVTR 4390000000000, das nimb ich hinweg von LVTS
 so droben gefunden worden / nämlich 4430 etc. so bleibt mir 400000000000. Wann
 nun der fürgebne Cylinder oder Wellen die höch gehabt hette von seines Bodens
 10 umbkraiß inn die gerade außgestreckt / wie wir bißhero haben setzen müssen / so wäre
 diß der Leib des Schnittlins LRS. Weil aber die Wellen nur so hoch gewesen als
 brait / nämlich nur 200000 / so multiplicir ich diß in 40 etc. vnd dividir was kompt
 in den umbkraiß 628 etc. kompt 13 etc. so groß ist jecho das Schnittlin LRS nach
 der rechten fürgegebenen höch.

48. Vom Raum eines jeden Kegelschnittes oder Spalts.

Auß dem 16. Th.

Was Kegelschnitte seyen besche bey No. 29. Wann der Spalt durch den spiz gehet /
 wie alsdann dem Boden geschihet / also auch dem Raum oder Gewicht; da handele
 schlecht hinweg wie bey No. 44. In gleichem wann ein Regel in dem andern darinnen
 steckete / so doch das sie baide nur auff einen spiz hinauß lieffen / so handele wie mit
 20 den Röhren bey No. 44. nur allein das du wol behaltest / das bey den Regeln nicht
 die ganze höch / wie bey den Wellen / sondern nur das dritte theil von der höch
 gebrauchet werde.

49. Vom Regeltrum und Stoc wann der Regel aufrecht geköpfft ist.

Wann der abgestuzte güpfel auff seinem Schnitt recht auffgericht stehet / nit
 41 weniger dann der ganze Regel / so meß nur schlecht ¹ baide diametros an Böden /
 multiplicir ein jeden in sich Cubisch / das ist zweymal. Dann so multiplicir den
 Raum oder Gewicht des ganzen in die kleinere Cubiczahl / vnd dividir / was
 kompt mit der größern Cubiczahl / so kompt dir der Leib am abgehawenen Trumm /
 30 den zeuch ab vom ganzen Regel / so bleibt dir der vndere Regelstoc.

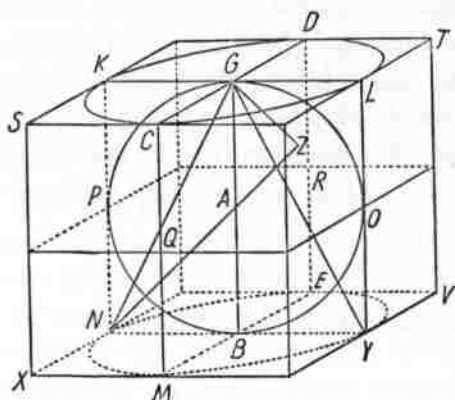
Exempel / des Regels diameter am Boden sey 3 / am Schnitt aber 2 / vnd der
 ganze Regel wege 20 pf. 2 mal 2 zweymal ist 8 / diß mit 20 pf. macht 160 / 3 mal 3
 drey mal ist 27 / damit dividir, so kompt dir beynae 6 pf. so viel ist abgehawen /
 bleibt am stoc etwas mehr dann 14 pf. Nicht anderst thue jme / wann du etwa baide
 höchine füglich haben kanst / oder baide Lähne / acclivia latera. Oder nur gerad
 den Stoc zu rechnen / so zeuch ab die kleiner Cubiczahl 8 von der größern 27 /
 bleibt 19. Jecho multiplicir 19 in das ganze Gewicht 20 / kompt 380 / das dividir
 durch 27 / so kompt das Gewicht des Stocks 14 / vnd zwey 27 theil.

37) 38 statt 380

Ex opinione Th.
16.

50. Wann der Regel schlims / doch durchaus geköpfft ist.

Verstehe wann das abgestufte Trumm / auff seinen schnitt gestelt / den spizen
übersich vnnd nicht vnder sich kehret: Als dann / so des Regels boden auch getroffen
wäre / müste man ihn erlengeret verstehen / biß dahin / da der Schnitt gang durch



Die 9. Figur.

gehen mag. Nu dieser abgehawene güpfel /
als hie GNA, hat vngleiche lähne / dann
GN ist am lengsten / gegen ober aber
bey Z ist sie am kürzesten / nim das
mitte zwischen baiden / vnd rechne dar
mit / als wär es ein gerades Regeltrum / 10
wie bey No. 49 gemeldet / an stat des
schlimmen GNA, dann beide sollen ein
ander gleich sein. Wiltu nicht trawen
(wie ich dich dann noch zur zeit nit auff
alle scherffe zuversichern habe) so such das
feld am Schnitt NA nach der 15. Lehr /
meß auch die höch GZ zwischen zweyen

gleichschwebenden Brettern / vnd multiplicir das dritte theil von derselben in das
feld am Schnitt oder Boden NA, also thue auch mit dem Cirkelrunden Boden
NY des ganzen Regels NGY, vnnd mit seiner höch GB, so findestu in baiden Mul- 20
tiplicirten zahlen die verglichung des ganzen NGY vnnd des trums G, durch den
Schnitt NAZ abgestufet.

Auß 16. Th. partis
1. vnd 9. Th. par-
tis 2.

51. Den Stock von einer jeden zugespitzten Seulen / Pyramide oder Regel / wann sie sich gleich naigen / aber doch mit einem Schnitt / dem Boden gleichschwebend / geköpfft seind.

Da kanstu füglich die diametros vnd seitten / baiden vnden des Bodens / vnd oben
des Tisches mit einem maßstab messen. Dann so rechne durch No. 14. 15. 16. baide
felder auß ihren diametris oder umbzeunungen / multiplicir die felder in einander:
was kompt / darvon such die Wurzel / bringe dise vnnd baide felder in eine Summen /
vnd multiplicir solche in das dritte theil von der höch des stocks (die du auch messen 30
mußt) so kompt dir die Fülle oder der Leib im Stock.¹

Ein Stock 5 schuch hoch / nach dem seiger / hat vnten ein ablenzen Boden 42
8 schuch lang vnd 6 breit / oben hat er einen gleichförmigen oder ehnlchen Schnitt
4 schuch lang vnd 3 breit: 6 mal 8 ist 48 / soviel gevierter Schuch sein am Boden /
3 mal 4 ist 12 / sovil sein gevierter Schuch oben am Schnitt oder Tisch. 12 mal 48
ist 576 / hiervon die wurzel ist 24. Setze 12. 24. vnd 48 zusamen / so werden es 84 /
diß in das drittheil von der höch der 5 schuchen / oder das drittheil von 84 nämlich
28 in 5 / macht 140 Cubic / oder gewürffelte Schuch / sovil ist am Stock.

52. Behende vergleichung des geraden Regelftocks
mit der Wellen oder Walger.

Ex Cor. 1. Th. 17.

In einem jeden Regelftock stehet ein Walger gleicher höch / vnnnd hat den obern Boden oder Tisch mit dem Stock gemein / also das der Stock die wellen oder walger gleichsam bekleidet / mit einem Glockenweiten Rock.

Wann du nun hast die diametros von baiden Böden / zum Exempel 9 vnd 15 / so multiplicir den kleinern 9 in sich selbst / kompt 81 für den Walger / multiplicir in auch in den grössern 15 / kompt 135: multiplicir ferners den vnderscheid 6 inn sein drittheil 2 / macht 12 / das setze zu 135 / kompt 147 für den Stock. Wann nun der
10 Walger wigt 81 pf. so wigt der Stock 147 / vnd der Rock vmb den Walger 66. Wäre das Gewicht des Walgers anderst / so such durch detri, wievil Gewichts in der hie gefundenen proportz auff den Stock komme.

Zu wissen den Rock gerad zu; von dem vnderscheid baiden diametrorum, zum Exempel 19 vnd 22 / welcher ist 3. nim das drittheil 1. setz es zum kleinern 19 / das macht 20. das multiplicir in den ganzen vnderscheid 3 / bringt 60 / soviel ist des Rocks / wann die Wellen ist 19 mal 19 / das ist 361: leg hernach der Wellen 361 iren Rock 60 an / so machts den Stock 421. Gilt gleich Walger vnd Stock mit einander seyen hoch oder nider / nur das eins so hoch sey als das ander.

53. Von rund aufgenommenen Stücken oder Rinden
des Regels vnd des Walgers.

Ex Coroll. 2.

Wie bey No. 46 gemeldet / wann ein Cylinder oder Walger mitten auß dem andern herauß genommen wirt / so bleibt ein Figur gleich einem Rohr / oder Rinden / dise lesset sich durch ein Regelrundes Feld noch einmal aufschelen / so das zwei Rinden drauß werden / die eussere vnden schneidig / oben brait / zum Walger gehörig / die innere vnden brait oben schneidig zum Regel gehörig / zuvor No. 52 hat sie der Rock geheissen.

Seind bald zurechnen: laß den innern diameter sein 5 den eussern 11 der vnderscheid ist 6 dessen ein 3theil 2 zu 5 gesetzt macht 7. ferners 2 drittheil 4 zu 5 gesetzt / macht 9. multiplicir beide 7 vnd 9 in den ganzen vnderscheid 6 / so kompt für den
30 Rock 42 / für die eussere Walgerschelff 54 / sie seyen hoch oder nider.

Vnd wann sie auch gleich nicht zwischen zweyen gleichschwebenden Böden stünden / sonder der obere Tisch wäre ableitig / so braucht man doch die kürzere diametros am Schnitt / vnd rechnet mit denen auch recht: allein zuwissen daß das Regelfeld / welches dannzumal Rinden vnnnd Rock von einander schelet / nit recht rund / sonder von einem getruckten Regel sey / der eine andere Arlini hat / dann die Wellen.

54. Regelfstöcke vndereinander zu vergleichen.¹

Ex Coroll. 2.

43 Wann baide Stöcke gleiche Böden haben vnden vnnnd oben / so helt sichs mit ihrem Raum / wie mit baiden höchinen / Multiplicir des bekanten raum in des unbekanten höch / was kompt dividir mit des bekanten höch / so kompt dir des unbekanten

Raum / Gewicht / Leib / oder Fülle / nicht anders als wären es ganze Regel auff einem Boden / oder ganze Walger; so heist sichs auch mit den Rinden vnd Rößen.

Ex No. 5. partis 3.

55. Wann der Regel neben dem Spitz auff das runde Dach / doch gerad nach der Yrlini hinab getroffen ist.

Hie stehen wir gar an mit der Kunst / könden noch nicht rechnen wie groß jeder Schnitt ist / wann der abgehawene Schnitt (an welchem der Gipffel oder Spitz geblieben) auff seinen Schnitt gestellt / den rücken nicht vom Spitz vnder sich sendet / sondern entweder gleich ligt / oder der Spitz niderer ist. Wår vns doch hoch vonnöthen das wir nur diese Schnitte wissen möchten / wann das Beihel oder der Schnitt der Yrlini gleich nebens gelauffen / müssen noch zur zeit von aussen herum gehen 10 wie die Raß omb ein haisses Koch. Vnd erslich wann der Boden eines solchen Schnittes (der ist aber ein Eirkelschnitt) in das dritte theil der höch des Regelschnittes multiplicirt wirdt / so bekompstu etwas weniger / dann des Schnittes Leib in sich heist: dise rechnung fählet sovil weniger / so näher man mit des Schnittes Boden an einen halben Eirkel raichet. Hingegen wann der Boden ein gar schmales Schnittlin ist / solte es am meisten fählen / ist aber alsdann der ganze Schnitt klein / vnnnd derohalben auch der fählt vnachtsam.

Fürs ander wann auß dises Schnittes boden vnd höch ein Wellenschnittlin wie No. 47 / gerechnet wirdt / gleich als wären baide des Regels vnnnd der Wellen schnitte (so gleiche höche haben) auch am Leib einander gleich / so geschicht der sachen zuvil 20 vnnnd fählet am meisten / wann der Boden ein halber Eirkel ist / dann das Wellenschnittlin ist alsdann 14 / der halbgespaltene Regel nur 11 / da doch dise rechnung sagt / sie seyen einander gleich: je kleiner aber der Boden / je weniger dise rechnung fehlet / vnd je gleicher dise beede schnittlin einander werden.

Merck wie oben / durch den Schnitt gewinnt man einen Schnitt / vnd diser Schnitt hat vnd be-
heißet seinen Schnitt / das ist / das zeichen des beschehenen schnitts nämlich einen flachen boden / mit einem frummen bogen umbzogen.

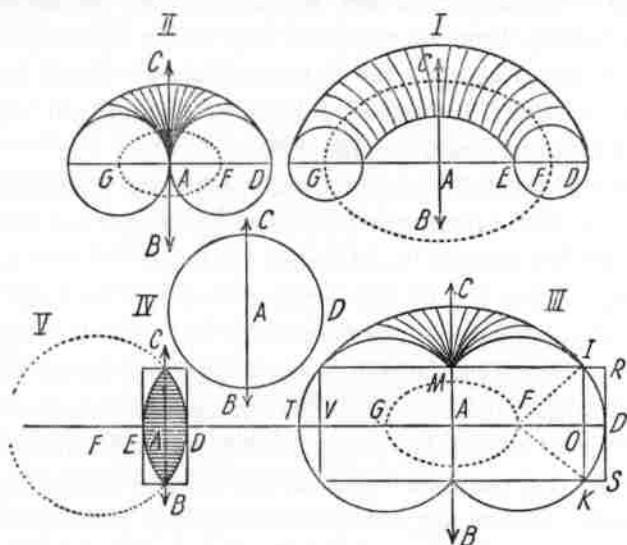
Fürs dritte so wil es das ansehen gewinnen / man muß ihme also thun. Demnach ein solcher Regelschnitt am Schnitt ein furm gewinnet / die wir Hyperbolam haissen / wie No. 29. gemeldet / als solle man das Feld in diesem schnit in einen Triangel verwandlen / der eine Boden lini habe / so lang als die Hyperbola hat / diser Triangel wirdt alsdann vber die Hyperbolam oben auß gehen. Wann dann das dritte theil der höch von diesem Triangel in den flachen Boden des Schnittes multiplicirt wirt 30 alsdann soll kommen des Schnittes Leib. Wie aber das Feld in einer Hyperbola zu messen sey / das lehret Archimedes im buch quadratura Paraboles, in der vneins ersten / vnd eins mehr dann der letzten proposition: besihe No. 18. †

Ex Suppl. Th. 18.

56. Allerhand Ringe nach irem Leib oder Gewicht kunstlich zumessen.

Du mußt wissen was der Ring inwendig am Schnitt für eine gestalt gewinnen werde / ob sie auch also ¹ beschaffen / das ein gerade lini durch das centrum gezogen / 44 sie in zwey gleiche stück abtheile / deren das ein am ring gerad einwärts / das andere außwärts stehe: dann so es ein Triangel oder fünffeck oder sonst ein Figur von ungeraden zahlen wäre / so traw nicht / es lige dann der ring omb vnnnd omb / auff

der einen seitten auff / vnnnd rechte ein schneide gerad übersich. Wann dann die Figur also recht geschidet ist / so such das Feld an deroselben / als hie bey No. I. das Feld



Die 11. Figur.

von ED, auß deß Cirkels diameter, nach der 14. Lehr. Hernach misse deß rings baide braitten oder diametros, den innern vnd den euffern / durch welche erlerne baide ombkrais innen am Ring vnnnd aussen / nach der 6. Lehr / oder messe sie gleich anfangs mit einem Faden / wann du kauft. Nimb das mittlere von baiden ombkrais / multiplicir inn das Feld am schnitt ED, so kompt dir der Leib deß gangen Rings.

Ein Löwenkopff an einer Seulen / hette einen runden Eheren Ring im Maul eines Zolls dick / innen 8 Zoll weit / aussen 10 Zoll. Wievil Erhes ist daran? ich wil
 10 setzen er sey nicht rund / sondern vierecket an der leng / von behendigkeit wegen. Demnach nun baide Weittine seind 8 vnd 10 / als ist das mittlere 9 / wann dann 7 gibt 22 nach der 6. Lehr / so wirt 9 geben 28 vnd zwey 7theil / diß in einen gevierten Zoll multiplicirt / kommen 28 gewürffelte oder volle Zölle vnnnd 2 sibentheil / soviel wäre am Ring wann er vierecket wäre. Nun er aber rund ist an dem Leib / so sprich durch die 24. Lehr / 14 gibt 11 / was 28? kommen 22 solcher Würffel vnd fast ein fünfftheil: soviel Erhes ist am Ring.

57. Vom beschlossnen Ring vnd Kugel darinnen.

Ex Coroll.

Den beschlossnen Ring sihestu bey II. abgemahlet. Ist er nu rund / so Multiplicir das Feld am schnitt AD inn seinen ombkrais AD, so kompt dir sein Leib: daher
 20 dann volgt / das die Kugel von AD, die innen im Ring herumb lauffen mag / sey gegen ein solchen beschlossnen Ring / wie 7 gegen 33.

58. Zu messen ein Apffel, oder Quitten, oder Kürbisrunden Raum.

Als bey No. III. hie zu sehen. Da finden sich mehr dann ein Cirkel (wie auch droben beim Ring) vnderschiedlicher grösse / die müssen in zahlen gegen einander verglichen

4) welchen

8) Ehren

vnd nebens der Apffel inn zwey thail nach dem Sinn getheilet werden / inn den inwendigen Leib / vnnnd in sein Gürtel aussen vmb ihne herum: demnach so thue ihm also / messe den diameter oder die höch¹ des Apfels / mess hernach die braitte oder weitte TD, die halbre / damit du wissest wie lang TA sey / zeuch ab von der höch / so bleibt / wievil bey A abgehe / das es nicht ein ganzer Cirkel; sovil nimb auch aussen hinweg / nämlich TV, demnach halbir die VA, vnnnd mit dem halben diameter GA such seinen vmbkrais GF, für eins.

Ex Coroll. ad Th.
19.

Zum andern auß der höch TV oder DO, such das Feld am Cirkelschnitt IDK, durch die 17. Lehr / das nimb doppelt vnd zeuch es ab / vom Feld am Cirkel / so bleibt dir das abgestuhte Feld zwischen IK, MN vnnnd den Bögen IM, KN, das multiplicir in den vmbkrais GF (bey No. III. hie) so kompt dir wieviel der Apffel inwendig am Leib habe / zwischen den linien V vnd O, wär also noch vmb die eussere Schelff oder Gürtel zuthun / die braucht mehr kunst / dann sie muß nach zweyen stücken gerechnet werden. Erstlich mustu auch das Feld IKD multiplicirn inn den vmbkrais GF. (Nota wann du zuvor wol berichtet vnd geübet bist / so kanstu baide bißhero gelehrt operationes vnder eins verrichten / nämlich also / das du droben den Cirkelschnitt IKD nicht doppelt / sondern nur einfach von des Cirkels Feld abziehst / vnnnd das bleibende inn den vmbkrais GF multiplicirest / so kompt dir der Leib innerhalb der Gürtel vnnnd diß erste stück der Gürtel mit einander). Hernach anlangend das oberige stück von der Gürtel / das ist gleich so groß als die Gürtel diser braitte vmb die Kugel / welcher halber diameter ist FD. Muß also diß Kugelgürtel nach der 43. Lehr rechnen / vnd zu dem obigen setzen / darmit hastu den ganzen Apffel.

Ex Coroll.

Nicht anderst handelt man mit einer Rüttenrundung / allein das man zu deren brauche die Ablänge Kugel oder Ay / vnd zu einer braitten Kürbissrundung die getruckte Kugel.

59. Zu rechnen einen Citronenrunden Raum.

Auß diser Figur folgt die Faßrechnung zum guten thail / vnnnd ist bißhero fast vmb diß zuthun gewest: wirdt gerechnet wie die Apffelrunde / doch kürzer / nämlich also.

Besize hie oben bey No. V. die Citronenründung CEB mess ihre lenge BC, vnd ihre dicke ED, vnd auß deren halben theilen EA vnd AC, such (nach der 10. Lehr) den diameter des ganzen Cirkels hie mit puncten fürgestellt / dessen halbertheil ist FD, darvon zieh ab DA bleibt FA, dessen vmbkrais such auch / vnd multiplicir ihn wie No. 58 / inn das Feld am Cirkelschnitt CBD. was kompt das behalt / für eins.

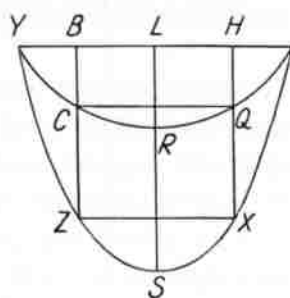
Biß hie die 11. Figur.

Zum andern such die ganze Gürtel vmb die Kugel / deren halber diameter ist FD, nach der 43. Lehr / dannen nimb hinweg was du erst behalten / so bleibt dir der Leib von der Citronenründung CEBD.

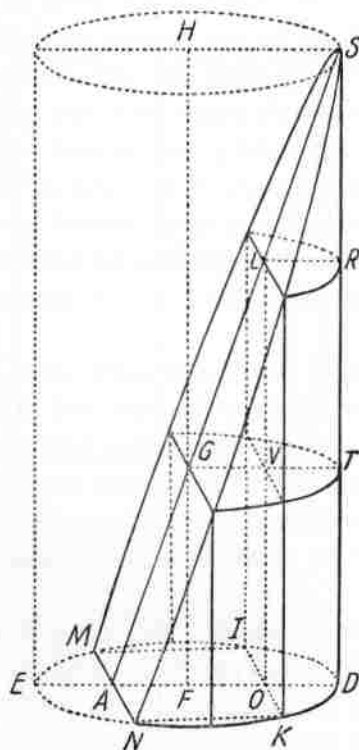
Inn der 14. Figur allhie siehestu einen Walgerschnitt MNDS, so groß als die Apffelrunde / wann der Cirkelschnitt MDN gleich ist dem Cirkelschnitt MND in der 11. Figur No. III. vnd die höch DS in der 14. Figur / dem vmbkrais des ganzen Cirkels MDN gleich ist. Also ist auch das kleinere Walgerschnittlin LRS am Leib gleich der Citronenründung CEBD in der 11. Figur bey No. V. darumb istß auch einerley rechnung.¹

46 Nimb das Exempel / dessen wir vns bißhero gebraucht / seze die lenge CB in der
 11. Figur vnnnd No. V finde sich 54 / vnnnd ED 6 / das also CA 27 vnnnd AD 3 seze:
 da findestu durch die 10. lehr den diameter 246 / halb
 123 / vnd durch die 12. lehr / wann 123 wirt 100000
 oder der ganze sinus, so gibt 27 den sinum 21951
 auff 12 gr. 40 min. 51 sec. vnd AD 2439 / diß von
 DF 100000 genommen / bleibt AF 97561 / vnnnd
 sein als eines halben diameters zugehöriger vmb-
 kreiß wie No. 47. ist 612994. So findet sich auch nach
 10 der 17. lehr / der Eirkelschnit CBD 71620000.
 Multiplicir beide miteinander / so kompt dir
 4390000000000 / das behalt / für eins. Darnach
 so ist schon bey No. 43 gefunden worden / wann der
 diameter in der kugel ist 200000, vnd es gehet
 mitten vmb die Kugel herum ein Gürtel / deren
 halbe breite ist 21951 / oder die dicke 2439 / so heist
 alsdann die Gürtel am Leib 4430 etc. noch 10
 ziffer. So zeuch nun ab jenes 4390 etc. von disem /
 bleibt dir 40 etc. noch 10 ziffer / wie bey No. 47.
 20 vnnnd diß ist alsdann die fülle der Citronenrun-
 dung / da die ganze Kugel hielte 418879 etc. noch
 10 ziffer. Were also diße Citronenrundung weniger
 dann der 1000 theil von der Kugel.

Ein andere kürzere rechnung der Citronenrun-
 dung findet sich vnden bey No. 63 / vnd gehet
 nicht auß der Gürtel vmb die grosse Kugel / son-
 dern auß dem Kugelschnit der am Boden so breit
 ist / als hoch diße Gürtel / das ist / der ober-
 ruckß einen gemeinen Bogen hat mit diser Citro-
 30 nenrundung.



Die 14. Figur.



60. Zurechnen eine Citronenrundung baider seyt gleich abgestuft / wie ein Faß.

Ex Th. 22.

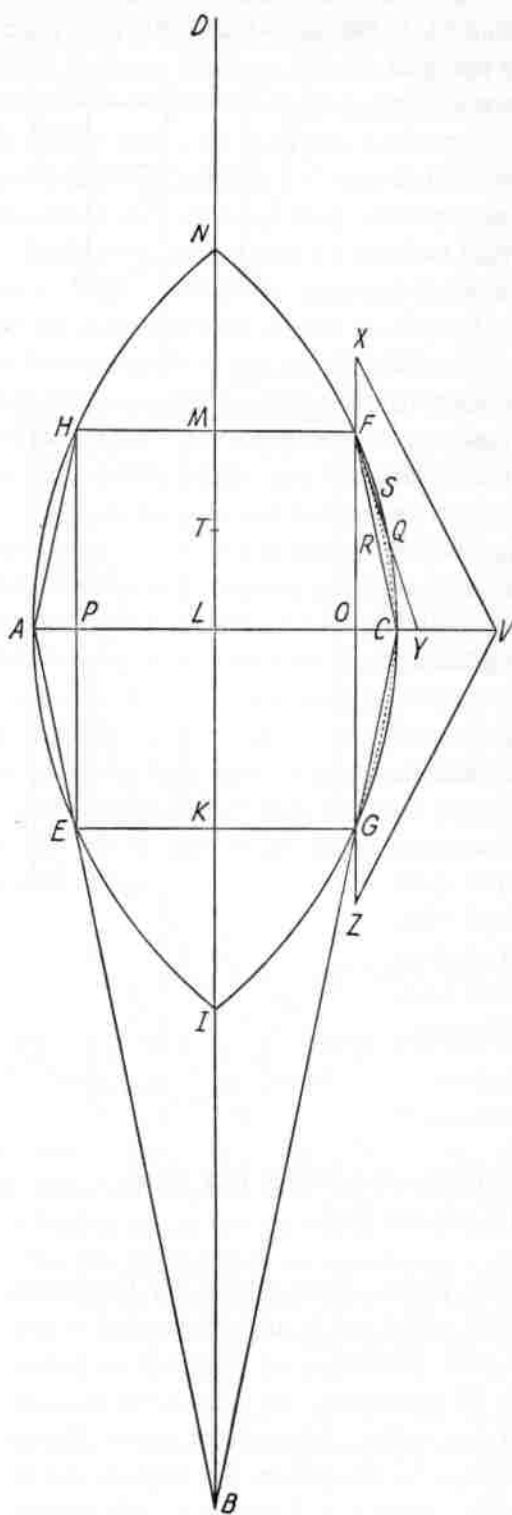
Disse Figur verstehe in hie beygefügt der langen Figur / durch die Buchstaben
 FSQCGKEAHM. Disse zurechnen / mustu erstlich wol in acht nemen / das in ders-
 selben drey Eirkel inn vnderschiedlicher größe fürfallen / der kleinste ist an beiden
 Böden / durch die diametros EG vnnnd HF verstanden / die sollen gleich sein. Die
 Binder haiffens die weite. Vnd diße soll man messen / wie auch den andern Mittel-
 messigen am Bauch / durch seinen diametrum AC einzubilden. Der größeste aber ist
 an der krümme oder am Bogen der Taufeln / nämlich HAE oder FCG, diser formirt
 7 40 die 1 ganze Citronenrundung durch die zwen Bögen NAI vnd NCI. Dessen diameter

22) wenider

29/30) Citronenrundug

Die 18. Figur.

Gehört zu No. 10.



muß balds mit messen vund mit rechnen erlernet werden / dann er ist der fürnemste / weil ohn ihne alle rechnung unvollkommen wäre / ihme allein gehört die sinus zahl völlig / die andere müssen darvon nicht mehr haben / dann ihnen ihr Maas gibt. Also aber kompt man zu dessen diametro vnd halben diametro hie mit BT bezeichnet. Über die beide linien 10 EG vnd AC, muß man auch messen die lenge entweder zwischen beiden Böden / ist GF, KM, oder EH: oder doch zwischen dem mittel puncten C vnd dem einen Boden / ist CF, oder CG.

Dann nimb den halben diameter des Bodens KG oder LO vom halben diameter des Bauchs LC, so bleibt OC, ist die höhe des schnitzes GFC 20 auß demselben grossen Cirkel; vund auß dieser höhe mit hülff der halben lenge OF, (ist der sinus des halben Bogens CF) rechne nach der 10. Lehr / desselben grossen Cirkels diametrum. Oder so du nicht die lenge OF, sondern die lenge CF wüßtest / so multiplicir sie in sich selber / vnd dividir was kompt / mit CO, findet sich als dann gleich anfangs der ganze dia- 30 meter des grossen Cirkels.

Fürs ander / vnd wann nu der diameter dieses grösssten Cirkels bekannt ist / so verwandelt man alle mit messen gefundene zahlen inn die gewonliche sinus zahl / durch die 12. Lehr / also das diser des grösssten Cirkels halber diameter sey 100000 / die andere linien / nämlich KG, OC, vnd OF auch jede ihr maas be- 40 komme. Vnd rechnet hierauff die Feldung des Cirkelschnitzes GFC

nach der 17. Lehr. Vnd wie der halbe diameter des Bodens KG hie sein aigne
 lunge bekomp / vnnnd weniger ist dann 100000 / also muß auch sein umbtrais
 vnnnd seine feldung durch die 12. 13. 14. Lehr darauff gerechnet werden / dann wir
 werden dessen alles hernach bedürffen.

Drittens so soll diser stumpff / oder dise abgestuhte Citronenrundung EAH,
 FCG dem Sinn nach / getheilet werden erstlich in zwey theil / das ein ist die inwendige
 Wellen oder Cylinder EPHFOG, das ander ist die Gürtel / Riemen / oder Schelffen
 vmb dise Wellen oder Walger aussen herum / mit den Buchstaben EPHA, GOFC
 bezeichnet. Weil dann bey dem andern puncten die höch dieses Cylinders GF, sampt
 10 dessen feld am Boden GE oder FH bekant worden / so rechne sein fülle durch die
 24. Lehr. Die Gürtel vmb dise Citronenrundung hat widerumb zwey stück (wie auch
 No. 58 / die Gürtel vmb den Apffel) deren das ein gleich ist einem geraden spalt /
 der auff dem Boden FGC stehet / vnd so hoch ist als lang des faßbodens EG
 umbtrais ist / wirdt gerechnet nach der 24. oder 44. Lehr. Das andere stück ist ein
 ganze / aber kleinere Citronenrundung / doch auß dem vorigen größern Cirkel
 genommen / deren Axlini verstanden werden soll FG, vnnnd der Bogen FCG. Die
 wirdt nach der 59. Lehr gerechnet. Setzet man nun hierauff beide stücke von der
 Gürtel / vnd die obgerechnete Wellen zusammen; so findet sich wievil Raums inn der
 größern aber abgestuhten Citronenrundung sey / nach der sinus theilung / beim
 20 andern puncten eingeführt.

Zum Exempel / Ich fände GE vnnnd FH 19 / CA 22 / vnnnd FG 27 / der Bogen
 FCG sey Cirkelrund rings herum / da wirdt CL 11 sein / vnnnd LO 9 ein halbes /
 vnd OG 13 ein halbes / OC aber anderthalbs. Hierauff rechnet man des ganzen
 Cirkels FCG diametrum 123 für eins. Zum andern vnd wann dann für halb 123 /
 genommen werden 100000 / so muß OG werden 21951 / vnd OC 2439 wie No. 59.
 derhalben es bey dem hievorigen process vnnnd zahlen bleibt vnnnd findet sich die
 feldung FGC, 716 etc.

Also weil der diameter des größesten Cirkels ist geweest 123 / ist aber worden
 100000 / vnd sein umbkreiß 628318 / so wirt der diameter 19 / seinen umbkreiß so
 30 groß gewinnen / 97057: vnd gleichfalls / weil die Cirkel gegen einander seind / wie
 48 die vierungen ¹ von den diametris, vnnnd des Cirkels feldung ist 314 / etc. (vnd diß
 darumb weil man dem diameter die sinus theilung 100 etc. gegeben) so neme ich
 nach der 12. Lehr / den diametrum 123 gebiert / nemlich 15129 / vnnnd also auch
 EG, 19 gebiert / nemlich 361 vnd rechne hierauff auch die feldung des Cirkels EG,
 749614823. Fürs dritte / so rechne ich erstlich den Cylinder, nemlich multiplicir ich
 das feld EG iehgesezt / in die höch GF, das ist OF doppelt nemlich 43902 so kompt
 32900000000000: darnach rechne ich den spalt / durch multiplicirung des Cirkel-
 schnitzes GFC, 716 / etc. in den umbtrais am Boden EG, 97057 / kompt das stück
 an der Gürtel 695000000000. Entlich rechne ich auch die kleine Citronenrundung /
 40 nach der 59. Lehr / kommt 40 etc. zum andern stück der Gürtel. Also gewint die
 Gürtel 735000000000, vnnnd mit zusehung des Cylinders 329 etc. findet sich die
 Citronenrundung 4025000000000.

4) bedürffen

10) FK statt FH

41) 392 statt 329

Ein behende
Bruchrechnung.

Bissher seind wir mit einem Exempel von einer Lehr zu der anderen gangen / vnd hat vns allwegen die vordere Lehr zu der nachfolgenden gebienet. Ist also der ganze process hin vnd her zertheilt vnd versteckt worden / wil derhalben jezo ein anders Exempel geben / in welchem der ganze process durch alle vorgehende Lehren gefürt / beyeinander vnd für augen stehet / damit man sehe / wievil arbeit darauff gehe. Darbey dann dise zwey stücke zumercken / Erstlich / das die ordnung / welches vor oder nach zurechnen / nicht eben allerdings / wie im vorigen / gehalten werden müsse / dann es jezo nit mehr vmb die vorige Lehren zuthun / sondern fürnämlich vmb die fürhabende 60. Lehr / gilt vns derwegen nach dem zweck zustreben / so kurz als wir immer könden. Fürs ander weil ich kurze zahlen brauche / derohalben es off 10
Brüche geben wirdt; so mercke das alle ziffer / welche nach dem zeichen (. folgen / die gehören zu dem Bruch / als der Zehler / der Menner darzu wirt nicht gesetzt / ist aber allezeit eine runde zehnerzahl / von so vil Nullen / als vil ziffer nach dem zeichen kommen. Wann kein zeichen nicht ist / das ist ein ganze zahl ohne Bruch / vnd wann also alle ziffern nach dem Zeichen gehen / da heben sie bißweilen an / von einer Nullen. Dise art der Bruchrechnung ist von Jost Bürgen zu der sinus rechnung †
erdacht / vnd ist darzu gut / das ich den Bruch abfürzen kan / wa er unnötig lang werden wil / ohne sonderen schaden der vberigen zahlen; kan ihne auch etwa auff erhaischung der notdurfft erlengern. Item leset sich also die ganze zahl vnd der Bruch mit einander durch alle species arithmeticae handeln wie nur ein zahl. Als 20
wann ich rechne 365 gulden mit 6 per cento wievil bringt es deß Jars interesse?
das stehet nun also:

$$\begin{array}{r} 365 \\ 6 \text{ mal} \\ \hline \text{facit } 2190 \end{array}$$

vnd bringt 21 gulden vnd 90 hundertheil / oder 9 zehentheil / das ist 54 fr.

Nun last vns zum Exempel schreiten: vnd seze es were ein Citronenrundes Faß / an welchem der Boden GE an seinem diametro oder breite (die Binder haiffens die weite) hette meines fürhabenden Maasßstabs drey theil / die tieffe CA hette 4 innerlich / die lenge GF auch innerlich vnd gerad zu / hielte 4(12 / oder scherffer 4(1231; die 30
ursach diser scherffe deß Bruchs wirt in folgenden Lehren folgen / No. 78. Wie rechne ich vor allen dingen deß Cirkels FCG diametrum, auß welchem die krümme zu den Taufeln genommen ist. Dann ich hab LO 1(5, nemlich halb sovil als GE, ich hab auch LC 2, derowegen so ist CO (5, vnd halb GF das ist / OG helt 2(06 etc. dessen vierung 4(25, nach der 10. Lehr / dividir ich mit dem Holtz / sinu verso CO (5, so findet sich 8(5, so lang ist das vbrige trum vom diametro dises grossen Cirkels NAI oder NCI, oder FCG. Seze nun das Trümlein CO (5, hingu / da hab ich den ganzen diametrum 9 / vnd den halben 4(5. Vnd weil ich auch die ganze Kugel von disem Cirkel haben muß / so nemb ich / nach der 13. Lehr / den Cubum von 9 / sprechend / 9 mal 9 / 9 mal macht 729 / das multiplicir ich in das Cirkelfeld 3(141 etc. 40
auß dem Täfelin No. 12. nach der 28. Lehr / vnd seze zu dem was kommt ein drittestheil / dividir es miteinander durch den cubum eines diametri 2(0 etc. nämlich durch 8(000 etc. so kompt die Kugel zu disem Cirkel / vnd helt meines fürgenommenen masses 381(7035 / jede vnitet würffeltangß verstanden.¹

49 Diese Kugel muß ganz außgenommen werden / darmit mir bekandt werde die
 vberbleibende Gürtel vmb sie herumb / so dick vnd breit / das sie vberall den Cirkels
 schnitz FGC halte. So nemb ich nun erslich hinweg beide Kugelschnitz / den obern
 nach der erlengerten fläche FH den vndern nach GE abgeschnitten / deren Bögen
 nach FN hinauff vnnnd nach GI abwerß gehen. Vnnnd ob wol dise Kugelschnitz hie
 nicht völli abgemalet so wissen wir doch allbereit den halben diameter zur Kugel /
 ist die höch zur halben Kugel (nach CA abgeschnitten) nämlich 4(5. wir wissen auch
 die halbe braitte dieser Gürtel / nämlich OF, 2(06 etc. Wann dise von 4(5 wirdt abge-
 nommen / so bleibt die höch des Kugelschnitzes 2(4 etc. multiplicir sie nach der
 10 38. Lehr in 100 / vnnnd was kompt / dividir mit 4(5. so gewinnestu 54(2 / darmit
 nimb auß dem Täfelin daselbst die zahl 75680 die dividir mit 8 / vnd das facit
 multiplicir in den cubum von 9 / nemlich in 729 vnnnd wirff die 5 letzte ziffer hin-
 weg / kompt 69 / der Leib zum Kugelschnitz / deren zwen seind / zusamen 138.

Nun komen wir auch zum Walger zwischen ihnen beiden / dessen höch ist GF, die
 ich gemessen hab 4(12 etc. aber der halbe diameter zu seinem vnnnd beider Kugel-
 schnitz gemeinen Böden / ist 4 / nemlich vmb CO weniger / dann der halbe diameter
 zur Kugel.

Hierauff muß ich rechnen das Feld am Cirkel / das geschicht leicht durch das
 Täfelin No. 12. vnnnd durch die 13. Lehr / dann ich muß das Cirkelfeld 3(14 inn die
 20 vierung vom halben diametro, nämlich in 16 multipliciren / thut 50(2655 / diß
 in die höch GF, 4(12 etc. multiplicirt, so kompt der Walger 207(26 etc: vnd merck
 das hie der vmbtraiß zu disem Boden / welches halber diameter 4 / gleich halb soviel
 ist als 50. nämlich 25(1328 / das behalt hinunter. Machen also Walger vnnnd baide
 Kugelschnitz samptlich 345(14. das nim nach der 43. Lehr von der Kugel / droben
 gefunden / bleibt der gesuchten Gürtel 36(5654.

Vnd weil auch in dem fürhabenden Citronenrunden Faß EAHFCG ein Walger
 EPHFOG zurechnen ist / gleicher höch mit den vorigen / dessen halber diameter
 ist 1(5. damit ich nu hernach nicht wider zuruck gehen müße / so multiplicir ich nach
 der 13. vnd 44. Lehr / seine vierung 2(25 inn den jetzgefundenen Walger / vnnnd
 30 dividir, was kompt mit dessen halben diameters vierung 16 / damit kompt diß eine
 vnnnd größeste stück an der fürhabenden Figur / 29(14, zubehalten.

Wir seind nu biß an baide Gürtelen kommen / die müssen auß dem Cirkelschnitz
 GFC gerechnet werden: da hab ich die höch CO (5. die multiplicir ich mit 100 /
 thut 50, diß dividirt mit dem halben diameter 4(5 / gibt 11(1 / darmit finde ich
 im Täfelin No. 17 / 686, das multiplicir ich nach derselben Lehr inn die vierung des
 halben diametri 20(25 / vnnnd schneide ab die vier letzte ziffer / so findet sich 1(39. Ist
 also diser Cirkelschnitz nicht viel braitter dann meines Maasses eins / lang vnnnd brait
 verstanden. Multiplicir disen Schnitz in den vmbtraiß des Bodens am ersten Walger /
 der kurz zuvor ist auffbehalten worden / nämlich in 25(1328, so kompt 34(9 / ist
 40 der theil von der Kugel Gürtel / die sich einem Spalt vergleicht / Nimb ihn hinweg
 von der ganzen Kugel Gürtel 36(5654 / nach der 59. Lehr / so bleibt die kleine
 Citronenrundung 1(65. Vnnnd diß ist der eine theil von der andern Gürtel vmb unsere
 fürhabende Figur herumb gezogen / welche durchgeheth durch EAFP vnd FCGO.

4) fläche FK der vndern

11) 7568

22) halber fehlt

Der andere theil ist bald zu finden / vergleicht sich auch einem Spalt / so hoch als lang der umbkreis EG ist / nach der fürhabenden 60. Lehr. Multiplicir derothalben den vorgefundenen Spalt mit dem ganzen diametro EG, 3. was kompt / dividir ich mit dem diametro des Bodens am größern Walger oder Kugelschnitt / nämlich mit 8 / so findet sich 13(0934 / ist das andere stück unserer Gürtel / vnd also die ganze Gürtel 14(74. Setze darzu die obgefundene Wellen oder Walger drinnen / nämlich 29(14 / so hab ich endlich den ganzen Raum der fürhabenden gleich abgestuften Citronenrundung / nämlich 43(88.

Wann nun ein Faß diese Maasse alle hatt / so ist nicht viel weniger dann der dritte theil am Bauch / vnnnd ein anderer Weinvisierer welcher zwen Cylindros rechnen 10 wolte / einen mit dem diametro des Bodens 3 / den andern mit dem diametro des Bauchs 4 wie sie pflegen / der würde den einen finden ¹ 29(14 / den andern 51(79. 10 Wann ers dann halbirte / so funde er 40(46 / solte 43(88 sein / vnd käme Er also in einem doppelten dreyling mehr dann umb drey Emmer zu kurz. Nach der doppelten Regelsstockrechnung No. 52. das ist / wann der Bauch nicht gebogen were / sondern gerad von beiden Böden nach dem Weibel striche / vnd umb das Weibel einen Meissen machte wie die Römische Fässer / nach Clavij anzeig / so thete ich zu des Bodens [†] diametro ein drittheil von dem vnderscheid beider diametrorum 1. vnnnd multiplicirte also diß in den vnderscheid / das brächte 3 vnnnd ein drittheil / diß setze ich zu der vierung von 3 das ist 9. keme 12 vnd ein drittheil. Diß multiplicirte ich in den 20 kleinern Walger oder Wellen 29(14 / vnnnd dividirte es mit 9 / käme mir 39(93 / noch weniger denn zuvor / bey der gemeinen halbirung.

Ob nun wol nicht ohn / das dieser process vnderweilen nötig seye: so muß ich doch nebens bekennen / das er sehr mühselig; sonderlich in dem / das man nur allein von des allerkleinsten Stücks wegen erst eine ganze Kugel zu einem solchen Bogen / wie die Taufeln seind / anatomiren muß. Hierauß dann folget / das er acht schwäre particular processe begreiffet / vnnnd hette deren noch wol mehr / wann die zwen obrige Tafeln No. 17. zu den Eirkelz vnd No. 38. zu den Kugelschnitzen nicht weren.

Were derhalben ein erwünschter handel / wann sich drunten bey No. 63 / ein 30 anderer process funde / zwar auch durch einen Kugelschnitt / nicht aber durch disen / der obz vnd vnder der Citronenrundung vnnnd Gürtel stehet / sonder durch disen / in welchen die kleine Citronenrundung gleich gerecht ist / nach der krümme der Taufeln.

61. Zwen gefesselte Regel.

Wann auß zweyen gedoppelten Regeln je der ein so hoch ist / als diß der ander ist / [†] an der mittlern Schneide oder Bauch / so gibt ihnen die dicke an Weichen das Maas zu eines jeden raum.

62. Ablenge vnnnd gedruckte Kugeln gefellet / vnder sich selbst vnd mit der gerechten Kugel.

So tieff ein getruckte Kugel nider getruckt ist / so viel weniger Leibes hat sie / dann ein gerechte Kugel / in welcher ein solche gedruckte Kugel oder Linsen mit dem ganzen 40 umbkreis des Bauchs anstreicht.

Vnd hinwiderumb / wann in eine getruckte Kugel ein andere Ablenge eingesehet ist / mit beiden ihren würbeln gleich inn dem Bauch der getruckten anstreichend / das ist / wann die Ablenge Kugel so hoch oder lang ist / als breit die gedruckte ist in der mitte / vnnnd hingegen die Ablenge so dick in der mittlen / als hoch die getruckte ist / so gibt ihnen abermal die dicke auß der rundung irer Beuche das Maas zu einer jeden Leib oder fülle / gegen einander gehalten.

Also vnnnd noch ferners zugehen / wann in dise dritte Ablenge Kugel oder Ay / widerumb ein rechtrunde Kugel eingesehet wirt / gleich inn ihren Bauch gerecht mit dem ganzen umbtraß oder mittlern Cirkel; so hoch als dann die Ablenge ober ire inwendige gerechte Kugel außgehet / so vil mehr Leibs hat sie / dann solche. Hierauß folgt / das zwischen einer grossen / vnd einer kleineren Kugel / die getruckte vnd die † Ablenge die zwey media proportionalia seyen / nach dem Leib.¹

63. Kugelschnitz mit Citronenrundungen gesellet / vnnnd darbey ein kürzere rechnung der abgestuften Citronenrundung.

Ein gedoppelter Kugelschnitz / oder zwey gleiche Schnitz von einer Kugel / auffeinander gestürzet / vnnnd eine Citronenrundung so lang als breit jenne seind / vnd † so dick als hoch jenne zusammen seind / haben gleichfalls ihre Maas in den mittlern breittinen. Inn gleichem der Kugelschnitz einfach / vnd die Citronenrundung nach der leng oder Yrlinien entzwey gespalten.

20 Zum Exempel / es were von der Kugel NCI ein schnitz FGC, der hette einen Cirkelrunden Boden / so breit als FG. Hingegen were ein Citronenrundung so lang als FG, vnd so breit als OC zwey mal / es were aber CO 3, vnd OG 27 / nemlich 9 mal sovil: so wurde nach diser fůrgab / der Kugelschnitz auch neun mal sovil sein: nemlich weil bey No. 38. diser Kugelschnitz hat gehalten 185 etc. so müste die halbe Citronenrundung / so von eben demselben Cirkelschnitz gemacht / den neunten theil halten / nemlich 205872036872 / Wie dann bey No. 59 vnd 47 zusehen / das eben dise Citronenrundung gehalten 40 etc. Derowegen ihr halber theil gewest 200000000000.

In der 18. Figur
am 46. Blat.

Wir wollen auch das andere Exempel No. 60 besehen / da ist die höch CO ge-
30 west (5 / vnd OF 206155 / vnd die kleine Citronenrundung 165 / halb 825. Wann ich dann spreche / (5 gibt 825 / was 206155? so kompt 34 das sol der Kugelschnitz von CO sein. Nun such disen Kugelschnitz auff die höch CO (5 / vnd auff den halben diameter 4(5. Dann da hastu die vierung zum halben diameter seines Bodens / die ist 4(25 / die gibt das Cirkelfeld des Bodens 13(35: vnnnd wie sich helt 8(5 / das vbrig vom diametro, zum halben diametro 4(5 / so helt sich die höch (5 / zu ihrer erlenge-
40 rung (2647 / das also die ganze höch des gleichen Coni wirdt (7647 / vnnnd deren drittestheil (2549 / dise in 13(35 multiplicirt / gibt den Kugelschnitz auch 3(4. Sovil findet sich auch auß dem Täfelin der Kugelschnitz. Dann setze oo zu (5 / so wirt 50(0 / das dividir mit 4(5 / so finden sich 11 vnd ein 9theil. Such 10 oben im Täfelin vnd 1 zur linken / da findestu im Creuzwege 3661 vnnnd die different 682 / dannen das 9 theil ist 75 / das setze zu 3661 / so hastu den Kugelschnitz 3736: multiplicir ihne

36) 7647 statt (7647

37) 13(37

39) (500 statt 50(0

Nota.

mit dem cubo von 4(5 / der ist 91(125 / vnnnd schneid die 5 hinderste vom facit ab / das ist / wann du die ganze 91 in die ganze 3736 multiplicirt hast / so setze die 5 letzte ziffer vber das zeichen (hinaus / so bleibt dir 3(40536 oder kurz 3(4 / wie oben.

Sehe da wie nahe beider orten die rechnung auß No. 59 mit der rechnung auß No. 63 vberintrefte. Ich achte du mögest diser Lehr wol trauen / obschon sie noch ihren rechtmessigen beweiß nicht hat.

Auß diesem Fundament wil ich dir nun einen andern etwas kürzern process zeigen zurechnen die obgesetzte Citronenrundung / oder die rechte Fassform / in der 18. Figur / weil der ander process droben No. 60 gar zu schwer vnd lang gewesen / vnnnd das sol geschehen durch drey Exempla / da im ersten der Bauch CA / gegen dem Boden FH wie 10 gegen 9 / im andern wie 15 gegen 14 / im dritten wie 18 gegen 17 / oder die zahlen doppelt genommen / damit man füglich halbiren möge / dann das gilt gleich. Darmit wirt die Gürtel vmb die Figur herum / in allen dreyen Exempeln nur 1 dick sein / nemlich CO / welches auch ist die höch des Cirkels vnd des Kugelschnittes FGCS. Es sol aber in allen Exempeln die gerade lini CF / vnder dem Bogen CSF / an ihrer vierung halb soviel halten / als FH an seiner vierung.

Weil dann dem Boden FH gegeben wirt 18. 28. 34. so ist seine vierung 324. 784. 1156. Vnnnd die vierung von CF als jez angedinget / ist halbsovil / nemlich 162. 392. 578.¹

Der Cirkelschnitt. Wann dann dieses nach der 60. Lehr / dividirt wirdt mit der Gürteldicke CO 1. 1. 20 52
1. so kompt der diameter zum grossen Cirkel NCI, 162. 392. 578 / der halbe aber 81. 196. 289 / darmit / vnd mit der höhe des Cirkelschnittes GCFO, suche denselben schnitz nach der 17. Lehr / oder weil der Bogen klein gegen dem diameter, so brauch alda den dritten weg / darzue dir von nöten / die lenge OF, die findet sich auß der vierung CF wann man dannen weg nimmt die vierung von der höch COI, die ist auch 1. bleibt also die vierung OF 161. 391. 577. Daraus ist die wurzel 12(69. 19(8. 24(02. Diß / nach No. 17 / vierdoppelt inn ein drittheil von CO multiplicirt, oder dafür nur einfach in die ganze höhe CO. 1. vnd von dem facit das drittheil darzu gesetzt / macht den Cirkelschnitt 16(917. 26(4. 32(029. disen multiplicir, nach No. 60 / in den vmbkreis des Cirkels FH, der wirt nach No. 12. gefunden 56(55. 30 87(965. 106(81. so findet sich das größere stück von der Gürtel FCG, HAE, nemlich 956(63. 2322(26. 3420(93. Das andere kleinere stücklein wollen wir jezo / nach der fürhabenden 63. Lehr / suchen durch den Kugelschnitt FCG auß der Kugel NCI. Weil dann der schnitz klein / so brauche No. 37 den andern weg / vnnnd auß der vierung von OF als dem halben diametro des Bodens zum Schnitz / die gewesen ist 161. 391. 577. such / nach No. 12 das Feld am Cirkelrunden Boden FG / das wirdt 505(8. 1228(36. 1812(7 / das multiplicir in die halbe höch des Schnitzes / so wirdt der Leib zu diesem schnitz kommen 252(9. 614(18. 906(35.

Zur Gürtel das
größere stück.
Der Kugelschnitt.

Das kleinere stück
zur Gürtel.

Disen Leib multiplicir ich nach No. 63 / inn den sinum versum oder höch CO 1. 1. 1. was kompt / das dividir mit OF dem halben diameter am Boden 12(69. 19(8. 24(02 / so erzeigt sich die halbe Citronenrundung FCG 19(93. 31(02. 37(75. Diß doppelt / ist das kleinere stück zur Gürtel FCG, HAE, nemlich 39(86. 62(04. 75(5. Setze beide stücke zusamen / so wirdt die ganze Gürtel 996(49. 2384(3. 3496(43.

11) 14 gegen 15 . . . 17 gegen 18

31) HAG

Zu dem Walger zwischen FH vnd GE, haben wir allbereit gehabt die vierung Der Walger. von dem diametro FH, nemlich 324. 784. 1156 / die multiplicir / nach No. 24 / in OF doppelt / nemlich in GF / 25(38. 39(6. 48(04 / so wirdt ein viereckete Seulen 8223(12. 31046(4. 55534(24. auß welcher / nach No. 24 vnnnd 12 / gefunden wirdt der Walger 6457(4. 24383(78. 43616(3. Nun setze beide Walger vnnnd Gürtel zusammen / so erzeuget sich der Raum des ganzen Fäßlins 7453(89. 26768(08. 47112(73. Wann man dise Fesser nicht auff die Citronenrundung rechnet / sondern nur schlecht wie gedoppelte Regelsstöcke / nach No. 52 / so hielten sie nur 7201(3. 26161(84. 46252(19 / vnd also vmb das 30. 44. 52. theil weniger.

10 Aber nach der halbirung des innern vnnnd eussern Walgers / findet man den halt auff die Regels vnd alle andere rundungen ohn vnderscheid also / 7214(4. 26187(2. 46292. Hierauß dann zuerschen / das dieser halbirung / die bey etlichen Weinvisirern im brauch ist / nicht zu trawen seye.

64. Oliven- oder Zwespenrunde / Kriechenrunde / vnd allerhand Spulrunde Figuren zurechnen.

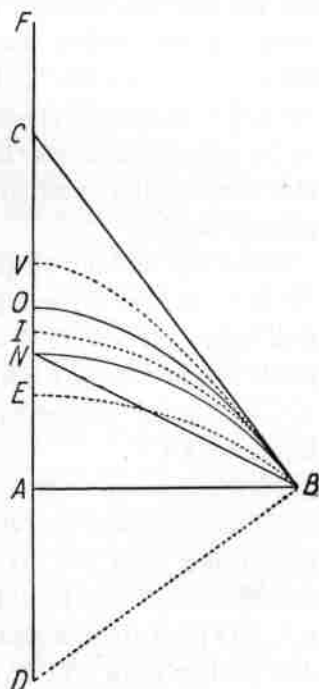
Ex opin. Th. 26.

Alle diese Figuren (doch abgestuget) finden sich an den Fäßern. Wann dann gewiß ist / was es für eine Rundung seye / so nimb allewege ihr verwante volleibige Figur darzu / die du hievor No. 34. 35. 40. hast rechnen lehren / dann wann solche ge-
rechnet / so kanstu auß derselben auch dise leibhafte Figuren rechnen. Darzu dann
20 diß weiter gehörig.

Ist es ein Olivenrundung / nämlich so der Bogen BE (welcher gedoppelt vmb die gedoppelte BA herum laufend verstanden werden muß) auß dem
† flachen oder mittlern Theil eines Ablengen Cirkels wäre / so rechne auß No. 40. den Schnitt der getrud-
ten Kugel (zuverstehen wann der Bogen EB vmb EA herum laufft) vnd multiplicir die zahl seines Raums mit der zahl einer linien / die etwas kürzer ist dann die höch EA. Ist es ein Citronenrundung durch
NB¹ zuverstehen / wann es ein gerechter Cirkelbogen ist / so rechne auß No. 37. 38. den Kugelschnitt wie auch No. 63 gesagt / vnd multiplicir seinen Leib in die völlige höch NA.

Ist es ein Zwespen- oder Kriechenrundung / nämlich so die lini BI (doppelt verstanden) auß dem rund-
spitzigen thail oder Güpffel eins ablengen Cirkels wäre / so rechne auß No. 40 den Schnitt der Ablen-
gen Kugel / vnd multiplicir seinen Leib in ein lini die lenger ist dann die höch AI, doch kürzer dann
40 AC. Das C soltu also verstehen / wann an des bodens puncten B, vnnnd an der runden Feldung IB, die lini CB anstreichet.

6) erzeuget . . . 26762(08



In der folgenden Figur.

Die 17. Figur.

Ist es eine Spulrundung / auß der Parabole, nämlich BO, so rechne auß No. 34. das Conoides Parabolicum, vñnd multiplicir den Leib inn die lini AC selbstn / die ist alsdann gerad zweymal so lang als AO die höhe.

Ist es ein Spuelrundung auß der Hyperbola, nämlich BV, so rechne auß No. 35 das Conoides Hyperbolicum, vñnd multiplicir den Leib in ein lini / die etwas lenger ist / dann alsdann die AC sein wirdt / doch kürzer dann die AF, dann AF ist die höch dessen Kegels / auß welchem das Conoides Hyperbolicum BV geschelet ist.

Entlich zu allen fällen / so dividir den multiplicirten Leib in die lini AB halbt / nämlich in das vierte thail der Arlinien inn den hie fürhabenden Figuren / oder des diameters am Boden ihrer verwandten Figuren / auß No. 34. 35. 37. 38. 40 / hie herzu gezogen / so kompt dir der Leib deren Figur oder rundung die du suchest.

Wolte dir Exempla gegeben haben / ich kan dich aber der speculation halben noch nicht auff alle scherffe versichern; wie es dann auch zu rechter instruction nicht genugsam ist / wann einer sagt / nim etwas weniger oder etwas mehr dann diß oder das: sonder er muß hinzu setzen / wie viel weniger oder mehr. Item wil es auch inn diesem Teutschen Buch zulang vñnd zu spißfindig werden / erst zu lehren / wie man die puncten C vñnd F behend finden solle.

Ex Th. 27. et partis
3. No. 4.

65. Wie dergleichen Rundungen zu vñnderscheiden / was Geschlechts ein jede sey.

Reiß auff ein papir den krummen Bogen welcher mitten ober den Bauch herüber von ein spiß zum andern / oder inn dem Kugelschnitt vñnd Conoidibus, ober den obersten güßfel herüber vom Boden biß wider zum Boden gehet / zeuch ein gerade lini von dem einen end B, biß an das ander; die halbtire bey A, vñnd laß ein andere lini auß A winkelrecht vñndersich gehen / hernach zeuch neben dem end B hin / ein lini die da anstreicht an B, aber den Bogen / wann er auch gleich fürbaß gezogen wurde / nicht durchschneidet / zeuch dieselbe hinauff / biß in die lini AC, das baide im puncten C zusamen lauffen.¹

Gesellen.
Spulrund vñnd Conoides Parabolicum. Spulrund vñnd Conoides Hyperbolicum. Cistronenrund vñnd Segmentum Globi. Olivenrund vñnd Segmentum lentis circulare. Kriechenrund vñnd Segmentum Ovi circulare.

Wann nun alsdann die zwey stück CO, OA einander gleich seind / so ist OB ein Parable; ist dann CV weniger dann VA, so ist VB ein Hyperbole; vñnd so CV halb sovil wäre / als VA, so ist diser Hyperbolae Centrum oder der punct F leicht zu finden / dann CV vñnd CF seind alsdann einander gleich; ist CV weniger dann halb VA, so ist auch FC kürzer dann CV, ist aber CV mehr dann halb VA, so ist auch FC lenger dann CV.

Hingegen wann die zwey stück CN, NA also beschaffen / das die winkel ABN, NBC einander gleich werden / so ist der Bogen NB auß einem Cirkel / wäre aber EBA kleiner dann EBC, so ist EB auß dem mittlern theil eines Ablengen Cirkels. So alsdann AE halb sovil ist als EC, so ist das Centrum D leicht zu finden / dann EA, AD seind alsdann einander gleich / ist AE weniger dann halb EC, so ist auch AD weniger dann AE, ist aber AE mehr dann halb EC, so ist auch AD mehr dann AE.

Entlich wann CI lenger ist dann IA, darneben aber CBI kleiner dann IBA, so ist IB auß dem Güßfel eines Ablengen Cirkels.

18) (Randnote) et fehlt

66. Vergleichung dieser Figuren gestümmelt verstanden.

Ex Th. 28. 29.

Am 46. Blat.

Underschiedliche Figuren (inn der 18. langen Figur alle verstanden bey HFCGE) so eine lenge oder höch GF oder KM haben / auch einerley tieffe CA, vnnnd einerley Böden EG oder HF, werden also verglichen oder gegen einander geschähet. Ist die Figur HFCGE ein doppelter Regelstock / vnd die linien CF, CG, AH, AE gerad / so helt sie am wenigsten: mehr wirt sie haben / wann es Spulrund / nach der Hyperbola, also das man die rundung wol in der mitten bey C erkennen mag / vnnnd die fläche außwärts gegen F. G, da die punctirte lini CQ zwischen R vnd S hinaus schließet auff das F. Ist es Spulrund auß der Parabole, so helt es noch mehr / vnd abermal
10 mehr / wann es ist Kriechenrund / widerumb mehr / wann es Citronenrund oder Cirkelart / vnd der Bogen CQSF auß einem gerechten Cirkel ist / am allermeisten helt es / wann es ist Olivenrund / nämlich in der mitt flach / vnd aussen gegen FG gähling gebogen: also das es von C ober den Cirkelbogen CQS herum gehet / vnnnd sich entlich nach dem F herunter zeucht.

67. Einen Schnitt von diesen Rundungen zurechnen / so das sie gerad neben der Axlinien hin zerschnitten werden.

Ex Th. 30. probl. inexplicato.

Ob wol diß im lateinischen Werck auff einer blossen frag oder Rägel beruhet das ich andern Kunstmessern auffzulösen fürgelegt: solte es doch nicht viel fehlen / die 63. vnd 64. Lehr solten vns auch hie zustatten kommen: inmassen dann allbereit No. 55.
20 mit dem geraden Regel ein anfang gemacht worden.

Demnach soltu dir bey einem jeden solchen schnitz noch andere zwo volleibige Figuren einbilden / die alle eine lenge vnd ein höch haben / alle auff einem flachen Boden stehen / der den schnit gethan (doch eine auff einem grössern theil desselben /
35 die andere auff einem kleinern) alle vbern Rucken her nur einen Bogen haben von jeder Figuren art. Auß disen dreyen / ist der fürhabende schnitz die mittele / wirt von der andern einer bedeckt / nemlich vom gerechten Ablengen oder Getruckten Kugelschnitz / oder vom Conoide, das einem Henschaber / oder das einem Berg gleich
† sihet: hingegen bedeckt er die andere / nemlichen eine halbe Citronen, eine halbe Oliven, ein halbe Kriechen, ein halbe Spulrundung / kleiner dann die zerschnittene /
30 auß welchen der fürhabende schnitz genommen worden.

Vnd beruhete also das Werck auff dem / das wir mit der höch eines solchen Schnitzes / vnd mit dem halben diameter des grösssten Cirkels an der abgestuften Figur (welchen wir No. 59 haben lernen suchen) rechnen den Kugelschnitz durch No. 37. 38. oder den Oliven, oder Kriechenschnitz / durch No. 40. oder die Conoidea, durch No. 34. 35 / einer jeden rundung ihren gesellen / der vber ihren schnitz gehet / vnnnd ihne bedeckt.

Auß disem rechne den andern gesellen / der vnder jetzt fürhabendem schnitz stehet / nach der 59. 63. 64. Lehr.

Fürs dritte so suche nach der 17. Lehr / mit der fürgegebenen höch zwen flacher
40 Schnitze / jeden in seiner bescheidenen maaß / auß zweyen Cirkeln / da der kleiner

12) mit statt mitt

26) Getruckten

General Lehr solche schnitze zu rechnen auff allerley art der rundung.

zum halben diameter hat die höch selber (deshalb der Schnitt ein halber Cirkel sein wird) der Größere ist der mittlere Cirkel um die zerschnittene rundung herum / dessen diametrum kanstu an der Figur messen / dann er ist die dicke der Figur.

Entlichen multiplicir den nachgesetzten größern Cirkelschnitt in den Leib der eingeschlossenen kleinern rundung / was kompt / dividir mit dem vorgeetzten kleinern Cirkelschnitt oder halben Cirkelfläche / so gewinnest du im facit den Leib des fürgegebnen schnitzes auß der größern zerschnittenen rundung.

Exempla werden aufgelaßen / auß versachen / die No. 64. angezeigt.

Diese general lehrt zu solcherley schnitzten des Kegels No. 55 tänglich.

Eben dieser griff solte wol auch No. 55. bey dem Kegelschnitt mit seiner Maas angehen / vund den vierten weg geben / nämlich so man suchete den Leib eines andern kleinern / nach der Nr halbirten Kegels / dessen Boden wäre ein halber Cirkel / vnd also ein theil vom Boden des fürgelegten Schnitzes / vund hetten eine Nylini am Schnitt (in Regeln ist die höch / doch anderst verstanden dann hie bey No. 67.) vnd so man also den Leib dieses halben Kegels multiplicirte inn seinen Boden oder halben Cirkel / vund was kompt / durch des fürgelegten Schnitzes Boden (welcher ist ein schnitz von ein größern Cirkel) dividirte.

Zum Exempel / wir hetten einen Kegelsstock / dessen halber diameter am Boden 22 / am Schnitt oder Tisch 19 / die höch 27. Der vnderscheid beider halber diametrorum 3. Wann nu das Weibel gleich oben am Rand des Tisches angesetzt wurde / vnd einen Schnitt gerad abwärts thäte / also daß der vndere Cirkel einen Schnitt verlöhre / dessen höch 3. wie groß wurde diser Schnitt sein? Weil dann der halbe diameter am Boden ist 22 / vund darvon 3 am Cirkelschnitt seind / so wirdt das Feld an diesem Cirkelschnitt sein 45(012; vnd weil die 3 sollen ein halber diameter werden / so geben sie den halben Cirkel 9(425 / wirdt also der halbe Kegel auff diesem Boden stehend (vnd 27 hoch) sein 84(825. Das multiplicir mit dem Boden 9(425 / kompt 799(5 / das dividir mit dem Cirkelschnitt 45(012 / kompt 17(76 / so groß sol der Schnitt sein vom Kegel.

Special lehrt auff die schnitz der Citronenrundung gerichtet.

Bey der Citronenrundung hette man einen vorthail / daß man einer kleinern halbirten Citronenrundung / in dem hie fürgelegten Schnitt steckend / nicht bedürffte / sondern man rechnete diesen Schnitt gleich auß dem gewidmeten Kugelschnitt selber / folgender massen. Mit des hie fürgegebnen Schnitzes höch / such beide den Kugelschnitt zum grossen Cirkel / in welchen die Citronenrundung nach der leng gebogen ist / vnd auch desselben grossen Cirkels schnitz / fürs dritte / auch des Bauchcirkels Schnitt. Multiplicir jeho den Leib des Kugelschnittes in die fläche des Bauch Cirkels schnitzes / was kompt / dividir mit des grossen Cirkels schnitz / so findestu den Leib des Schnitzes von der Citronenrundung.

In der 18. Figur am 46. Blat.

Nimb die drey letzte Exempla auß No. 63. vund laß in allen dreyen / den Schnitt FGC, von der Citronenrundung NCIA, welcher zurechnen ist / sein so hoch als CO, nämlich 1. 1. 1. also daß er gleich biß an G, F, raiche / da die rundung abgestuget ist / da ist des grossen Cirkels NCI halber diameter 81. 196. 289. gewest / vnd dessen Schnitt 16(917. 26(4. 32(029. dessen Kugelschnitt aber 252(9. 614(18. 906(35. hat auch die höch CO, vnd zum Boden den Cirkel vnd diameter FG. Weil aber des Bauch Cirkels halber diameter CL ist gewest 10. 15. 18. so findet sich des Bauch

10) suchte

18) halber fehlt

20) thätte

37) NO statt No.

43) CO statt CL

Eirkels Schnitz / welcher auch die höhe CO 1. 1. 1. hat / 5(87. 7(29. 8(07, disen Eirkelschnitz multiplicir in den Kugelschnitz / kompt 1484(5. 4477(4. 7315(1. das dividir mit dem Schnitz des Eirkels NCI, so findet sich der Schnitz FGC (von der Citronenrundung NCIA) 87(75. 169(6. 228(4, ist also gefunden ohne die kleine halbe Citronenrundung drinnen / auch mit FGC bezeichnet / die ist droben gewest 19(93. 31(02. 37(75: die ganze Gürtel aber ist gewest 996(49. 2384(3. 3496(43. von welcher Gürtel ein solcher Schnitz allwegen ein stück ist.¹

Im andern Thail wirdt erstlich angezeigt / wie sich ein jedes Faß zu den hie vor-
gesetzten Lehren schide / vnd vnder was Sorten von den bißhero abgehandelten
Figuren es zuehlen. Nämlich das deren ein Thail (als dann vil geschehen soll inn
Italia) nur schlecht zweyen gleichen / auff einander gestürzten Regelsstöcken oder
Bottungen gleich sehen / vnnnd inn der mitt / da das Beihel / gleichsam eine Schneide
oder Reiffen habe.

Etliche seind vmb das Beihel gächrund / lauffen aber gegen den Böden / auff gerade
linien hinauß / vnnnd gehören vnder die Spulrunde Hyperbolische Figur vnd 64. Lehr.

Etliche seind von einem Boden vbern Bauch zum andern Boden / Parabolisch /
etliche Elliptisch / etliche recht Cirkelrund / vnnnd also vmb die Mitten Citronenrund /
gehören in die 63. vnd 59. Lehr. Selten aber begibt es sich / das ein Faß in der mitte
flach / vnd erst zu eusserst gegen den Böden gächrund oder abschüssig gemacht wirdt /
das wäre Olivenrund / in die 64. Lehr gehörig. Aber ganz flache Taufeln / die sich
nur gar ein wenig außwärts biegen / ist nichts seltsames / desto mehr verwantnus
hat ein solches Faß mit der Wellen vnnnd 24. Lehr / gehört doch eigentlich zur
Citronenrundung / vnd 59. Lehr.

Demnach folget wie ein Faß in Desterreich gemacht werde / vnnnd was es für
wunderbarliche eigenschafften vor andern allen habe / welches weil es an ihm selber
schön / vnd dem Kunstverständigen lieblich zuuernemen / hat es müssen nach rechter
Geometrischer Kunst inn 25 Theorematis außgeführt werden. Gleichwol ist dise
speculation nur auff die erste Sorten der gedoppelten Kegelrunden Figur gerichtet /
vnd fundirt sich auff die zwerlini vom Beihel oben / biß vnden an den Boden / wie
man in Desterreich die Visierruthen brauchet / da wirdt angezeigt / wann allerhand
Fässer / lange vnd kurze / flache vnd bauchete (nach art der Kegelrundung) für-
handen wären / die alle nur ein zwerlini hetten / da sie nach anzeig der Dester-
reichischen Visierruthen alle mit einander nur einen Halt oder Eyck haben / nämlich
eins soviel halten solte als das andere; welches alsdann vnder allen am maisten
halte / welches am wenigsten / vnd welches mehr dann das andere / vnnnd wieviel
an einem jeden abgehe / das es die Desterreichische Visier nicht halte.

Endtlich wirdt in den 4 letzten Theorematis die Desterreichische Visierruthen
selbst erklärt / wie die zumachen / vnd an Desterreichischen Fässern recht zuge-
brauchen: das wollen wir im Teutschen in den dritten Thail sparen.

Was nun für den Teutschen Lesern sein wirdt / das sol außzugs weise nach einander
folgen / in der bißher geführten ordnung.

Ex Th. 4.

69. Wann die vmbzeunungen gleicher Lenge seind / welches Feld alsdann am größesten.

Ein reicher Maier gibt einem armen Mann ein schnur / erlaubt ihme sovil Traids
auß seinem Acker abzuschneiden / als er mit der Schnur vmbfangen mag. Ich rahte

4) eins Thails

78 ihme / er mach keine Ede mit der ¹ Schnur / sondern ziehe sie rund herum / das trifft er leichtlich also. Theil die Schnur in 11 gleicher stücke / vnnnd deren eins in 4 kleiner lengen / nimb sonsten ein Trum / so lang als der jeh gemachten stücken ein grosses vnd drey kleine / steck das ein End mit einem Zweck in Boden / gehe mit dem andern aussen herum / so wirstu die ganze Schnur fein in einen Cirkel ordnen. Sehne dich nicht die Schnur anzustrecken / dann du gewinnest nichts / weil du alsdann Ede machest.

Wann aber je solten Ede gemachet werden / so wirdt deß Feldes am meisten sein / wa dern Ede am maisten / so doch / das die Ede auch inn einer gleichen Cirkel:
10 ordnung herum stehen / dann je ungleicher / je weniger sie einfangen.

Setze die Schnur sey 120 Schuch lang: Machs darauß einen Triangul / der auff der einen seitten habe 20 / auff der andern 45 / auff der dritten 55 / da wirstu nicht mehr dann 424 lang: vnnnd braitte Schuch Feldes einfangen. Ordene es ein wenig besser / nämlich also 30. 40. 50. da wirstu schon 600 stück Feldes einfangen / jedes einen Schuch lang vnd brait. Ordene den Triangel gar recht / nämlich also 40. 40. 40. du vmbzeunest hiermit 693 Schuch.

Versuchs jeho mit vier eden / vnnnd solche seyen erstlich vnordenlich von zweyen rechtwinkelligen Trianguln / die mit der lengsten seitten an einander stehen / thail aussen herum die Schnur also / in die 4 seitten / 10. 30. 35. 45. du beschleußest 750.
20 Ordene es besser / nämlich rechtwinkelig vnd gegen vber gleich / als 20. 40. 20. 40. das vmbgürtet 800. Machs noch gleicher / nämlich 25. 35. 25. 35. da wirstu 875 einfangen. Machs gar gleich / als 30. 30. 30. 30. dann wirdt das Feld 900. So du aber die winkel ändertest / das sie nicht gleich bliben / sondern an statt der vierung wurde ein Rauffen / mitten durch / von ein stumpffen ed zum andern auch 30 / so siengestu für 900 nicht mehr dann 779 / also auch bey 25. 35. 25. 35. wann die Figur sich naiget / das die zwen durchzüge (Diagonii) einander ungleich / vnd der lengere 50 wirt / so bekomstu für die vorige 875 / nur 812.

Gehe weiter / versuchs mit dem fünffed inn guter ordnung / also das jede seiten 24 bekomme / da gewinnestu schon 991.

30 Mit dem sechsed / da jede seitten 20 hat / wirdt dir 1039 zum Feld. Mit dem achtet / da jede seitten 15 hat / kompt 1086. vnnnd so fortan.

Endtlich wann die Schnur zum Cirkel wirt / vmbfangt sie 1145: vnnnd sonsten in keinerley wege kan sie mehr einfangen.

Disen griff wirdt Dido gebrauchet haben / da sie von den Mauritanien sovil Landes kaufft / als man mit einer Ochsenhaut belegen möge.

Wie nüglich aber vnnnd auch notwendig dise wissenschaft sey / hastu auß etlichen folgenden Exempeln zuersehen.

† Wann du nit Schaub oder Widen gnug hettest / die Garben zubinden: so knüpff je zwey Bände zusamen / vnnnd mach grosse Garben / dann du ordnest hiermit die
40 Bände besser in einen Cirkel / als wann sie in zwen Cirkel vertheilt wurden.

Also wann ein reicher Herbst wirt / vnd man hat nicht Fässer oder Laufeln gnug / so sollen die Binder sich hüten / das sie die Laufeln nicht zu kleinen Fäßen vernichten / sollen lauter grosse Fässer machen.

34) griff

Zuschonen das die Garben nicht brechen / sitze oder springe nicht darauff / vnd beschwäre sie nicht zuvil / dann sie seind rund gebunden / wann du sie nu druckest / so wirdt auß der rundung eins ablenge Cirkels rundung / die fasset weniger / muß also springen / weil der Garben zuvil wirdt.¹

Diß ist auch der vrsachen eine / warumb die Raiffe / sonderlich die Bauchraiffe / von vollen Fässern springen / je ehe / je grösser sie seind / wann man sie auff dem Bauch walget.

Wer den Bauch voll angeessen vnd gesoffen / der ligt vil beschwerlicher auff dem Rücken / dann auff der seiten: sol sich auch zu solcher stund nicht recken lassen / biß er zuvor abgedawet / er möchte sich erbrechen vnd vbergeben. Dieser Warmherzigkeit erinnert Delrio die Züchtiger in disquisitionibus Magicis.

Also könden die Weinschenke ihnen auß diser Lehr leichtlich ein einkommen machen: Nur die Eychkandel einmal oder etlich die Staffeln hinunter geworffen / damit sie braitmäulig werde / so gehet dann weniger drein.

Ein verwantnus ist zwischen disen ganz beschloßnen ombzeunungen vnd zwischen dem Bogen. Wann ein Bogen halb Cirkelrund gebogen wirdt / so beschleußt er mit sampt seiner Sennen vielmehr / dann wann er eintweder weniger gebogen wirdt / mit einer lengern Sennen / oder mehr gebogen / mit einer kürhern Sennen.

Ex Th. 4.

70. Wann deß euffern Feldes an Wänden gleich vil ist / welche Figur alsdann am maisten Raum beschließe.

20

Antwort / wann die Feldung ganz Kugelrund ist / dann sie hat gleichsam vnendlich viel Wände / also das ein jeder punct für eine Wand zuschägen. Nach jr helt allezeit die Figur am maisten / die der Kugel am ehlichsten / das ist die am maisten gleicher vnd in die Kugelrundung geordnete Wände hat: als Pyramis helt am wenigsten / weil sie nur vier Wände hat / Cubus mehr / dann er hat sechs Wände / Octaedron noch mehr / dann er hat ihrer achte / hernach das Dodecaedron, oder zwölffwändig / vnd am meisten das Icosaedron oder die zwainzigwändige Figur.

Zum Exempel / du kauftest vmb ein gewisse Summa Gelds soviel Traids / als du in drey Elen Zwisch fassen magst / ich rahte dir / mach keinen langen Sack darauff / sondern schaw wie du den Zeug am füglichsten zu einer Kugelrundung schneidest / nemlich schneide ihn zu 10 gleicher rautenstücken / vnd setze sie ordentlich zusammen.

Hieher gehört auch diß / das ein halbe Kugel grösser ist / dann so man ihr eufferes Feld zu einem andern Kugelschnitz brauchete / der wäre gleich von einer grösseren oder von einer kleinern Kugel.

Auß Th. 4.

71. Wann die beschlossene Figuren alle in ein hole Kugel geordnet seind / vnd mit jren Ecken an deren inwendig anstehen / welche alsdann am maisten Raums einfange.

Antwort die am maisten Ecke hat / vnd also der Kugel am ehlichsten ist / dann die Kugel hat gleichsam vnendlich vil Ecke / beuget sich vmb vnd vmb. Hie gilt es nicht mehr / die am maisten Felder hat / Rein / dann die zwainzigwändige fangt hie

40

weniger / als die zwölfwändige / dieweil dise hat zweinzig Ede oder Spiße / jene nur zwölf / spreißt sich also mehr dann dise (verstehe mit lengern spizen) derowegen dann auch / nach dem gemeinen sprichwort / desto weniger darhinter / oder darinnen ist. Also spreißet sich auch die achtwändige / oder der spizige Diamant / in der Kugel / mit 6¹ spizen viel mehr / dann der Würffel mit achten / hat derhalben auch weniger Raums in sich / dann der Würffel. Am allermeisten spreißt sich die vierwändige Pyramis mit vier spizen / vnd fanget am allerwenigsten Raums ein.

72. Welche auß den beschlossenen Figuren / (so da sechs Wände haben / auß dem 4. Th. vnd alle in einer Kugel stehen) am maisten Raum einneme.

10 Antwort / diejenige / die am besten geordnet / vnnnd also der Kugel abermahl am ehulichsten ist / dann die Kugel sihet vmb vnnnd vmb ihr selber gleich / derhalben auch vnder allen sechs wändigen Seulen oder nideren Platten / die am Leib oder obern vnnnd vndern Boden gerecht vierecket seind / ist der Würffel / welcher sechs gevierter vberal gleicher Wände oder Böden hatt (so hoch als breit vnnnd lang) am fähigsten: Merck hierumb diß Täfle / da der diameter in der Kugel ist 20.

Die viereckete Platten.				Die viereckete Seulen.				
†	Höch	braitte	zwerlini	Leib	Höch	braitte	zwerlini	Leib
20	1	14 +	20 —	399	Ein anz	der gleich	16 +	3080
	2	14 +	20 —	792	12	11 +	16	3072
	3	14 —	20 —	1173	13	11 +	15 +	3003
	4	14 —	20 —	1536	14	10 +	14 +	2856
	5	14 —	19 +	1875	Ein anz	10	der gleich	2828
	6	13 +	19 +	2184	15	9 +	13 +	2625
	7	13 +	19 —	2457	16	8 +	12	2304
	8	13 —	18 +	2688	17	7 +	11 —	1887
	9	13 —	18 —	2871	18	6 +	8 +	1368
	10	12 +	17 +	3000	19	4 +	6 +	741
	11	12 —	17 —	3069	20	0	0	0
30	Höch	lini der vierung am boden	diameter am Cirkel runden Boden	Leib	Höch	lini der vierung am Boden	diameter am Cirkel runden Boden	Leib oder raum
	Die nidere Wellen / Täller oder Räder der / Cylindri humiles, breues, crassi.				Die hohe schmale Wellen / Wellen bäume / Walzen / Walger / Cylindri graciles, longi, alti.			

7) eins statt ein

19) 794 statt 792

22) 10 — statt 10

Auß dem 5. Th. 73. Welcher Balger oder Cylinder auß allen denen so mit einander eine zwerlini von ein Boden zum andern / oder ein Wisier halten / ist am fähigsten?

Antwort / derjenige / da man mit der höhe ein quadrat oder vierung auff den runden Boden machen kan / das mit allen vier spizen an den umbkreiß rechet. Wann diß geschicht / so heist die vierung vom ¹ diameter am Boden / gerad zwey mal 61 soviel als die vierung von der höch.

Als es were die höch 10000 / sein vierung ist 100000000 / diße doppelst ist 200000000. suche hierauf die Wurzel die ist 14142 / so lang wer der diameter, oder hingegen / so der diameter ist 100000 wirdt die höch sein 70711. So aber die Wisierlänge von dem einen Boden oben in die zwer gegen dem andern Boden vnder sich heist 20 / so wirt die höch deß Balgers 11(5 / vnd der diameter am Boden 16 + halten. 10

Also macht man fast die Wehen / also werden die meiste Bottungen / also seind fast die halbe Fässer in Oesterreich / nach dem Beyhel entzwey geschnitten.

Auß dem 6. Th. 74. Zurechnen wie lang ein jedes Faß zwischen beiden Böden innerlich / vnd parte 3. No. 4. Item wie lang es vom Beyhel biß zum Boden nach der rechten geräde / vnder der Taufel? Item wie lang die zwer oder Wisierlini sey?

Die halbe Taufel-
leng zurechnen. Wann du nicht weißest wie dick die Taufeln am Holz seind / vnd also dem eusser-
lichen messen nicht trawen kanst / so nimb einen Stab von gleichen theilungen / vnd 20 messe die höch / breite / oder weite an baiden Böden / vnd die tieffe am Bauch / so dann auch die zwerlini vom mitteln puncten deß Beyhels gegen dem vndersten theil deß einen vnd deß andern Bodens: dann beide zwerlinien sollen gleicher Lenge sein / inmassen auch baide Böden nicht allein in die höch / sondern auch in die breite / gleiche diametros haben sollen.

Die halbe Faßleng
zurechnen. Multiplicir nun die zwerlini in sich selbst / multiplicir auch die tieffe deß Bauches in die höhe deß Bodens / was dir hie kompt / das nimb hinweg von dem das dorten kommen / was dir vberbleibt darauff such die Wurzel / so hastu die gerade Strecke vom mitteln puncten deß Beyhels / biß zum nechsten puncten deß Bodens. Nimb auch hinweg den halben diameter deß Bodens vom halben diameter deß Bauches / was bleibt das multiplicir in sich selbst; was dir hie kompt / das zeuch ab von dem / 30 so dir besser oben vbergebliben / was dir dann jeco vberbleibt / darauff such abermal die wurzel / so hastu die halbe leng deß Fasses / oder seine halbe höhe / wann mans aufstellet.

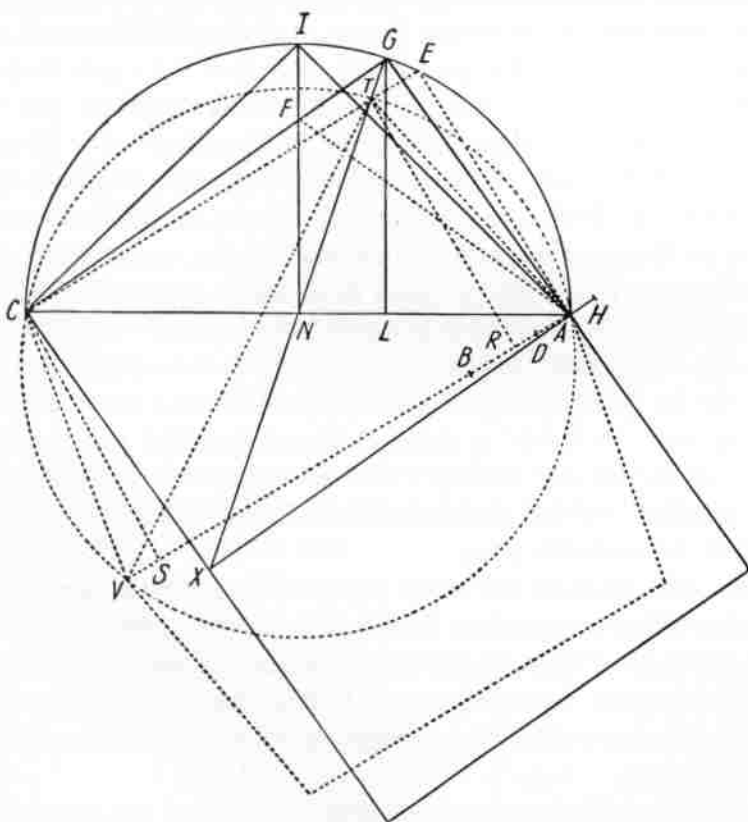
Zum Exempel / ein Fäsl hielte am diameter deß Bodens (ist in nechst folgender Figur die lini CT) 288. gleicher theil / am Bauch aber / oder an der lini AV, hielte es deren theil 327, vnd in die quer / oder an der zwerlini CA, vom Beyhel biß vnden an Boden 354. Wirdt nun gefragt nach TA oder CV, der halben Taufellenge nach der geräde / vnd nach TR oder CS der halben Faßleng.

So multiplicir 354 mit sich selbst / so werden drauß 125316. multiplicir auch 288 in 327 / kommen 94176 / das nimb von jenem / bleiben 31140 / so groß ist die vierung von CV. deren Wurzel ist 176 s. nämlich TA oder CV.

Ferner nimb halb CT, das ist 144 / von halb AV, das ist 163 s. bleiben 19 s. diß in sich selbst gibt 380 / das nimb von der vierung CV, bleibt 30760 / ist die vierung von CS oder TR, dessen Wurzel 175 vnd ein drittheil / diß ist die halbe Faßlänge.

Also hinwider / so das Faß verberhelt bleiben musse / vnnnd doch nach der quer AC gefragt wurde / muß man den Boden CT, den Bauch AV, vnd die halbe Taufel-
 10 linge nach der gerade / nemlich TA / oder CV bekant haben. Dann so multiplicirt man die halbe Taufel CV oder TA in sich selbst / vnnnd den Boden CT in den Bauch AV / setzt beides zusamen / vnnnd nimbt auß der Summa die Wurzel / so findet sich die zwer- oder Wisslerlini AC.¹

62 Zum Exempel. Es wäre inwendig vmb den Bauch eines grossen dreyling Fasses 153 zoll vnd fünff 19 theil / vmb die Frösche innen herum 135 zoll vnd zwelff 19 theil / vnd die linge zwischen Böden were 63 zoll vnd drey 19 theil / wolte gern wissen die Wisslerlinge des Fasses. Hie muß ich erstlich die zwen diametros suchen / auß ihren



vmbkraiszen / nach der 6. Lehr. Wöllen sehen die Cirkel seyen alle perfect: so wirdt
 20 des ersten diameter AV sein 927. 19 theil / des andern CT 820 / vnnnd die linge zwischen Böden 1200 / weil dann diße halb / nämlich TR oder CS, ist 600, vnnnd halb CT 410 / vnnnd halb AV 463 s. so nim halb CT von halb AV, bleibt VS oder

RA 53 s. multiplicir in sich selbst / so wirdts 2862 / das setze zu der vierung von TR 360000 / so kompt die vierung TA oder CV 362862: multiplicir auch CT 820 in AV 927 / kompt 760140 / setze beide zusammen / so folgt die vierung von CA 1123002 / demnach so ist hierauf die Wurzel 1060. 19 theil eines Zolls / diß ist 4 Schuh 8 Zoll / das were nach der Linger Wisterruthen (als drunten No. 80. folgen soll) bey 29 Emmern.

Ex Th. 5. 75. Was ein Desterreichisches Faß heisse / wie es zugerichtet werde / vnd wie es nach dem Boden / Taufeln oder Zwerlini zurechnen.

Die Binder in Desterreich haben ein Regel ein Faß zumachen. Wir / sprechen sie / Setzens auffß drittheil / das ist / sie nemen ein Taufel / theilen die in drey gleicher theil / fassen mit dem Eirkel das ein drittheil / vnnnd reissen darmit den umbtraiß zum Boden / welchen das Faß haben solle; nach solchem umbtraiß nemen sie deren Taufeln viel oder wenig / biß sie deren gnug haben; wann die Taufeln zusammen gerichtet seind / dann streichen sie allererst beide Sagen darein; darmit kürzen sie den theil von der Taufeln / der zwischen beide Böden hinein kompt / vmb etwas ab / das er nicht mehr so lang ist als drey halber diametri deß Bodens / die Frösche oder velgen an beiden orten gehen darvon hinweg / vnd vber die Böden auß.

Demnach aber ein jedes Faß zwey gleiche halbe thail hat / vom Weibel gegen beiden Böden hinauß / vnnnd aber man die Wisterruthen durch die zwer¹ nit deß gangen / sondern nur deß halben Fassess hinein sendet / also findet es sich auß diser zurichtung der Fässer / daß ein halbes Faß gleich nach einem solchen Walger oder Wellen gerichtet / wie bey No. 73 beschrieben / die nämlich auß allen andern Wellen / welche nach der Wistler nur ein zwerlini vndereinander haben / am allerfähigsten seye. Dann gleich wie die Wellen No. 73 / wann sie am Boden 100000 brait ist / alsdann inn der höch 70711 hat / vnnnd diß gedoppelt macht 141422 / welches weniger ist dann 150000 / drey halbe diametri, also auch am Desterreichischen Faß / ist die Taufeln vmb die Frösche weniger / dann drey halbe diametri am Boden.

Taufel zurechnen. Demnach wirdt die Taufel zu einem Desterreichischen Faß nach dem bekanten diametro deß Bodens also gerechnet / Multiplicir denselben inn sich selber / was kompt / das halbire / vnd such dises halben thails Wurzel / so hastu die halbe Taufelleng auff die Desterreichische form.

Bauch zurechnen. Hingegen vnnnd wann dir auß einem Desterreichischen Faß die zwer² oder Wistler lini fürgelegt wirdt / zusampt dem diameter deß Bodens / nämlich AC vnnnd CT, so rechne den Bauch AV also. Multiplicir die Zwerlini AC mit sich selber / vnd den Boden CT deßgleichen / was baider orten kommet / muß also beschaffen sein / daß das letztere nicht etwa mehr dann 2 drittheil sey deß vorigen; sonst gibt es kein Desterreichische form.

Auß dem 6.7.8.9. Th.

Dann so halbire das letztere / vnnnd diß halbe thail zeuch ab von der vierung AC, + das vbrige dividir mit dem Boden CT. so kompt der Bauch AV.

Zum Exempel / die Zwerlini wär 100 / sein vierung ist 10000 / nu laß deß Bodens diameter sein 80 / sein vierung ist 6400 / weniger dann 2 dritte theil von 10000 /

3) 760040

4) 1122902

34) halbe Taufelleng statt Zwerlini

kan derowegen ein Deſterreichiſches Faß werden. Nimbs halb / das iſt 3200 / diß von 10000 genommen / bleibt 6800 / das dividir mit deß Bodens diameter 80 / ſo kompt 85 / ſo tüeff wäre der Bauch AV: damit das Faß ein Deſterreichiſche form gewinnen möge.

Darauß dann hernach die lenge deß Faßes folget / wie No. 74.

Faßleng zurechnen.

Dann wann CT, oder SR iſt 80 / vnnnd VA 85, ſo iſt SV, oder RA 25 / oder dritthalbs / deſſen vierung iſt 625, nimbs von der vierung TA oder CV, nämlich von 3200 / ſo bleibt 3193(75 für die halbe lengen TR oder CS. Wirt alſo die Wurzel auß diſer vierung ſein 56(51 vnd die ganze Faßleng 113.

- 10 Wurde dir aber mehrers nicht gegeben / dann die zwerlini AC, vnd allein der Schick oder proportz zwifchen dem Boden CT, vnnnd dem Bauch AV inn zwoen zahlen / ſo thue eben als wäre dir Bauch / Boden vnd Laufeln gegeben / vnd ſolteſt die zwerlini erſt ſuchen / die ſuche auch nach der 74. Lehr. Hernach brauch die Regel detri, nach der 13. Lehr / darmit du das gefundene Maaß in das gegebne Maaß der Zwerz oder Wiſſerlini überſeßeſt.

Bauch Boden vnd Faßleng zurechnen.

Nimb deſſen vier Exempla / Es ſey der diameter deß Bodens zum diameter deß Bauchs wie 8 zu 9. 9 zu 10. 14 zu 15. 17 zu 18. Aber CA ſey gewiß vnnnd warhafftig 100 / wie kompt der Boden CT argentlich? So ſeße nun Boden vnnnd Bauch ſey 8 vnnnd 9 / etc. vnnnd ſprich /

20	8 mal	9 mal	14 mal	17 mal
	9	10	15	18
	iſt 72	iſt 90	iſt 210	iſt 306
	8 mal	9 mal	14 mal	17 mal
	8	9	14	17
	iſt 64	iſt 81	iſt 196	iſt 289
	halb 32	halb 40 s.	halb 98	halb 144 s.
	zu 72	zu 90	zu 210	zu 306
	macht 104	macht 130 s.	macht 308	macht 450 s.

Were alſo diß die vierung von CA nach dem geſetzten Maaß.¹

- 64 30 Entlich multiplicir das warhaffte Maaß zu CA, nämlich 100 in ſich ſelbſt / ſo wirdts 10000. Nun ſprich durch detri.

			deß Bodens	deß Bauchs	Romen
Die vierung CA, ſo	104	hat warhafftig 10000	64?	81?	6154. 7789.
da nach dem geſetzten	130 s.	was hat dann die	81?	100?	6207. 7663.
maß haben ſolt	313	vierung	196?	225?	6363. 7305.
	450 s.		289?	324?	6417. 7192.

Hierauß die wurzeln genommen zeigen die vier Böden CT 78(45. 78(8. 79(77. 80(1. vnnnd die vier Beuche VA 88(25. 87(55. 85(47. 84(8.

9) vierund 18) 180 ſtatt 100 22) 215 ſtatt 210 27) 215 ſtatt 210 28) 313 ſtatt 308
30) multiplicirt 36) 6262. 7188. ſtatt 6363. 7305. 38) 79(14 ſtatt 79(77 39) 84(79 ſtatt 85(47

76. Erste wunderbarliche eigenschafft eines Oesterreichischen Weinfasses / vnd warumb dise weise zu Wisieren / nur allein in Oesterreich so gemein sey / vnd sonst in keinem andern Land.

Wann nun dem also / als folget / das ein Oesterreichisches Faß / nach der Wisier / vnder allen Fässern (wellenrund zuverstehen / vnd die Beuche jecho hindan gesetzt) am meisten halte / sie seyen jecho gleich lenger / wie die Reinfässer / oder kürzer / wie etliche Bngarische.

Vnd fürters / weil der Oesterreichische Binder wie gehört / auff das meiste zihlet / alda es mit dem innerlichen Raum gleich innen stehet / vnd im wepel ist / wie du in hie vorgesehtem Täfeln No. 72. (so nach außweisung der vntergeschribnen Wörter auch auff die Wellen zugebrauchen ist) bey den zahlen 3069 / 3080 vnd 3072 zusehen hast; also kan es jhme nicht viel am Raum fehlen / wann er gleich nicht eben genaw den Zweck erreicht: oder wann er schon einmal die Frösche abschneiden / ein andere Sag streichen / vnd einen größern Boden einsetzen muß.

Zum Exempel / das Faß sey also gerathen / wann sein Wisier 20 gleicher theil gewinnet / das es an den Taufeln (sovil von denselben zwischen beide Böden hinein kompt) halte solcher theil 12 zwei mal / suche im Täfeln 12 vber dem Titul / HOECH / da findestu gegenuber vber dem Titul DIAMETER am Boden / das der diameter halten werde 16. Hie were also das Faß zwischen den Böden 3 halber diametros (das ist 3 mal 8 / nemlich 24) hoch / vnnnd die Frösche giengen noch drüber auß / anderst dann wie droben in beschreibung des Oesterreichischen Fasses gemeldet worden. Da findestu den halt eines solchen Fasses vber dem Titul LEIB / 3072. So aber das Faß recht were getroffen gewest / hette es zwischen beiden Böden nicht 24 / sondern nur 23 halten müssen / vnnnd am diameter des Bodens 16 vnnnd ein 3 theil / vnnnd hette also gehalten 3080: der vnterscheid ist 8 / darmit dividir 3080 / so kompt 385 / wurdest also allererst die 385te maas oder Achtering weniger in einem solchen Faß haben / dann die Wiserruten sagt / das were von 10 Emmern kaum ein Achtering weniger.

Hingegen versuchs mit einem kürzern Faß / das vom Weibel biß an Boden nur 11 / vnnnd also zwischen beiden Böden nur 22 habe / eins weniger dann in der rechten Oesterreichischen form / vnd sey also (wie du im Täfeln gegen 11 vber siehest) der diameter am Boden etwas weniger dann 17. Diß Faß wirt 3069 halten / zeuch ab von 3080 so bleibt 11 / darmit dividir 3080 / kompt 280 / da wirstu nun die 280te Achtering weniger haben / als die Wiserruten sagt: käme auff 7 Emmer erst ein Achtering.

Sihest also / das die Oesterreichische Fässer / sie gerathen gleich lenger oder kürzer / nur das dessen nicht gar zuvil werde / allwegen beynah ihre Wisier halten / vnd ihnen baider orten ein kleines abgehe / so nicht zuschätzen ist.¹

Rimb aber jecho ein Reinfäß / das auch Wellenrund sey (dann wir reden jecho noch nicht von den Baucheten) dise werden gemeiniglich also gemacht / das die Taufeln zwischen beiden Böden zweymal so lang sein / als der diameter am Boden / oder

16) der statt den

29) einen

das die halbe höhe vnnnd derselbe diameter einander gleich seind / beide etwas mehr
 † dann 14 / von ihrer Wiserruthen 20; Suchs im Täsele / da findestu den Leib oder
 Raum 2828 / das zeuch ab von 3080 / bleibt 252 / darmit dividir 3080 / kompt nit
 gar 12 / Hie wirdt dir alwegen die 11. oder 12. Achtering oder Emmer abgehen / wann
 du die Dester. Wiserruthen bei einem solchen Faß brauchen woltest / also das ein
 solches Reinfass / so nach anzeig der Desterreich. Wiserruthen sechsthalbe Emmer
 halten solte / nur fünff Emmer hat / für eins.

Wann aber du schon auff ein solches Reinfass ein besondere Wiserruthen zurichten
 woltest / so lasse sehen / wievil auch dise fehlen wurde / wann der Binder nit eben
 10 gleich das Maasß traffe.

Sehe erslich / das Faß werde ein wenig kürzer oder niderer / nemblich gerad
 14 zweymahl / vnd der diameter am Boden werde lenger dann 14 (solten im rechten
 maasß gleich sein) da findestu im Täselin gegen ober / das sein halt sein wurde 2856.
 Nun were das rechte maasß gewest 2828 / hie hette nun durch des Binders verfehlen /
 ein solches Faß gewonnen ein vbermaß 28 / das were die 101. Achtering zuviel vnnnd
 mehr dann sein eygene Wiserruthen sagte / vnnnd ist doch hie die höhe nur vmb den
 sibenden theil einer vnitet kürzer genommen / nemblich 1400 an statt 1414. Laß
 aber fürs ander das Faß ein wenig lenger werden (wie dann die Reinfässer offter-
 mals vil lenger seind an tauffeln / dann zwen Böden aneinander gelegt) also daß
 20 das halbe Faß die drey viertheil von seiner wisler hoch sey / oder 15 von 20 / da
 findestu den halt im Täselin 2625 / ist vmb 203 weniger dann 2828 / gieng dir all-
 wegen die 14te Achtering oder der 14te Emmer vnnnd also ein merckliches ab / durch
 ein solches verfehlen des Binders / wann du schon dem Reinfass ein besondere Wisler-
 ruthen machtest.

Zuvor were es zuvil worden / jez were es zuwenig. Nicht vil anderst helt es sich
 auch mit den kürzern gestumpeten Fässern. Dahingegen das Desterreichische Faß /
 beider orten zuwenig / aber vmb ein vnkenliches vnnnd schier gar nichts zu wenig helt.
 Vnd hast also auß dieser vergleyhung anderer Fässer mit dem Desterreichischen /
 leichtlich abzunemen / das ein Desterreichischer furm ein besondere artige eigenschafft
 30 vor andern außländischen Formen habe / nicht allein zum vil fassen / sondern auch /
 vnd sonderlich / zu der Wiserruthen / oder zum wenig fehlen. Das wirt aber bey der
 andern eigenschafft noch mehr erscheinen.

77. Die andere noch mehr wunderbarliche eigenschafft eines Desterreichischen Weinfasses / vor andern außländischen.

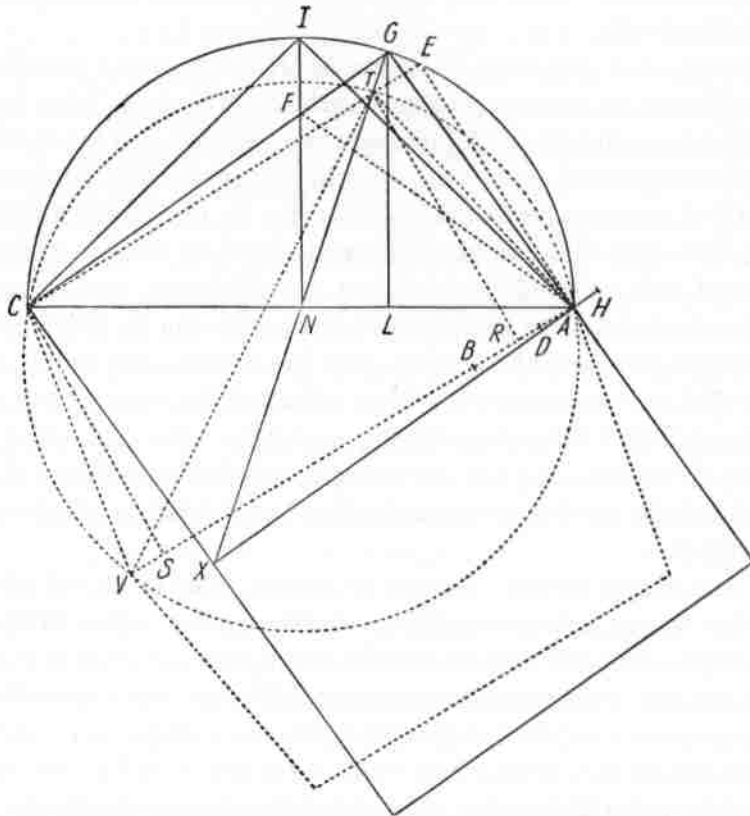
Bishero ist nichts auff die Beuche der Fässer geschezet worden / wie dann die meiste
 Reinfässer / wie auch die grosse Desterreichische Dreyling gar geringe Beuche haben.

Weil aber doch bißweilen auch gar großbauchete Reinfässer / so auch dergleichen
 großbauchete Anlägen / Desterreichischer Form / fürkomen / als fragt es sich / wie
 sich hie die Wiserruthen halte / vnnnd ob ihr so schlecht zutrawen / oder wieviel sie bey
 40 einem vnnnd andern Faß / zuvil oder zuwenig sage.

1) weniger statt mehr

Antwort / wann es gespilt werden solt / so könnte man die Karten nicht künstlicher legen oder wünschen als es alhie mit dem Oesterreichischen Faß versehen ist / das kanstu also verstehen.

Schlage dir dismahls die runde krümme zwischen dem Beihel vnnnd beiden Böden auß dem Sinn / vnnnd thue als wann der Bauch am Faß zu einer schneide zusamen lieffe / oder als wann es vmb das Beihel ein Reiffen hette / ⁶⁶ nämlich als wann das Faß nichts anders wäre / dann zwo Botunge / oder zwen abgestänte Regelsstöcke / mit den breiten Böden auff einander gestürzt / wie bey der 18. Figur zusehen /



noch mehr aber bei hie bey gefügter 21. Figur / da ist der braitte Boden VA, der Regelsstock VCTA, vnnnd der andere vnten daran disem gleich.

Es wölle sich aber der einfältige Leser nicht ergern / das ich von solcherley Fässern schreibe / die nicht in rerum Natura, oder doch zum wenigsten nicht inn Teutschland seind. Es geschicht darumb / weil die Richtschnur / nach welcher die Fässer sich arten / muß vom grund auß disputirt werden: diser Richtschnur hab ich im Lateinischen Werck nicht den namen Faß / sondern vilmehr nomen artis, nämlich Truncus conicus, gegeben / Teutsch Regelsstock. Alhie aber inn disem Teutschen außzug / hab ich mit dem namen Faß / dem Teutschen Leser etwas besser fürleuchten wölle / dieweil doch das meiste (wiewol nicht alles) an den Fässern vnd sonderlich an den Botungen zusehen ist.

Weil nun hie durch den puncten A das Beihel verstanden wirt / oder in den ²⁰ Botungen der ranfft vnd durch AC die Wiserruthen / so bedende ferners / das solche

lenge AC bleiben / vnd hingegen die form des Fasses oder der Botung sich auff vil vnd mancherley wege vergstalten vnd verstellen könde / als AGCX ist ein halbes Dester. wellenrundes oder gerades Faß / ATCV ist noch die Dester. form / aber bauchet wie ein Botung / dann die halbe Taufel AT helt sich gegen dem diameter am boden TC, gleich wie die halbe Taufel AG, gegen dem diameter am boden GC, vnd haben doch beide formen nur ein Wiflerleng oder zwerlini AC. Also kan sich der boden CT fort vnd fort verkleinern oder vermindern / vnd hingegen der bauch oder in der Botung die weite des obern ranffts AV vermehren lassen / daß CT vnd AV je neher vnd neher zusamen kommen / biß entlich beide linien CT, TA sammtlich
 10 der lini CA gleich lang werden / vnnnd hingegen AV so lang als beide AC, CV; Ausß dem 19. Th.
 darmit ist der Bauch AV oder die obere weite inn der Botung so groß gewachsen / biß entlich gar nichts mehr drinnen gebliben / vnd beide böden am Faß auff einander getruckt worden. Hierauß merdestu / das entlich der grosse bauch (verstehe an solchen Fässern da ein jede Taufel vom Weibel an / zwo gerade strecken hat) nur schädlich wirt / vnd auß zweyen Fassen die nur ein Wifler AC haben / nicht allewege dasjenige am meisten halt / das den größesten Bauch hat.¹

67 Was nun gesagt von der Desterreichischen form oder proportz der höch AT, gegen dem diameter TC, das soll auch verstanden werden von allen andern formen vnd proportzen / als zum Exempel / AIC, AFC ist die Reinform / doch die Fässer seind
 20 nicht gar außgemahlet. Dann AIC bedeutet das Faß / Wellenrund / aber AFC bedeutet es mit einem schneidenden Bauch bey A, vnd haben doch abermals beide Fässer vnder ihnen selbst / vnd mit den zweyen vorigen Desterreichischen nur ein Wifler AC. Wie aber IC der Boden am Reinfass viel kleiner worden / dan GC der Boden am Desterreichischen Faß / da doch die Wifler AC baider orten nur einerley / also kan der Boden IC auch fort also je mehr vnd mehr vermindert / vnd endtlich gar zu einem puncten / vnd das Faß zur lini werden / darmit dann abermal nichts darinnen bleibt / wie dann im obigen Täfle zusehen / wie sich der Leib oder Raum mit dem Boden CI vermindere oder vermehre. Gleichfalls kan solcher Boden CI auch größer werden / nämlich CG, alda das Wellenrunde Faß / wie obgesagt / am
 30 maisten helt; Item es kan der Boden noch größer werden / nämlich CE, da es anfaht wider weniger zuhalten / biß entlich der Boden so groß wirt als CA, vnd die höch gar verschwindet / also das abermals beide Böden zusamen kommen / vnnnd kein Faß mehr da ist. Hiermit haben wir kreuzweise vnendlich vielerley Sorten der Fässer / die alle vndereinander nur ein Wifler AC haben.

Hie fragt sichs nur / weil erstgemeldet / das man endtlich den schneidenden Bauch so weit vnd tieff machen könde (wann die Wifler lini bleibt) daß das Faß weniger halte / als wann es gar keinen Bauch nicht hette; ob dann alle solche gerade oder zugescherffte Bäuche schädlich. Antwort / an den kurzen gestumpfften Fässern zwar / die da kürzer seind dann das Desterreichische / ist es allezeit also / je größern zugescherfften Bauch sie haben / je weniger sie die Wifler halten / es sey die Desterreichische / oder
 40 ihr aigne Wifler / vnnnd wann ein solches kurzes Faß nach den Taufeln gerade vnnnd Ausß Th. 22.
 ohne Bauch ist / so helt es sein Wifler am maisten / oder gehet ihme von dem Halt / den die Desterreichische Wiflerruthen zeigt vnd aussaget / am wenigsten ab.

30) BE,

43) Wiflerruthen

Hingegen an den langen Fässern wie die Reinfässer seind / ligt vil daran / das sie hauchet seyen / dann der Bauch wann er auch gleich zugescherfft / oder ein magerer Bauch ist / gibt ihnen das sie die Bister besser halten / dann wann sie gerad vnd Wellenrund wären / vnd gar keinen Bauch hetten; doch zuverstehen von zimlichen vnnnd gebräuchigen Bächen / dann wie gehöret / wann die zugescherpffte Bäche ungewonlich hoch / vnd die Böttungen oben gar weit werden / wie die Milchschüsseln oder weitlinge / so dräet sich das spil wider vmb / das sie allgemach wider weniger / vnd entlich gar nichts halten.

Auß Th. 12. 13.
14. 15. 16. vnd
sonderlich 17.
Ex Cor. Th. 22.

Aber an den Desterreichischen Fässern / wie sie oben No. 74. beschriben / ist es abermal gleich im wechsel / der schneidende Bauch gibt ihnen nichts vnnnd nimbt 10 ihnen nichts / er wolte dann ungewonlich groß werden / da nimbt er ihnen auch / wie allen andern: wie aber bald hernach gemeldet werden soll / so kompt ihme diß als: dann zu hilff / das man hie zu Land keine solche Bäche an die Fässer machet / da die Taufeln von Böden an gegen dem Beihel gerad zu lauffen / vnd vmb die Mitte deß Fasses einen Reiffen oder schneide machen.

Helt also ein Desterreichisches Faß allezeit seine Bister / es hab einen solchen Bauch oder hab keinen / vnd diß ist die andere wunderbarliche eigenschafft eines Desterreichischen Fasses vor allen anderen: darum dann die Desterreichische behende weise zu Bistern sonst inn keinem Land / da anderley Sorten Fässer im brauch seind / gebraucht werden mag.¹

20

Ex partis 3. No. 3.

78. Wievil die Desterreichisch Bisterruthen an einem jeden Außlendis 68 schen oder ungewonlichen Faß / das doch sonst am Bauch mit dem Desterreichischen einerley Geschlechts ist / zuvil oder zuwenig sage.

Der richtigest weg diß zu wissen ist diser / rechne nach dem du thails bißhero bist vnderwisen worden / thails im dritten thail noch weiters wirst vnderwisen werden / wievil ein jedes Faß warhafftig halte / Bister es hernach mit der Desterreichischen Bisterruthen / wirstu leichtlich sehen / wievil es mehr oder weniger halte / dann dir die Bisterruthen sagt.

Hette aber einer lust zur Kunst / vnnnd wolte dises wissen ohn die Bisterruthen / wie sie in Desterreich gemacht wirt / nur allein auß erkundigung der tieffen am 30 Bauch / deß diameters am Boden / vnd der Taufeln leng zwischen baiden Böden / wie man am Reinstrom vifert / der findet im Lateinischen Werck nicht allein den process zu einer solchen vergleichung / sondern auch den augenscheinlichen beweiß vnd allerhand vorthail zurechnen.

Dann es gleichwol etwas kürhern process gibt / als wann man sonst den Ordinari weg gehet mit der Faßrechnung / auch guten beschaid vnd gemercke hat / das einer nicht darff sorgen es verführe ihne die rechnung / oder er habe etwa gefählet / sondern er weiß zuvor / wievil ihme aller orten ungeschädlich kommen müsse: wer nur das Fundament recht verstehet.

Diweil aber doch diße demonstration mit sampt den gebrauchten Terminis auch 40 im Lateinischen ganz new vnd ungewonlich / daher ich mich besorgen müssen / es

16) Bnuch

24) wege

werde für den Teutschen Leser noch viel schwärer vnnnd alzu spißfindig sein; als hab ich sie hie nicht nach der leng einführen / sondern allein die Summen dessen / was durch solche demonstration albereit gerechnet vnnnd gefunden worden / hieher vber setzen wöllen.

Nämlich gleich wie das Desterreichische gerade oder Wellenrunde Faß (oder die Desterreichische gerade Bottung) das aller erste ist von den lengern zu den kürhern zu gehen / welches allezeit soviel / ja entlich ein wenig mehr in sich helt / dann ein anders Desterreichisches Faß / mit einem zugescherfften Bauch / (oder ein Botung oben weit) so mit dem vorigen nur ein Wifler hat: also findet es sich auch inn den lengern 10 Fässern / als wie die Reinfässer seind (vnder welchen wie No. 77 gemeldet worden / Ex Th. 19. 20. 21. die Bauchete noch fähiger seind / dann die gerade Wellenrunde ihres geschlechts) das allwegen dasjenige Bauchete vnder allen andern seins geschlechts am fähigsten ist / welches mit dem Desterreichischen Wellenrunden oder geraden / dann zumal nur einerley höch hat / wann baide auff den Boden gesetzt vnd auffgerichtet werden; es sey nu jeho das lenglechte Faß höher oder niderer / so helt es alle wege weniger dann das gleich hohe / das ligt nicht daran / daß das Desterreichische braittere Böden / das Reinfäß aber einen tüeffern Bauch hat (verstehe es vom Bauch mit einer schneide) wann sie nur baide ein Wifler haben.

Ferner vnd wann gefragt wirdt / wieviel dann diser zugescherffte Bauch einem 20 solchen lenglechten Faß auffß aller meiste geben könde / ist die Antwort / das es vnder den Beuchen von gewonlicher größe kein zihl habe / sondern je grösser Bauch / je 69 mehr ein solches bauchetes Reinfäß ein anders gerades Faß seines geschlechts vbertrifft / doch thut der gescherffte Bauch (was die gewonliche Bäuche anlanget) nimmermehr sovil / das ein solches langes Faß einem Desterreichischen Faß / mit dem es nur ein Wifler hat / gleich fähig werde / sondern es haben auch die gebauchete Reinfässer (verstehe die gescherffte Bäuche) so auch die gar hohe oben weite Weinzüber allezeit noch weniger / dann die Desterreichische Wiflerruthen aussaget.

Wolte man aber durchauß von gewöhnlichen vnnnd vngewöhnlichen Bäuchen ge- Ex Cor. ad Th. 13. fragt haben (wiewol alsdann kein Faßform mehr bleibt / auch kein Raiff angelegt werden kan) so ist erwisen / das inn den Reinfässern die vbermaas am fang / von 30 einem an der mitte gescherfften Bauch verursachet / vber das gerade Faß seines geschlechts / könde biß auffß dritte theil desselben hinein lauffen vnnnd nicht höher. Mehrer particularia finden sich inn hie vnden gesetztem Täfelle.

†	Wann Bottung oben ist	So helt				Das Reinfäß gegen dem Desterreichischen.	
		das gerade		das scharpf bauchete			
		Dester.		Reinfäß			
	1.2.	15.	11 +	54.	60	vmbß 3 theil mehr vnnnd drüber	
	2.3.	48.	46 +	180.	197 +	vmb das 19 theil mehr	
40	3.4.	99.	97 s.	378.	405 +	Nichts mehr nichts weniger	

Ex Cor. 2. 3. ad Th. 9.

Ex Cor. 2. ad Th. 25.

Nota. Dife Tafel gilt nur / wann bey beiden sorten der Fässer / die Beuche an der form vnd tieffe einander gleich sein sonderlich wann die Beuche zugescherffet.

16) da ligt

40) 450 statt 405

Barm Bauh Boden	So helt				
	das gerade		das scharpf bauchete		Das Reinfasß gegen dem Oesterreichischen.
	Dester.		Reinfasß		
4.5.	168.	167 —	648.	685 —	vmbs 42 theil weniger
5.6.	255.	254 —	990.	1036 —	vmbs 26 theil weniger
6.7.	360.	359 —	1404.	1456 +	vmbs 23 theil weniger
7.8.	483.	482 —	1890.	1946 —	vmbs 20 theil weniger
8.9.	624.	623 +	2448.	2521	vmbs 18 theil weniger
9.10.	783.	782 +	3078.	3160 +	vmbs 17 theil weniger
19.20.	3363.	3362 +	13328.	13468 +	Entlich bey nahe vmbs 11 theil weniger / wie im Täfeln bey No. 72 zusehen.

Zuversiehen dieses Täfels / so seze es wäre möglich das ein Oesterreichisches Fas
kündte gemacht werden / das ein außsehen hette / wie zwen auff einander gestürzte
weitlinge / nämlich welches zweymal so tieff am gescherfften Bauch wäre / als am
Boden (wiewol es nicht möglich / dann es blibe kein Raiff). Ein Reinfas (da die
Taufel zweyer Böden diametros lang ist) wäre auch zweymal so tieff am gescherfften
Bauch als breit am Boden / vnd hetten beide gleich lange Wisler / da würde ein
andere Oesterreichisch gerades Fas / so auch diese Wisler hette / so oft 15 Achtering
haben / als das Bauchete 11 vnd etwas drüber hette / das gerade Reinfas wurde
so oft 54 haben / als oft das Bauchete 60 hette: wurde also das Bauchete Reinfas
vmbs den neunten theil mehr halten / dann das gerade Reinfas / hingegen das
Bauchete Oesterreichische beynahе vmbs das dritte theil weniger dann das gerade
Oesterreichische. Entlich das Bauchete Reinfas wurde das Bauchete Oesterreichische
vbertreffen mehr dann vmbs das dritte theil / alles von solchen Deuchen zuversiehen /
die von beiden Böden an / gegen dem Beyhel vnd rings herumb / gerade zuge-
scherffet seind.¹

Also wann der Bauch des Oesterreichischen vmbs halb theil tieffer wäre dann der
Boden breit ist / oder wäre gegen dem Bauch / wie 3 gegen 2 / so gieng dem Bauch-
ten die 30ste Achtering ab / wär er vmbs drittheil tieffer / oder wie 4 gegen 3 / da
gieng dem Baucheten die 66ste Achtering ab. Da aber die gebrauchige Bäuche an-
fangen / als / wann sie vmbs vierte theil tieffer dann der Boden / da ist im
Baucheten erst von 150 ungefahrlich / die eine weniger / vnd wirdt also der defect
immer fort kleiner / vnd so fortan auch von Reinfischen / vnd endtlich mit der
vergleichung / wann ein Reinfas mit einem schneidigen Bauch nicht vmbs das ganze
dritte theil des diameters vom Boden / tieffer ist am Bauch / so helt es die Oester-
reichische Wisler gewislich nicht / vnd soviel weniger / so viel seicher der Bauch ist /
gegen dem Boden zurechnen.

Notwendige
erinnerung.

Dies alles ist zuversiehen von solchen Fässern / die vmbs das Beyhel gleichsam ein
scherffe haben: mit denen aber / die von einem Boden zum andern gebogene Taufeln

6) 284 statt 254

8) 1846 statt 1946

haben / nach einem ſolchen bogen / der bey beiden Fäſſern einerley geſchlechts iſt / als baidſ am Reinfäß vnd am Deſterreichiſchen Citronenrund / oder an baiden Spulrund / etc. da iſt eſ gar ein wenig anderſt.

79. Noch weittere vnd mehr freyſchwaiffende vergleichung allerhand Fäſſer / die auch an den Bächen vnderſchidlich geartete rundungen haben: welches vnder ihnen die Wiſierruthen am beſten halte. Auß dem 29. Th.

Wann man alſo alle gleichheit der Bäche an zweyen Fäſſern ins freye Feld ſetzt / vnd nicht mehr zwey / welche einerley art rundungen an Bächen haben / zuſamen nimpt / ſo iſt kein rechte Regul mehr für zuſchreiben. Dann alſdann kan
10 geſchehen daß vnder zwey Deſterreichiſchen / daß eine ein ſolches gewölß am Bauch habe / durch hülff deſſen / eſ warlich auch die Deſterreichiſche Wiſierruthen vbertreffen vnd mehr halten kan. Diß wil ich dir mit etlichen droben bey No. 52. 60. 63. abgehandelten Exempeln beweifen.

Ein Faß / deſſen weitte am Boden iſt 19 / die tieffe am Bauch 22 / vnnnd alſo umb daß ſechſte theil / oder etwas weniger / tieffer am Bauch dann breitt am Boden: daß hat zwiſchen beiden Böden nach dem geraden Walger gehalten 3290 / etc. vnderm Raiſſen oder am Citronenrunden Gürtel 735 / zuſamen 4025. wie bei No. 60 zuſehen. Wann aber eben diſes Faß umb daß Beyhel eine Scherffe gehabt hette vnnnd von dannen gegen beiden Böden nicht gebogen geweſt were / ſondern gerad /
20 ſo were ſein ganzer Raum gegen dem geraden Walger oder Wellen zwiſchen beiden Böden / nemlichen gegen 3290 geweſt / wie 361 gegen 421. Multiplicir die vbermaß 60 mit 3290 / kompt 197400 / daß dividir mit 361 / kompt 547 / die ſetze zu 3290 / ſo findet ſich der ganze Raum 3837 / umb 188 weniger / dann wann eſ zwiſchen dem Beyhel vnnnd Boden Cirkelrund gebogen were / darmit dividir 4025 / ſo findeſtu 21 vnnnd bei zway drittheilen / wirt alſo der Cirkelrunde Bauch von einem Boden zum andern allwegen umb die 21 oder 22 Achtering mehr halten / dann wann der Bauch vom Beyhel gegen dem Boden gerad were.

Damit du aber wiſſeſt / von waß Faſſen diß Exempel lautte / ſo mercke / daß ihme droben ſein lenge gegeben worden 27 / da der diameter am Boden gehalten hat 19.
30 vnnnd am Bauch 22.

Setze daß halbe theil eines jeden ſeye ſo lang / vnd weil dann die vierung von 27 iſt 729 / vnnnd die vierung von dem vbermaß 22 vber 19 nemlich von 3 iſt 9 / ſo wirt mit zuſamen ſetzung 729 vnnnd 9 / die vierung zu der halben Laufellenge kommen 738.
71 Die vierung aber von 38 / (ſo lang were jeßo der diameter deß Bodens) iſt 1444 / deſſen halbes theil were 722 / iſt alſo die halbe Laufellenge / mit der vierung 738 / nach der 73. vnnnd 75. Lehr gar umb ein geringeß lenger dann die Deſterreichiſche Faßform vermag.

Daß ander Exempel No. 60 / iſt mit ganzem Fleiß zur Deſterreichiſchen Form gerichtet / dann da heſt der Boden 3 / der Bauch 4 / die lenge 4(1231. Dann wann
40 ich die vierung vom Boden 3 nemlich 9 halbire / ſo wirdt darauß 4(5. die vierung der halben Laufellenge vom Boden biß zum Beyhel nach art deß Deſterreichiſchen

20) beiden fehlt

31) von ſtatt von

Fasses. Dannen nemb ich hinweg (25 / ist die vierung der vbermaß (5 deß halben diameters am Bauch vber den halben diameter am Boden 1(5. Also bleibt mir 4(25 ist die vierung zu der halben Faßlänge. Suche nun die wurzel hierauf / die ist 2(06155 vnnnd doppelt 4(1231 ist die lenge deß ganzen Fasses. Vnnnd hat also diß Faß die Desterreichische Form. Dises nun hat droben gehalten / nach der Citronenrundung gerechnet / 43(88, aber nach der Art eines gedoppelten Regelsstocks nur 39(93 / weniger dann zuvor vmb 3(95 das ist beynähe der eilffte theil weniger.

Sehe da / wann ich hundert Anlagen hette / die alle mit einander I. einerley diametros an den Böden / nämlich vberal 3 / II. einerley Tüeffe am Bauch nämlich 4 / III. einerley Wisler auff dem Desterreichischen Hemstabs nach der quer / vnd also einerley leng an den Taufeln / nämlich 4(24 hielten / sie hetten aber doch nicht einerley bögen vom Beihel an gegen dem einen vnnnd dem andern Boden / sondern das eine wäre ganz gerad vom Beihel an / biß gegen jedem Boden / also das es nur allein vmb das Beihel einen bug hette / das andere aber / hette vmb das Beihel einen kleinen bogen / mit den vbrigen enden der Taufeln lieff es nach den Böden gerad hinauß / das dritte wäre noch ein wenig mehr ploderet / vnd entlich wäre eins von dem einen boden vbers Beihel herüber gegen dem andern boden ganz gerecht Cirkelrund gebogen: so köndte bey aller oben außgedingten gleichheit / nur von diser einigen hinterstelligen vngleichheit wegen / noch das ein Faß vmb die eilffte Maaß oder Emmer mehr halten dann das andere / vnnnd wer nicht die krümme zwischen dem Beihel vnnnd Böden inn acht nimmet / der kan mit gutem grund nicht sagen / ob ein solches Faß (das vmb das drittheil tüeffter ist am Bauch / als am Boden) zehen oder eilff Emmer halte / wann er schon die Desterreichische Wisler Ruthen oder sonst die gewöhnliche Faßrechnung brauchet. Noch mehrere Exempla findestu bey No. 63.

Diß hat abermal an den langen Reinfässern noch einen mehrern außschlag vnder ihnen selbst.

Vnd endlichen wann man allerhand Reinfässer mit allerhand Desterreichischen / ohne einige bedingnus gleicher Bäuche vndereinander hernimbt / vnnnd die alle nach der Wisler gleich halten solten / so kan sich das spil mit No. 77. auch bißweilen ganz vnd gar verkehren / also das ein groß vnnnd wol gebauchetes Reinfäß / mehr halte dann ein weniger gebauchetes Desterreichisches Faß.

Diß zubescheinen / wil ich dir hie an statt allerhand Exempeln / ein Täflein für Augen stellen / inn welchem der Boden vom 25sten thail biß außs halbe thail deß Bauches abnimpt.

Merck aber / weil wir hie von der Citronenrundung handeln / welche kompt auß einem Cirkelschnitt / kleiner dann ein halber Cirkel / so hat ein jede art deß Fasses sein gewisses zihl vnd maaß / welches es mit der tüeffe deß Bauchs nicht vberschreiten kan / sonst blibe es nicht Citronenrund / sondern wurde endlich Apffelrund; dise maaß wirdt ihme bestimmt durch die Kugel / weil sie gleich das mittele helt zwischen dem Apffel vnd der Citronen / vnd mit der Kugel die Apffelrundungen ihr endschafft / vnd hingegen die Citronenrundungen ihren anfang nemen.¹

72 Also gibt nun die Kugel dem Reinfafß / das der Bauch auffß höchst zweymal
 so tieff sein kan als der Boden breit ist: vnnnd dann helt die also abgestufte
 Kugel beynahē vier dritthail deß doppelten abgestuften Kegels / der drein
 gerecht ist. Dem Desterreichischen gibt sie zum
 † gröffisten schick / wie fast 5 gegen 3 / scherffer
 200000 gegen 123607 / kan also der Bauch nicht
 zwaiēr Böden tieffe haben / vnd helt alsdann
 das Faß sieben 6 thail seins doppelten Regel-
 stocks oder Botunge. Das vberige findet sich im
 10 Täfēle / das halte gegen dem andern / No. 78 /
 da wirstu finden / wann in einem Reinfafß die
 proportion deß Bodens gegen dem Bauch ist /
 wie 7 gegen 8 / das alsdann das Reinfafß nach
 dem Regel gerechnet / vmbß 20 theil weniger
 halte dann ein gerades Dest. Faß / das mit
 ihm einerley Wifler oder zwelini hat. Vnd
 hingegen helt es nach der Citronenrundung
 vmb das 20 theil mehr dann nach dem Regel.
 Darauf folget / wann ein Reinfafß diese tieffe
 20 am Bauch habe / vnnnd darneben Citronenrund
 sey / so halte es die Desterreichische Wifler so
 gut vnd gerecht / als ein Desterreichisches ge-
 rades Faß. Hette es noch einen tieffern Bauch /
 so wurde es das Desterreichische gerade noch
 mehr vbertreffen: wann aber der Bauch seicher
 ist am Reinfafß / dann vmb das 7 theil deß
 Bodens / so mag es einem geraden Dester-
 reichischen nicht gleichen / wann es schon Citro-
 nenrund ist / zugeschwēgen / das es einem
 30 Desterreichischen an Form vnnnd tieffe gleich
 gebaucheten zuvergleichen sein solte / dann
 wann zwey solche Fässer an Form vnnnd tieffe
 gleich gebauchet seind / da bleibt es bey dem
 Täfēle No. 78.

Derohalben vnnnd damit doch auch ein wenig
 ein gewißeheit alhie außgezeichnet werde / so
 mercket ihr Weinwifler / so wenig von hohen
 aber durren / das ist gegen dem Weibel zuge-
 scherfften Beuchen zuhalten / an Desterreichischen vnnnd kürzern Fässern / soviel
 40 desto reicher seind die hohe / wol in Cirkel geordnete Beuche. Vnnnd ihr Reinlenz
 der haltet in allewege an ewren langen Fässern diejenige grosse Beuche in ehren /
 da die taugen nach der lēge wol inn Cirkel gebogen seind / vnnnd wisset für
 gewiße / je größer der Bauch / wann er also recht in Cirkel gebogen / je mehr euch

Diß ist zu verstehen
 Geometrisch vnd
 nicht Vinderisch /
 dann man kan kein
 so groß gebauch-
 tes Faß auff dise
 form machen.

Wann der Diameter am		So gehet dem doppelten Kegelstock ab im	
Bauch	Boden	Dester.	Reinf.
ist		der	
25.	24.	80.	83.
24.	23.	76.	79.
23.	22.	72.	75.
22.	21.	68.	71.
21.	20.	65.	67.
20.	19.	61.	63.
19.	18.	58.	59.
18.	17.	54.	55.
17.	16.	51.	52.
16.	15.	48.	48.
15.	14.	45.	45.
14.	13.	42.	41.
13.	12.	39.	37.
12.	11.	36.	34.
11.	10.	33.	31.
10.	9.	30.	27.
9.	8.	27.	24.
8.	7.	24.	21.
7.	6.	21.	18.
6.	5.	18.	15.
5.	4.	15.	12.
4.	3.	11.	9.
3.	2.	8.	6.
2.	1.		4.
		theil der Citro- nenrundung	

ewer rechnung verführet / da ihr zwischen zweyen Cylindris oder Wellen / einen im Faß den andern umb das Faß / nach eines jeden außgerechneten Leib oder Raum / das mittel nemet / wie euch dessen droben No. 60. vnnnd 63. Exempla für augen gestellt worden. War istß / wann die Laugen umb das Spontloch einen Bug oder Klad hetten / wie die Römischen haben sollen / also das ein jede Lauge zwen gerade theil hette / gegen jedem Boden einen / so thete dise ewere rechnung der sachen zuvil. Wann sie aber wie jehzo gesetzt ist / durchauß gleich gebogen seind / so thut ewere rechnung der sachen vil zu wenig. Hierauß dann auch der Hochgelehrte Herr D. Hartman Bayer Statt medicus zu Franckfurt / leichtlich zuschliessen hat / an welchen Sorten der Fässer ihme sein Medium Conicum zustatten komme vnnnd an welchen es ihme 10 hingegen nur hinderlich seye.¹

Dritter Theil des Büchleins

Von zubereitung vnnnd gebrauch der Oesterreichischen Weinvisierruthen.

80. Wie ein jeder Hauswirt eine gerechte Visierruthen nach dem ge-
rechten Linger schuch oder caementirten Maaß bereitten / oder ein an-
dere probiren möge: item von dem Oesterreichischen Emmer vnd
Achtering.

† Mach dir eine gerade Ruthe von Lerchenbaum / oder sonst einem ge-
raden Holz / mehr breit dann dick / spiße dieselbe gegen dem einen Ende
nach der breite gemählich zu / also das sie vnden fast eine gerade schneide
gewinne / wie ein gerades Schrott / oder Stem Eysen / verware die schneide
vnden mit einem Silbernen oder messinen Schuch / damit dise schneide
durch das vilfeltige stüren vnnnd stupffen sich nicht bald abnutzen könne.

Von diser schneide / mache die Ruthen einer Linger Klaffter / das ist /
sechs Linger Schuh lang / dessen dir hieneben in beygefüger Figur ein
gerechter halber Schuh / beim Stattgericht zu Lintz caementirt, vnnnd
in seine 6. Zölle abgetheilt / fůrgestellt wirdt. Einen jeden Zoll theile
ferners in 19 gleicher puncten / sovil sein Jar in einemmonds-
Eirkel / oder inn der gulden Zahl / die Järlich vornen an die Calen-
der / gleichwol nicht Gulden / sondern nur roth gesetzt wirt / das mercke
von besserer gedechtnus wegen. Also wirt dise ganze Ruthe in 1368
puncten gehen. Diese gleiche vnd kleine theile soltu auff die eine schmale
seiten der Ruthen ordentlich nach einander verzeichnen / also das der vn-
derste punct nechst an der schneide / mit der ziffer 1, der nechste drüber
mit 2 gezeichnet werde / vnnnd so fort an / bis zu dem aller obersten / da
sol die ziffer 1368 fallen. Ein verstendiger waist ihme wol zu thun / wann
er gleich nicht alle 1368 puncten mit iren ziffern zeichnet / darzu dann
die ruthe viel zu eng sein wurde.

Hierauff nun / hab ich dir ein Täfelin hienach gesetzt / auß welchem du
sehen kanst / auff welche puncten die zeichen fallen / zu einem jeden Seidl /
Achtering / vnd Emmer / welche zeichen gerad gegen ober auff der einen
braitten seitten müssen eingeschnitten werden. Vnd mercke / das dir ein
jede ziffer nach dem zeichen .C. bedeutte den zehler zu einem Bruch /
dessen Renner ist allweg 10.

Ferners ist zumercken / warumb ich dreyerley Emmer setze. In dem
vergleich der 5 M. D. Landen Anno 1542. getroffen / werden 8 Achtering
auff ein viertel gezehlet / dahero die Achtering den namen bekommen /
vnd 4 viertel oder 32 Achteringe für einen Emmer / diß ist die rechte (so
genennte) alte Maaß. Wie nu hernach ungefahrlich vor 70. Jaren erst



Gulden zahl.

lich das Ungelt / darnach Anno 1562. die einfache: vnd entlich Anno 1569. die doppelte zapffenmaß auffkommen / ist die anzahl der Randeln in einem Emmer / von 32 Kanteln / erstlich auff 35 / hernach auff 38 / entlich auff 41 gestigen. Damit ist der Taß auff die weite hülse gelegt worden / die sich mit verringerung der Maas nit haben wollen einziehen lassen. Dergleichen ordnungen seind auch damallen in Württemberg vnd anderswo gemacht worden.

Sonsten kan ich auß allerhand berichten sovil verstehen / das obwol allein 41 die rechte anzahl der Randeln in einem Emmer seye (soviel stehen auch auff den gerechten wißterstäben gegen dem zeichen eines Emmers gerad vber) jedoch so einer jme einen
 10 Emmer mit Randeln messen leßet / heut man ihme nur 40 Achtering für einen. Hingegen wolte der Kauffer gern 42 darfür haben / als ob der Schenk wol 42 auß einem Emmer außschende. Weil dann beiderley / kleinere vnnnd größere durch den aigen nugen / neben dem den die Landsordnung gibt / auffkommen / hab ich sie umb mehrer nachrichtung willen zusamen gesetzt / vnnnd an seinen orten drunter eingemischet / wievil meiner puncten auff einen jeden Schuch vnd Zoll gehen.¹

71 81. Was für einen Bauch dasjenige Faß gehabt / auß welchem die Desterreichische Wißterruthen hergenommen / gemessen oder caementirt worden.

Wie droben bey der 13. Lehr meldung geschehen / so gehet der Desterreichische ge-
 20 brauch der Wißterruthen nicht anderst recht an / es seyen dann die Fässer einander ähnlich / oder ob sie einander nicht ähnlich / das doch sonst die Faßformen vnder einander gleichgültig seyen.

Nu hat es sich zwar bey No. 75. befunden / das die Binder in Desterreich eine regel haben / nach deren allezeit der Boden gegen der Lausel einerley Schick behalten solte / vnnnd bey No. 76. das dem behalt nichts merckliches benommen werde / wann schon der Binder sein Regel nicht eben außs genauest treffe. Item No. 77 / wann schon die Fässer / so nach dem Schick der Lauseln vnnnd Böden einander ähnlich / nicht eben gleiche Bäuche haben / sondern etliche gar einem Cylinder oder Walger gleich seyen / andere aber tüeffe Bäuche haben / so fern das doch die Bäuche umb das Weibel rings
 30 herumb eine scherffe haben / von dannen sie gegen den Böden gerad hinauß lauffen / als wären es zwo auff einander gestürzte Botungen. So sey abermalen dem Desterreichischen Faß mit dem Bauch nichts gegeben / auch nichts merckliches benommen / vnd halte ein so gebauchetes Faß gleich sovil als wann es allerdings gerad vnnnd ohne Bauch wäre / vnnnd doch einerley Wißter hette. Diß zwar / sprech ich / hat sich bißhero also befunden.

Wiewol nu gemeiniglich die Fässer / je größere Bäuche sie haben / je mehr sie in der mitten gährund / vnd also einem doppelten Regelstock (wie am 62. blat) bey nahe gleich seyen: Jedoch vnd wann auch bißweilen Bäuche fürkommen (wie bey No. 79 gemeldet) die fein wolgeschickt in einen Cirkel gebogen / vnnnd also mit Wein wol an-

13) denn statt den

gefüllet seind: da wil gleichwol ein wenig ein vngleichheit auch vndern Desterreichischen Fässern entstehen / die ist aber desto weniger zu anten / oder zu achten / weil es der augenschein gibt / daß das erste Faß / darauff man die Wisier genommen / nicht ein purlauttere geräde am Bauch / sondern gewißlich einen runden Bauch gehalten haben müsse / derowegen dann alle andere Fässer die auch also gebauchet / abermalen ihre Wisier gerecht halten / die aber so etwas weniger am Bauch haben / nicht vmb viel weniger / vnnnd welche mehr gebauchet / nicht vmb viel mehr in sich haben / dann ihnen die Wisier gibt.

Diß alles zuerweisen / bedürffte es nicht vil vmbschwaffens / wann man inn Desterreich auch ein caementirtes gefäß hette / das einen gerechten Emmer hielte: dieweil aber der Emmer nur allein auff der Wisirruthen caementirt ist / so müssen wir von der heutiges tags gebrauchigen Achtering anfahren / vnnnd auff den Emmer juruck rechnen. Derhalben so lasset vns erslich nemen die caementirte Wisier auff ein Achtering / die ist gleicher / obeingeführter puncten 100. Wann nach dieser zwerlini durch die 75. Lehr ein Desterreichisches gerades Fäßlin gerechnet wirdt / so gewint es am Leib 604600 / halb 302300.

Wann nu das erste Faß keinen Bauch / oder aber einen zugescherfften Bauch (weil baldes im Desterreichischen Faß gleich gilt) gehabt hette / so müste ein halbe Achtering nicht mehr in sich halten dann sovil meiner thail / jeden einer Vnitet lang brait vnnnd hoch verstanden. Ich hab aber bey der Statt Obrigkeit zu Linz ein Caementirte halbe abgefordert / vnnnd mit grossen fleiß zu etlich vnderschiedlichen malen gemessen / das sie mir angefüllet hat eine runde blechene Büchsen / die am Boden gehalten hat meiner puncten in die leng 77 / vnnnd in die braitte 74 sampt 2 drittheilen.

In dise Büchsen hab ich die erwehnte halbe gegossen / die hat sie angefüllet / meiner thail 68 hoch. Auß diser höch vnd diametris am Boden findet sich nach der 24. Lehr der Raum des Wassers 307055 / das ist vmb 4755 meiner gewürffelter puncten mehr / dann droben das Desterreichische halbe Fäßlin mit einer Walger geräde auff die Wisierlini 100 gerechnet / gehalten hat. Siehest also das ein Desterreichische Caementirte halb Randel vmb das 65ste thail mehr helt / dann wann ein Fäßl ohne Bauch / auff die Wisier einer halben zugerichtet wurde.

Darauff dann folget daß dasjenige Faß / auß welchem die Desterreichische Wisier genommen worden / nach anzeig des Tafelins No. 79 / vmb das 20 theil tüeffer am Bauch gewest sein müsse / als brait am Boden: so anderst die Taufeln recht Cirkelrund gekrümmet gewest.

Wäre aber die krümme der Taufeln auß der Parabola oder auß einer Hyperbola, das ist vmb das Beihel gächrund / vnnnd gegen den beiden Böden außwärts geräder gewest; so kan der Bauch wol vmb ein gutes tüeffer gewest sein. Wie dann gemeinlich die Fässer mit gar tüeffen Bäuchen dise form gewinnen.

Es ist aber fast glaublich / weil die alte / in andern Landen bräuchige Wisier rechnung sich sonst auff den Walger oder Cylinder fundirt, so werde auch derjenige / welcher die jeso gebräuchige Wisirruthen anfenglich bestelt vnnnd caementirt, in dem wohn gesteckt sein / das solche rechnung notwendig vmb etwas verfählen müsse / wenn das Faß nicht recht Cylindrisch oder Wellenrund seye / vnnnd werde sich derowegen

43) daß statt das

nach ſolchen Fäſſern umbgeſehen haben / welche gar vnſichtige Bäume gehabt / vnd einem Cylinder oder Walger am aller ehnlíchſten geweſt ſeind. Sonderlich wirt er ſich umb mehrer gewiſſheit willen / an die groſſe Deſterreichiſche dreyling gehalten haben / die könden von ihrer ſchwere vnd von der gefahr wegen im Walzen / keine hohe Bäume leiden.

Doch bin ich nicht in Abred / daß diß ein gar ſubtil Werck / vnnnd nicht ſo ſcharpff drauff zugehen ſey / wie es die zahlen geben. Dann bedenk wie klein meine theilung ſey / da 19 puncten einen Zoll machen / wie leicht kan es ſeyn / daß es mir in der höch deß Waſſers umb einen ſolchen theil gefählet habe / darmit hette ich ſchon umb den
10 68 theil deß Waſſers gefehlet / daß iſt ſchon ſchier der 65 theil / auß welchen 65 thail wir bißhero den Bauch gerechnet.

Nem ich dann nun die höch deß Waſſers inn meiner büxen 67 / ſo blibe dem Faß gar kein Bauch / als wann es ein gerader Walger geweſt wäre / nem ich ſie aber 69 / ſo ſellt ſchon der 40 theil auff den Bauch / vnnnd muß er alſdann nach außweiſung deß Tafelins No. 79. umb das 12 oder 13 theil deß Bodens tüeffer geweſt ſeyn / auch nach der Citronenrundung.

Ich halte aber nicht / daß es mir mehr dann umb eine ſolche Vnitet fählen ſolle. Vnd iſt zwar auch diß ein gar geringer Bauch / wann er gleich umb das 12 theil tüeffer iſt / dann der Boden / da hingegen die meiste Anlagen vnd kleine Fäſſlin /
20 ſo mir noch fürkommen / vom 10ten in 5ten thail tüeffer am Bauch geweſt ſeind / dann am Boden. ¹

77 82. Wie das Faß geſtaltet ſeyn ſolle / damit die Wiſſerruthen dich nicht verführe.

Anfangs wil ich widerholet vnd erinnert haben / daß meine meinung nicht ſeye / daß man durch die Deſterreichiſche Wiſſerruthen / etlicher fürgeben nach / bey einer Achtering wiſſen könde / wieviel ein Faß halte: dann wie bey No. 63. mit Exempeln / vnd No. 79. mit mehrern grund erwiſen / iſt ſolches bißhero nicht allein den Deſterreichiſchen / ſondern auch allen andern Weinwiſſerern vnmöglich geweſt. Dann das
30 etliche ihres aigen bedundens ſubtile Rechenmeiſter ſich vnderwinden dörfſen / bey einem Gläſſlin außzurechnen / wie viel das Faß halte (wanns nicht brait gedruckt / nicht bodenhol / ſondern innen glat ſeye / ſetzen ſie darzu) das heiſt müſſen ſeigern vnd hummeln verſchlucken / was wöllen ſie vil von Beulen vnd Böden ſagen / ſo ſie doch noch die Beuche nicht kennen?

Laß dir derohalben die Deſterreichiſche Wiſſerruthen wegen ihres leichten gebrauches vnd guten vorthells lieb / vnd vor allen bißhero verübten Wiſſereichungen wolbefohlen ſeyn / ob ſie dir ſchon nicht eben bey einem Gläſſlin / Achtering / Viertel oder Emmer (in den groſſen doppel Dreylingen) zutriſſt / angeſehen der aller glehrteſte Rechenmeiſter / der noch fürkommen / mit aller ſeiner Kunſt / dir noch wol umb ein mehrers fallirn kan.

40 Doch kan es nicht ſchaden / wann du dich nach denen bißhero erwehnten vnderſchaiden / vnd was ſonſten einer vnnnd der ander außdinget / fleißig richteſt / darmit

du mit demjenigen / was du auff der Wislerruthen findest / zuheugen vnd zu dispensiren wiffest.

Erstlich / sol die Faß Taufel mit sampt den Fröschen anderthalb Böden lang sein / nicht viel lenger / auch nicht viel kürzer / dann baider orten wurde es die Wisler nicht so wol halten.

Zum andern besihe es / ob es einen vbermässigen vnd plodereten Bauch habe / dann die Wislerruthen gehört eigentlich nur auff solche Fässer / welche nicht ober das 12 thail auffß maiste / tüeffer am Bauch seind / dann brait am Boden; oder auch auff solche / an welchen die Taufeln / wann sie noch tüeffer gebauchet / zwischen den mitteln Raiffen gächrund gebogen seind / vnd gegen den Böden geräder hinauß lauffen / vnd so deren keins wäre / wurde dir die Wislerruthen zu wenig sagen / dann die hohe vnd ploderete Bäuche seind reicher. 10

Doch sol das Faß auch nicht gar glatt sein wie ein purlauterer Walger / sondern wie gesagt / sol der Bauch vom 2oten biß ins 12 thail / mit einer wol formirten rundung herauß gehen / oder so er gächrund vmb die mitte / sol er noch weiter herauß gehen: sonstn wurde das Faß seine Wisler nicht so wol halten.

Fürs dritte / so dir aber ein langes Reinsfaß fürkäme / mit einem tüeffen wol inn den Cirkel gebognen Bauch / das mag mit haltung der Wisler einem recht gebaucheten Oesterreichischen gleichen / vnd sonstn gar nicht / wie No. 79 erweisen.

Viertens / ob der Boden / oder ein Taufel etwa tüeff eingebogen wäre / da brauche dich deß Augenmasses / wieviel etwa ein solcher bug außtrage / das zeuchstu billlich von der Wisler ab. So man das Faß auff den einen Boden aufrichtete / liesse sich diser fehl am obern Boden mit Wasser eichen. 20

Sonderlich aber vnnnd zum fünfften hastu dich an den tüeffgebauchten Fässern wol fürzusehen / das sie rings herumb gleich gebauchet / vnnnd nicht etwa ¹ oben vmb das Beihel mit vilen braiten / vnden aber / mit vielen schmalen Tafeln besetzt seyen / vnd gleichsam am rucken ligen / vnnnd den Nabel (das Beihel) oberlich kehren; dann wa diser fehl sich befindet / da kanstu auff den plodereten Bauch nicht so viel schätzen / weil er nur oben / vnd nicht zumahl auch vnden / so weit herauß gehet. Ja es wirdt dir alsdann die Wislerruthen vmb ein merklichs zuvil sagen / weil es oben von einem so hohen Beihel viel weiter ist biß an die Böden / dann wann das Beihel unten gemacht wurde. 30

Hingegen vnd zum sechsten / wann etwa das Beihel eingebogen wäre / das kan gar bald ein namhaftes außtragen / so die Wisler zu wenig sagt.

Fürs sibende sol das Faß an Böden vnnnd Bauch nach dem Raiffen recht Cirkelrund sein / dann die Oesterreichische Wisler ist nicht auff die Wälsche Lägeln gemacht. Wie: wol hie kein sonderliche gefahr nicht ist / dann ob wol die Böden mit dem wetter sich werffen / nach der seit eingehen / vnd das Holz sich zusamen treiben lassen möchte / da hingegen die höch vnverenderlich / vnd die Jahre ihnen nichts benemen lassen: so gibt sich aber hingegen der Bauch etwas inn die braitte vnnnd nidere wegen der schwäre / kompt also eins dem andern zu hilff vnnnd zubuß. 40

Entlich vnnnd zum achten / so die Tafeln inwendig vngeschwunglich diß wären / sonderlich an den Böden / von der stercke wegen / also daß das Faß innen nicht glatt

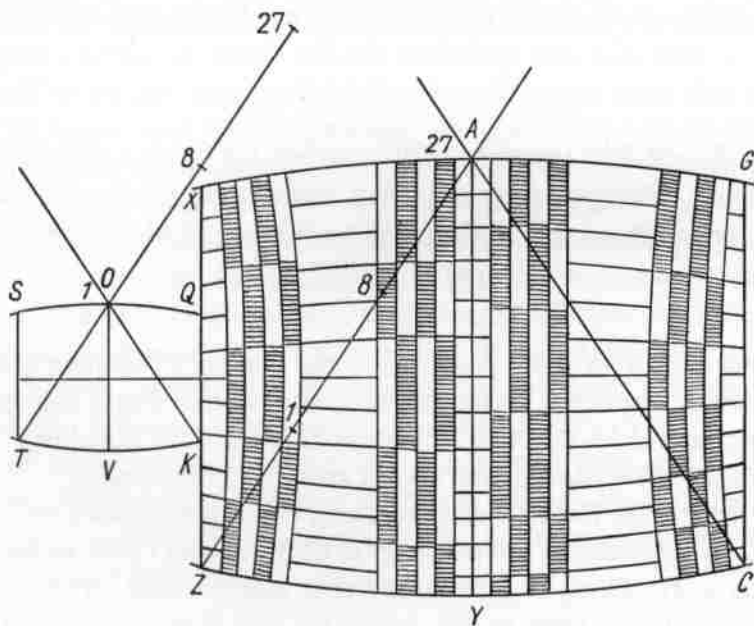
16) daß statt das

wäre / das laß ich den Binder verantworten / die Meßkunst nimpt sich vmb das nicht an / was vnordenlich ist / wann mans weder sehen noch greiffen kan.

83. Wie die Bisier Ruthen zugebrauchen auff die Fässer vnnnd Botunge.

Das wirdt mit hievorgehender Figur für Augen gestellt mit zweyen vngleichen / aber einander allerdings ähnlichen Fäßlein / bey welchen A vnd O das Beihel bedeuten / AZ vnd AC die Bisier Ruthen welche mit dem zeichen 27 Emmer oder Achtering auß Beihel raichet / im kleinen Fäßlin raichet die Bisier Ruthen OK oder OT, auß Beihel / mit dem zeichen 1 Emmer oder Achtering.

10 Hie ist aber zumercken / weil inn einem Faß das Beihel nicht ein solcher punct sein
79 kan / wie hie in der Figur das A vnd O, sondern es muß ein zimliche weite haben / sonderlich auch von der Bisier Ruthen wegen / das man dieselbige vngehindert nach der zwer hinein senden könnte: so wil es eine notdurfft sein / das man zuvor einen gewissen puncten (nicht aussen sondern) inwendig an der offenen Laufel zeichne oder in sinn neme / vnnnd die Ruthen AZ, AC an denselbigen innerlichen puncten A zu beiden mahlen anschlage / auch wie weit diser punct an der Bisier Ruthen raiche / auß



Die 22. Figur.

mercke; dann so man nicht von nur einem puncten / sondern herüber von der einen seiten des Beihels / hinüber aber von der andern seiten messen / oder aussen anschlagen / vnnnd das Holz zum Wein oder innerlichen Raum rechnen wolte / könnte leicht-
20 lich die Bisierlini vmb einen Zoll zu lang oder zu kurz genommen werden / das trüge in einem grossen Dreyling nahend zwen Emmer auß.

Ex Th. 27. Wann nun diser gemerkte punct / vnd das Beihel mit jme / nicht eben gerad in der mitte stehet / sondern AC etwas lenger ist / vnd also mehr Emmer oder Achteringe zeichnet / als AZ; als zum Exempel AC zaigete 8 Emmer / AZ 10 Emmer / so nimbt man nur das mittele zwischen baiden für die gerechte Eyß / nämlich 9 Emmer / vnd schadet dise halbirung der gewisheit nichts. Hüte dich aber das du nicht etwa das mittele nach der gleichen thailung nimest: dann es würde dir in den kleinen Fässern vmb viel fählen. Inn den gar grossen zwar trüge ein solcher kleiner vnterscheid vnd dessen halbirung weniger auß.

Ex Th. 28. Also hastu dich auch keiner irrung dahero zubeforgen / wann etwa baide Böden nicht gleiche Felder hetten / darumben sich doch andere Wisirrechnungen mit sonderm fleiß vnnnd verdrießlicher Arbeit annemen müssen. Vrsach dieser baiden posten ist / weil es in der Oesterreichischen Faßform sehr wenig außträgt; bey andern Faßsorten ließ es sich nicht also verrichten. Desthalben dann dise art zu Wisiren sonsten in keinem Land also angehet / wie in Oesterreich / man brauche dann auch dise Form der Fässer.

Wisirung der Botungen. Dise weise zu Wisiren gehet auch auff die Bottungen: welche auß einem Faß (gerad vmbß Beihel entzweygeschnitten) gemacht werden / oder sonsten nit viel niderer oder höher seind / dann ein halbes Faß; da setzet man den Wisirstab auch auff das ein Ende deß Bodens / vnd messet ober zwor biß oben an den ranfft / gerad gegen ober; das kan man also vmb vnnnd vmb versuchen / obs überall gleich eintreffe / oder ob man mitteln müsse: Allein zu mercken das die anzahl der Emmer vnnnd Achteringe / so auff der Wisirruthen angezeigt wirdt / den Bottungen nur halben gelte.

84. Wann kein zugerichte Wisirruthen zur hand / oder dise vnser von 6. Schuhen zu sehr grossen Fässern nicht lang gnug wäre / wie alsdann die Oesterreichische Fässer nichts minder behend zumessen.

So nimb einen jeden stab / brauch ihne / wie man die Wisirruthen brauchet / halt ihn darnach gegen dem Linher Schuch / zusehen / wievil Schuch oder Zölle die Wisir oder zwertlini im Faß halte. Dann im Täfele auff die Wisirruthen gestellt No. 80 / findestu schon wievil Emmer ein jede anzahl der Zölle bedeutet.

Zum Exempel / das Faß hette nach der zwor 4 Schuch vnd 10 Zölle / die bedeuten inn der Tafel mehr dann 33 kleiner Emmer zu 40 Achteringen / vnnnd weniger dann 33 mitterer zu 41 / dann jene haben 1096 meiner puncten / diese aber ha'ben 1106 derselben / aber 4 schuh vnnnd 10 zölle haben 1102 / das ist vmb 6 mehr dan 1096 / vnnnd etwa vmb 4 weniger dann 1106.

So aber ein solcher stab lenger wurde dann 6 Schuch / also das dise lenge im Täfel lin nicht zu finden wäre / so nimb das halb thail oder dritt thail oder viertthail der gefundenen lenge an Schuchen / Zöllen vnd kleinen thailungen / such im Täfelin / was

5) Hütte

13) vernichten

17) Beihl

34) 1202 statt 1102

es für eine Eych anzeige / die multiplicir mit 8. wann du das halb thail genommen / oder mit 27 / wann du das drit thail / oder mit 64 / wann du das viert thail genommen / so haſtu auch die ganze Eych deß groſſen Faſſes.

Zum Exempel / die wiſſerleng mit dem Finger ſchuh gemessen / hielte 10 ſchuh vnnnd 3 zölle / weil es nun mehr dann 6 ſchuh / so halbire es / vnnnd ſuch 5 ſchuh vnnnd anderthalben zölle / das iſt 1168 kleiner theilungen im Täſelin / da findeſtu das 1140 geben 36 mitterer Emmer / vnd 1179 geben 40 mitterer Emmer / der vnderſcheid iſt 39 vnnnd macht hie 4 Emmer / Nun iſt 1168 mehr dann 1140 vmb 28 / das iſt bey nahe drey viertheil von 39 / vnnnd macht weniger dann die 3 Emmer / hielte alſo dieſe
 10 halbe wiſſer nicht gar 39 Emmer. Vnd weil du die Wiſſer halbirt haſt / so multiplicir 39 mit 8 / komen dir 312 Emmer nicht gar / das iſt bey 311 Emmern / ſovil hielte das Faß.

Gefezt / der ſtab were 15 Finger ſchuh vnnnd fünffthalben zoll lang / hie kanſtu nicht das halbtheil nemen / dann es iſt ins täſelin auch zu lang / nimb derhalben das drittheil 5 ſchuh vnnnd anderthalben zoll / das gibt / wie zuvor / etwas weniger dann 39 mitterer Emmer; weil du dann das dritte theil genommen / so multiplicir 39 mit 27 / das macht 1053 / hielte alſo das Faß bey 1050 Emmern: vnnnd alſo kan man alle Feſſer wiſſeren / biß auff den halt 1728 kleiner Emmer / das iſt für Deſterreich meines wiſſens gnug.

20 Zu Heydelberg aber ligt ein Faß / deſſen Lauben oder Laufeln ſeind 27 Schuh lang / der Boden 16 / der Bauch 18 ſchuh hoch / wie in einem deſſhalben außgefertigten Kupfferſtück vermeldet wirt. Rechne von den Laufeln einen ſchuh auff die Belgen oder Fröſche / bleiben 26 ſchuh / vnd die halbe leng nach dem Wein 13 ſchuh / rechne nach der 74. Lehr ſeine zwerlini / die wirt nicht gar 22 ſchuh. Nun diß Faß iſt nicht vil lenger dann die Deſterreichiſche Form / Gefezt / es ſey gerad die Deſt. Form vnnnd der Finger Schuh / wieviel wirdt es Deſterreichiſcher Emmer halten? Hie kanſtu weder das halbe noch das drittheil nemen / dann du findeſt es nicht im Täſelin. Nimb derhalben das viertthail von 21 Schuhen / das iſt 5 Schuh 3 Zölle / die zeigen im Täſelin / oder auff der Deſterreichiſchen Wiſſerruthen
 30 42 Emmer. Weil du nun das 4 theil genommen / so multiplicir 42 mit 64 / das macht 2688 Emmer. Wie dann im Kupfferſtück bengeſetzt wirdt / das Faß halte 132 Fuder / oder 795 Dhm vnd 3 viertel / das trifft ungefahrlich alſo zu / wann man bey vierthalb Deſterreichiſcher Emmer auff ein Pfälgiſche Dhm rechnet.

Das groſß Faß zu
 Heydelberg.

Nicht vil anderſt ſol man ihme auch dann zumal thun / wann eine lenge zu Wiſſeren wäre / kürger dann die leng eins ſeidls / wie drunten No. 90. es die noth erfordert / dann man duplirt oder triplirt die lenge / vnd nimmet hernach das 8 oder 27 thail von ſeiner Eych.

23) 16 ſtatt 13

24) 21 ſtatt 22

85. Wann das Faß nicht müßte auffgebeihelt werden / wie ihme alsdann mit der Oesterreichischen Wiserruthen / oder an deren statt / mit irem Täfele bey No. 80. bezukommen.

Messe mit einer ruthen von gleicher thailung / oder mit derselben seitten an der Wiserruthen / wie hoch vnd brait ein jeder Boden XZ vnnnd GC absonderlich seye: findestu den Boden nicht Cirkelrund / so nimb das mittlere zwischen der höhe vnnnd der braitte eines jeden Bodens. Zuech hernach ein Band vmb deß Fasses Bauch herum / das doch das ¹ Band sich nicht außstrecken vnnnd außdehnen lasse wie ein Faden / vnd auß diesem vmbkrais / rechne nach der 6. Lehr / wie lang der diameter vom Bauch sey mit sampt dem Holz / messe auch an Fröschen die dicke der Laufeln / zuech ab solcher dicken zwo / vom diameter deß Bauchs / also beheltestu den diameter AY deß blossen Weins / da das Faß am dicksten ist.

Entlich messe auch mit einem auffgesperten Cirkel / wie weit es seye von dem mitteln puncten deß Beyhels A biß hinauß an baide Böden / X vnnnd G, da mustu die lenge der Frösche vnnnd deß Bodens dicke wissen vernünftiglich zu schätzen / vnnnd darvon abzuziehen / damit dir die baide lengen AX vnnnd AG nur allein nach dem Wein bleiben.

Hiermit hastu zu dem einen halben Faß dise Maasse GC, AG, vnd AY zu dem andern aber XZ, AX, AY.

Suche derhalben hierauß nach der 74. Lehre baide lengen AC, vnnnd AZ, als wann du sie mit der Wiserruth oder sonst einem stab gemessen hettest. Wann dir dann nu die Wisierlenge hierauß bekant worden / so thue ihm ferners wie du bey No. 83. 84. gelehret bist.

Wisier auff
Pergamen.

Etliche gebrauchen sich eines pergaments / darauff die Emmer also auffgeschriben seind / wie auff der Wiserruth / allein vmb soviel lenger / als viel CG vnd GA zusamen lenger seind dann AC: setzen auch an / vnden am Boden C, fahren ober die Frösche bey G, vnd strecken das pergament biß ins A / da zeigt es die rechte Eyck / allein das die Frösche bey G der gewißheit etwas wenigens benemen mögen.

Grosse stück nach
der schwere zu vi-
sieren.

Diese weise wirdt von den Büchsenmeistern auch zu abmessung der grossen Stücke gebraucht: vnd kan ein solch pergamen / auff die Fassench gerichtet / ohn einige ver-
änderung auch dorthin gebraucht werden / nämlich also.

Wann alle stücke vnder einander bey nahe einerley Schick haben / vnnnd einander ehnlich seind / auch auß einerley Zeug gegossen seind; so laß das kleinste wegen / Wisier es hernach mit einem solchen pergamen / wie ein Faß / nämlich setze mit dem pergamen zu vnderst am Muntloch an / fahr oben hinüber biß ans Zündloch / oder gar erhinter an das end / vnd merck / welche zahl der Cubischen Thailung oder Emmer auff das end falle: die halte gegen der zahl seines Gewichts von Zentner oder Pfunden; hernach Wisier ein jedes Stück mit demselben pergamen / vnd mercke die anzahl der Emmer / so hastu drey zahlen die geben dir durch detri das Gewicht eines solchen vngewegnen stücks.

40

21) herauß

27) F statt G

86. Summarische widerholung vnnnd instruction / ein jedes Faß auß seinem rechten Grund zurechnen.

Deſſen bedarff man inn Deſterreich zu den Landfäſſern gar nicht: die Wiſierruthen iſt ſo richtig als kein rechnung nimmermehr ſein kan. Aber die Außländiſche Fäſſer ſeind von ſo vielen vnd mancherley Sorten / das es dannoch auch für die Wiſierer in Deſterreich nicht ein vnebner handel / daß ſie ſolche vnbräuchige Fäſſer recht Wiſieren lernen. Dann es wiſſentlich iſt / das täglich viel außländiſche Fäſſer ins Land kommen / eintweder voll mit Reinweinen / oder anzufüllen mit Deſterreichiſchem Wein / vnd außſer Landts zuführen.

10 Sonderlich aber iſt diſer letzte theil deß Büchlins auch für die andere Länder gemeinet / die ſich der Deſterreichiſchen art zu Wiſieren nicht gebrauchen könden. ¹

82 Meſſe mit der oben beſchribnen Wiſierruth / vnd deroſelben gleich außgetheilten ſeiten / was du an einem Faß meſſen kanſt / nämlich I. die zwerlinien AC, AZ wie No. 83 / doch hie mit der gleichen / vnnnd nicht mit der Cubiſchen thailung: ſo auch II. die baide Böden GC vnnnd XZ wie bey No. 85. Item III. die tieffe AY für ſich ſelbſt vnd zumal durch den umbkraiß / wie bey No. 85. Dann ſo du auß dem umbkraiß nicht eben dasjenige findeſt / was dir dein ſtab / nach AY hinunter geſendet / anzeigt / ſo iſt der Bauch am Faß nicht Cirkelrund / diſe ungleiche rundung am Bauch magſtu auch erlernen durch einen groſſen eingekrümpften Cirkel / oder durch Parallelllinien.

20 Dann ſo meſſe auch die lengen AG, AX, mit einem Cirkel / wie bey No. 85: vnnnd weil du mit abſehung der Fröſche vnd deß Bodens / als in einem blinden Werk / verfahren möchteſt / ſo laſſe dich von gewiſſheit wegen nicht verdrieſſen / dieſe lengen auch zurechnen / auß den 3 gemeſſenen linien AY, AC vnnnd GC, durch die 74. Lehr.

Wann du nun alſo dieſe linien alle gemeſſen vnnnd gerechnet haſt / ſo ſuch erſtlich deß Faſſes gerade lenge von X gegen G, auß der 74. Lehr / nämlich alſo. Zeich ab den halben diameter eins jeden Bodens vom halben diameter deß Bauchs (oder wann ſie nicht Cirkelrund / ſo nim die mittlere leng auß dem längſten vnnnd kürzeſten diametro eines jetwedern) was bleibt das multiplicir in ſich ſelbſt vnd zeuch ab von der vierung AG, ſo bleiben die vierungen zu der einen vnnnd der andern halben Faßleng / die iſt die Wurzel darauß.

30 Mit dieſer halben Faßleng vnnnd mit dem Diameter GC, vnnnd ſeiner Cirkelſtück / ſuch nach der 24. Lehr den Walger oder Cylinder, der auff dem Boden GC ſtehet; alſo thue auch mit dem andern halben thail / wann ſie gar ungleiche Böden hetten / ſeind ſie aber gleich / ſo bedarff es nicht doppelter arbeit / ſondern nur bloſſen duplirens deß einen gefundenen Walgers. Hiermit hetteſtu den einen vnd zwar gröſſeſten thail deß Raums oder Weins im Faß / nämlich ſoviel deſſen nach der gerade zwiſchen beiden Böden GC vnd XZ iſt. Hernach iſt es einig vnnnd allein zuthun umb den 40 übrigen thail deß Weins / ſoviel deſſen vndern raiſſen ſteckt / vnnnd umb den

12) Wiſſe mit der oben

21) lenge

gefundenen Walger herum gehet wie ein Gürtel. Wiewol aber schon allberait die fürnemiste linien bekant gemacht seind / so kanstu doch noch nicht gerades weges fortgehen / weil du die art diser Gürtel oder Bauchs noch nicht waissest / auch nicht ein jede art desselben rechnen kanst / wie droben No. 64. angezeigt worden. Mußt dich derohalben auff zwen wege thailen / vnd auff einem ein solche Gürtel rechnen / welche gewiß weniger ist / dann die am Faß / auff den andern eine solche die gewiß mehr ist / oder doch gerad das rechte Maaß: damit du wissest daß dasjenige / so man sucht / sich gewiß innerhalb diser zweyer zielen halte.

Der erste weg nimmet das Faß an wie einen gedoppelten Regelftock / vnd rechnet diese zugescherffte Gürtel nach der 52. Lehr / auß beiden diametris des Bauchs vnd des Bodens / vnd auß dem allberait bekanten Walger / auff dem Faßboden stehend: dieser sagt gewißlich zuwenig. 10

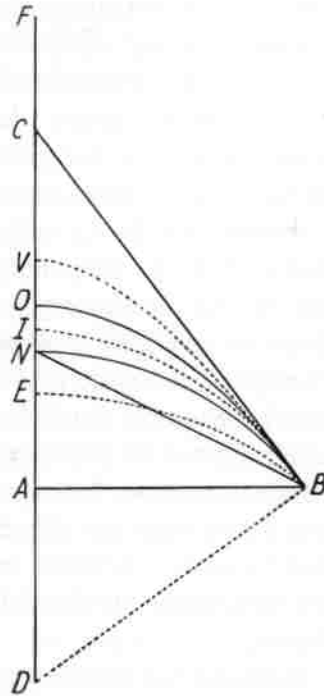
Der andere Weg nimmet diese Gürtel für Citronenrund an / rechnet dieselbe auß der 63. Lehr. Dieser weg sagt vnderweilen recht / offft aber sagt er zuviel.

Wiltu nun endlich wissen wievil ungefährlich ein jeder zu wenig oder zuviel sage / so mustu zum fünfften durch ein geschicktes Instrument erlernen / was das Faß an der Lauffelleng für eine rundung habe. So dich nun gelüset diß nach aller scherffe zurechnen / so nimm einen viereckten glatten stab / so lang ein Faß sein mag / der sich nicht leichtlich biege. An diesem stab sollen fünff oder sibben Mütterlein / jedes mit einem zugespizten stefft / hin vnd her gerucket werden mögen / so daß sie doch fest stehen / vnd nicht hin vnd her wanden / ein jeder stefft sol auß dem Mütterlein von dem stab herfür geschrauffet werden mögen / doch der mittlere stefft mag mitten am stab angehefftet bleiben / der sol aber etwas lenger sein dann kein raiff an keinem Faß mit sampt den Bänden dick ist. Wann du nun wissen wilt / was das Faß am Bauch für eine rundung habe / so nimb für dich die eine Fueg am Faß / auff dieselbe setz deinen stab mit dem festen stefft auff / gleich mitten am Bauch des Fasses / hernach rucke an dem stab je zwen vnd zwen auß den oberigen stefften in gleicher weit von dem mittlern stefft gegen den beiden Böden hinauß / an solche ort / da die steffte zwischen den raiffen auff die fürgenommene Fueg hinunter raichen mögen / die zwen eusserste rucke gar auff die Trösche hinauß / vnd zwen andere nahend zu ihnen / da die erste raiff auffhören / gleich weit voneinander. Schrauffe die steffte alle vom stab herfür / so weit / biß sie alle so wol als der mittlere unbewegliche sittsamlich auff die Fueg raichen. 20 30

Wann du nun also fünff oder sibben puncten von der gebognen Fueg des Fasses inn dein Instrument gebracht / so leg den stab sittsamlich nider auff einen flachen Tisch / vnd wa ein jeder spizen hinzeigt / da trag einen puncten auff den Tisch. Wann also alle fünff oder sibben puncten auff den Tisch auffgetragen / so magstu ohne sonderliche Irrung gleich thun / als wann die krümme zwischen zweyen vnd zweyen eussersten puncten ein gerade lini wäre / oder als wann ein gerade lini / durch solche zwen eusserste puncten gezogen / gleich zu eusserst am bogen anstriche. Derohalben so handele mit solchen zweyen anstreichenden linien (auff jedem end einer / deren hie nur die eine BC) vnd mit dem vberigen bogen (hie nur halb / nämlich BV oder BO etc.) mit disen / sprech ich / handele nach der 65. Lehr / zeuch die lini BA (doppelt) vnd AF, zeichne auch den puncten C, vnd thail den winkel 40

CBA inn zwey gleiche thail durch BN, merck auch den puncten N, vnnnd kanst als:
dann nach dieser beschaffenheit dem bogen seinen rechten namen geben / wie du
daselbst gelehret bist worden. Wann alsdann der Bogen (durch die 5 oder 7
puncten angebildet) bey dem puncten N durch:
gehet / so behalt was du nach dem andern weg
gerechnet hast / dann sovil wirt das Faß gewißlich
fassen. Wa nit / sondern er gehet oberhalb N durch /
als in I. O. oder V. so lasse die ganze lini NC den
ganzen vnderscheid baider rechnungen gelten / vnnnd
10 so ein grosses stück von diser lini zwischen dem
puncten N vnnnd dem bogen stehet / so ein grosses
stück von dem vnderscheid baider rechnungen soltu
von der letztern rechnung deß Fasses hinweg
werffen. Wann aber der bogen vnder N durch:
gieng / nämlich BE (welches doch nicht oft ge:
schehen wirdt / wann es recht zugehet) so hielte
das Faß noch mehr / dann nach dem andern weg
gerechnet worden / vnnnd müste man also auch so:
viel hinzu setzen von dem vnderscheid baider rech:
20 nungen / so ein grosses stück NE wäre von der lini
CN.!

84 Gewiß ist es / das diser process nach der rechten
scheiben ziele / dann je kleiner CI, CO, oder CV, je
nehener es bey dem ersten facit bleiben muß: das
aber hierdurch eben das schwarze getroffen werde / nach gründlicher Geometrischer
Kunst / das wil ich nit für gewiß außgeben haben. Andere Geometrae mögen auch
suchen / ich hab im Lateinischen Werck mit erfindung viler newer demonstrationum
meinen ehren gnug gethan.



Die 17. Figur.

30 87. Wie man durch die Desterreichische Wiserruthen allerhand
außländische Fässer / Lägeln vnd Stäntner Wisieren / vnd
den größesten thail der hievor beschribnen verdrießlichen
raittungen übertragen könne.

Wann das Faß lenger ist dann die Desterreichische form vermag / so begreiffe mit lange Fässer.
einem Cirkel das viertheil der Boden braitte / stich derselben drey vom mittelpuncten
deß Beihels gegen dem Boden hinauß / wa der letzte punct felt / da zeuch einen
Faden / Borten oder Band umb das Faß herum / der sich nicht böhnen lesset /
darauß erlerne nach No. 6. den diameter am selbigen ort / doch zeuch ab die Taufel
vnnnd Raiffsdicke von baiden enden desselben diameters, damit du habest die höch
deß blossen Weins am selben ort.

Messe hernach die Bauchs tüeffe mit einerley Maaß / trag baide diametros des Bauchs vnnnd des erwählten Cirkels auff einen ebenen Tisch gegen einander ober / vnd ordne auff jede seit die abgestochne leng der Taufel / oder die 3 viertheil des Bodens / also das eine Spießedete vierung auß diesen vier linien werde / doch also geordnet / das die baide zwerchlinien ober eck (oder von eim eck zum andern gegen ihme vberstehenden gezogen) einander gleich seyen. Dann so Wisler dise zwerchlini mit der Desterreichischen Wislerruthen / so findestu wie viel Weins in einem solchen langen Faß sey / zwischen zweyen solchen erwählten Cirkeln: bleibt dir also noch vngemessen vbrig / was baider seyt zwischen disen Cirkeln vnd zwischen seinem benachbarten Boden eingehet. Wiltu nun dise zwey nach dem sinn abgeschnittene stück / oder 10 Regelsstöcke nach No. 24. vnd 49. 52. rechnen / das stehet dir frey. Wiltu mir aber folgen / so sey hie nicht allzusehr subtil / sondern messe nur allein mit dem Cirkel / wie weit es noch an der Taufel von dem eussern gemachten puncten biß zum Boden (innerlich dem Wein nach) seye / vnd mache auß den dreyen viertl des Bodens diameters soviel thail / als vil Emmer du auff der zwerlini gefunden / setze hernach das vbrige von der Taufel drauff / wie du es mit dem Cirkel begriffen / so sibestu / wieviel Emmer inn dises nach dem sinn abgeschnittene stück des Fasses / vnd seinen gesellen am andern Boden / eingehet / das setze zu dem / was die Wislerruthen 20 gezeigt: da wirdt dir offermahlen eben dasjenige kommen / was du mit der Wisler nach dem gemeinen weg gefunden hast / nämlich / danzumal wie No. 79. gemeldet / wann das Reinfass vmbß sibende thail höher ist am Bauch dann am Boden.

Kurze Fässer. Wäre aber das Faß kürzer dann die Desterreichische form haben wil / so trag abermals auff einen ebenen Tisch die Bauch vnd Böden höhe zu sampt der Taufelleng auff baide seytten / richts zu einer vierecketen Feldung die zwo gleiche zwerchlinien habe / erlengere hernach die Taufellenge vbern Boden hinauß / das das Faß die Desterreichische form bekomme / vnd zeuch ein newe Bodenlini / Wisler also die 25 zwerlini an disem erlengerten Feld / vnd sovil es Emmer zeigt / soviel gleicher theil mach auß der erlengerten halben Taufelleng / da sibestu bald / wieviel thail an dem stück seyen / das an die Taufellini gesetzt worden / soviel Emmer ziehe ab von der 30 gefundenen Wisler.

Lägel. Item so eine Lägel fürkäme / die sonst mit der Taufelleng gegen der höhe des Bodens den Desterreichischen schick oder proportz hette / so Wislere sie nach dem gemeinen weg: wievil du nun Emmer oder Achtering findest / inn so vil gleicher theil stiche die Bodenhöck ab / hernach begreiffe mit einem Cirkel die Boden braitte / die setz auff die abgestochene höhe des Bodens / so findestu / wieviel von der Wisler aussag warhafftig inn der Lägel seye / vngesfahrlich. Dis gehet auß der 25. vnd 24. Lehr.

Stantner. Einen zinnen Stantner zu Wislern / reiß ein winkelrecht vierecketes Feld auff einen Tisch / an welchem die zwo seitten jede des Bodens braitte haben / die zwo 40 oberige aber / jede drey viertel vons Bodens braitte / an disem Feld Wisler die zwerlini mit dem Wislerstab / vnd sovil Achtering du findest / in sovil gleicher thail zertheile die dreyviertl vom Boden / nimb hernach die halbe höck des stantners / vnd

33/34) nach den gemeinen: weg

messe sie / wievil solcher gemachter thail sie habe / dann sovil Achtering werden inn den Stantner gehen / doch fleber / weil die Stantner keine Beuche haben.

88. Zurechnen wie viel Weins auß einem Faß kommen /
oder noch drinnen seye / wann es gerad auffligt /
vnd nicht gehebt ist.

Diß sol ein Kunst sein / dann dem rechten grund nach prangen die Meßkünstler so sehr damit / das es meines wissens noch nie an tag kommen / vnnnd ist zwar wol ein rechtes Creutz für die Künstler / vnd gar nicht jedermans ding.

† Coignetus gibt dise Lehr / man solle von dem außgelehrten Raum / oder von der
10 höhe des Weins (welches nu weniger) das mittlere nemen nach dem Boden vnnnd nach dem Bauch / so auch zwischen beiden diametris das mittel / vnd den Cirkels schnitz suchen / nach No. 17. Dann das ganze Cirkelfeld gilt die ganze Faß Eyck / das Feld aber am Schnitz / gilt den Thail des Fasses. Diser weg thut es oben vnnnd vnden im Faß nicht: vmb die mitte saget er gar nahe hinzu. Wie aber zuerkundigen / wie hoch der Boden oben vbern Wein außgehe / sol jeko angezeigt werden / bey einführung meines process.

Erster weg / sonderlich auff Fässer / die keinen bauch haben oder denselben gar seich.

Zwar hab ich im Lateinischen Werck auch einen process gezeigt / der fundirt sich aber auff No. 18. vnnnd 55. welche noch nicht erleutert / hat auch sonst sein rechtmäßige demonstration nicht / sonderlich der miteingeführte Circulus Metator: wil
20 derhalben dimal einen andern versuchen.

Anderer weg im Lateinischen Tractat noch nicht richtig.

Zum forderisten muß man bey allen dreyen wegen abziehen von des Bauchs tüeffen (mit den gleichen puncten der Bisieruthen abgemessen) den diametrum des Bodens / was nun vberbleibt / das halbirt man / vnnnd ist diß die erhöhung des Behels über die Böden.

Dritter vnd gewisester weg.

So nun der thail vom Faß welchen man messen solle / nicht tüeffert ist: so rechnet man auff dise höhe drey schnitz / vnnnd durch solche den vierten nach No. 67 / der ist der Raum im fürhabenden theil des Fasses.¹

Erster fall.

86 Zum Exempel sey die Bauchstüeffe 22 / der Boden 19 / die leng zwischen beiden Böden 27. Da wirt des Behels vberhöhung sein / anderthalbs. So wollen wir
30 nun setzen / die außklärung oben / oder die Weinshöhe vnden / sey nicht grösser dann diese 1(5 / lasse es gleich gerad dise 1(5 sein / dann es ist ein ding.

Da findet man nach No. 10 den diameter des Laufel Cirkels / das er sey 123 / vnd nach No. 17 seinen flachen schnitz / der wirt 716200000 / wann man diesem diameter gibt 200000: Also nach No. 38 / seinen Kugelschnitz 185000000000 / vnd endlich wann die vberhöhung 1(5 gegen des Bauch Cirkels halben diametro gehalten wirt / findet sich auch dessen flacher schnitz nach der sinus theilung 9300000000 / aber nach seiner verjüngung gegen dem vorigen / nach der 13. Lehr / 29750000. Auß disen dreyen folgt nach No. 67 der Citronenschnitz oder raum des theils Fasses

Doben fol. 47.

† 770000000000. Dise höch 1(5 hab ich nicht vergeblich vor andern kleinern zu einem
40 Exempel erwehlet.

Anderer fall. Dann so der fürhabende theil des Fasses tieffer ist dann die überhöhung / also das schon die Böden angewendet (oder / wann man mit dem Meißl im Faß handeln muß / noch im Wein stehen) so muß dieser schnitz nach seinem raum inn alle wege zuvor bekant sein / sambt der ganzen Fasseich vnnnd dem Walger zwischen den Böden / auß No. 24. Darzu muß jezo auch mit der tieffe des fürhabenden theils vom Faß / gerechnet werden des Bauch Cirkelschnitz / nur nach der sinus theilung / nach No. 17.

Entlich nimbt man die überhöhung des Beyhels von der tieffe des fürhabenden theils des Fasses / so bleibt die höhe des Bodenschnitzes / den der Wein abzeichnet / die gibt durch No. 17. das Feld dieses schnitzes / nach der gewonlichen Cirkelstheilung. 10 Also volgends gibt dise höhe vnd der diameter des Bodens auch den Bogen mit diesem schnitz abgeschnitten / durch No. 10. Der Bogen aber gibt den Cirkel zaan darauff / nach No. 17. nach der sinus theilung. Vnd wann ich den schnitz vom Zaan abziehe / so bleibt das Feld des Triangels / das muß gegen des Bauch Cirkels diametro verjüngt werden.

Erster theil im andern Fal.

Wann diese notdurfft fürhanden / dann so nimmet man mit dem bogen des Bodenschnitzes / von der ganzen Fasseich den beschaidnen theil / als ob ein spaltl auß dem Faß heraufgeschnitz werden müßte / wie auß einem Apffel. Darnach nimmet man auch mit dem Feld des Triangels / wie es ist nach der sinus theilung / den beschaidnen theil vom Walger / vnd zeucht ine ab von dem vorigen spaltl: so 20 bleibt das größste stück von dem außgelährten (oder vnden noch vollen) raum: dem gehen zu baiden seiten noch zwey kleine zugespizte stücklin ab / die seind baide zusamen niemahlen größer dann der Faßschnitz auff die überhöhung gerechnet / werden auch gähling / so bald die Böden angewendet / so klein / daß es der mühe nicht werth / solche außzurechnen / aber vmb der Künstler willen / wil ich auch dise rechnen lehren / vnd wil erwarten / ob jemand mir den grund hierzu vmbstossen / oder einen 1 gewiffen fürbringen wölle.

Ander theil im andern Fal.

Derohalben so seze zu dem außgerechneten Bauch Cirkelschnitz / das verjüngte Feld des Triangels / von der Summa zeuch ab den Cirkelzaan / so bleiben dir die zwey kleine spitzfeldlein vom Bauch Cirkel. Nu hastu zuvor zu außrechnung des Faß: 30 schnitzes auch haben müssen den flachen schnitz vom Bauch Cirkel / auff die überhöhung gehörig. Siehe da / von dieser geringen stücklin wegen / müssen wir soviel mehrere notdurfft haben / die wir sonst wol köndten ungerechnet lassen. So sprich nun durch detri, der flache schnitz der überhöhung / nur nach der sinus theilung genommen / wie er anfänglich kompt / gibt seinen Faß: oder Citronenschnitz / was gibt die Summa diser zweyen spitzfeldlin? was dir kompt schlag zu dem vorigen / so hastu die ganze obere außlehrung / oder den ganzen vndern Wein.¹

Zum Exempel nem ich abermal das vorige Faß / das hat bey No. 59. 60. ge: 87 halten 4025000000000 / am Walger 3290000000000. Nun seze / es sey vmb 6 theil von 22 außgerunnen. Weil dann 6 mehr ist dann die überhöhung des Beyhels 40 1(5 / so müssen auff dise überhöhung der flache vnnnd der völleibige schnitz bekant sein / die seind nun eben darumb zuvor exempls weise gerechnet worden / vnnnd ist der flache schnitz gewest nach der sinus theilung 930000000 / auff die höhe 1(5. Aber jezo wirt auff die größere höch 6 / vom halben diametro 11 der Bauchcirkelschnitz

gefunden 6941000000. In gleichem / wann die überhöhung 1(5 genommen wirt von 6 / so bleibt 4(5 die höhe zum Bodenschnitz / der vom Wein entblößet stehet / vnnnd gibt mit dem halben diameter des Bodens 9(5 / seines Schnitzes Feld nach der sinus theilung 5690000000.

Ferner mit 4(5 / vnnnd mit dem diameter 19 wirt nach No. 10 gerechnet der sinus 85029 / oder nur der sinus versus 31034 / die zeigen in Canone sinuum den halben theil des abgeschnittenen Bogens / der ist ganz 116 Gr. 29 M. 12 Sec. Mit diesem Bogen findet man den Circelzaan 10165400000: darvon abgezogen den Circelschnitt 569 etc. bleibt das Feld zum Triangul 4475400000 / nach der sinus theilung / aber nach der verjüngung gegen dem Bauchcircel / weil der Boden ist nur 19 breit / der Bauch 22 / wirt es durch No. 13. 3338300000. Das weren die Notz turfften.

Wann dann 360 gradus gelten die ganze Fasseich 4025 etc. so wirt auff den Bogen 116 Gradus etc. fallen 13024000000000 / das were gleichsam der spalt auff dem Faß vom innern Grat herauß. Vnnnd wann das ganze Circelfeld 314 etc. gilt den ganzen Walger 3290 etc. so wirdt des Triangels Feld nach der sinus oder Circels theilung / nämlich 4475 etc. darvon hinweg nemen 4686000000000 / das zeuch ab vom Spalt 1302 etc. Bleibt 8338000000000 / vnd ist der theil vom abgelauffenen Wein / der rechnens würdig / nemlich etwas mehr dann der fünffte theil vom ganzen Faß. Das überige kleine Raigl des abgerunnenen Weins rechnet man also. Der verjüngte Triangel 33383 etc. vnnnd der Bauchcircelschnitt 6941 etc. machen zusamen 10279300000. Nimb hinweg den Circelzaan 101654 etc. so bleiben die zwey spiglein 1139000000. Wann dann der Circelschnitt auff die überhöhung gerechnet / nemlich 930 etc. auff jme stehen hat den Citronenschnitt 77 etc. wie beim ersten fall / so wirt auff 1139 etc. kommen 943000000000. Sihe da den mechtigen abgang / in 10 Emmern ein Achtering. Doch setze es zu 83380 etc. so findet sich der ganze abgeflossene Wein 8432300000000.

Am letzten Blat des lateinischen Wercks l. altit. für 3922 s. lese 39229 s. Vnnnd dann bald hernach / für 81429 s. lese 46121 / diß ist alda der aufgelarte theil des Fasses. Also auch l. defici. für 3640 lese 36400 / vnnnd demnach für 72672 lese 39912 / diß ist aldortten nach dem andern weg der aufgelarte theil des Fasses. Jezzo mag der fleißige Leser alle hie vnnnd dorten geführte processe gegeneinander halten: allein zumercken / daß im lateinischen auß einem doppelten Regelstock gerechnet worden / hie aber auß der Citronenrundung.

Verkürzung des Processes.

Dise Rechnung ist also beschaffen / das sie mit dem größesten theil des abrinneenden Weins / den obern Fasseschnitt / oder was obern Böden stehet / gähling verschlinget (so bald die Böden ein wenig herfür stehen) vnd nur ein wenig zu beiden seitten überlesset / vnd zwar je mehr gähling / je seyrher der Bauch. Demnach mag der process ohne sonderliche vnrichtigkeit vmb ein gutes abgefürget / vnnnd baide schnitz auff die überhöhung / der flache vnnnd der volleibige / so auch der Bauch

schneiz auff die außklärung / vnnnd entlich die verjüngung des Triangels / sambt allem andern / was im andern thail darauff gerechnet / vnderlassen werden.

Damit aber doch niemand zu weit hinderfirt werde / hab ich hiebey ein ¹ Täfelin / auß diesem Exempel ⁸⁸ vnnnd auß andern drehen / so droben No. 63. 67. zu finden / beyläuffig proportionirt, darbey zusehen wievil Weins obern Böden stehe: in jedem Faß / [†] dessen Taufeln wol rund oder Citronenrund gebogen seind. Wann aber die Fässer zugescherffte / oder in der mitten / gächrunde Bäuche haben / so heist diser ¹⁰ obere schneiz weniger.

Gebrauch dieses Täfelins.

Dividir die ganze Faßeych / mit dem gefundenen theil des Fasses / so kompt / wieviel obern Böden stehe.

Zum Exempel / das Faß hab die tüeffe am Bauch vnnnd Boden wie 7 gegen 6 / das gibt den 52ten theil. So nun das Faß hielte 4025 / so dividirte ichs mit 52 / kompt 77 / soviel hielte der schneiz obern Böden.

Die drey Fässer Fol. 52. 56. haben gehalten 7454. ²⁰ 26762. 47113. die Proportz ist gewest 10. 15. 18. zu 9. 14. 17. Zeiget derowegen den 85. 158. 207 theil / dividir so findestu 88. 170. 228. oberhalb der Böden wie oben.

Das Heydelbergische Faß hat am Boden 16 am Bauch 18 / das ist wie 8 gegen 9. darmit finde ich den 73 theil / nu ist droben No. 84 sein Eich gewest 2688 Dest. Emmer / das dividir mit 73 / kommen 37 Emmer ober den Böden stehend.

89. Etliche zusätze zu dem Ersten theil / ³⁰ vnnnd vrsachen des vorigen processes.

Schließlich vnd damit der Kunstliebende vnd Scharffsinnige Leser sich des grundes zu dieser 88isten Lehr desto besser zuerholen habe / kan ich ihme nicht vngemeldet lassen / das eben dasjenige was im La-

teinischen werd im dritten theil vnd dessen No. 4 zu end / Paragr: Rursum zufinden / auch hie im teutschen werd an seinem ort außgelassen vnd oberhupffet worden.

Sehe derhalben droben zu No. 15. oder 17. dise ergenkung.

18) hielte

Bauch	Höhen	So steht oberhalb der Böden bis ans Geißel der	Theil des ganzen Fasses
2	1	6	
3	2	15	
4	3	24	
5	4	33	
6	5	42	
7	6	52	
8	7	62	
9	8	73	
10	9	85	
11	10	98	
12	11	112	
13	12	127	
14	13	142	
15	14	158	
16	15	174	
17	16	190	
18	17	207	
19	18	224	
20	19	241	
21	20	258	
22	21	276	
23	22	294	
24	23	312	
25	24	330	

Gerechte vnnnd ablenge Cirkelschnitze gesellet.

Wie es sich nun verhält zwischen den Feldern eines ganzen gerechten vnnnd vnder-
schidlicher ganzer ablenger Cirkel / wann sie alle in einander gesetzt / vnnnd die
Ablenge mit ihren güpfeln an dem gerechten anstreichen: Nicht anderst ist es auch
mit den Feldern in ihren Schnitzen / abgeschnitten durch eine gerade lini / welche
winkelrecht auff ihre gemeine Ylini eintrifft / dann dise Felder correspondirn vnd
thailen sich mit den trümmern von dieser ihren vnderzognen linien / oder auch mit
dem lengern vnnnd den kürzern diametris.

Sehe ferners zu No. 18 dises vor dem Paragr. Am Cirkel / dises.¹

Parabolaes gesellet.

Hierauß dann folget / wann allerhand Parabolaes kleine vnd grosse mit ihren
güpfeln in der Ylini zusamen streichen / vnd es wirdt ein gerade grundlini winkel-
recht durch die Ylini vnd durch alle Parabolas gezogen / das alsdann die Felder in
disen Kegelschnitten sich mit denen trümmern der durchschneidenden lini thailen /
auff welchen sie stehen.

Also zu No. 34. sehe diß.

Parabolica Conoidea so alle ein höch haben / halten sich zusamen / wie die Felder
an ihren Boden Cirkeln / nicht anderst dann wären es gleich hohe Regel No. 48.

Ferners zu No. 40. sehe diß.

Gerechte vnnnd Ablenge Kugelschnitze gesellet.

Wann ein Ablenge Kugel oder Y in einer gerechten Kugel drinnen stehet / mit
baiden güpfeln anstreichend / vnd es geschicht ein schnitt durch baide / winkelrecht
auff die Y zu / so halten sich die gemachte Trümmer oder Schnitze zusamen / wie die
Cirkelsfelder durch den schnit gemacht / nicht anders als wären es gerade viereckte
oder runde Säulen No. 24. vnnnd 44.

Auß disem grund hat der Spitzfindige Leser zu sehen / warumb droben bei No. 63.
vnnnd 67. (darauff wir vns hie bey No. 88 fundirt haben) es fast gleich gegolten / man
habe gleich durch linien gehandelt / oder durch Felder deren Cirkelschnitze / die auff
den linien gestanden / vnnnd warumb es doch nicht gar gleich gegolten. Dann wann es
nicht weren Cirkelschnitze gewesen / sondern entweder Schnitze von Parabolischen
Kegelschnitten / oder von ablenngen Cirkeln / wie jeto beim ersten zusatz gemeldet
worden / so hette es allerdings gleich gegolten.

Diemeil es aber lauter Cirkelschnitze seind / die alle beim Beihel zusamen streichen /
so fangen die schnitze der kleinern Cirkeln / etwas mehrers vom Feld / dann von der
gemeinen Bodenlini: vnd wurde die kleine Citronenrundung grösser / wann man
sie nach dem Feld an ihrem mittelschnitt rechnen wolte. Es geschähe aber auch der
sachen zuvil / dann sie laufft beiderseits auff einen spitz hinauß wie ein Regel /
dahingegen der Kugelschnitt / auß welchem sie gerechnet wirdt / auff eine runde
schneide hinauß lauffet.

Ferners ist auß diesem grund zusehen / wie es sich halte mit der eintheilung vnnnd zwifachen rechnung des größern Citronen / oder Faßschnitzes: dann diser schnitz laufft auch auff ein runde schneide hinauß / wie der Kugelschnitz / derhalben / vnnnd weil er am schnitt in der mitte einen schnitz von einem kleinern Cirkel / als der Kugelschnitz / machet vnnnd abzwacket / wirt er billich nach desselben seines schnitzes Feld gerechnet / als welches ihme / wie billich / mehr gibt / dann die Bodenlini: vnnnd wirt ferners billich durch dieses Feldes nebenspizlein / in die höch des ablauffenden Weins ein: getheilt.

Anlangend sein zwifache rechnung No. 67. ist hie abermal zusehen / wann er auß der kleinen Citronenrundung gerechnet wirdt / daß es eben soviel wäre / als ob er 10
eins thails durch die gerade Bodenlini (wie diese kleine Citronenrundung selber) auß dem Regel gerechnet wäre worden / darmit würde er vertheilet / dann er artet sich nicht also wie die Citronenrundung / nach dem mageren Regel / sondern nach dem braitten Kugelschnitz. Hingegen vnd so er stracks wegs auß dem Kugelschnitz gerechnet wirdt / nach dem Feld seines schnitzes: mag es sein / daß er etwas zuviel bekomme. Dann ob er wol auch auff ein braitte schneid hinauß lauffet / wie der Kugelschnitz / ist diese schneide doch nicht so brait wie jene / sonder verleurt sich allgemach / vnd artet sich je mehr vnnnd mehr nach dem spiz der kleinen Citronenrundung.¹

Entlich zu No. 28. fol. 25. setze diß.

90

Zu wissen wie groß ein jede Kugel deren diameter bekant ist / gegen dem Würffel 20
oder Cubo desselben diameters: Multiplicir disen Cubum inn das Cirkelfeld durch hülff des Täfelins fol. 10. was kompt / dividir mit 6. Oder zum widerspil / dividir den Cubum mit 6. was kompt / das Multiplicir in das Cirkelfeld.

90. Wie man ohne schwäre Rechnung / nur allein durch den gebrauch der Visierruthen / ReißCirkels / vnd eines Täfelins / erfahren möge / wieviel Achteringe abgehen von jedem Emmer der ins Faß gehet.

Weil ein jedes Faß / nach oft widerholter erinnerung zwen scheinbarliche theil hat / den Wein so zwischen den Böden / vnnnd den Wein / so drumh herumb / vndern Taufeln vnnnd Reiffen stehet / so leffet sich dieses Werck auff ein mal nicht abentrichen: sondern du mußt notwendig Walger vnnnd Gürtl von einander scheiden / vnd von 30
einem jeden die gebür nemen.

Die scheidung geschieht also durch die Visierruthen.

Auff einen flachen breitten Tisch bringe vnnnd ordne zwen diametros vom Faßboden / vnnnd zwo halbe Faßlengen (nach dem Wein) in ein vierecktes windelrechttes Feld zusamen / so das dessen beide zwerlinien oder Diagonij von einem ed zum andern gleich lang seyen / Visier solche zwerlini mit dem Dest. Visierstab / nach der 83. 84. 85. vnnnd 87. Lehr: so findestu wievil Emmer zwischen den Böden stehen. Hernach visiere das Faß selber / vnd erlehrne / wievil Emmer ins ganze Faß gehen.

3) Kugelschnitz

25) Reiß Cirkels

Zeuch darvon ab was zwischen den Böden stehet / so bleibt dir / wievil Emmer oder Achteringe vndern Taufeln oder in der Gürtel stecken.

Die gepür aber von jedem theil nimbt man also.

Theile des Bodens höhe in 5 / ein jedes fünfftheil wider in 5 / so werden der theil 25 / halbir sie / so werden ihr 50 / halbir noch ein mal / so hastu 100 / halbir zum dritten mal / so seind es 200 / die zehle von oben vnder sich.

Darnach zeichne an disem außgetheilten diametro des Bodens / wie weit der Wein gehe / das geschicht also / wann du messest die höch des Bauches vund des Weins / vund die halbe Bauchshöch von des Weins höch (oder diß von jenem) abziehest: was bleibt / sol vom Centro des Faßbodens gerad ober sich oder vnder sich gestreckt werden. Dann wo dise lini hinreichet / dahin reicht auch der Wein inwendig.

Man kan auch ein lang durchsichtig Mor von glaß vnden an einen Laßzapffen richten / so mercket man ohne messen oder rechnen / wie hoch der Wein drinnen auffsteiget / dann so hoch ist er auch im Faß / thut ihme selber nicht vnrecht: Also auch der Heber / laufft so lang biß er das Faß so tieff erschöpffet / als tieff er mit seinem Außguß gehendt ist / hernach sehet er auß.

Da mercke nun / wievil theil vom diametro (in 200 zertheilt) zwischen den obersten güpfel des Bodens vnd zwischen dise lini fallen / die such in beygefügem Täfeln / da findestu im ersten fach / wievil Achteringe von jedem Emmer / der zwischen den Böden stehet / abgehen: Im andern aber / wievil Achteringe von jedem Emmer der in der Gürtel stecket / abgehen. Multiplicir diese gefundene zahlen der Achteringen / jede in ihr anzahl der Emmern im Walger vnd in der Gürtel / vund bring beide Summen zusamen.¹

Nimb das vorige Exempel / vund seze / man hab durch die Wiser gefunden im Walger 9 Emmer / inn der Gürtel 2 Emmer / wann dann der diameter am Faßboden von oben vnder sich in 200 gehet / vnd man misset mit einem Stab die Weinshöhe / nimmet auch die halbe Bauchstüeffe darvon / so reicht das oberige trum vom Centro des Faßbodens biß an den 54 theil vund 6 aüfftheil vom 55ten (das weiß ich jeto vngemessen daher / dieweil ich droben gesetzt / von 22 seyen die 6 lähr) such zur linden des Täfeln 54 mit dem Bruch / da findestu 9 Achteringe / vons Walgers Emmern / suchs auch zu der rechten / so findestu 14 8 Achteringe von der Gürtel Emmern. Neun mal 9 ist 81 Achteringe / vnd 14(5 mal 2 ist 29. Summa 110 Achteringe: sovil wer auß dem Faß / vnd gar ein wenig mehr / wegen des obern Faßschnitzes / so dißmals nicht zuschätzen / wie bey No. 88 zu end erweisen ist.

Wann es aber ein gar grosses Faß wäre / vnd die Böden wären noch nicht angewendet / zuwissen durch die Wiserruthen ungefahrlich / wieviel Weins auff die Füll gehe / oder wieviel auß dem Bauchschnitt kommen / ohne die rechnung No. 88 / in des dritten weg es ersten Fall.

Wann das Faß nicht tüeffter ist am Bauch dann der Wiserstab / so nimb einen stab kürzer dann die Faßstüeffe / send ihne in den Wein gerad vnder sich biß sein eufferstes jnnen am Beihel ansethet / vnd misse die höch des lähren theils / diese lunge Wiser mit der Wiserruten / so auch die ganze oberhöhung des Beyhels über

40) nicht fehlt

Täfelin wieviel Achteringe von jedem
Emmer auß dem Walger vnd auß der
Gürtel kommen.

Man die höhe von oben am Boden / biß auff den Wein ist	So gehen ab von je- dem Emmer der zwischen die Böden mag	Man die höhe von oben am Boden / biß auff den Wein ist	So gehen ab von je- dem Emmer der über die Täfelin mag
o	o	o	Der ganze Bauch- schnitt
12 —	1	0(3	1
19 +	2	1(1	2
25 +	3	2(6	3
31 —	4	4(7	4
36 —	5	7(2	5
41 —	6	10(3	6
45 +	7	14	7
50 —	8	18(2	8
54 +	9	22(9	9
59 —	10	27(8	10
63 —	11	33(3	11
67 —	12	39(3	12
71 —	13	45(6	13
75 —	14	52	14
79 —	15	58(5	15
83 —	16	66(1	16
87 —	17	73(4	17
90 +	18	80(9	18
94 +	19	88(3	19
98 +	20	96	20
102 —	21	104	21
106 —	22	111(7	22
110 —	23	119(1	23
113 +	24	126(6	24
117 +	25	133(9	25
121 +	26	141(5	26
125 +	27	148	27
129 +	28	154(4	28
133 +	29	160(7	29
137 +	30	166(7	30
141 +	31	172(2	31
146 —	32	177(1	32
150 +	33	181(8	33
155 —	34	186	34
159 +	35	189(6	35
164 +	36	192(8	36
169 +	37	195(3	37
175 —	38	197(4	38
181 —	39	198(9	39
188 +	40	199(7	40
200	41	200	41
	Achtering		Achtering

die Böden / die du allererst hast lernen
nemen / was du nun beider orten auff
der Cubischen theilung an der Wisier-
ruthen findest / das setze mit sambt der
Eich deß Bauchschnittes (auß dem Tä-
felin No. 88. genommen) in die Regel
detri, so kommet dir wievil auß dem
Faß kommen.

Lasse dich aber nicht irren / das dieser
process nicht allerdings richtig / wann
man ihme nachraiten / vnd das Facit
gegen dem obern process halten wolte /
dann der Wisierstab mit seinem Nutzen
gehört vnder die handgriffe / die bedürf-
fen keiner solchen Subtilitet, wie die
Rechnungen.

Wann aber das Faß so tieff ist das
die Wiserruthen nicht auff den Boden
reichen mag / so sendet man ihr hindere
theil hinunder / stellet die fordere schneid
inwendig an das Beihel / vnnnd bedarff
man also hie keins andern stäblins.¹

Zum Exempel / das Heydelbergische
Faß hat 18 schuh an der Bauchstieffe /
vnnnd 16 an deß Bodens diametro /
gehet also der Bauch vmb einen Schuh
über die Böden auß: der zeigt auff der
Oesterreichischen Wiserruthen 12. Ach-
teringe / bedeutet aber den ganzen
Bauchschnitt / oder allen den Wein der
oberhalb der Böden stehet / wanns Faß
voll ist / der ist nun droben auß dem
Täfelin No. 88 gefunden worden
Emmer. Setze nun das Faß were
vmb drey Zoll außgelähret / das will
ich von gewißheit wegen tripliren,
wie droben No. 84 gelehret worden /
thut 9 Zölle / die zeigen auff der
Wiserruthen 5 Achteringe / darvon ge-
hört auff die 3 Zölle der 27 theil /
vnnnd also nicht gar ein fünfftheil einer
Achteringe / nun sprich durch detri, 12
Achteringe auff der Wisier gelten 37

13) Wisierstab mit seinen

14/15) bedürffe

Emmer im ganzen Bauchschnitz / wievil gelten die fünff 27 theil einer Achteringe / folgt 185. 324 theil / das ist beynah 23 Achteringe. Sovil weins muß man haben / das Heydelbergische Faß außzufüllen / wann es 3 Zöll wahn oder lehr stehet.

Nicht anderst thut man ihme auch dannzumal / wann der Wein die Böden nicht mehr berühret: allein bedarff es alda keines stäbleins / sondern man nimpt die Wiserruthen selbst (wann sie lang gnug ist / wo nicht / so erlengert man sie mit anbindung einer stangen) sendet sie gerad vnder sich / mit deren vorderem theil oder zugespizter schneide.

Wund were hiemit für dißmal gnugsam gehandelt von dem Wiserstab / wöllen
 10 ihne auff ein seitt legen / vnnd darfür den Heber brauchen / dann ich mit endung dises theils durstig worden bin. Aber hinweg mit dem leßtern vndern Bauchschnitz / der
 † Heber möcht nicht gereichen: auß dem vorigen obern Bauchschnitz ist leichter zuheben.¹

Von dem Oesterreichischen Gewicht / Ellen und Maas zu Wein und
Traid / vnnnd vergleichung aller Sorten vnder einander und einer
jeden absonderlich gegen etlichen Außlendischen alten vnnnd neuen /
item von Metallen vnnnd allerhand wagnmässigen Waren.

91. Ursprung des Gewichts.

Ob wol das lange Maas dem Menschen von ersten zur Hand gehet / und mit den
Gliedern des Leibs gezeigt wirdt / dahero die Namen der Maassen auffkommen /
Finger / Daum / Hand / Spanne / Schuh / Schritt / Ellen / Elffter oder Achter;
dann Ellen hat den namen vom Ellenbogen / und wirdt gemessen nach dem außge- 10
streckten Arm / doch vnderschiedlich / Elffter aber nach baiden außgestreckten Armen /
oder nach eins Manns höhe: so seind doch diese lange maasse gar vnderschiedlich / und
verendern sich nach der zeit vnnnd Ort; weil die Menschen am Leib einander nicht gleich
groß seind.

Warum man auff
zehne zehle.

Dann es ist hiermit nicht also versehen wie mit dem zehlen / da ein jeder recht for-
mirtter Mensch zehen Finger hat / derhalben alle Menschen auff zehne zehlen / und
hernach von eins wider vorn anfahren. Dergleichen ist nichts / das vns die Natur zu
einem gewissen langen Maas fürstellte / das in bestendiger größe blibe / außgenom-
men Sonn / Mond / und Sterne / die vns aber zu hoch / vnnnd den Erdboden / der
vns zu groß und vntauglich ist / vnser Maas notdurfft durch ihne zuverrichten. 20

Wann dann alle Messorten nach dem langen Maas zubestellen wären / möchte es
leichtlich gar vmb viel fahlen. Zum Exempel sey die Visier Ruthen: da helt die Visier
einer Achterling 100 puncten / wann man von diser Leng nicht mehr dann den fünff-
ten thail hinweg thut / verleurt man darmit schon das halb thail an der Eyck / dann
80 puncten thun droben im Visiertäfel nur 2 seidl.

Seind derowegen die Menschen mit den langen Maas nicht versehen geweest / son-
dern haben nach dem volleibigen Maas selber trachten / und ihnen da ein gewisses
Maas außermöhlen müssen.

Demnach aber der leibhafften Creaturen zwo Sorten seind / selbstendige harte
Stücke / und Flüssige Materien / als seind auch der volleibigen oder raumlichen Mess- 30
sorten zweyerley / die Gefäße und Eyck zum Wein und Wasser / das Gewicht aber
zun ganzen stücken. Vnd weil man nicht nur Wein / sondern auch andere kleine
rörichte truckene Materien hat / als Mehl / Traid vnnnd dergleichen / vnnnd der Wein
vom Staub / das Traid aber von der Masse gesichert sein wil / haben auch baidereley
Gefesse müssen von einander abgeschaiden sein.

Wann dann vnder Eich und Gewicht die wahl zu nemen / welches bestendiger und
gewisser / findet sich hierzu das Gewicht / dann je dasjenige dauhaltter und besser

auff zu behalten / auch besser zu mercken ist / das da hart ist vnd beyfamen bleibt / dann das da zerfleußt. Sonderlich weil ein Zeug schwärer dann der ander / da kan man viel füglicher ein klein vnnnd schweres ding zum Gewicht brauchen vnd auffbe-
 94 halten / vnnnd nach demselben ein theil Weins oder Wassers ab'wegen / das da ein Achtering oder Emmer haiffen sol / vnd demselben ein gerechtes Gefässe zurichten: dann das man zum gegenspil / das Gewicht auß der Maas hernemen wolte.

Also haben nun vorzeiten etliche gelehrte / die gern ihre Maasforten mit den abwesenden vnnnd Nachkommen communicirt hetten / sich vmb natürliche beständige Gewicht Sorten umbgesehen / etliche ein Hennenay / andere ein Ruß / ein Bonen / ein
 10 Weizen / oder Gerstenkörnlein erwöhlet. Als aber auch hie grosser vnderscheid fürgefallen / hat man endlich die natürlich formirte dinge fahren lassen / vnnnd auß Stain / endlich auß den Metallen / die schwärer vnnnd harter seind / etwas formirt / welches den namen eins Gewichts haben solte: darzu seind am aller tauglichsten gewest die Münzen. Zwar haben die Römer anfangs als noch nicht viel Silbers vnd Goldes in Italia gewest / nur kupfferne grobe pfündige Münzen geschlagen / pondo
 genennet / dannen vnser teutsches Wort pfund abfolget / vnnnd die weise zureden / ein pfund Pfening / ein pfund Häller. (Nota es ist bey vns noch weiter kommen / das / weil vorzeiten ein pfund Gelts in dem werth gewest / wie heutigs tags der Gulden vom Gold also genennet / der Gulden aber 240 pfening hat: wir auch 240 Haupt
 20 kraut oder häufflen Musse / ein pfund zu nennen pflegen.) Dise Münz / pondo, haben sie gehaiffen ein libram aeris, welches vom Wägen den namen hat / als ob ihr Münz pondo, das kleinste vnd erste wagwürdige stück wäre. Haben also Münz vnd Gewicht beyeinander gehabt / als wann wir heut zu tag kein anderes caementirtes Gewicht hetten / dann den Taler.

Alt Römer Münz.

Pfund.

Ein pfunt Kraut.

Als aber das Kupffer bald gemein vnnnd vnachtsam worden / weil es zum Haußrath / Waffen vnnnd Wehren verbraucht worden / auch im Fehr verzehret wirdt / so wol als Zin vnnnd Bley / in der Erden oder im Wetter verwesen kan / ist es endlich bey reinem Silber vnnnd Gold verbliben / die seind schön an Farben / das Silber gleicht den Sternen / das Gold der Sonnen / baide bleiben im Fehr beständig / baide seind
 30 seltsam vnd weniger zusehen / dann andere Metallen / derowegen man sie werth helt / vnd gar nicht zu Pflug vnd Roßfeyn verbraucht: das also ein gewisses stück Silber oder Gold gepräget gleichsam das ganze Menschliche geschlecht zu hüttern hatt / also daß es etlich tausent Jar bleiben vnd vndern Menschen umbgehen mag. Vnd billichens die Dbrigkeiten keins wegs / das man gerechte guldene vnd Silberne Münzen bricht vnnnd Geschirre drauß machet (wiewol auch dise nur zu ehren vnd gepräng auffbehalten werden) es hat auch der jüngstabgeleibte König in Frankreich / auff lang zuvor beschehenes anhalten (wie Bodinus dessen gedenckt) seiner Stende / bey hoher straff verbotten / das kein Gold zu Borten / Gulden stücken / Eisen vnnnd Kupffer zu bergulden / für einigen Menschen zutragen verschmirt werde.

Gold vnd Sylber die edelste Metallen.

40 So bald nun ein beständige Silberne vnd guldine Münz auffkommen / haben die Medici ihr Apoteker gewicht darauff gericht / vnnnd ihre Ager vnnnd Gerstenkörner fahren lassen. Daraus dann endlich erfolgt / das solches alte Münzgewicht zum Apoteker gewicht worden / auch dem namen nach; dann was sie drachmam haiffen / das ist vom Gewicht vnnnd Namen vor zeiten ein alte Griechische Münz gewest / vnnnd

Apoteker gewicht.

Drachma.

Denarius. seind zur selben zeit gleich 96 drachmae auff ein Römisches pfund gegangen: Ihren Silbernen denarium aber haben sie zu zeiten der drachmae gleich zu zeiten schwärer geschlagen / also das deren nicht 96 sondern 84 auff ein Römisches pfund gangen.

Wiewol nun hernach die Münz verendert worden / ist doch das Gewicht also bey den Apoteker gar biß auff vns gebliben / vnnnd gehet heutiges tages wie ⁹⁷ die Apoteker einhellig bezeugen / durch die ganze Welt in gleicher schwäre: wie dann Villalpandus vnder einer drachma, die ihme auß Hispania nach Rom geschicket worden / vnnnd vnder deren so er zu Rom gefunden / nicht den wenigsten vnderscheid vermerckt.

92. Daß das heutige Apoteker Gewicht einerley sey mit dem Alt Römischen: item vom Gewicht etlicher alter guldiner Münzen: vom Loth / ¹⁰ Karath vnd Grän im Gehalt.

Röm. Gewicht AS. Disß zuerweisen seind mehrerley wege / behelffen sich aber alle der alt Römischen theilung: da anfangs zubehalten / das ihnen alles das so da gang ist / vnd sich theil-
 Mina Attica ferè. len lesset / AS geheissen / das Pfund / die Randel / der Schuch / das Foch Aders / der tag / die stund / etc. deren sie ein jedes in 12 gleicher theil gethailt / Vnciae genennet. Weil dann anfangs 96 drachmae auff ihr Pfund oder Assem gegangen / als ist drauß erfolgt / das sie ein Vnciam haben in 8 drachmas (quintlein) getheilt / son-
 20 Obolos gethailt worden. Ein drachma hat 3 scriptulos oder scrupeln, ein scrupel 2 Obolos, item 6 siliquas oder Ceratia, ein Ceratium (Karath) vier Grana, vnd also ein scrupel 24 Grana gehabt. Warumb aber die Apoteker heutiges tages den scrupel nur in 20 Grana theilen / findet man in praxi Medica Heurnij.

Weil dann dise alte Römische theilung maisten theils noch heutigs tages bey dem Apoteker Gewicht gehalten wirt; als ist gleich anfangs vermütlich / es werde auch noch die alte Römische schwäre haben.

Röm. Maaß. Nicht weniger haben sie auch ihren Sextarium (Schöpplin / Köpfflin / oder Randl) auch in zwelff Bnzen / oder Cyathos vnciales, Becherlin oder Tründlein getheilet / verstehe Römische / dann wir Teutsche haben weitere Hälse / theilen unsere halb-
 Semissalis. Hemi- na, Griechisch Cotyle. sanden nicht gern kleiner dann in zwey Seydlen. Doch haben sie auch Becher oder Crystalline Gleser einander nach gehabt wie die Orgelpfeiffen / von einer Bnz oder zoll Becherlein biß auff den Zwelffer / der einem gangen Assi oder Sextario gleich gewest / deren Namen gewest / Vncialis, sextans, quadrans, triens, quincunx, semissalis, septunx, Bessalis, dodrans, decunx, deunx. Dise vnciae bleiben auch noch theils bey den Apotekern. Sonsten hat auch ein Sextarius gehalten 8 Acetabula, ein Acetabulum 6 Ligulas, vnd also ein Cyathus 4 Ligulas. Sextarius aber hat daher den Namen gehabt weil deren 6 haben geben einen Congium, wie unsere Achtering den namen daher hat / weil vor 80 Jahren 8 derselben ein Viertel geben haben. Vier Congij haben gemacht eine Vrnem, hat den namen vom Tauchen / vnd so

9) 93. statt 92. 20) Assarium 34/35) semissis statt semissalis 35) (Randnote) Semissis, al. Hemi-

haisßen wir heutzutag den Nimer am Schöpffbrunnen / helt auch fast soviel / zu
Vrnae haben gemacht ein Amphoram, vnd hat das ansehen / als wann diser Nam
also von der Römer zeit hero / damalt sie noch Herren vber dise Länder / nämlich vber
Noricum Ripense vnd Pannonias gewesen / gebliben seye. Entlich haben 20 Am-
phorae gemacht einen Culleum, oder Faß.

- 96 Endtlich / ob wol der Römische Schuch ist geschäget worden zu 4 Handbraitten / Röm. Schuch
oder zu 16 Fingerbraitten / haben sie ihne doch nebens auch wie ein Assem, in 12
Vncias oder Zölle abgetheilet. Theilung.

- Es seind aber ihr Schuch vnnnd ihr Amphora also künstlich auffeinander gerichtet Röm. quadrantal.
10 gewest (innmassen ich zu eingang des Büchlins bey No. 3. meldung gethan) daß
ein Gefesß oder Geschirr / ihres Schuchs lang braitt vnd hoch / vnd also Würffelrecht
(dahero sie ihm den namen geben Quadrantal) gerad ein Amphoram, vnd gerad drey
Modios oder Traidmaß gehalten. Damit aber dise ihr Amphora nicht verfälschet
werde / haben sie die mit Brunnwasser angefüllet / vnd solches gewogen / das hat
ihnen gewogen ihrer Stattpfund 80 / darauff sie ihr amphoram vnnnd andere deren
anhengige Gefesse bestättiget / vnnnd also mit dem Gewicht geeicht haben: Dann alle
Brunn- Eistern- Regen- oder süsse Trindwasser seind am Gewicht gleich / also das
Villalpandus bey einer Desterreichischen Halben oder 20 Vnzen nicht vber ein drach-
mam vnderschaids auffß höchst vermercken könden.

- 20 Dieweil aber / als obgemeldet / so wol ihr Schuch vnnnd Pfund / als auch ihr Kandel
in 12 Vnzen gethailt worden / vnnnd man oft irr worden / was für ein Vnz Weins
oder Wassers man gemeint haben wölle / ein Vnz nach dem Gewicht / oder ein Vnz
nach der Maasß: haben etliche nachgesunnen / wie sie dise dreierley Vnzen in runden
zahlen / die wol zubehalten / zusamen richten möchten / also / das ein Vnz von einem
Sextario, gerad zuo Vnzen am Gewicht mache / vnnnd drey Würffelgerechte Gefesse /
jedes einer Vnzen oder Zolls lang braitt vnd hoch / anfülle. Darmit kämen nicht 80
sondern 96 pfund auff ein Amphoram (soviel drachmae inn ein pfund seind) vnnnd
würde der Schuch lenger / vnnnd mehr dem Altgriechischen Schuch gleich / der vmb
einen halben Zoll lenger gewest sein sol / dann der Römische.

- 30 Wann man nu dise der Römer alte Theilung / Gewicht vnd Maasß also in acht
nimbt / gibt es vnderschiedliche gewisse nachrichtungen / daß es nicht nur vermuthlich
vnnnd glaublich / sondern warhafftig war / das ihr Gewichtsschwäre bey den Apo-
teckern gebliben.

Apotheker haben alt
Römer Gewicht.

- Zwar solte der erste vnnnd gewisste weg sein / durch die alte Münzen / weil das
Apotheker Gewicht erslich auß dem Münz gewicht hergenommen worden / wann noch
heutiges tags ein Griechische Münz gefunden wurde / die vorzeiten ein drachma
† geheissen / oder soviel gewogen hette: Wie dann Antonius Augustinus ein solche alte
Griechische Münz beschreibet / das darauff gestanden das Wort ΔΡΑΧΜΗ, vnnnd
Bodinus berichtet / daß der Kaiser Augustus habe didrachmos aureos, oder halb-
40 löttige guldene Pfenning gemünzet / die man noch heut zu tag finde / dem vergleicht
er den alten staterem Atticum, auß den heutigen / ein Spanische Philippische Dop-
pelcronen / item einen Englischen Rosenobl. Es berichtet aber Villalpandus dar-
neben / daß er vnder diesen Guldenen Pfenningen Augusti ein grosse vngleichheit

alte Münzen.

Villalpandus sehet
einen staterem
gleich zweyen di-
drachmis vnnnd
gleich einem Siculo
Hebraeorum.

43) (Randnote) Haebacorum

am Gewicht gefunden. Weil dann vom König in Taprobane geschriben worden / er hab sich darumb vber Keyser Augusto so hoch verwundert / daß er (zum widerspil deß Villalpandi fürgeben) gesehen / daß Augusti Münzen alle gleiches Gewicht gehalten: geb ich erfahrenen Alchimisten zubedenken / ob nicht der Zusatz an Silber oder Kupffer / inn 1600 Jahren zu Gold / vnnnd also die Pfenninge schwerer worden / einer mehr dann der ander / nach dem jeder inn einem Erdreich vergraben gelegen / lang oder kurz. Dahin auch diß andeutung gibt / das Bodinus meldet / ein Münzmeister vnnnd die Goldschmide zu Paris haben eine guldene Münz Kaisers Vespasiani so hoch ¹ am Gold befunden / daß derselben nicht mehr dann der 788 theil fein abgangen: auch sonst fast alle alte guldene Münzen reicher am Gold seyen / dann dieser zeit Münzen / vnd nicht vber den 100isten theil zugeses haben / da den vnsern selten weniger dann 24 theil fein abgehe: vnd die Münzer für vnmüglich fürgeben / so hoch Gold zu münzen.

So berichtet auch ferners Bodinus, die alte Guldene Münz sey von Augusti zeiten biß auff Constantinum Magnum innerhalb 400 Jahren am Gewicht nach vnd nach / vnd entlich gar biß auffß dritte theil verringert worden / also das deß Keyser Constantini guldene Münz nicht mehr 2 drachmas, sondern nur noch 4 scriptulos oder 24 Ceratia gewogen. Dise meinen die alte Medici, wann sie sagen / daß 6 aurei auff ein Vnz gehen. Dise schwäre sagt Bodinus sey vor zeiten in Frankreich gar gemein gewesen: vnd soll einem Engellotten gleich sein; dise schwäre meint er auch / wann er sagt / daß der Niderlendischen Reichsducaten 6 auff ein Vnz gehen: kämen 72 auff ein Apoteker pfund. Dahero es meins erachtens kommen / das man in der Teutschen / auß Niderland her erfolgten Münzrechnung / die fein am Gold absonderlich / biß auff 24 Karath zehlet; wie sonst die fein an Silber vnd Gold ins gemein biß auff 16 lot gezehlet wirdt; dieweil nämlich / wie 16 lot eine ganze Mark / also 24 Karath damahlen einen ganzen Ducaten gemacht. Wann vnd wie oft dise schwäre deß Guldens in nachfolgenden zeiten in Frankreich geändert worden / findet man bey Bodino. Dahero die Medici vor diser zeit / thails auch noch heut zu tag / den Ducaten dem alten Röm. Denario gleich / vnd 7 auff ein Vnz schätzen / kämen 84 auff ein pfund. Noch geringer ist die heutige Französische Sonnenrone / wigt ein drachmam, wie Bodinus vnnnd Heurnius anzeigen / wie auch ein Spanischer Silberner Real, gehen 8 auff ein Vnz / vnnnd 96 auff ein Apoteker pfund. Widerumb ist vnder Kayf. Carl dem V. inhalt der Reichsmünzordnung / der Ducaten vor 50 vnd 60 Jaren geringer worden / also das nahend 9 auff ein Vnz / vnd 102 + auff ein Apoteker pfund gehen: die gemeine Französische Erone ist noch geringer am Gewicht. Ist also diser Weg vngewiß.

Den andern weg seind gangen der löbliche Churfürst zu Cöllen / Herr / Herr Ernst / Herzog in Bairn sel. g. in einem geschribnen Buch / so ihre Churf. Durchl. mit Anno 1605 zu Praag communicirt, vnd Ioh. Baptista Villalpandus, Com. in Ezechielem: baide processe seind zwar vnderschieden / treffen aber wunderbarlich zusammen. Villalpandi process ist einfältiger / der hat fol. 501. deß erwehnten Buchs in einem Kupfferstuck fürgestellt die form eins ehrenen Congij Romani, der vnder Kaiser Vespasiano in Capitolio mit zehen pfund Brunnwassers geeicht worden /

Warum die fein
am Gold auff 24.
Karath geschäzet.

11) dem vnsern

37) Churfürst

welches die drauff gestempfte vnnnd gegossene schrift aufweist. Disen hat er mit dem heutigen Apoteker gewicht examinirt, vnd das Brunnwasser / so drein gegangen / gleichfalls 10 pfund schwär gefunden; vnd von gwißheit wegen / hat er deren Geschirr zwey zur hand gebracht. Vnd wirdt sonsten auß Plinio vnnnd Galeno, so baide nach Vespasiano gelebt / erweisen / das ein Congius 10 pfund / vnnnd ein Amphora 80 pfund gewogen habe. Darneben vnd damit auch ein anderer diß probiren künde / hat Villalpandus darbey gezeichnet / wie lang brait vnnnd hoch ein würffelrechtes Gefesse seye / darein dise feins Congij 10 pfund Wassers gehen: nämlich meiner puncten 116 / gibt für er habe dise lenge drey mal am Congio selber gefunden.

10 Weil dann der Cubus von 116 / das ist 1560896 / vor zeiten gewogen hat 5760
 † Obolos, so kämen auff mein halbkandel mit Wasser 1133 alt Röm. Oboli. Nun hab
 ichs im abwegen befunden 1130 Obolos Apot. Gewicht / nur 2 s. scr. weniger:
 darauß augenscheinlich / das Vespasianus, Plinius, Galenus, vnd heut zu tag Villal-
 98 pandus zu Rom vnd in Spania / ich aber zu Lintz bey den ¹ Apotekern einerley Ge-
 wicht gefunden vnnnd gebraucht / dann das süße Wasser ist vberal einerley.

Der ander process diß zu practicirn, ist deß Churfürstens / vnd verheßt sich also.
 Erstlich hat er als ein Liebhaber deß Teutschen Vatterlands (in dem Er gern ein durchgehende gleichheit gestiftet hette im Gewicht / Elen vnd Maas) sich der Latei-
 nischen Wörter Libra vnd pondo abgethan / vnd dafür gebraucht das Teutsche Wort
 20 Mark / das lautet ein Gemerck / oder ein gezeichneter vnd caementirter Gewichtstein.
 Vnd weil vnser brauch in Teutschland ist / die Mark in 2. 4. 8. 16. zuthailen / vnnnd
 das 16 thail ein Lot zunennen / daher wir ein jedes Gold vnd Silber so vnnnd soviel
 löttig / vnnnd das fein Gold oder Silber / löttig nennen / verstehe 16 löttig: vnd aber
 die Apoteker 2 lot für ein Vng zehlen: hat ers von der Cubiczahl wegen also sein
 lassen / das ein Mark 8 Vngen habe / wie die Römische Vngen hat 8 drachmas:
 derohalben er auch 8 Mark Wassers genommen / damit es (von seines besondern
 hochwichtigen fürhabens wegen) vberal mit 8 zugehe: dise nach dem Apoteker ge-
 wicht abgewogene 8 Mark oder 512 drachmas Wassers hat er in ein hohes windel-
 30 rechtes gar glat außpolirtes Gefässe gegossen / vnnnd mit grossem fleiß gezeichnet / wie
 hoch es in demselben gestigen. Demnach hat er die lenge oder braitte am Boden nach
 der Hand in soviel gleicher thail außgetheilt / als ihme möglich gewest / welches am
 sicheristen geschicht / wann man erstlich in 2 / darnach ein jedes wider in 2 / vnd also
 fort vnd fort thailt: Mit diser so zugerichten thailung hat er die höch deß Wassers
 im Gefesse außgemessen / Länge Braitte vnd höhe in einander multiplicirt, vnd die
 Cubicwurzel gesucht: was nun die außgesagt / dasselbig in ein lenge abgezeichnet /
 welche mit grossem fleiß vnd subtilitet in sein Buch eingezeichnet gewest / die hab ich
 befunden meiner puncten 95 lang.

† Er hat auch als ein liebhaber der Geometri, den Mesolabum Platonis gebraucht /
 dardurch zwey media proportionalia gesucht / zwischen der inneren leng oder braitte
 40 am Boden / vnd zwischen der höch deß Wassers / vnd befunden das das kleinere me-
 dium mit der vorigen lenge eintrefte: damit er vergwiß gewest / das er weder zuvor
 im rechnen / noch jeso im handgriff / nirgend verstoßen. Es ist noch nicht genug ge-
 weßt / er hat mit diser leng auch ein würffelrecht Gefesse oder Cubum zurichten lassen /
 mit höchstem fleiß; hat die 512 drachmas Wassers drein gegossen / vnd befunden /

Churfürstens
process.

Was ein Mark
vnnnd sein thailung.
Was lot haiffe im
Gehalt oder Korn.

daß es darmit gerad angefüllet worden: das hat nach meiner thailung halten müssen den Cubum von 95 / das ist 857375. Er aber hat das latus gethailt in 8 gleicher theil / deren jeder einen Würffel gibt zu einer drachma Wassers / dann Radix von 512. ist 8.

Demnach hat er auß Glareano vnd Budaeo den Alt Römischen Schuch auff gesucht / welcher soll ein quadrantale gegeben haben zu 96 pfund Wassers oder 9216 drachmis, davon besser oben. Wann aber 9261 (vnd also vmb 45 mehr) die Cubicz zahl ist zu 21 / also solte der 21 thail desselben Römischen Schuchs den Würffel zu einer Röm. drachma gegeben haben / so doch / das deren nicht gar gerad 21 / sondern vmb ein dreissigstes thail weniger seyen; dann diß ist die Wurzel von 9216. Er hat aber befunden das sein Würffel zu der Apotecke drachma, vnnnd jener zu der Alt Römischen / so gar genaw zusamen treffen / das seiner 21 / (deren Er 8 gehabt in 10
seim latere) gleich das dreissigste thail von einem / vber solchen Alt Römischen grössern Schuch außgangen. Darmit abermals offenbar / das der / so vor zeiten inn dem grössern quadrantale 96 pfund gewogen / vnnnd jeko der Apotecke / so dem Churfürsten das Gewicht zugestellt / durchauß einerley drachmas gehabt.

Nicht ohn ist es / daß der Churfürst hie nicht aller dings mit Villalpando ¹ vnnnd 99
mit mir einstimme. Dann wann sein Wasser 857375 / hat gewogen 512 drachmas, das ist 3072 Obolos, so solte deß Villalpandi Wasser 1560896 / vnnnd das mein 307055 in gleicher proportion gewogen haben / 5592 / vnd 1102: wir haben aber 20
baide mehr gefunden / nämlich 5760 vnnnd 1128. Es ist aber diser vnderscheid der red nicht werth / dann die communication deß Gefäßes ist geschehen / wie der process außweiset / durch die lenge / also das der Churfürst auß seinem Gefesse die lenge gesucht / die ich vbernommen / vnd drauß widerumb sein Gefesse gerechnet: Wie leicht kan aber geschehen / das an der lenge jedesmals vmb einen halben puncten verfählet worden. Vnnnd wann dann die lenge die der Churfürst angibt / nicht 95 sondern 94 meiner puncten gewest wäre / so käm das Gefesse 830584 / vnd traffe also mit vns baiden überein. Was dem Villalpando widerfahren / sol hernach gemeldet werden: was auch mir widerfahren könden / anlangend dise so genaue subtiliteten, ist droben No. 81 zufinden / wiewol ich nicht gern von dem abweiche / was ich gefunden / allweil ich 30
zwischen jenen beiden ein mittles troffen.

93. Linzer Schuch vnnnd Eich mit einander / vnd baide mit dem Alt Römischen vnnnd etlichen außländischen verglichen.

Mit der einthailung der Römischen Amphora inn 8 Congios hat es ein besondere gelegenheit / dann wann ein halber Römischer Schuch Vespasiani, das Gefesse gibt zu einem Congio, so folgt daß derselbe Schuch ganz / das Gefesse gebe zu einer Amphora.

Wann nu vnser viertel noch acht Achteringe hielte / wie vor 80 Jahren / hetten wir auch disen vortl. Weil aber heutigs tags 41 Achteringe auß einem Emmer gemacht werden / so lasset vns besehen / was 41 halbe geben. Multiplicir 307055 mit 41 / kommen 12589255 / darvon die Cubische Wurzel ist 232 vnd 5 achtel / so groß Villalpandus 40

den Römischen Schuch gibt. Siehe da wie nahe unser Desterreichischer halber Emmer / nach Villalpandi Congio gerechnet / einer Alt Römischen Amphorae gleich seye. Das sol einem nicht vnbillich die gedanken machen / als ob die Eich / nicht weniger dann droben das wort Emmer / von der Römer zeiten her in disen Landen gebliben / zusambt der verknüpfung der Eich mit dem Schuch / ob wol der Schuch auß vnachtsamkeit vmb 4 oder 5 puncten / das ist ein viertl oder ein fünfftl Zolls kürzer worden.

Die bloße Dett. Achteringe für sich allein gibt kein anmahnung (nach dem Würffel) zu dem Schuch / dann die Cubic Wurzel von 614110 / ist bey nahe 85 / das wären nicht gar fünffthalbe Zölle. Aber nach der Visierruthen gibt es schöne verknüpfungen.

10 Anderthalben Linger Schuch geben die Visier zu einem kleinen Emmer von 40 Achteringen / drey Schuch zu deren 8 / vnnnd 6 Schuch oder ein Klafter die Visier zu 64 kleinen oder zu 62 s mittlern Landt Emmern. So man dann den Zoll thailt in 19 puncten / so geben deren puncten 50 ein halbs seidl / 100 ein Achtering / 200 acht Achteringe / 300 / 27 Achteringe.

Es mag aber ein jede Nation sich besinnen / ob sie / wie des vor obvermelten Churfürstens meinung geweest / jren Schuch (weil deren doch vil vnd mancherley / vnd der Linger schuch nicht vber 4 puncten zu kurz) endern / vnd nach ihrer Eich würffelrecht richten könne oder wolle / oder alle nach dem Alt Römischen schuch vnd Eich; darvon jeto mehrers.¹

100 20 Dann weil unser halber Emmer oder 41 halbe Achteringe so nahend eine Römische Amphoram geben / als folgt / das unser Viertl einer Röm. Vrna gleich sey / vnnnd 5 halbe einem Congio §. ein halbe grösser sey dann ein Römischer Sextarius*: Endtlich gehen Emmer einen Römischen Culleum machen.

So nu dem Württembergischen würffelrechten Eichgefässe zu trawen / das mir newlich communicirt worden / vnd ein Weinvisierer zu Stutgarten gemacht haben sol: hat dasselbig gehalten meiner puncten 95 / weniger ein drittheil / welches ich mit verwunderung ersehen / das solche Eychmaß mit des Churfürstens gefässe so nahe zutreffen solle / der doch nicht nach der Maas / sondern nach dem Gewicht der 8 Mark den gegangen: vnd wäre also unser heutige Linger Achtering gegen der Würtemb. 30 Eychmaas wie 614110 gegen 850000 / nämlich weniger dann drey Würtemb. Vierteln oder Schöpplin.

Wann dann zu Eßlingen 10 Maas ein Jme / 16 Jme einen Mimer machen / als kämen auff den Mimer 136000000 / das dividirt mit dem Linger halben Emmer 12589255 / kommen nicht gar sechsthalb Emmer Desterreichisch / auff den Würtemb. Mimer. Vnd weil 6 Mimer ein Fuder machen / giengen 32 vnnnd ein halber Desterreichischer Emmer auff ein Eßlinger Fuder: soviel passiert man auff einen grossen Dreyling: wiewol die gemeine Schiffdreylinge zu 30 Emmern halten: aber in den Rechenbüchern Anno 1531 zu Straßburg getruet / nicht weniger im Vergleich der 5 R. D. Länder Anno 1542 / werden 24 Wiener Emmer für einen Dreyling geschätzt / vnnnd darauff / wie dann auch auff den Wiener Emmer durch alle 5 Lande 40 die Anlagen inn den Gültbüchern gestellet. Es wirt mir nebens auch von dem vorgemelten Visierer zu Stutgarten angezeigt / das er 14 Württembergische Eichmaas auff ein Würffelrecht Gefässe / eines Württembergischen Berdschuchs lang brait vnd

Linger Eych mit der alt Römischen.

Linger Eich mit dem Linger schuch verglichen.

Churfürstens fürschlag.

Hin. Hebr. vnser 5 Achteringe. Gommor, Assaron vnser 3 Achteringe.

§ Chus Graece.

* Hebr. Log.

Griech. Xestes

4 Cori, machen 3 Culeos. Ein Medimnus gleich vnserm Emmer.

Hebr. Ephraim, oder Bath minor vnnnd Griech. Metreta vnser 3 Viertl Emmers.

Was ein Dreyling.

- hoch / schätzen solle. Nimb 850000. 14 mal / das gibt 11 900000 / darauß die Cubic-
wurzel ist 228 vnnnd ein Viertel / gar genaw so groß als vnser Linger Schuh. Wie
aber diß bewant / kan ich nicht wissen / dann der Württenb. Werckschuch ist mir auff
einem Schreibpapiir communicirt worden / meiner puncten 217 / fast so lang
- Grandf. Schuh. Hulsius den Grandfforter angibet / nämlich 218. Wår also der Württenbergische
Württen. Schuh. Schuh vmb 11 kürzer / dann vnser Linger / dessen Cubus 10218313 / helt nur 12
Württenb. Eichmasse / da doch der Wisierer 14 angibet. Die Württenb. Schenk- oder
Zapffenmaß zwar / ist vmb ein ailsftheil weniger / nämlich 772727: diß 14 mal ge-
nommen / macht 10818178 / dannen die Wurzel 221 ein achtl: das wår der Bairische
Beyrische Schuh. schuch / den Specklin seht 220 s, vnd kãm nähener zu dem Württenb. Schuh 217. 10 †
- Es ist gleichwol nichts seltsams / das einer Statt vnderchiedliche Schuh zugemessen
werden / auß vnfleissiger vbernemung / da einer den andern verführt. In Frank
- Nürnberg. Schuh. Jochim Brechtlers Büßenmeisterey / ist der Nürnberger Statfschuch nach dem Druck- †
papiir 228 / vnd also vnserm Linger allerdings gleich / welches auch die hiesige Werck-
Salzburger Schuh. leute bestättigen / vnd den Salzburger auch darzu ziehen. Aber Specklins Kupffer-
stück fol. 13. gib jne nur 226 / zwen puncten kürzer. Hulsius hats gar versehen / gibt
das Viertl Nürnberger Schuchs 64 meiner puncten / da wäre der ganze 256 / so lang
ist der alt Römische nicht. Auch ist allda der Werckschuch 16 meiner puncten kürzer
dann der Statfschuch / vnnnd also nur 212 / bey Brechtlern vnd anderswa: fast gleich
dem Straßburger / den Specklins Kupfferstück gibt 213 lang. 1 20
- Straßburger
Schuh. Den Wiener Schuh machen die Maasßstäbe vnserer Werckleute / die bey Steir ge- 161
Wiener Schuh. macht worden / meiner puncten 242 lang: Andere Werckleute vnd ihrer Mst. Baw-
Prager Schuh. meister geben jne 240: so lang der Prager schuch mir von ihrer Mst. Geometrischer
Instrumentmachern communicirt worden / nämlich 240 s: widerumb ihrer Mst.
Güesser Hillinger nur 237: Specklin im Kupfferstück nur 233. Mag sein das man auch
alda vnderchiedliche Schuh habe.
- Alt Röm. Schuh ist
mancherley. So haben wir auch von dem Alt Römischen Schuh in diesem vnd vorigen No.
gleiches vernommen / das ihrer mehrerley gewest. Mathaeus Hostius vnd andere
sollen jhne nicht gar so lang setzen / nach Crugeri Danzigischen Mathematici bericht /
als den Eulmischen / den er angibt meiner puncten 224 / oder 223 lang. In Ioannis 30
Eulmische Schuh. Myritij Malteser Ritters Cosmographi cap. 16. fol. 34 / stehet auß Leonhardo de †
Portis vberseht Pes antiquus nur 198 meiner puncten lang: der sol auch nebens
berichten / der gemeine Werckschuch sey mehr dann vmb einen Zoll lenger gewest.
Sol zu Rom gefunden worden sein in Angeli Colotij Lustgarten / daher Villalpan-
dus jhne pedem Colotianum nennet.
- Hingegen hat jeßermelter Myritius den pedem Romanum auß Glareano vber-
setzt / der helt nach dem Druckpapiir meiner puncten 247 / Glareanus aber hat disen
pedem auß Gulielmo Budaeo genommen / der inn den Römischen Messsorten treff-
lich wol erfahren gewest / vnnnd soll mit dem Parisischen Königlichen Werckschuch aller-
dings eintreffen / vnd von den Römern / wie viel anders mehr / in Frankreich ge- 40
Parisische Schuh. bracht worden sein. Wie dann Specklin diesen Parisischen Schuh gibt 248 lang.
- Diß ist nun meines wissens derjenige Schuh / den der Churfürst gebraucht / der
die grosse Amphoram gibt / helt meiner puncten nahend 249 / oder nach obangeden-

8) sechs statt ein

9) 1081818

13) Brechtlers

19) Brechtlern

ter mässigung auff wenigst 247. Bund weiland Kayf. Rudolffs Geometrischer Instrumentmacher zu Praag / Erasmus Habermel sel. hat disen pedem Romanum gleicher leng / oder gar 250 meiner puncten lang auff seine Instrumenta gestochen / mir auch gesagt / das weilend H. Jacobus Curtius Reichs Vice Cangler sel: solchen mit sonderm fleiß von Rom abholen lassen / vnd ihme communicirt.

Derowegen dann Pes Colotianus, als gar zu kurz / in den vorigen processen keinen platz nicht hat / sondern Villalpandus wirt einen andern gemeinen Werdschuch am Congio Vespasiani gefunden haben / nach welchem unzweifel Vespasianus den Tempel des Fridens bauen lassen / wie dann Villalpandus den Colotianum mit
10 außtrücklichen Worten verwirfft.

Die versachen / das soviel vnderschiedliche Römische Schuch angegeben werden / ja auch der einige Pes Colotianus, wie Villalpandus fol. 448 meldet / anderst bey
† Georgio Agricola, anderst bey Gulielmo Philandro, anderst bey Luca Peto, anderst bey Stanislaio Grsepsio zu finden / seind mehrerley / sonderlich aber hie zumelden / das ich befunden / daß das Druckpapier / wann es genehet / vnd drauff wider trucken wirt / eingehe / also das droben fol. 73. mein Finger halber Schuch vmb 2 puncten kürzer auff dem Druckpapier / dann auff dem Holz. Dergleichen viel mehrers bey den Kupffertrucken fürgehet / dann alda muß das Papir mehr geneht werden vnd mehr gewalt leyden. Diß achte ich die versach sein / das Villalpandus in seinem Buch den
20 Römischen Schuch / den er fürbringt / drey mal vnd zwar in einem einigen Kupfferstück zweymal verendert. Dann fol. 501 an der höch des Congij ist er meiner puncten
102 232 lang / solte¹ doch nach des Churfürstens process 234 halten / da ich anstehe ob er nicht vmb 2 puncten eingangen. Stracks darneben Fol. 502 ist der halbe Schuch zweimal am Congio, helt meiner Puncten nur 114 / ist also dem Finger gleich / dieser wirt vom vorigen (auß dem eingangnen Kupfferstück) abgenommen vnd selber auch eingangen sein. Der dritte findet sich fol. 316. 317. im kunstlichen Kupfferstück oder proportional Instrument, helt meiner puncten nur 224 vnd ein halben / wirdt doch auch selbigen orts für das latius Cubicum Congij berühmt: dannenhero offenbar daß er auß dem eingangnen Papir fol. 502 vbernommen / vnd selber auch
30 eingangen sey.

Weil dann noch heut zu tag hin vnd her grössere Werdschuche im brauch seind / dann vor 1500 Jahren der Römische gewesen / vnd noch der kleinst vnder allen nicht vmb eins Zolls kürzer: als ist hierauß vnschwer abzunemen / was von Bodini fürgeben zuhalten / der in sein Buch de Rep. auß alten Poëten zuerweisen vermeint / das die Menschen an der grösser abnemen / vnd vorzeiten alle ins gemein gegen den
† jetzigen Leutlen Risenmässig gewesen seyen. Besitze hievon auch Marquardi Freheri schrift von der lenge Caroli Magni des ersten Teutschen Kayfers / der vor 800 Jahren gelebt hat.

94. Andere lange Maassen mit dem Finger schuch verglichen: Item 40 Alt Römisches vnd anderer Orten gebräuchiges Feldmessen.

Die Finger Klafter vnd Ellen werden inn Keyfers Maximiliani General von Anno 1570 dem ganzen Land auffgesetzt / deshalb ich das Caement von der Dß

Nota. Vnd sol der Leser sich des eingelegten abtrucks auff ein vngenehtes schreibpapier halten / vnd dasselb zettel nicht Planiren oder nehen lassen.

Villalpandi schuch auß dem papir verfelscht.

Ob die Menschen an der lenge von einem tausent Jahr zum andern abnemen.

* Nota. auff beige-
legtem zedelin vom
Schreibpapiir / den
das Truckpapiir ist
wegen der nehung
eingangen.

Calamus Hebr.
Linger Elen mit
dem schuh. Wiener
Ellen. Prager El-
len.
Feld-Maass.

rigkeit abgeholet / vnd das zwölffte theil einer Linger Klaffter / das ist / einen halben Schuh droben No. 80* / neben die Bisserruthen drucken lassen: dann sie wirdt ge-
theilet in 6 Schuh / item inn neun viertel einer Elen: das also drey viertl einer Elen
zwen Schuh / vnnnd die ganze Elen zwen Linger Schuh vnnnd acht Zoll helt. Die
Wiener Elen sol vmb meiner 6 puncten / das ist vmb ein dritthail Zolls / die Prager
aber vmb ein ganzes viertel / vnd zwey drittheil eins Zolls kürzer sein.

Dieses Clafftermaass achte ich nicht nur zum Hey / Holz / Steinen / Gebäuen /
Gräben / Schachten vnd Stollen vnder der Erden / sondern auch zum Feldmessen
bequemlich sein.

Dann ich auff fleissiges nachfragen sovil befunden / das man im Land ob der Ens 10
die Tagwercke vnd Gwandtn / nicht nach einem gewissen bestendigen vnd klenlichen
Maass (wie bey den Römern gewest die Pertica oder decempeda zehen Schuh / vnd
zu Nürnberg vnd in Württemberg die Ruthe 16 Schuh lang / zu Frankfurt 12 s, nach
Hulsij anzeigen) sondern nur schlecht dahin nach zweyer Noß arbeit anschlage: oder
so man sich schon der Stangen gebraucht / nimbt man sie doch nur nach der Hand: es
werden auch die Acker oder Bifunge (Bettlin anderswo genennet) an der braitte oder
anzahl der Furchen vnd an der lenge sehr vngleich gemacht.

Die vrsach achte ich sein / weyl das Land meisten theils bürgig / die Güter / Baur-
höffe / vnnnd Gründe hin vnd her in die Leitnen zerstreuet / oder sonsten auch auff 20
der Ebne mit Friden / Gräben / Gfettnen / hohen Gehägen eingefangen vnnnd gleich-
sam verschancket: darneben fast alle grundstücke ein-¹ vnd zugehörungen seind zu den 103
dienstbarn Güetern vnd Höfen / vnnnd mögen nicht durch verkauff oder Erbfall zu
ledigen Grundstücken gemacht werden / deshalben es deß außmessens nicht bedarff.

Wann aber doch vnderweillen Spän vnd Stritte fürfallen / die nicht wol ohne das
ordenliche Feldmessen zu entscheiden / gebraucht man sich billich eines gewissen
masses.

Röm. Feldmessen.

Die Römer haben ein Iugerum oder Joch ackers geheissen / das 12 Perticas oder
Stangen breitt / vnd 24 lang gewest: das seind nun 120 schuch breitt vnd 240 lang /
vnnnd machen am Feld 28800 gevierter schuch. In Württemberg rechnet man 150 ge-
vierter ruthen in einen Morgen / deren jede 16 schuch lang vnnnd breitt ist / vnd also 30
256 gevierter schuch begreiff: das wären 38400 gevierter schuch: dann so rechnet man
anderthhalb Morgen für ein Jauchart / Nemlich 57600 gevierter schuch / das ist gerad
zweimal sovil landes als bey einem Iugero Romano.

Württembergisches
Feldmessen.

Zu Nürnberg thut ein Stück Ackers / 200 schuch lang vnnnd breitt (das ist / 40000
gevierter Schuh groß) ein Iugerum. Zu Frankfurt sollen / nach Hulsij anzeig / 160
gevierter Ruthen / die da machen 25600 gevierter Schuh / ein Joch Acker geben.

Demnach so könten auch wir deren Maassen eines brauchen / vnnnd die 28800 ge-
vierte schuch Römischen Maasses in vnser Claffter (die an der leng 6 schuch / vnnnd
also am Feld 36 gevierter Schuh hat) eintheilen / kämen 800 gevierter Klaffter für
ein Römisches Joch 40 in die leng vnnnd 20 inn die breite / oder 1600 für ein Wür- 40
tembergisches Jauchart / 40 inn die lenge vnd breite / wanns recht vierecket.

Der eussere vmb-
fraiß treugt.

Das aber der einfältige sich hätten solle / das er nicht bloß nach dem eussern Zaun /
Frid oder Gehäg gehe / dessen ist Er No. 69 notdürfftig erinnert: alda zu sehen / das
ein Römisches Joch von 800 Clafftern / zwey mal so lang als breitt einen Zaun habe

von 120 Classiern: diser Zaun 120 Classier lang / kan gar 1145 gevierter Classier einfangen / wann er anderst geordnet wirt / er kan auch nur 224 / vnnnd endlich gar nichts einfangen / wann man ihne so weit verziehet.

Wie aber auß dem eusserlichen gecirck / vmbzeunung / oder Pianta, zurechnen seye / wieviel Feldes darinnen begriffen / findet sich von No. 12 biß No. 23 / sonst derlich No. 16.

Land oder Raiß Maaß ist wie aller orten / vnd behest man den Röm. brauch / das 5 schuch auff einen schritt / 1000 schritt auff ein wellsche Meilen gezehlet werden / vnnnd vnser Teutsche Meylen von 4 § in 5 Wellsche mache bißweilen auch weniger dann 4* /
 10 oder mehr dann 5 / nach dem es bürgecht oder eben / vnnnd die Plätze / Flüsse / Krümmen / Dörffer / Schlöffer / Stätt / oder Märck anlaiffung zum zehlen geben.

Meilen.

§ Parasangae
Persarum.* Leucae
Gallorum.

95. Dest. Gewicht mit der Eich / vnd etlichen außländischen gewichten verglichen.

Obwol in ganz Teutschland / meines wissens / die Mark in 16 Lot getheilet wirdt / auß vrsachen die drohen No. 92 außgeföhret / dahero vnd weil sich etwa vorzeiten befunden / das zway Teutsche Mark auff ein Römisches Pondo gehen / wir Teutsche
 104 jeso das pfund in 32 Lot theilen /¹ vnnnd nicht inn 12 Vnzen oder 24 Lot / wie die Apoteker vnd alte Römer: so trifft man doch gar selten an einem ort ein solches pfund an / das 12 oder 16 Apoteker Vnzen halte / sondern sovil Ort / sovil Gewichte / vnd geschicht vielmaß / das an einem ort vnderschiedliche Gewichte seind /
 20 eines auff dise / das ander auff ein andere Wahr.

Warum vnser
pfund 32 lot halte

Vnser Finger Gewicht ist in Europa nahend das schwärest / wirdt in mehr berühmtem General von Anno 1570. dem Wiener gleich geachtet / vnnnd dem ganzen Land auffgesetzt / das schätzen die Apoteker auff Neunzehndhalb Vnzen / aber crassa Minerva, dann von 19 ganzen Vnzen gehen nicht mehr ab / dann dritthalben scrupel, wigt also 907 Obolos. Ein Finger lot aber wigt nicht gar 5 drachmas, dann ein Finger quintlein wigt 71 Gran. Doch findet sich bißweilen auch zimlicher vnfließ bey den Gewichten auff den kauff gerichtet also das mir ein Vnz fürkommen ein halben scrupel schwärer dann sonst alle.

Ein Apotekerpfund
hat 576 Obolos.
Ein drachma
6 Obolos oder 60
Grana.

Unlangend die außländische Gewichte / weil im Münzwesen die Eölnische Mark in Teutschen Landen den maisten ruff hat / deshalb sie in der Reichsmünzordnung dem ganzen Reich zur nachrichtung fürgestellt wirdt / als ist zu melden das Anno 1560 ein Keyserlich General außgangen / darinnen Kayf. Ferdinand als Erzhertzog in Desterreich die Eölnische Mark seinen Erblanden gegen ihrer Wienerischen (vnd also auch Lingerischen) also verglichen / das auff ein Eölnische gehen sollen zehentz halbe / auff die Wienerische aiff vnnnd 2 fünffel stück Reichsgulden / deren jeder 60 fr. gelten / vnnnd am Korn 14 Lot vnnnd 16 Gran fein halten soll: derentwegen 100 Wienerische gerad 120 Eölnische pfund machen. In gleichem sollen 67 Ducaten wegen ein Eölnische / vnd 80 sampt 2 fünffthail ein Wienerische Mark / das gibt auch
 40 dise proportion. Vnd weil also 160 Ducaten / sampt 4 fünffthail auff ein pfund

Eölnisch Münz ge-
wicht.Linger lot wievil
Ducaten.

kommen / so gefallen bey nahe 5 Ducaten auff ein lot / nämlich ein vierzigstheil drüber; vnd also werden heut zu tag die eingesezte Ducaten gewichter zugerichtet.

Unser Ducaten
wigt nahend
17 Karath.

Hierauf achte ich auch diß erfolgt sein / das unsere Goldschmide das 16 thail vom Ducatengewicht ein Karath nennen / wann sie diamanten wegen. Dann 3 Römische Ceratia gehen auff einen Obolum, 907 Oboli Apotecar Gewicht / als kurz zuvor gesetzt / auff ein Linger pfund: also finden sich in einem Lingerpfund / oder 160 Ducaten sampt vier 5 thailen 2721 Römische Ceratia, vnd kommen also auff jeden Ducaten vber 16 / vnd nahend 17 Ceratia, das lassen die Goldschmide / von der gefüegen thailung wegen / gerad 16 Karath sein. Vnd das sie gewißlich das Römische meinen/ erscheint dahero / weil sie ihr Karath in 4 Grän thailen / wie die Römer ihr Cera- 10 tium in 4 Grana. Diß ist nach dem Goldschmidgewicht der diamanten zuverstehen: dann bey der Münzrechnung hat es ein andere meinung mit dem Karath vnd Grän; die wil ich auß anleitung Lasari Erckers probationbuch / so deutlich vnd klar als es möglich / im folgenden Täfeln für Augen stellen.

Hochteutscher Münzbrauch	Gemischter Brauch		Niederländischer Münzbrauch	Alt Röm. Brauch
	auff Silber vnd Gold	Auff Gold allein		
1. Marc	1. Stuck	1. Stuck	1. Marc	1. Semuncia
16. Lot 1	16. Lot 1	24. Carat 1	12. Pfennig 1	12. Scrupula 1
256. Pfennig 16	288. Grän 18	288. Grän 12	288. Grän 24	288. Grana 24 20
Zum Gewicht oder Schrott	Zum gehalt oder Korn		Zum Gewicht vnd Gehalt	Zum gewicht

Seind also die Pfennige / deren in Kayf. Carls des fünfften Münzordnung meldung geschicht / Niederländische vnd nicht Hochteutsche gewichtspfennige. Warumb aber das Stuck in 24 Karath getheilt worden / ist besser oben fol. 97. gemeldet. ¹

Augsburger
münz gewicht.

Demnach aber wir am Donaustrom viel mehr mit Augspurg dann mit Cöln 105 zuthun haben / als ist daselbsten Anno 1601 bey Hans Schultes ein Büchlein im Truch außgangen / dessen Author Martin Rauffman Rechenmeister / verlegt Niclas Leiß / Goldschmid Handelsman vnd Mitburger daselbsten / darinen 26 Augspurger Marc zu Wien thuen 21 Marc 14 lot / 1 pf. vnd 2999 von 4867 theilen 30 eines pfennings. Vnd hinwiderumb 34 Wiener Marc thuen zu Augspurg 40 Marc / 6 lot 1 quint. 2 pfen. vnd 3 Achtel eins pf. das ist 100 Linger pfund machen zu Augspurg 118 vnd nahend 3 vierdung.

Diß ist zuverstehen vom Gewicht auff Silber vnd Gold zu Cöln vnd Augspurg; sonsten erscheint auß oft angezogner Franz Jochim Brechtlers Bärenmeyererey / zu Nürnberg außgangen / das selbiger orten auch andere gewichte breuchig. Dann 90 pfund Wiener / Linger / Salzburger / so zu Nürnberg wegen 100 / sollen zu Cöln wegen 102 / zu Augspurg 104. Dise vngleichheit ist in Oesterreich nit / sondern man hat einerley Gewicht auff Silber Gold vnd allerhand wagmässige waren.

Vnd hab ich auß erwehnter Bärenmeyer / vnd auß Bodino de Rep. auch anderer Münzmeister / Gießer / vnd Instrumentmacher aussag folgendes Gewicht: täfelin zusamen gezogen / vnd auff den Linger Centner gerichtet.

	Pfund		
Zu Genff (Bodi.)	99. f. —	Lunden (Brecht.)	124 +
Linz / Krems		Leon (Bodi.)	129 f. —
Wien / Salzburg	100.	(Brecht.)	133 +
Praag	102. f. +	Tolosä / Mompeliet	
Roan	107 +	Avenion	134 +
Chur. Basel (Br.)	109. f. +	Danzig	136 —
Paris / Bisanz /		Massilia	137
Bern / Basel (Bod.)		Cracaw	140 +
Strasburg (Bod.)		Lublin / Preßlau	142 +
Frankfort / Nürnberg / Bogen	111. f. +	Neapoli	150
Cöln (Brech.)	113 +	Bolonia	155
Augsburg (Br.) Straßburg (Brech.)	116 —	Florenz / Luca	158 —
Benedig groß Gewicht (Brech.)	118 —	Hie ist das pfund dem Apoteker pfund oder 12 Unzen Apoteker gewicht gleich.	
Apoteker Gewicht nach der Unz	118 +	Ferrara	160
Luron	118 s	Ancona	164 +
Augsburg Münzg.	119 —	Dietrichsbern oder Verona	167 —
Cosnig / Wlm / Antorff / Lübeck / Cölnisch münzgewicht:	120	Genua (Brech.)	170 cir.
Lunden (Bod.)	122 —	Genua (Bodin.)	
Leipzig / Thessalonica	122 +	Meyland	172 +
Genff (Brecht.)	123 circ.	Catalonia	178 —
Brüssel (Coign.)	123 —	Parma	179 f.
		Benedig (Bod.)	185

Nota. zwey lot Augspurger massen gar ein wenig mehr dann ein Apoteker unz.

Mit der Eych findet sich ein solche vergleichung des gewichts / das weil die Wein theils leichter seind theils schwärer / dann Wasser / doch nicht vmb vil / in massen auch die alte vnd Villalpandus eins für das ander genommen ohn vnderscheid: hab auch ich in die Linger halbkandel von Brunwasser gewogen 23 Unz 13 scr. oder 565 sc. komen also auff die Achtering dritthalb Linger pfund vnd gar ein wenig drunder / nicht gar 4 scrupula: vnd ein Emmer wigt ein Linger Centner vnd 2 pf. aber 40 Achteringe einen Centner weniger 11 lot. An schmalz schäset man die Achtering zu 2 pfunden / were der Emmer 82 pfund. Vor 70 Jahren in dem vergleich der 5 R. D. Lande werden 4 alte Maasß oder ein Achsel Emmers zu 10 pfunden

Gewicht vnd Eich verglichen.

schmalz geschähet / ist also die alte Maasß zu 2 s pfunden vnnnd der Emmer zu 80 pfund geschähet. ¹

96. Ein behendigkeit mit wenig Steinen vil vnderchiedliche Gewichte zuwegen.

106

Weil die Schnellwag nicht jedermans ding / auch oft betrüglich ist / vnd leichtlich verderbt werden mag / Also haben etliche Rechenmeister einen fund erdacht / mit 5 Steinen alle pfund / oder mit fünff gewichtlein alle grän nach einander biß auff ein-
hundert ein vnd zwainzige auff einer Schalwag zu wegen: die müessen aber also bes-
chaffen sein / der erste solle ein gerechtes pfund oder grän wegen / der ander drey /
der dritte neune / der vierte Siben vnd zwainzig / der fünffte ein vnd achzig. zeichne ¹⁰
sie von gedechtnuß wegen mit den Buchstaben A. I. S. T. V.

1. 3. 9. 27. 81.

Weil aber nicht ein jeder sich gleich besinnen kan / welchen Stein er gegen dem an-
dern legen solle / so hab ich ein Täfelin hierauff gemacht vnd bengefügt.

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
0		AS	ITAS	IT	AIST	VAIT	SVIT	AVIS	VA	SV	ATVS	ITVA	ISTV
1	A	ISA	ITS	AIT	VAIST	VIT	ASVIT	AVS	V	ASV	ITVAS	ITV	AISTV
2	IA	IS	AIT'S	STAI	VIST	AVIT	SVAT	VS	AV	ISVA	ITVS	AITV	
3	I	AIS	TAI	STI	AVIST	VT	SVT	VSA	IVA	ISV	AITVS	ASTVI	
4	AI	TAIS	TI	ASTI	VAST	VT	ASVT	IVAS	IV	AISV	TVAI	STVI	
5	SAI	TIS	ATI	STA	VST	AVT	ISVAT	IVS	AIV	TVAIS	TVI	STVAI	
6	SI	ATIS	TA	ST	AVST	IVAT	ISVT	AIVS	SVAI	TVIS	ATVI	STVA	
7	ASI	TAS	T	AST	IVAST	IVT	AISVT	VAI	SVI	ATVIS	TVA	STV	
8	SA	TS	AT	ISTA	IVST	AIVT	VISA	VI	ASVI	TVAS	TV	ASTV	
9	S	ATS	ITA	IST	AIVST	SVAIT	VIS	AVI	SVA	TVS	ATV	ISTVA	

†

20

Merck den gebrauch dieses Täfelins / wo die Buchstaben nicht nach einander ge-
setzt werden nach ihrer ordnung / da muß man die gwichte gegen einander legen /
nimb dessen etliche Exempla.

Ich soll haben 95 pfund / such oben 90. zur linden 5 / so finde ich im Creutzwege
das wort TVAIS. Das bedeut das ich die begerte 95 pfund auff den zwayen Steinen ³⁰
T. V. haben möge / wann ich die drey A. I. S. dargegen lege / dann V ist hie der
letzte nach dem Alphabet, vnd bedeutet den grösssten Stein von 81 pfunden: was
aber hie nach V folget / nemlich A. I. S. gehet sonst im abc vorher / vnnnd be-
deutten alle drey klainere gewichte / nemlich 1. 3. 9.

Ich hette gern 40 pfund. Such 40 oben vnd 0 zur linden / so findestu AIST, be-
deutet du sollest A. I. S. T. zusammen in ein schalen legen / vnnnd nichts dargegen
in die andere / dann T ist der grössste Stein / vnd folget keiner nacher: vnnnd stehen
die Buchstaben nach ihrer ordnung / die sie im Alphabet haben.

Ein Wagmeister kan mit dem sechsten Stain / der da 243 pfund wigt / auff 364
pf. kommen / mit dem sibenden / der 729 pf. hette / kām er auff Hilff Centner / also ⁴⁰
daß er nicht eins einigen Gewichts mangelte von einem an / biß auff 1093 pfund.

97. Dest. Traidmaaß mit der Eich / Gewicht / vnd außländischen verglichen.

In mehrerwehntem Kayf. General von Anno 1570. wirt der Statt Steir alte gupffte Megen / zu einer durchgehenden Landmegen geordnet / doch das solche gupffte Megen inn ein new gestrichen caement verwandelt vnd für auß nur gestrichen verkaufft werde: die hab ich von dem geschwornen Außmesser zu Linz entlehnet / mit Wasser angefüllet / das hat gewogen 129 Linzer pfund / vnd ist gewest 52 Achteringe / weniger vmb ein Seidl oder halbs seidl / dann es kan mir an der halbkandel innen soviel behangen sein / indem ichs 100mal außgossen. Also siehestu das / als vil pfund wassers in einem Emmer seind / gleich sovil halbe Achteringe gehen inn ein Megen. Ferners ist zusehen / das die Megen gerade fünff viertel eines Emmers / oder 4 Megen 5 Em'mer halten / nach dem Raum / vnd mag also das Traid in ein Faß auch mit dem Wisierstab erkundigt werden / wann man die Wisier des Fasses multipliziert mit 4 / vnnnd was kompt / mit 5 dividirt / so findet sich die anzahl deren Metzen so ins Faß gehen.

Der Statt Steyr Megen ist die Landmaaß.

Traid zu visieren vnd messen.

So aber du einen runden Traidhauffen / der wol auffgupfft / auß No. 25 / oder so er nider geseffen vnd stumpff / nach No. 35 / oder einen Sack mit Traid so einem Rassen gleich hoch angeschüttet / nach No. 24 / oder wie es die gelegenheit mit des hauffens Figur erfordert / messen woltest / so brauche die gleiche puncten am Wisierstab / vnd rechne den Leib / den dividir hernach durch 31440000 / dann sovil gehet in ein Linzer Megen.

Traid mit dem Wisierstab zu messen.

Weil dann nun ein Desterreichischer Emmer zweyen Römischen Amphoris oder sechs Modijs gleichet / als wirdt ein Dest. Megen oder Strichmaß achthalben Modios machen / vnd hingegen ein Modius Romanus ist ein wenig mehr dann vnser halbes viertl.

Ein Megen fast ein Artaba. 6 Megen geben ein Corum Hebr. Ein Saturn ein viertel Emmers vnd 5 sata ein Megen. Ein Ephraim nicht gar ein Emmer. Ein Gomor oder Assaron drey Achtering. Ein Cab oder Choenix weniger dan 2 Achtering / 5 Cori ein Ruth.

Der Praager strich aber / so vor einem Jahr im ganzen Königreich Böhheim bestetigt worden (deren mir einer zukommen) thut drey / vnser Obder-Enserische vier Megen: vnd ist diese Traidmaaß in Desterreich vnnnd Ungern noch viel mehr vnder-schidlich / wie auß folgendem Täfelin zusehen / das ich auß einer mir von dem Kayf. Proviandt Ampt beschenehen communication gezogen vnd auff die Linzer Megen (deren alda / wie auch im Land vnder der Ens / 30 für eine Ruth / gerechnet werden) nicht weniger auff die Wiener Ruth (zu 31 Megen gerechnet) gerichtet habe.

	Auff ob der Enser	Auff Wiener	Auff vnder Enser Landmaß
Wiener	54.3 viertl	31 Megen oder	43 ein halb
Unter Enser		ein Ruth	
Landmaß	37.1 halb	21 drei achtel	30 Megen oder
			ein Ruth
Preßburg	37.1 viertl	21 ein viertl	29 fünff sechstl
Comarn	34.1 viert	19 ein halbe	27 drey Achtel

21) Linzer

23) Modies statt Modios

27) thun

32) gerechnet

35) 93 statt 43

	Auff ob der Enser	Auff Wiener	Auff vnder Enser Landmaß
Hungarisch			
Altenburg	33.1 drittl	19	26.2 drittl
Stain am Anger	31.5 achtel	18	25 ein viertl
Raab / Güns			
Genßdorff	30.3 viertl	17 ein halbe	24.5 achtel
Ob der Enser	Ein Mut oder		
Landmaas	30 Mehen	17 ein achtl	24
Dedenburg	29.3 achtel	16.5 achtel	23 ein 3 theil
Naderspurger			
Görs / Gräzer			
viertel	25.5 achtel	14.5 achtel	20 neun 16 theil
Prager strich	22.1 halb	12.7 achtel	18 ein 16 theil

10

Traid schwäre. Die Römische oder Griechische Medici haben vor zeiten ihr Traid viel gewogen / das ist aber von mehrerley Ursachen / ein betrüglich Gewicht / wie weniglich bewußt. Jedoch / vnd damit ich auch diß nicht vmbgehe / sonderlich wegen der Fuhr zu Land vnd Wasser; hab ich ein Traid / fünff Monat alt / im trucknen 1615ten Jar jenseit der Donaw / nicht weit von Linz gewachsen / nach dem Mehen gewogen 92 pfund / Weizen 97 pfund / das Wasser aber in der Mehen 129 pfund / darauff volgt / das ein Schiffdreyling / oder 30 Emmer Weins so schwär sey / als 42 Mehen Traid / oder 40 Mehen Weiz. 20

Traid fuhr. Hierauff beruhet nun die Schiffrechnung / dann ein Schiffherr den vberschlag leichtlich machen kan / was es mit Wein vnd Traid / Zillen vnd Rosse / für einen Absatz gebe. Was ich diß orts für berichtung eingenommen / findet sich inn nachfolgendem Täfelin.¹

Schiffrechnung.
Scheff vnd Clozil:
len werden von
einer gewissen
Form vnd zubereit:
ung verstanden /
nicht aber von
einer bestimpten
größe.

Schiffzillen	Dreyling			Linger Muth Weizen			Ross	
Ein fünfferin	8.	9.	10.	11.	12.	13.	4.	5.
Sechserin	11.	13.	15.	14.	17.	20.	6.	7.
Gmainstetnerin		16.	17.	21.	22.	23.		8.
Sibnerin	18.	21.	24.	24.	28.	32.	9.	10.
Irrerin	25.	28.	31.	33.	38.	42.	11.	12.
Achterin	32.	36.	40.	43.	48.	53.	13.	15.
Hohe Naue	80.	90.	100.	107.	120.	133.	30.	33. 36.

108

30

35) Naue statt Naue

Wann man dann scheitert / fragt es sich was die Fässer halte / das sie nicht sinken. Antwort / nur das Holz machet sie ein wenig herfürucken / oder so eins wahn ligt / stehet es vmb sovil empor. Das nemen die Schifflente wol in acht / vnd bauen der gefahr zeitlich für: besser außstrucken dann versunden. Sonsten hat der Wein fast gleiche schwäre mit dem Wasser / blibe für sich allein / so bald vnden als oben im Fluß / nach dem in der Schwal truege.

Sol also / diser Rechnung nach / ein trenckt Schiff mit lauter Wein geladen / nicht gar versinken.

Mit der Traidfuhr hat es grössere gefahr / dann obwol das Traid droben leichter
 10 befunden worden dann der Wein / ist es doch allein von solchem Traid zuverstehen / das mit sampt dem lufft / der zwischen den Kernlin plag hat / in einem Schiff oder Gefesz eingefangen ist / also das kein Wasser darzu kan / wann aber das Wasser darzu kan / so sincket ein jedes Kernlin für sich darinnen / vnd also auch die ganze Last / dann das Wasser treibt die lufft auß.

98. Gewicht vnd bewerung der Metallen vnnnd anderer wagnässiger Sorten.

Wie nun droben No. 13. gemeldet worden / das Gewicht vnd Leib oder Raum mit einander gehen / als ist hie anfanglich vnd ferners zu mercken / das solches nur dann zumahl gelte / wann man vberal in der Regel detri von nur einerley Zeug handelt.

20 Es seind aber die Metalla vnnnd andere flüssige oder truckene harte zeuge sehr vn- gleich / einer schwärer vnd gedigener als der ander. Vnd wann man dann von zweyer- ley Zeugen auff einmal handelt / so merck fürs ander / das Raum vnd Gewicht ein- ander außwechseln / vnd die proportion gerad vmkehren.

Zum Exempel / wann ich hette deß Wassers vnd deß Quecksilbers jedes ein seidl / so ist das Quecksilber 15 mal schwärer / vnnnd hingegen wann ich baiderley Zeug inn gleicher schwäre nimb / so ist deß Wassers 15 mal mehr nach dem Leib oder Raum.

Difem nach haben auch die Authores, welche alles abgewogen / vnderschiedliche be-
 30 richte gethan / wie ein Zeug oder Metall sich gegen dem andern verhalte / etliche nach dem Gewicht / etliche nach dem Raum / etliche auch nach den diametris ehnlicher Kugeln / welche wie bey No. 13. gelehret worden / nur das drittheil so weit von ein- ander seind als die Leiber.

Weyland Lasarus Ercker probation Meister in Böhheim / in seinem andern Buch vom Gold probiren am 60 Blat lehret sein Gold vnd Silber durch ein loch zu drä-
 109 ten zu ziehen / vnd dann gleich lange trümmer abzuwicken / vnnnd auff der probir wag (die er mit ihrer gebürlichen Subtiligkeit vnnnd zurüstung nach aller notdurfft be- schreibt) abzuwegen. Hie werden nun alle dräte gleicher dick vnd lenge / seind ¹ der-
 40 halben am leib oder raum gleich / vnd gewinnen vngleiche gewichter: dann das fein Silber hat ihme gewogen 227 Marc 4 lot / das Gold 405 Marc 8 lot / auff dem ver- jüngten probation gewicht. Solte ihme / als einem probation Meister billich zu-
 40 trauen sein / wann gewiß wäre / das die dräte einander allerdings gleich / nicht frumb getriben / auch das ziehen sie so gedigen gemacht / als das gepräg.

Gleiche Dräte
gewogen.

32) (Randnote) Dräade

35) Subtiligkeit

In ein Fischein ab
bohren ein gießen
und wegen.

Mit kandeln eichen
und wegen.

Gleiche würffelmä-
ßen und abwegen.

Zu gleichen diame-
tris vngleiche ge-
wicht sehen.

Vngleiche diametri
auff gleich gewich-
ter.

Bodinus de Rep. am VI. Buch vnd Theatro Naturae lib. II. fol. 261 berufft sich [†]
auff Franciscum Fuxacum Candalam, nennet ihn Gallicum Archimedes, dieser
hat auch dräte gemacht auß allen 6 Metallen: hernach einen draat in ein Fischein
gedruckt / vnd die Form mit Quecksilber angefüllet / der sol auch berichtet haben / das
es sich nicht thun lasse / das man die Metalla schmelzen / vnd ein sonderliche darzu
gemachte Flasche von einem jeden voll angießen wolte / dann wann sie erkalten /
sollen sie sich sehen / eins mehr denn das andere: das wil Bodinus mit dem Eiß be-
stetigen / irret sich aber / dann wann ein wasser zu Eiß wirt / ist es nicht kleiner / son-
der grösser worden / sonst wurde es nicht obschwimmen / nicht die Krüge vnnnd Glä-
ser zutreiben / nicht in den beschlossnen Tragbutten vber sich quellen. Er selber Bo-
dinus hat Erden / Salz / Aschen / Del / Wein / Meer vnnnd süß Wasser mit einem
gefesse gemessen vnd gewogen. Es ist aber vil ein anders / Erden Salz vnnnd Aschen
trucken zuwegen / wie ein Traid in ein gehübten Gefesse / vnnnd dasselbe seiner gedig-
nen substanz nach / vnnnd mit ausschließung des zwischen eingemischten Luftes ab-
wegen / welches nicht ohne wasser geschehen kan.

Johannes Baptista Villalpandus, ein guter fleissiger Mann / der doch auch Chri-
stophorum Grünbergern Matheseos Professorem zu Rom auß seiner societät zu
sich gezogen / hat auß 6 Metallen gleiche würffel oder Cubos gemacht / eines Linger
zolls / oder doch 20 puncten / lang breit vnd hoch / die flüssige sorten aber mit ge-
fessen / so inwendig diesem Cubo gleich geformirt gewest / angefüllet: das wasser so
drein gangen / (doch auß einem grössern gefäß herab getheilt) hat ihme gewogen 148
hochteutscher pfenning / das ist nahend 14 sc. Apotecar gewicht. Del / Hönig / vnd
dergleichen hat er von den alten Medicis vbernommen. Beclagt sich doch der ver-
mischung der Metallen / so auch des Traidgewichts / vngleichheit halben.

Thomas Hariotus ein fürtrefflicher Philosophus in Engelland / hat vor 7 Jahren [†]
mit mir Brieffe gewechßlet / vnnnd mir die gewichte nur der durchsichtigen Materien
communicirt, von einer sehr tieffen speculation wegen / sehet auch das gewicht. Wie
er aber gewogen / hat er nicht beygefügt / wie auch die folgende nicht.

Brechtler Büxenmeister / vnd Hillinger Gäesser / haben zwar die diametros der
Kugeln gleicher schwäre (auff die 3 oder 4 schießlötlige zeuge) gesetzt / sie haben aber ³⁰
auch zu den gleichen lengen der diametrorum gegen einander vber beygesetzt / wiewil
jeder zeug (einer solchen Kugel groß) wege. Vnd achte ich / des Brechtlers angab werde
auß Georgio Hartman Mathematico genommen sein / der vmb das Jar 1540 den
Maßstab auff die Büxen erslich (wie Hulsius fürgibt) erfunden. Brechtelern wigt
ein Kugel / die 138 meiner puncten am diametro hat / am Stein 14 / Eysen 50 /
Bley 75 Nürnberger pfundt / darzu mir ihrer Mst. Münzmeister Lasanz den dia-
metrum zu 4 Nürnberg. pfund Zin / meiner puncten 61 s lang / communicirt, wäge
also die vorige groß an Zin / 45 vnd ein 5thail pfunds.

Hillinger aber gibt der Kugel / so meiner puncten 84 hat (nahend das latu cubi-
cum zu einer Oesterreichischen Achteringe / das ist 85) an Stein 3 / Eisen 10 / Meß ⁴⁰
12 / Bley 16 Wiener pfund / weiß nicht was für Meß er meint.

Underst helt es sich mit Michaëlis Coigneti Erzh. Mathematici zu Brüssel Pro- [†]
portional Eirdeln (dessen Französische instruction drüber / mir nur schriftlich zu-
sehen worden) so auch mit den Paduanischen vnnnd andern: dann da sehet man nur

die diametros der Kugeln / so gleich wegen: derowegen ich sie gar genau in 2. 4. 8. 16. 32. vnd so fortan getheilt / vnd auß Clavij Tabula Cubica die Cubos auff jede zahl / so ich gefunden / außgeschrieben / auß diesen hernach das Gewicht auff jede von gleicher größ gerechnet. Doch gibt Coignetus auch den diameter einer Eisenen Kugel / so zu Brüssel 10 Pfund wigt / meiner puncten 83 s lang. Träffe nahend mit Hillin: gern zu / wann sie einerley pfund gehabt hetten. ¹

110 Weil dann ein zimlicher vnderscheid zwischen den authoribus, wie auß folgendem Tafeln zuersehen / hab auch ich mich dahinter gemacht / in sonderlichem bedenden / das ein Philosophus auß fleißiger betrachtung des Gewichts an einem jeden Zeug
10 trefflich viel / vnd offtermals mehr erlernen könde / dann ein Alchimist auß dem Feuer / vnd laß ich mich bedunden / die Tinctur auff 100 M. wie es die filij Sapientiae für: geben / könde nur durch das bloße gewicht ihres lapidis Philosophici widerlegt wer: den. Gleichwol hab ich nur angefangen / wil derhalben meine processe sampt den Materien / dem Leser zur nachfolg vnd verbesserung / beschreiben.

Das Gewicht leh: ret viel dings.

Erstlich Wasser / Wein vnd Del hab ich in meiner Dest. halbkandel gewogen. Schmalz nur nach der gemeinen schätzung geschätzt / weil vil am leutern glegen / vnd deshalben nicht alles so genau gleicher schwäre ist. Wachs schwimmt im Del / fesselt im Wasser zu Boden. Eis schwimmt im Wasser. Augstein schwimmt inn einer gar starken Laugen von Waidaschen / fesselt in einer linderen zu Boden. Diese Sorten
20 hab ich nur nach gutachten gegen einander verglichen.

Ein grosse Steinkugel von hartem Grauwgespreckelten Ob der Ensischen Werck: stain / am diametro meiner puncten 312 / hat sich nicht schicken wollen in ein Wasser zuenden / die hab ich nach dem Leib gerechnet / durch den Zusatz fol. 90. ist gewest 15902390 / vnd hat gewogen 162 pfund 12 lot Linzer gewicht: so auch zwo Marmel: steinene Kugeln / meiner puncten 55. 42. vnnnd 2. 3thail: vnnnd damit das Werck desto besser bezeuget sey / hab ich auch auß ihren gewichten 415 sc. vnd 197 sc. (oder erlengert 415000000 vnd 197000000) die Wurzeln auß Clavij tabula gesucht / vnd gefunden 746 / 582. Summa 1328 gibt summam baidere gemessner diametrorum 97 vnd 2 dritthail / folgen die diametri corrigirt 54 vnnnd 4 fünfftheil / 42 vnd 4 fünff:
30 theil / ist genau genug.

Also hab ich auch Zinn vnnnd Bley in ein gedrät messen Gewichtschüsselin gegossen / vnnnd oben abgeriben / hernach das Schüsselin mit Wasser / vnnnd wider mit Queck: silber angefüllet / vnd mit einer fläche oben drauff getruckt / damit was sich zuviel ober die Schüssel außgeschwiblet / darvon gesprungen: vnd hab jedes gewogen. Ich hab auch baide Zinn vnd Bley / wie Regelsstöcke / nach meinen puncten gerechnet / vnd mit dem Leib vnd Gewicht meiner Halbkandel verglichen / dieweil des Wassers im Schüsselin wenig gewest. Das Zinn ist von Schlackewald gewest / vorn vom Gatter / da er gezeichnet / das Bley auß Poln durch Krembs allhero gebracht / das Queck: silber auß Idria / dem Hauß Desterreich zustendig.

40 Also kan man ihme thun mit allen Regularischen Figuren nach außweisung des ersten thails.

Ich hab aber der Figur allein nicht getrawet / ob sie etwa nicht wol gemacht vnd nicht gar Regular wäre / sondern hab baide Marmel Kugeln / zwen Magnetstein /

28) 582 s. Summa 1320 ... 96 statt 97

29/30) 54 vnnnd 1 drittheil / 42 vnd 1 drittheil

ein schwachen vnnnd ein kleinen sterckern / das Zinn / das Bley (vnd dessen mehrerley stücke) einhundert zu Steir newgeschmitte eisene Nägel / des Zeugs auß dem Eisen ärzt / messene Gewichtstein von Nürnberg / Kupffer Zänd auch auß dem Eisenärzt / Vierzig alte Schlicksche Jochims Taler / fünfzehnen löttig (zuvor wol mit Laugen abgewaschen) Gold Zänd 60 Ducaten schwär / so dann auch Quecksilber etliche pfund / eins nach dem andern in ein hohes enges Glas (das doch die Taler hinein gemöcht) gestrichen voll Wassers / eingesenct / das Wasser so jedesmahl herausgelauffen / gegen seiner größe Metallen vnd Zeug / mit dem Apoteker gewicht gewogen.

Wassers weise bey
diesem abwegen.
Spil mit der gul-
denen Ketten vnd
einem Glas voll
Weins.

Das Wasser hab ich bey diser subtilitet kennen lehren / wie es sich inn seiner zä-
heit ob dem Glas geschwüblet / daher die veration erfolgt / als ob das Gold Wein 10
zu sich ziehe / also das ein guldene Ketten inn ein Glas gestrichen voll Weins ein-
gehen solle / so das doch der Wein nicht übergehe. Ja wol / wann das Glas weit /
vnd die Ketten klein ist / auch niemand das Glas rüttelt / so thut es nicht allein Gold /
sondern Stain vnd Bain / im Wasser vnd Wein: Ob ich nun wol grossen fleiß an-
gewendet / daß das Glas jedes mahls gleich ge'strichen voll seye / achte ich doch der 111
sachen besser gerathen sein / so man ein Gefesse nimmet / das oben glatt abgerichtet /
vnnnd ein gerades blat drein getruckt wirdt / also daß das oberige Wasser etwa zu einem
löchlin außspritzen möge.

Vnnnd weil das Salz / trucken gewogen / vil luffts in sich hat / hab ich ein gewisses
Gewicht von Wasser in ein Glas gegossen / widerumb ein gewisses Gewicht klein ge- 20
riben Salz gemählich drein geröhret / endlich auß einem gewegnen Wasser das Glas
vollend angefüllet / das oberige Wasser wider gewogen / das Glas außgelähret / mit
frischem Wasser voll angefüllet vnnnd auch gewogen.

Mit dem Gold aber hab ich auch diesen process gebraucht / das ich 25 stück auß-
lesner alter / thails Haidnischer 2000 Järiger Schaupfenninge / an Gewicht 29 Unzen /
in ein Glas halb voller Wasser (so auch zuvor gewogen) gesendet / das Wasser vor
vnd nach gezeichnet / wie hoch es zu beiden malen gegangen / hernach das Gold her-
auß genommen / das Glas wider bis zum obern zeichen angefüllet vnnnd gewogen.

Vnnnd hette den unterschaid des Wassers in einem Regular Gefesse nur nach den
vnderschiedlichen höhen / auch ohne Wag rechnen könden / wieviel es wegen müsse. 30

Künstliche Wasser-
wag.

Meß hab ich gegen Eisen vnd Kupffer gewogen / nach deren Kunst die Lasarus
Ercker lehret in sein probationbuch am 60. blat / nämlich hab ich die schalen weg
gethon / beide gewichte an bloße Fäden geknüpffet / vnnnd die Wag gleich instehen
machen / hernach gemählich in ein Schaff mit Wasser gesendet / da dann das Meß
für dem Eisen fürzogen: ob aber Kupffer dem Meß etwas fürziehe / hab ich nicht für
gewiß außzugeben.

Vnd hat der besagte Author nicht vergebliche hoffnung gehabt / das dise Kunst zu-
erhöhen sey / darzu soll der Leser von mir dißmahl diesen Zusatz behalten. Wann also
im Wasser dem fürziehenden Metall soviel genommen wirdt / bis es wider gleich
instehet: so schwär Gewichts man ihme abnimbt / sovil wigt der überschuß Wassers / 40
welchen das leichtere mehr aufstreibet / dann das schwärere geminderte. In gleichem
auch so man dem leichteren zulegt.

Auß diesem einigen griff kan man die Metalla auch ohne ein Glas gegen einander
vergleichen / welches aber ein ander mal von mir geschehen soll. Anjeho wil ich aller

Authorum meinung in einem Täfelin gegen einander inn einerley Zahlordnung verglichen: dabey mercke / wa ich des Authoris Namen ganz gesetzt / da hab ich des selben meinung angefangen / vnd ihme dieselbige Zahl mit fleiß geben.

99. Wasserprob auff Silber / Gold / Zin vnnnd Bley / auch Bergartz / wieviel eins jeden vnder dem andern.

Dise Kunst hat Archimedes erfunden. Dann als ein Goldschmid mit einer guldenen Cron grossen betrug begangen / vnnnd König Hiero inn Sicilia gern gewußt hette / wie groß der Abtrag wäre / darüber sich Archimedes besinnen sollen / ist er mit disen Gedanken ins Bad gangen: vnder des er nun den Leib in ein Wannen gesendet /

Täfelin von vergleichung allerhand Wasmässiger Sorten.

20	Gold	196160. C. 193875. F. 187500. V. 185308. K. 183964. K. 180000. Erder 177778. P.	Zin	75000. V. Fuxeus, Coignetus, Paduanisch Instrument. 74727. K. 72309. Br	Echarffe Laugen. K. Augstein } 10744. Ha Gummi } Linde Laugen. K.
		150000. V. 144750. F. 136114. K. 133900. K.		Marcasiten Bo 45851. K. 45714. K.	
30	Bley	128000. Hi 124750. F. 120000. Br 118272. C. 116500. V. 114598. P. 111692. K. 107431. K.	Marmelst.	29384. C. 27955. P. 26266. K. 26100. K. Erythall. 26505. Ha sal. Gemm. 26208. Ha Glaas. 25760. Ha	Brunnwasser 10000. { Villalpan. Rotwein 10000. Bo { Hariotus Regenwasf. 9997. Ha { Kepplerus Distillirter Essig 9973. Ha Essig / Bier / Purgir: trändel Heurnius Span. wein 9946. Ha Dest. wein 9946. K. 9876. K.
		116125. F. 112084. E. 105174. P. 104464. C. 104000. V. 102692. K.		26481. C. 26190. P. Stein 25168. K. 24000. Hi 22400. Br	
40	Silber	95479. C. 91125. F. 91000. V. 89213. P. 86267. K.	Salz	23453. K. 14375. Bo	Weißwein 9757. Bo Aschen 9757. Bo Eis K. War 9583. K.
		96000. Hi 85333. K.		Erden 16875. F. 12432. Bo	
40	Snupffer	80943. C. 80875. V. 80362. K. 80000. Drechtfel/Hillinger 79535. P. 79250. F.	Hönig	15000. V. Galenus Syrup Heurnius	Oliven Del 9462. Bo 9166. K. 9154. Ha 9000. V. Gal. Del / Blut Heurnius Terpentin 8704. Ha Brandts wein } 8394. Ha Aqua vitae Spiritus Vi- ni, Blut } Heur.
		96000. Hi 85333. K.		Meer / oder 12162. Bo Salzwaf. 12017. Ha	
40	Eisen	80943. C. 80875. V. 80362. K. 80000. Drechtfel/Hillinger 79535. P. 79250. F.	Eben Holz / Wurbaum Brasiliensf. / Guaiacum. Bo	Schmalz 8026. K. 8000. K. Petroleum rectificatum 7971. Ha	
		96000. Hi 85333. K.			

vnd war genommen / wie hoch das Wasser gestigen / ist ihme mit dieser gelegenheit der griff eingefallen / darüber Er nackend herauß gesprungen / vnd für freuden auffgeschrien / Gefunden.

Bodinus zwar würfft dem Archimedi recht für / das dise Kunst vnvollkommen / dieweil auch dreier vnnnd mehrerley Sorten (als Gold / Silber vnnnd Kupffer) vnder einander gemengt werden können: vnnnd diß ist war / die Kunst hat hie nicht allers dings statt / sondern thut mehrerley außsprüche / wie man in Regula Alligationis lehret: doch seind auch hie etliche nützliche Regeln zubehalten.

1. Wann das Metall durch No. 98 wirdt gefunden so schwär als Zin oder Gold / so ist es lautter Zin oder Gold. 10

2. Wann es hat Silbers oder sonst eins Metals schwäre / das da zwischen Zin vnd Gold wigt / so ist es eintweder desselben Metals gantz / oder es ist nicht allein von einem leichtern / sondern auch von einem oder mehr schwärern etwas drunter.

3. Wann es zwischen zweyen benachbarten Metallen das mittel helt / so hat es auch von baiden etwas / oder von andern / die eins theils noch schwärer / andern theils noch leichter seind.

So aber gewiß / das nur zweyerley vndereinander / so erkundige durch No. 98 / was baide / so groß als das fürhabende stück / fein wegen / vnd merck den vnderscheid zwischen allen dreyen gewichten / vnnnd handel nach detri.

Nimb ein Exempel / Es wär ein Ketten fürhanden / die so viel oder so schwär Wassers auffsteigen machete (oder so groß wäre) als 1875 Gran fein Goldes / oder als 910 Gran rein Kupffers (nach Villalpandi proportion) sie aber wäge 1500 Gran. Zueh ab 910 von 1875 / vnnnd von 1500 / bleibt 965 vnnnd 590. Wann dann 965 gibt alle 1875 Gran fein Gold / so wirdt 590 geben 1151 s Gran fein Gold / vnd also die vberige 723 s Gran Kupffer. †

Lasarus Ercker lehret diß erkundigen ohne rechnung / nur mit zulegung feinen Goldes / vnnnd mit abnemung feinen Silbers / wann es im Wasser empor stehet / oder das gegen spil / wann es im wasser für ziehet / vnd diß so lang / biß die Wag / baiden in vnnnd außerhalb des Wassers innen stehet / damit also gleich soviel gesöndertes fein Silber vnd Gold in die eine Schalen komme / als viel in der andern eines jeden vermischet lige. Es gehet aber langsam zu / sonderlich mit dem oftmahligen abtrüffnen. 117

100. Wie der Wisierstab auch auff das Geschütze vnnnd Kugeln von Bley / Eisen / Stein vnd Marmeln zugebrauchen.

Wie der Gast / also der Becher vnnnd der Trunk / ein schlechter Kellner / der sich nicht waist nach eins jeden Gasts humor zu accommodirn. Derhalben auch dem Wisierstab nicht für vbel zu haben / ob er sich schon bißweilen außserhalb des Kellers vnnnd Weinfasses auch zum ernst brauchen leset / vnd auß einem grossen Canon einen Ob der Enserischen Wärtinsberger / Spitaler / Eisenärchter zu Steir abgezogen / oder auch einen Edlen Polnischen Trunk einschenkt. 40

Weil dann die gemeine Regel ist / das so schwär ein jede Kugel ist / halb so schwär pulvers auff die Ladung gehörig / so messe mit dem Wisierstab den diameter am

Mundloch deß Geschüßes. Dann was anlangt die gemeine gleiche puncten am Staab / ist zu wissen / wann ich neme den Cubum von der obermelten Steinkugel diametro 312 / nämlich 30371328 / vnd jne thailen mit dem Gewicht der 162 pf. vnd 12 lot / so kommt 187044 / darauff die Cubische wurzel ist 57 vnd ein fünffel / das seind 3 Linger zölle / die geben den diameter zu ein Linger pfund harten Lingerstains / allerdings wie Brechteler den diameter eines Pfundstains Nürnberger Gewicht / 3 Nürnberger oder Linger Zölle lang gibt. Wirdt also sein Stein weich / vnd soviel leichter gewest sein dann der vnserige / als viel das Nürnberger Gewicht leichter ist / dann das Linger.

Stain Kugel	1.
Diameter von e.	6.
	9.
	12.
	15.
	18.
	216.
	27.
	64.
	125.
	216.

- 10 Was da anlangt die Wein Eichthailung auff dem Visierstab / findet sich ein schöne vergleichung / das die Visier auff anderthalb Achteringe nämlich 114 s oder 6 seiden / geben den diameter auff 8 pfund Stein. Also magstu sicherlich allwegen 3 seiden für 4 pfund Stein nehmen / vnd vom Marmelstein nach meinem Gewicht / das 26 pfund mehr. Vom Eisen aber nimpt man allwegen 16 pfund für 5 / vnd machen also allwegen 15 seiden 64 pfund Eisen / ein jedes seidl mehr dann 4 pfund. Entlich vom Bley nimbt man 4 vnd einhalb oder ein dritthail pfund für jedes pfund Stain / darmit gäbe die visier eins jeden seidls den diameter zu einer Kugel von 6 pfund Bley nach meinem Gewicht. Anderer Authorem droben No. 98. angegebene proportionen, weil sie doch sehr different, laß ich einen jeden / der lust hat die weils zu färhen / selber aufforschen / vnd auff das Desterreichische gewicht reducirn.

Seiden vnd gewichte der Kugeln gehen mit einander.

7) Linger

20) Desterreiche

E N D E

Erklärung der gebrauchten Geometrischen Wörter vnd Terminorum.

Saag / Crena.	Fläche / plana superficies.
Taufeln / Tafeln / Taugen. Tabulae.	Kraiß / Cirkel. Circularis linea.
Grösche / Belgen. Margines tabularum,	Umbkraiß / Circumferentia.
Apsides.	Cirkelfeld / Circuli planum.
Bauch / Venter dolij.	Cirkels durchzug / Breite / höhe. Dia-
Benhel / Spontloch. Orificium infuso-	meter circuli pro ratione situs.
rium.	Weitte / diameter circuli: etiam longi-
Emmer / Amphora.	tudo circumferentiae circuli. 10
Dreyling / Dolium magnum.	Ablenger Cirkel / Ellipsis.
Eych / Mensuratio, Capacitas mensu-	Eylini / circumferentia Elliptica, ovalis.
rata, Character capacitatis index,	Bogen / Arcus.
Locus exactae mensurae.	Senne / Bnderzug. Chorda, Subtensa.
Hemstab / Disierruthen. Virga mensoria	Halbe Senne / Sinus.
cubica, bacillus, Specillum explo-	Bolg / sinus versus, Sagitta.
ratorium.	Cirkeljaan / Sector Circuli.
Strich / Riß / zug. Linea.	Cirkelschnitt / Segmentum Circuli.
Strecke / Gerade. Recta.	Anstreicher / Tangens.
Grundstrich / Bodenlini. Basis figurae	Durchschneider / Secans. 20
planae.	Anstehen / inscriptum esse.
Schrancke / Zaun / Umbzeununge.	Rundung / Curva superficies.
Perimetros.	Geviert / quadratus.
Seite / latus plani.	Vierung / quadratum.
Langes Eck / Scherffe / Reiffen. latus	Ablenge vierung / parallelogrammum
solidi.	rectangulum longum.
Lenge / longitudo.	Fürgehend / continuatus.
Breitte / latitudo.	Gesellet / Conjugati.
Höhe / altitudo.	Gleichlauffend / lineae parallelae.
Tiefe / profunditas.	Winkel / Spiz. Angulus. 30
Lahn / acclivitas, planum acclive.	Scharff / Acutus.
Dicke / diameter solidi.	Stumpff / Obtusus.
Zwerlini / querlini / Durchzug. Diago-	Seiger / höch. perpendiculum.
nios, vel quasi. Transversalis ab ori-	Rautten / Rhombus.
ficio ad fundum dolij.	Spießedich / Trapezium.
Platz / Feld / Feldung. Superficies,	Geordnet / Regularis.
area.	Gleich / aequalis.
Wand / Solidi planum vel hedra.	Enlich / Similis.
Boden / Basis plana solidi.	Schick / Ratio, proportio.
Lisch / Planum superius parallelum	Schnitt / sectio. 40
Horizonti.	Schnitt / segmentum.

- Leib / Fülle / Griff. Corpulentia, soliditas.
 Völle / Völleibige / Leibhafte / beschlossene Figur. Corpus, Solidum.
 Raum / Spacium, capacitas.
 Gewicht / Schwäre. Pondus.
 Würffel / Cubus.
 Gewürffelt / würffelrecht / würffelt gang. Cubicus.
 10 Wurzel / Radix, quadrati per numerum expressi latus numero expressum.
 Cubic wurzel / Cubi numeralis latus numerale.
 Quaderstück / vierechte / gebierte Seulen. Parallelepipedum.
 Gerade Seulen / parallelepipedum rectangulum.
 Zwerstück / Speidel / Regel / Wecken. prisma.
 20 Zugespitzte seule / Pyramis.
 Runde Seule / Welle / Walger / Walzen. Cylinder.
 Lässer / Rad. Cylinder humilis latus.
 Kugel / Globus, Sphaera.
 Ablenge kugel / K. Sphaeroides longum.
 Gedruckte kugel / Linse. Sphaeroides latum.
 Kugeljaan / Sector globi.
 Regel / Conus.
 Kegelschnitt / Sectio Conica, Parabola vel Hyperbole.
 Schnitt / Segmentum solidum.
 Kegelschnitt / segmentum Coni interminatum deorsum.
 Stumpff / Residuum.
 Gupffel / Wupffel / Wirbel. Vertex.
 Graat / Arlini. Axis.
 Gürtel / Zona tornatae figurae.
 Hütlein / Segmentum superficiei Globi.
 Trum / Apotome.
 Stock / Truncus.
 Rinden / Limbus Cylindri, Coni.
 Noß / Tunica.
 Rücken / Margo rotundatus longus.
 Lehr / Norma in torno.
 Ring / Annulus.
 Schlossner ring / Annulus strictus.
 Apfelrund / Malum.
 Citronenrund / Citrium.
 Henschöber / Conoides Parabolicum.
 Berg / Arbischauff. Conoides Hyperbolicum.
 Regel darauß diser geschelet / Conus Asymptoton.
 Olivenrund / Oliva.
 Zwespenrund / Prunum.
 Spuelrund / Fusum.

Register aller Numerorum vnnnd fürnemister Lehren inn disem Buch begriffen.

No. 1. Von Notwendigkeit des Visierens. 2. Vnderscheid des gemeinen vnd des
 Erster Theil. Desf. Weinvisierens. 3. Inhalt des ganzen Büchlins. 4. Von eusserlicher gestalt eins
 Weinfasses. 5. Von kunstlichem Messen allerhand runder sachen. 6. Des Cirkels
 umbkrais vnd diametern, eins auß dem andern zurechnen. 7. Vom umbkrais
 der Aylini. 8. Wie das Maas zuverstehen. 9. Was Sennen / Volk / Ausreicher /
 Durchschneider haiffe / wa zu finden / Item vom Canone sinuum. 10. Zurechnen
 die Sennen / den Volk oder den diameter. 11. Erklärung der dreyerley Massforten
 oder quantitaten. 12. Wieferne die vnderschiedliche Sorten sich zusamen schiden inn 10
 die Regel detri. Item fol. 10. ein nützliches Täfle zu den Bögen / Feld / Jänen vnd
 Schnitzen im Cirkel / so auch zum Feld vnd Jänen der Kugel. 13. Das die Sorten
 vndereinander vermengeset / sich nicht allwegen zusamen in detri schiden / sondern in
 decinque vnnnd desept. Schneiderrechnung fol. 12. Geschütz Faß vnd Goldschmid-
 rechnung fol. 13. 14. Von der Feldung in einem Cirkel. 15. Feldung des Ablengen
 Cirkels / vnnnd mit dem gerechten verglichen. 16. Allerhand Felder von geraden
 strichen eingeschlossen. Feldmessen. Item geordnete Figuren im Cirkel vnd umb den
 Cirkel. 17. Vom Feld im Cirkeljaan / vnd im Cirkelschnitt / auch darzu fol. 17.
 ein nützliches Täfle. Hieher gehört auß No. 89. Gerechte vnnnd Ablenge Cirkel-
 schnitze gesellet. 18. Feldung im Kegelschnitt. Hieher gehört auß No. 89. Parabolae 20
 Gesellet. 19. Vom runden Feld oder Dach am Regel. 20. Vom ganz runden Feld
 an der Kugel. 21. 22. Vom runden Feld am Kugelschnitt. 23. Feld am Cylindro
 oder Wellen. 24. Vom raum der Seulen vnnnd Wellen. 25. Vom raum der zu-
 gespizten Seulen vnnnd Regeln. Hieher gehört auß No. 89. der Zusatz am 90. Blat /
 Zuwissen / etc. 29. Was Kegelschnitte oder Walgerschnitte seyen / vnd wievil ders 1
 selben. 30. Ordnung vnd eigenschafft deroselben. 31. Die Aylini vnnnd andere Kegels-
 schnitte behend auffzureissen. 32. Was für volleibige Figuren auß den Kegelschnitten
 kommen / biß auff die Figur eines Fasses. Item fol. 29. wie die vngestalte stude
 nach irem raum zumessen. 33. Vom Ayl oder Ablengen Kugel. 34. Vom Henschober.
 Hieher gehört ein Zusatz auß No. 89. Parabolica Conoidea. 35. Vom Berg oder 30
 Arbischauffen. 36. Vom Kugeljaan. 37. Vom Kugelschnitt. 38. Mehr hiervon vnd
 fol. 34. ein nützliches Täfelin zu den Kugelschnitzen. Das exempel verstehe auß der
 Bruchrechnung fol. 48. 39. Was die gerechte vnd ablenge Kugeln für schnitte ge-
 winnen. 40. Von Ablengen Kugelschnitzen / darzu gehört auß No. 89. ein Zusatz /
 Gerechte vnd Ablenge Kugelschnitze gesellet. 41. Von Schnitzen des Conoidis Para-
 bolici. 42. Von Spältlen. 43. Der Kugel Gürtel oder Riemen. 44. Von Spälten
 oder Scheittern auß der Wellen / Item von Röhren: Wasserrechnung fol. 36. 45. Von
 Trümmern der Seulen vnd Wellen. 46. Von Zwersfuden oder halben Seulen /
 vnd Wasserabgraben: Schütt / Schantz vnd Maurrechnung. 47. Von kleinern

- Walgerspältlin. 48. Vom Kegelspalt. 49. 50. 51. 52. Vom Regeltrumm vnd Stock. 53. 54. Walgers vnd Kegels Rinden vnd Rock. 55. Kegelschnitte / davon besitze auch fol. 55. etwas. 56. Von Ringen. 57. Vom beschloßnen Ring vnd Kugel drinnen. 58. Von Apffel: Quitten: vnd Kürbisrunden. 59. Von der Citronenrundung vnd rechten eigentlichen fundament der Faßrechnung. 60. Dife abgestuft wie ein Faß / fol. 46. Eine behende* Bruchrechnung vnd völliges Exempel zur Faßrechnung. 61. Regel gesellet. 62. Ablänge / gedruckte vnd gerechte Kugeln gesellet. 63. Kugelschnitte mit Citronenrundungen gesellet / vnd darbey ein kürzere rechnung der Faßform. 64. Von Oliven: Zwespen: Kriechen: vnd Spulrundungen / auch zun Fässern
 10 gehörig. 65. Weß geschlechts ein jede rundung oder Faßform sey. 66. Welche größer vnd fähiger dann die andere. 67. Einen Schnitt von disen Rundungen zurechnen.
68. Inhalt vnd weß geschlechts ein jedes Faß sey nach dem Bauch. 69. Wann die Zäune gleiche weite haben / welches Feld alsdann am größssten. 70. Wann des Feldes an den eussern Wänden gleichviel ist / welche Figur alsdann am maisten raum beschliesse. 71. Welche vnder allen Figuren vnderchiedlicher arten / so in einer hohlen Kugel anstehen / am fähigsten. 72. Welche auß allen viereckten Seulen vnd Platten so in einer Kugel / am fähigsten: sammt einem Täfelin auff den halt einer jeden. 73. Welche Wellen / so miteinander ein zwerlini von einem Boden zum andern haben / am fähigsten sey. 74. Zurechnen wie lang ein jedes Faß zwischen
 20 beiden Böden innerlich / oder vom Beyhel / biß oben oder vnden an Boden / nach der geräde. 75. Was ein Dest. Faß haiffe / wie es zugerichtet werde / vnd wie es nach dem Boden / Tauseln oder Zwerlini zurechnen. 76. Erste wunderbarliche eigenschafft eines Dest. Wein Fasses / nach der lenge: vnd warumb dise weise zu visieren nur allein in Dest. so gemein sey / vnd sonst in keinem andern Land. 77. Die andere noch mehr wunderbarliche eigenschafft eines Dest: Weinfasses vor andern außländischen / nach dem Bauch. 78. Wieviel die Dest. Visierruthen an einem jeden vngewöhnlichen Faß / das doch sonst mit dem Dest: nach dem Bauch einerley geschlecht ist / zuviel oder zuwenig sage / sampt einem Täfelin. 79. Vergleichung allerhand Fässer / die auch an den Bäuchen vngleich geartete rundungen haben /
 30 welches vnder ihnen die Dest. Visierruthen am besten halte / sampt eim Täfelse.
80. Von zubereitung vnnnd probirung einer gerechten Dest. Visierruthen auff Emmer vnd Achteringe / sampt einem Täfelin hierzu. 81. Was für einen Bauch das erste Faß gehabt haben müsse / auß welchem die Dest. Visierruthen caementirt worden. 82. Wie das Faß gestaltet sein müsse / damit die Visierruthen dich nicht verführe. 83. Gebrauch der Visierruthen an Fässern vnnnd Böttungen. 84. Wann kein zugerichte Visierruthen zur hand / wie die Dest. Fässer nichts minder behend zu messen / Item das grosse Faß zu Heydelberg. 85. Wann das Faß nicht müste aufgebeihelt werden / wie ihme alsdann mit der Dest. Visierruthen vnd Täfelin bey zukommen. Item Visier auff Pergamen. Item grosse stücke Geschüßes nach der
 40 schwäre zu visieren. 86. General instruction vnd Wiederholung / ein jedes Faß auß seinem rechten grund zurechnen. Item ein notwendig Instrument zu des Bauchs krümme. 87. Wie durch die Dest. Visierruthen auch andere außländische Fässer / Item Lägeln vnnnd Stäntner zu visieren / vnd hiermit der größste thail der verdrieß:
- 42) 85. statt 87.

* Besitze auch fol. 51. ein Notam.

Ander thail.

Eigenschafft eines Dest. Fasses.

Dritter Thail.

lichen raittungen vbertragen werden möge. 88. Rechnung wieviel Weins auß einem Faß kommen / oder noch drinnen sey / wann es nicht gehebt ist / sondern gerad auffligt / sampt verkürzung des proceß vnd einem Täfelin / wievil Weins oberhalb der Böden stehe. 89. Etliche Zusätze zum ersten thail / seind droben im Register eingetragen. Vnd darauß der grund der vorgehenden rechnung. 90. Durch die Visier-
ruthen vnd Reiß Cirkel sampt einem Täfelin zuerfahren / wieviel Achteringe abgehen von jedem Emmer der ins Faß gehet / sampt einem Täfelin.

Anhang. 91. Ursprung aller Mæßsorten / des Apotecergewichts vnnnd Pfunds auß der Münz: was ein drachma vnd denarius. 92. Alt Römische Gewicht vnnnd Eich. Wie Gewicht / Eich vnd Schuch aneinander gehengt. Gewicht der Guldenen Münz alt 10
vnd new / auch nach der Medicorum schätzung. Vnd warumb die fein an Gold zu 24. Karath gezehlet werde. Daß das alte Röm. Gewicht bey den Apotecern gebliben / beweiß durch Brunnwasser. Was ein Mark / was löttig Silber vnd Gold. 93. Finger Schuch vnnnd Eich miteinander / vnnnd baide mit dem Alt Römischen Hebräischen vnnnd etlichen außländischen verglichen. 94. Andere lange massen mit dem Finger schuch verglichen. Item alt Röm: vnnnd anderer orten gebrauchiges Feldmessen. 95. Dess. gewicht mit dem Apotecer gewicht verglichen / warumb das pfund 32 lot habe. Eölnisches Niderländisches / vnd hochteutsches münkgewicht / Ducaten zu 17 Carat am gewicht / zu 24 Carat am gehalt. Gewichttäfelin durch ganz Europa. Dess. gewicht mit der Eyck verknüpfft. 96. Ein behendes Wegen viler gewichte mit 20
wenig Steinen / vnnnd Täfelin darzu. 97. Dess. Traidmaaß mit der Wein Eich verknüpfft: sambt der Traid visierung: mit alt Römischer Vngarischer / vnnnd außländischer Traidmaaß verglichen durch ein Täfelin / Schiff fuhr zu Traid vnd Wein / durch ein Täfelin. 98. Gewicht vnd bewährung der Metallen vnd andrer wazmäßiger sorten / Täfelin darzu / nach vnderchiedlicher Authorum meinung. 99. Wasserprob auff Silber / Gold / Zin vnd Bley auch Bergerß wievil eines jeden vnder dem andern. 100. Visierung der Steinernen / Eysenen vnd Bleyenen Schießkugeln.

CHILIAS LOGARITHMORVM

Joannis Kepleri
IMP. CÆS. FERDINANDI II.
MATHEMATICI
C H I L I A S
LOGARITHMORUM
AD TOTIDEM NUMEROS
ROTUNDOS,
Premiſſa

DEMONSTRATIONE LEGITIMA

Ortus Logarithmorum eorumq; usus

QUIBUS

NOVA TRADITUR ARITHMETICA, SEU
COMPENDIUM, QUO POST NUMERORUM NOTITIAM
nullum nec admirabilius, nec utilius solvendi pleraq; Problemata
Calculatoria, præfertim in Doctrina Triangulorum, citra
Multiplicationis, Divisionis, Radicumq; extractio-
nis, in Numeris prolixis, labores mole-
stiffimos,

AD

Illuſtriſſ. Principem & Dominum,
Dn. PHILIPPUM
Landgravium Haſſiæ, &c.
Cum Privilegio Authoris Cæſareo.

✠(*)✠

MARPURGI,
Excusa Typis CASPARIS CHEMLINI.
c1o 10c xxiv.

Ad

Illustrissimum Principem et Dominum,

DN. PHILIPPVM

Landgravium Hassiae, Comitem Chattimelibocci, Sigenae, Diti,
et Niddae,

DOMINVM MEVM CLEMENTISSIMVM.

De Munere ejus Celsit. amplissimo, deque usitata Cels. suae allusione
et alliteratione ad Nomen

Philips / Willibß.

Triginta expensis vendit φίλα πολλά Philippis
Princeps PHILIPPUS Hassiae.Sed facies rerum versa est; pauperculus emptor
Mercemque pretium retulit.Triginta acceptis sed vendidit ille Magistrum
Mortalium immanissimus.I nunc et dubita, Tharsensi interprete, num sit
Dare quàm accipere beatius.Triginta tamen en penso totidem ἄργυρα *verbis
φίλα πολλά penso Chiliade.

Propositionibus.

Corde, manu promissis redolentia munera fontes:
Mentemque redolent quae accipis.Corde φίλεῖς, manibus πλουτεῖς, sed Mente θεωρεῖς;
Tibi cor, manus, mentem dico.

Illustr. Cels. T.

Subjectissimus Cultor Gratusque Hospes

JOHAN. KEPLERVS.

DEMONSTRATIO STRUCTURAE LOGARITHMORVM

4

Postulatum I

Omnēs proportionēs inter se aequales, quacūque varietate binorū unius, et binorū alterius terminorū, eadem quantitate metiri seu exprimere.

Axioma I

Si fuerint quantitates quotcūque ejusdem generis, quocūque ordine sibi invicem succedentes, ut si ordine magnitudinis sibi invicem succedant: proportio extremarū composita esse intelligitur ex omnibus proportionibus intermediis binarū, et binarū inter se vicinarū.

Seu, quod eodem redit, proportio minuitur aucto minori termino, vel dimi- 10
nuto majori; augetur rationibus contrariis.

I. Propositio

Medium proportionale inter duos terminos dividit proportionem terminorum in duas proportionēs inter se aequales.

Nam si sunt duo termini, eorumque medium proportionale: est ergo inter tres quantitates Analogia seu Proportionalitas.

At Analogia definitur aequalitate τῶν λόγων proportio¹num: quare 1
proportionēs sectione constitutae, utpote partes proportionis totius, propositae sunt inter se aequales.

Axioma seu Notitia communis II

20

Si fuerint Quantitates quotcūque crescentes ordine: proportio extremarū divisa est per intermedias in partes unā plures quā sunt intermediae, divisionem facientes.

Sic quatuor interstitia digitorū arguunt quinque digitos. Sic quinque corpora regularia sibi invicem inserta ordine interpositis orbibus inscriptis et circumscriptis arguunt orbium talium sex esse.

Postulatum II

Proportionem inter datos duos terminos quoscūque dividere in partes quotcūque (ut in partes numero continuè multiplici progressionis binariae) et eonsque, donec partes oriantur minores quantitate proposita.

30

Proportio enim est etiam una ex quantitatibus continuis in infinitum dividuis.

Vide hic typum divisae proportionis inter 10. 7. per triginta proportionales medias.

EXEMPLUM SECTIONIS

in quâ proportio, quae est inter 10. et 7. tricesimo actu in partes aequales 10737 41824. secatur, per totidem (unâ minus) medias proportionales classis tricesimae, ubi ex unaqualibet classe sola maxima, et termino proportionis majori vicinissima, hic exprimitur.

Denominatio per Numeros sectionum mediae proportionalis, quae est omnium in qualibet sectione maxima.

Numeri partium proportionis aequalium, quas unius cujuslibet classis mediae proportionales constituent.

Hic Typus sic intelligatur:

	100000	00000	00000	00000	
10	30 ae.	99999	99996	67820	56900
	29 ae.	99999	99993	35641	13801
	28 ae.	99999	99986	71282	27702
	27 ae.	99999	99973	42564	55589
	26 ae.	99999	99946	85129	12883
	25 ae.	99999	99893	70258	38590
	24 ae.	99999	99787	40516	88629
	23 ae.	99999	99574	81034	22452
20	22 ae.	99999	99149	62070	25698
	21 ae.	99999	98299	24147	74542
	20 ae.	99999	96598	48324	51665
	19 ae.	99999	93196	96764	73647
	18 ae.	99999	86393	93992	28474
	17 ae.	99999	72787	89835	81819
	16 ae.	99999	45575	87076	62114
	15 ae.	99998	91152	03773	10068
	14 ae.	99997	82305	26024	99026
	13 ae.	99995	64615	25959	97766
30	12 ae.	99991	29249	47518	67706
	11 ae.	99982	58574	77102	11873
	10 ae.	99965	17452	79822	51100
	9 ae.	99930	36118	40985	14780
	8 ae.	99860	77086	38438	31172
	7 ae.	99721	73557	52112	10274
	6 ae.	99444	24546	13234	50059
	5 ae.	98891	57955	37194	96652
	4 ae.	97795	44506	62963	20009
	3 ae.	95639	49075	71498	12386
40	2 ae.	91469	12192	28694	43920
	1 a.*	83666	00265	34075	54820
		70000	00000	00000	00000

Inter Terminos, majorem 100 etc. et minorem 70 etc. quaeratur media proportionalis, haec erit $83\frac{1}{3}$ etc. Sunt ergo proportionis inter dictos terminos constitutae partes duae, una inter 100. et $83\frac{1}{3}$, altera inter $83\frac{1}{3}$ et 70. Hae per 1. prop. sunt inter se aequales. Quaeratur secundò, media proportionalis inter 100. et $83\frac{1}{3}$ etc. haec erit $91\frac{1}{2}$ etc. rursumque erunt partes inter se aequales, una inter 100 etc. et $91\frac{1}{2}$ etc. altera inter $91\frac{1}{2}$ etc. et $83\frac{1}{3}$ etc. Ita prior semissis proportionis totius hic est divisus in duas quartas partes ejusdem totius. Et intelligitur semissis alter, qui erat inter $83\frac{1}{3}$ et 70, per sociam ipsius $91\frac{1}{2}$, seu secundarum trium minimam (quae in hoc typo non exprimitur) similiter divisus esse in alias duas quartas totius. Quaeratur tertio media proportionalis inter 100 etc. et $91\frac{1}{2}$ etc. haec erit $95\frac{1}{3}$ etc. etc. determinans cum 100. partem totius octavam, quod indicat numerus illi ad dextram exterius respondens. Et sic deinceps.

etc.
Quindec. Quartae
Septem Tertiae
Tres Secundae
* Unica Prima

* Haec unica prima in sua seu prima classe fit etiam una eaque media trium secundarum; et tres secundae istae sunt etiam inter septem tertias, mediae scilicet inter alias quatuor accedentes: et hae septem tertiae, insertis aliis octo, fiunt quindecim quartae, et sic consequenter.

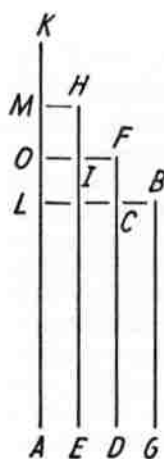
Hic numerus unitate superat numerum mediarum proportionalium cujusque classis.

Hic differentia maxima ex tricesimis mediis proportionalibus à termino sectae proportionis majori, est ista 00000.00003.32179.43100. Haec igitur differentia constituitur ex arbitrio pro mensurâ hujus minimi elementi sectae proportionis, seu pro Logarithmo dictae Tricesimarum maximae. Hic igitur Logarithmus multiplicatus in numerum partium, quas constituunt illae tricesimae, producit sequentem Logarithmum 35667.49481.37222.14400. Hic est Logarithmus termini minoris, scilicet 70000.00000.00000.00000.

Postulatum III

Minimum proportionis elementum quantum pro minimo placuerit, metiri seu signare per quantitatem quamcunque; ut per excessum terminorum hujus Elementi.

II. Propositio



Cum fuerint tres continuè proportionales, quae est¹ proportio 6
primae ad secundam, vel secundae ad tertiam, eadem est proportio
differentiae priorum, ad differentiam posteriorum.

Sint continuè proportionales AK, EH, DF, differentia priorum KM, posteriorum HI: Dico, ut est AK ad EH, 10
 sic esse KM ad HI. Est enim HE ad FD, ut KA ad HE ex hypothesi. Sed HE est aequalis ipsi MA, et FD aequalis ipsi IE, rursum ex hypothesi. Quare etiam MA erit ad IE, ut KA ad HE; quare per 17. quinti EVCL. etiam residua KM, ad residuam HI, erit ut tota KA, ad totam HE.

III. Propositio

Cum fuerint aliquot quantitates in proportionem continua, minimarum minima erit differentia, maximarum maxima.

Nam per 2. Prop. sicut est maxima ad vicinam minorem, sic est differentia inter maximas ad differentiam succedentium. Minor igitur est 20
 quaelibet differentiarum succedentium, quàm antecedens. Minima igitur est ultima differentia, quae scilicet est inter minimas.

IV. Propositio

Cum fuerint aliquot quantitates in proportionem continuâ: si differentia maximarum statuitur mensura proportionis illarum: differentiae quarumcunque duarum deinceps erunt minores mensurâ proportionis illarum justâ.

Nam quia ponuntur continuè proportionales, igitur aequalis est proportio inter duas maximas, et proportio inter quascunque duas minores deinceps sitas per 1. Prop. Major verò est differentia inter maximas differentias inter quascunque alias deinceps sitas per 3. Si ergò major differentia statuitur mensura proportionis inter duas maximas per 3. Postu- 7
 latum: tunc eadem duarum maximarum differentia statuitur etiam mensura proportionis inter duas minores deinceps sequentes. At differentia inter duas minores minor etiam est differentiâ inter maximas per 3. Prop. quare etiam minor est, quàm ut suorum terminorum proportionem metiatur.

V. Propositio

In continuè proportionalibus si differentia maximarum statuitur mensura proportionis illarum: omnes reliquae proportiones, quae sunt inter maximam et unamquamlibet reliquarum minorum, sortientur mensuras, majores differentiis suorum terminorum.

Nam proportio maximae AK ad minimam GB componitur ex proportionibus binarum et binarum deinceps usque ad minimam, per Axioma 1. At omnes binarum deinceps sitarum proportiones inter se sunt aequales per 1. Prop. Mensuras igitur etiam aequales habent per
 10 Postulat. 1. Quare quot sunt Elementa proportionis inter maximam AK et minimam GB, toties differentia KM maximarum KA, HE, vel MA, continetur in mensurâ proportionis maximae KA, ad minimam BG.

Jam verò maximae KA, et minimae BG differentia KL componitur ex differentiis KM, MO, OL binarum et binarum deinceps sitarum omnibus.

Sed quaelibet differentia MO, OL, binarum deinceps seorsim minor est differentia KM maximarum per 3. Prop. quare etiam totidem junctae differentiae binarum deinceps, id est, differentia KL maximae KA, et minimae BG erit minor quàm multiplex ipsius KM differentiae maxi-
 20 marum, secundum numerum elementorum proportionis sectae. Sed multiplex ista est mensura proportionis inter maximam KA, et minimam
 8 BG, ut jam ostensum. Ergò differentia KL maximae et minimae non aequat mensuram proportionis earum, positis quae sunt posita.

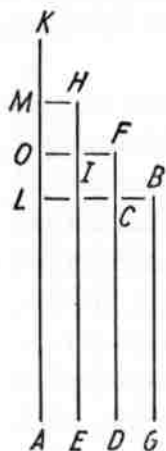
In numeris sic. Sint numeri 1000. 900. 810. 729. continuè proportionales. Maximi sunt 1000. 900. Eorum differentia est 100. Sit haec mensura arbitraria proportionis 1000. 900. Erit igitur etiam mensura haec proportionis 900. 810. et proportionis 810. 729. Composita igitur proportionis inter 1000. et 729. mensura erit 300. quia elementa aequalia proportionis tria sunt, per duas medias proportionales per Axioma 2.
 30 Atqui terminorum hujus proportionis, scilicet 1000. et 729. differentia est 271 multò minor quàm 300, triplum ipsius 100.

VI. Propositio

*In continuè proportionalibus, si differentia maximae et unius minorum non deinceps sequentis statuitur mensura proportionis illarum: reliquae proportion-
 nes, quae quidem sunt inter maximam et unam prius ascitâ majorem, sortien-
 tur mensuram minorem differentiâ suorum terminorum: quae verò proportion-
 es sunt inter quantitatem maximam et unamquamlibet, prius ascitâ minorem, nan-
 ciscentur mensuram majorem, quàm est differentia suorum terminorum.*

29) duos medios

Sint proportionales AK, EH, DF, GB, et assumantur maxima quidem AK, et una minorum non deinceps DF, sitque illarum differentia KO, et KO mensuret quantitatem proportionis inter AK et DF. Et sint aliae quantitates, EH quidem major prius ascitâ DF; GB verò illâ minor: et sit MK differentia ipsarum AK, EH; sic HI, vel MO sit differentia ipsarum EH, DF; denique FC sit differentia ipsarum DF, GB. Dico primò mensuram proportionis AK, EH fore minorem differentiâ terminorum MK.



Nam quia proportio AK, DF mensuram accipit KO, eadem¹ verò proportio habet partes aequales constitutas per mediam proportionalem EH, per 1. Prop. Proportionis igitur AK, EH mensura erit dimidia ipsius KO per 1. Postul. (vel pars alia aliquota, secundum numerum interjectarum EH). At differentia MK major est quàm MO residua de KO per 3. Prop. major igitur quàm dimidium ipsius KO. Ergò et major, quàm ut possit esse mensura proportionis inter KA et HE majorem prius ascitâ FD.

Dico secundò Mensuram proportionis AK, GB fore majorem differentiâ LK. Rursum enim proportionis EH, DF, quae semissis est ipsius AK, DF, mensura erit semissis ipsius KO per 1. Postul. vel pars alia aliquota, etc. At differentia HI, vel MO minor est quàm MK residua de KO per 3. Prop. Minor igitur HI, quàm dimidium ipsius KO. Ergò minor quàm mensura proportionis EH, DF. Sed differentia FC vel OL rursum minor est, quàm differentia MO per 3. Prop. Plus igitur deficit OL mensura proportionis DF, GB quàm MO, à mensura proportionis EH, DF. Est verò proportio DF, GB, aequalis proportioni EH, DF, quia hac quidem vice ipsi DF aequè propinqua est GB versus minora, atque EH versus majora, et si haec non esset, alia sumi posset, quippe inter continuè proportionales. Deficit igitur OL à mensurâ proportionis DF, GB, sed KO statuitur esse ipsa mensura proportionis AK, DF.

Cùm ergò proportio AK, GB composita sit ex proportione AK, DF, et proportionem DF, GB, per Ax. 1. Mensura etiam illius composita erit ex mensuris harum; ut si proportio DF, GB semissis est ipsius proportionis AK, DF, et proportio AK, GB sesquialtera ipsius AK, DF; erit etiam ipsius KO, susceptae mensurae, sesquialtera pro ipsius AK, GB proportionis mensura habenda.

Similiter verò et KL componitur ex KO, OL; OL verò demonstrata est esse minor dimidiâ ipsius KO: Tota igitur KL¹ minor est quàm sesquialtera ipsius KO, minor igitur quàm mensura proportionis suae inter AK, GB.

29) possit

Proportio- tionales	Diffe- rentiae
100000.	- 10000
90000.	- 9000
81000.	- 8100
72900.	- 7290
65610.	- 6561
59049.	

Per numeros sic: Sint continuè proportionales 100000. 90000. 81000. 72900. 65610. 59049. Eligantur 100000. 72900, earumque differentia 27100 statuatur mensura proportionis terminorum. Cùm igitur haec proportio habeat partes tres aequales, quarum una 100000. 90000, cum differentiâ 10000: altera 90000. 81000, cum differentia 9000: tertia 81000. 72900, cum differentia 8100. Quaelibet vero proportionum harum sit pars tertia suae totius, valebit etiam tertiam partem mensurae illius, scilicet $9033\frac{1}{3}$, haec vero mensura Elementorum proportionis minor quidem est, quàm primorum terminorum differentia 10000, major vero
 10 quam secunda differentia 9000, major etiam multo quam tertia 8100. Consequenter etiam major quam differentia 7290 numerorum 72900, 65610: quam et differentia 6561 numerorum 65610. 59049. Ac proinde proportionis 100000. 90000 terminorum differentia 10000, excedit mensuram susceptam $9033\frac{1}{3}$. Nec minus etiam proportionis 100000. 81000 differentia 19000 excedit mensuram suam, scilicet duplum ipsius $9033\frac{1}{3}$, scilicet $18066\frac{2}{3}$, quia termini minores 90000, et 81000 adhuc stant ante primò adjunctum 72900. E contrario proportionis 100000, 65610 differentia 34390 minor est, quam illius mensura $36133\frac{1}{3}$ quadruplum scilicet ipsius $9033\frac{1}{3}$. Sic etiam proportionis 100000. 59049 differentia 40951
 20 minor est quintuplo ipsius $9033\frac{1}{3}$, scilicet $45166\frac{2}{3}$, quia termini minores 65610 et 59049 stant post primo adjunctum 72900 utpote minores illo.¹

11

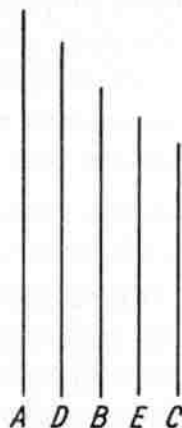
VII. Propositio

Si quantitates aliquot ordine magnitudinis deinceps collocentur, binae deinceps proportionales aequales facientes, ipsae quantitates continuè proportionales erunt.

Collocentur deinceps A, D, B, E, C, hoc ordine minores à primâ, sintque A B, et B C proportionales aequales, dico B esse mediam proportionalem inter A, C. Si enim non: erit vel major, vel minor mediâ proportionali; sit major illâ, et sit verbi causa E
 30 ipsa media proportionalis. Erit igitur A E proportio major quam A B, per 1. Ax. quare E C minor quam A E. At si E media proportionalis, tunc A E et E C proportionales sunt aequales per 1. Prop. Non igitur minor erit media proportionalis quam B.

Sit major, et sit D, rursum idem absurdum sequetur.

Si ergo A B, B C aequales proportionales, ipsa B est media proportionalis, etc.



38) media proportionis,

VIII. Propositio

Si quantitates quaecumque deinceps collocentur ordine magnitudinis, quarum, quae intermediae, non sint inter proportionales medias proportionis cujuscunque, sive actu continuatae, sive potestate continuandae interpositione omissarum: intermediae tales proportionem extremarum non dividunt in commensurabilia.

Definitiones. 1. Commensurabilia enim ex eo dicuntur, quod habeant unam communem mensuram, quam quodlibet contineat secundum certum numerum aliquoties exactè, sic ut nihil, quod eâ mensurâ minus sit, restet residuum. 2. Jam vero mensura proportionum communis est et ipsa 10 aliqua proportio, minor utrâque mensurandâ. 3. Omnis vero proportio est inter duos terminos. 4. Et Proportio repetitione sui mensurans aliam proportionem, ¹ incipit ab uno mensurandae termino, eique 12 sociat alium, pro ratione quantitatis suae minoris: tum illo jam pro antecedenti sumpto, statuit alium consequentem, hoc identidem, quoadusque permeatur proportionis mensurandae quantitas: non aliter, quam cum intervallo pedum Circini metimur lineam, fixo pede Circini in unâ lineae extremitate, pede altero punctum signamus, deinde pede priore in hoc punctum translato, punctum aliud altero pede metamur, versus ulteriora, donec emensi fuerimus totam lineam. 5. Et 20 Proportio proportionem exactè mensurare dicitur, quando in hâc continuâ terminorum interpositione et coaptatione tandem ultimus terminus proportionis mensurantis, cum secundo termino mensuratae coincidit in quantitate. Igitur identitas illa proportionis mensurantis continuè repetitae efficit, terminos continuè proportionales per 7. Prop. Ergo si proportio aliqua duas proportiones exactè metitur, necesse est, ut termini, quos ipsa mensurans interponit, sint cum ipsius mensurandae terminis continuè proportionales. Si ergò nulla unquam, quantumvis parva proportio potest inveniri, quae repetitione sui terminos ultimos assequatur proportionum mensurandarum, sic ut tam major communis 30 terminus, quàm duo minores proportionum mensurandarum sint cum mensurantis terminis interpositis continuè proportionales: proportionibus illae sunt inter se incommensurabiles.

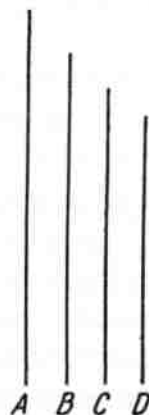
IX. Propositio

Cum duae longitudines effabiles non fuerint ad invicem, ut duo Numeri ejusdem speciei figurativae, verbi causa, duo quadrati, aut duo Cubi: non cadent inter illas longitudines aliae effabiles mediae proportionales, numero tot, quot ipsa species postulat, verbi causa, Quadrati unam, Cubi duas, Biquadrati tres, etc.

24) mensurandis

¹³ Sint enim duae longitudines A, D habentes se quidem ad invicem, ut numerus ad numerum, at non ut numerus Cubicus ad Cubicum: et quia de Cubo agimus, de duabus igitur mediis proportionalibus erit dicendum, sint eae B et C. Dico B et C non esse longitudine effabiles.

Si enim quis contendat esse effabiles, esto hoc positum. Sunt igitur ut Numeri. Sunt autem simul mediae proportionales inter A, D, ex hypothesi. Et quia etiam A, D sunt ut numeri, quippe effabiles et ipsae supponuntur, ¹⁰ habent verò duas medias B, et C, ut numeros, quare per 21. octavi EVCL. A et D similes erunt solidi: quare per 27. ejusdem erunt ad invicem, ut numerus Cubicus ad numerum Cubicum. Hoc verò est contra primam propositionis hypothesin. Falsum igitur positum fuit, B et C esse longitudine effabiles. Vera igitur est negatio in propositione comprehensa.



Eodem modo etiam de quadratis, et de unâ mediâ proportionali ratiocinari possumus, deductione ad impossibile: nec minus et de caeteris speciebus, post quadratum et cubum sequentibus.

X. Propositio

²⁰ Si ex aliquot quantitibus effabilibus ordine magnitudinis invicem sequentibus duae extremae non fuerint ad invicem, ut duo numeri quadrati, aut duo cubi, aut duo alii ejusdem speciei: intermediarum nulla dividet proportionem in commensurabilia.

Nam nisi duae quantitates effabiles recipiant media proportionalia effabilia, earum proportio non dividetur per effabilem intermediam in commensurabilia per 8. Prop. At si duae quantitates non fuerint inter se, ut duo numeri ejusdem speciei figurativae, non recipiunt media proportionalia effabilia, per 9. Prop. Quare illae intermediae quas propositio admittit, cum sint effabiles, non erunt ex proportionalibus mediis. ³⁰ Non igitur dividunt proportionem extremarum in commensurabilia. ¹

XI. Propositio

¹⁴ Omnes proportionales deinceps ordinatae, quae sunt inter terminos effabiles aequalitate Arithmetica se invicem excedentes, inter se sunt incommensurabiles

Nam termini extremi effabiles, vel recipiunt effabilem mediam proportionalem quantitatem unam pluresve, vel non recipiunt. Si non recipiunt, nulla igitur effabili, et sic neque medio Arithmetico dividitur eorum proportio in commensurabilia per. 8. Prop. Recipiunt verò

4) longitudines 12) Cubicus fehlt

effabile medium proportionale, ut termini 8 et 18, recipiunt enim 12 effabilem, cum sint ut 4 ad 9, quadratus ad quadratum. Est verò inter 8. 18 medium Arithmeticum 13, ideo proportio 8. 13 major est quàm 8. 12, et 13. 18 minor quàm 12. 18, quantitate utrinque parvae proportionis inter terminos 12. 13. sed proportio 12. 13 nulli reliquarum est commensurabilis. Nam termini 8. 13, quia non sunt ad invicem, ut numerus figuratus ad alium ejusdem figurationis per 10. Prop. non capiunt mediam vel medias proportionales effabiles, quare numerus 12 non est unus ex iis numeris, qui inter 8 et 13 intercidunt in continua proportionione: non est igitur commensurabilis proportio 8. 13 proportioni 12. 13 vel 8. 12. Sic ex iisdem fundamentis, quia termini 12. 18 non capiunt effabilem mediam proportionalem: ergo 12. 13 et 13. 18 sunt incommensurabiles, ad commensurabilem igitur 8. 12 ipsi 8. 18, est apposita incommensurabilis 12. 13. Tota ergo 8. 13 est ipsi 8. 18 incommensurabilis. Sic in 13. 18 de commensurabili 12. 18 dempta est pars incommensurabilis 12. 13. residua ergo 13. 18 est incommensurabilis ipsi 12. 18. At neque proportio inter 8. 13 est commensurabilis ipsi proportioni inter 13. 18, quia tota inter 8. 18 alterutri parti inter 8. 13 est incommensurabilis, ergo et partes invicem per 16. decimi EVCL. Item si essent partes commensurabiles, mensuram utraque communem haberet, ¹ atque illa etiam compositam inter 8. 18 emetiretur, et sic partes cum tota commensurabiles essent. Atqui jam demonstratum est, neutram partem toti esse commensurabilem. Non sunt igitur partes, quas hîc facit medium Arithmeticum, inter se commensurabiles.

XII. Propositio

Si quantitates quaecunque deinceps collocentur ordine magnitudinis, proportionis verò inter maximas mensura statuatur differentia inter eas, differentia inter quascunque alias, ex positis, minor erit mensurâ suae proportionis; et si proportionis inter minimas mensura statuatur differentia minimarum: differentiae reliquae erunt majores mensurâ proportionis suorum terminorum.

Aut enim continuè proportionales sunt quantitates collocatae actu, vel potestate supplendi omissas, et tunc patet propositum per VI. et per III. Aut non sunt in proportionione continua, sic ut partes constituent incommensurabiles: et tum conceptione mentis in infinitas particulas aequales secari intelligerentur per interpositas infinitas medias proportionales: ita redigentur cum iis, quae actu sunt continuè proportionales ad eandem vim demonstrationis.

35) intelligeretur

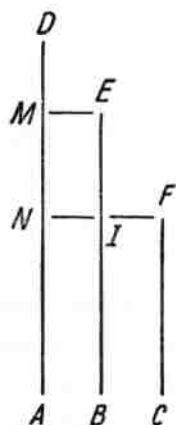
Corollarium

Quod si superet mensura proportionis inter maximas differentiam earum: hujus mensurae ad hanc differentiam proportio minor erit, quàm sequentis mensurae ad differentiam suam: cum proportionalium eadem sit ratio.

XIII. Propositio

Si quantitates tres ordine magnitudinis se insequantur, proportio minimarum duarum in proportionem extremarum continebitur rarius, quàm differentia minimarum in differentiâ extremarum: et vicissim proportio maximarum in proportionem extremarum continebitur saepius, quàm differentia illarum in differentiâ harum.

Contineatur enim in adjecto diagrammate differentia minimarum EI, vel MN, in differentia DN extremarum aliquoties, licet non exactè: et capiat proportio minimarum BE, CF mensuram differentiam MN, erit igitur proportionis AD, CF mensura minor quàm differentia DN per 12. rarius igitur continebitur MN in mensura ipsius AD, CF proportionis, quàm in ND longiore; rarius igitur et ipsa proportio in proportionem. Vicissim contineatur DM differentia in DN aliquoties: et sit DM mensura proportionis AD, BE. Erit proportionis AD, CF mensura major quàm DN, saepius igitur erit DM in mensura ipsius AD, CF, quàm in DN. Ergo, etc.



Corollarium

Differentiâ eâdem inter terminos binos hinc majores, inde minores existente: proportio inter majores minor erit, inter minores major.

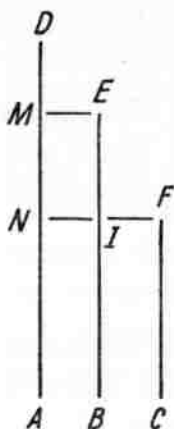
XIV. Propositio

Si quantitates tres ordinentur deinceps, aequalibus differentiis invicem excedentes: proportio inter extremas est major quàm dupla proportionis maximarum.

Sint tres quantitates, AD maxima, BE media, CF minima, et sit excessus primæ super secundam DM, aequalis excessui secundæ super tertiam EI, vel MN. Dico, proportionem inter AD, CF majorem esse quàm duplam ipsius inter AD, BE. Mensuretur enim proportio AD,

34) inter AD ad BE.

37 Kepler IX



BE per differentiam DM per 3. Postul. Erit igitur mensura proportionis BE, CF major quàm differentia IE, vel NM per 12. Sed MN aequat DM mensuram proportionis inter AD, BE. Ergo mensura proportionis BE, CF ¹⁷ est major mensura proportionis AD, BE; et sic ipsa proportio BE, CF major est proportione AD, BE. Sed proportio AD, CF componitur ex proportione AD, BE et ex proportione BE, CF per Axioma 1. Ergo proportio AD, CF partes habet AD, BE, et eâ majorem BE, CF, major igitur est duplâ ipsius AD, BE. 10

Corollarium

Hinc sequitur, semissem proportionis extremarum esse majorem proportione maximarum, minorem proportione minimarum.

XV. Propositio

Si duae quantitates proportionem constituerint, dimidium verò quantitatis majoris dematur de quantitate utrâque, residuae quantitates proportionem constituent majorem duplâ prioris. †

Sint quantitates 10. 9. et ablato dimidio ipsius 10. hoc est 5. ex utraque, relinquantur 5. 4. Dico, proportionem inter 5. 4. duplâ ipsius 10. 9. majorem esse. Duplicentur enim 5. 4. fient 10. 8. eritque proportio 20 eadem 5. 4. quae et 10. 8. Differentia vero 10. 8. hoc est 2, dupla erit differentiae 5. 4. hoc est differentiae 10. 9. scilicet 1.

Si vero tres quantitates ordinentur 10. 9. 8. quarum prima 10. excedat tertiam 8. duplo ejus, quo excedit secundam 9. seu in quibus aequales sunt excessus 10. 9. et 9. 8. proportio extremarum 10. 8. (id est 5. 4.) major est dupla ipsius 10. 9. maximarum per 14. Ergo.

XVI. Propositio

Incommensurabilium proportionum partes aliquotae sunt inter se incommensurabiles.

Nam pars aliquota est suae toti commensurabilis, at tota illa perhibetur toti sociae incommensurabilis, ergo et pars unius toti ³⁰ alteri ¹⁸ erit incommensurabilis per 14. decimi EVCL. et pro eadem et parti aliquotae alterius.

9) et eam 10) igitur dupla ipsius 24) quod 30) sui

XVII. Propositio

Si mille numeri invicem succedant ordine naturali, differentes bini unitate, initio facto à maximo 1000, deinde proportio inter maximos 1000. 999. bisectione continuâ secetur in partes minutiores, quàm est excessus proportionis inter proximos 999. 998. super proportionem inter maximos 1000. 999: minimum verò illud Elementum proportionis inter 1000. 999. capiat mensuram differentiam inter 1000, et proportionalem illam mediam, quae alter elementi terminus est: ulterius si proportio inter 1000. 998. seorsim secetur in partes duplo plures, quàm prior proportio inter 1000. 999, et hujus separatae divisionis minimum elementum seorsim capiat mensuram suorum terminorum (quorum alter sit 1000.) differentiam, eodemque modo quaelibet proportio ipsius 1000. ad sequentes numeros, ut 997, etc. bisectione continuâ secetur in particulas tantae magnitudinis, ut versentur inter sesquiplum et dodrantem elementi, quod emergerat ex sectione proportionis primae inter 1000 et 999. singulisque elementis mensura detur à suorum terminorum differentiâ, maximo existente 1000, et si hoc facto, cuicumque ex mille proportionibus, mensura constituatur ex tanto numero mensurarum elementi sui, in quot elementa ipsa divisa fuit: proportiones omnes, ad omnem calculi subtilitatem, emendatas exactasque habebunt mensuras.

Nam succedant invicem numeri 1000. 999. 998. etc. ordine naturali, differentes unitate: erit inter maximos 1000. ¹ 999. minima proportio: major inter proximos 999. 998: hæc iterum major proxima inter 998. et 997. sic semper, et hoc per 14. Prop. donec 500. 499. fiat major quàm dupla ipsius 1000. 999. per Prop. 15. Dico secundò excessum secundae super primam fore minimum: sic ut semper excessus sequentis super præcedentem sit major priore excessu: ut quoties sequens proportio duplo longius distiterit à prima, quàm aliqua præcedentium, toties excessus sequentis super primam amplius quàm duplo major sit excessu præcedentis. Fiat enim ut 1000 ad 999, sic 999 ad $998\frac{999}{1000}$. Igitur portio 999 ad $998\frac{1}{1000}$ est eadem quae 1000 ad 999. Aufer illam à proportionem 999. 998. relinquitur excessus 998001. 998000.

Fiat etiam ut 1000 ad 999, sic 998 ad $997\frac{998}{1000}$. Igitur proportio 998 ad $997\frac{2}{1000}$ est eadem quae 1000 ad 999. Aufer illam à proportionem 998. 997. relinquitur excessus proportio inter 997002 et 997000. At in priori excessu proportionis 998001. 998000 termini differebant per 1. in hoc verò excessu termini 997002. 997000 differunt per 2. Atqui si aequales fuissent majores termini hîc et illîc, proportio sequens, ubi dupla differentia prioris, fuisset major dupla ipsius per 14. Multò igitur major erit proportio, ubi etiam minor fuerit terminus, qui proportioni sequenti est loco majoris scilicet 997002.

20) maximas

21) hæc iterum major proximâ

30) 998010 statt 998001

34) 998010 statt 998001

Lucis causa sint numeri minores et pauciores, et qui etiam unitate differant, ut: 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1. Dico excessum proportionis 8. 7. super proportionem 10. 9. amplius quàm duplo majorem esse quàm excessum proportionis 9. 8. super eandem 10. 9. Reducatur enim ut prius prima proportio inter 10. 9. cum singulis sequentium, quas bini deinceps numeri constituunt, reducantur, ¹ inquam, ad communem terminum ²⁰ maximum. Hic etiam excessuum termini differunt magis magisque, ut quia 72. 70. est loco secundo, differentia 2 (ut prioris 1, inter 81. 80, dupla) indicat excessum 72. 70. esse majorem duplo ipsius 81. 80. Sic 54. 50. loco quarto major duplo est ipsius 72. 70. loco secundo. Sic 18. ¹⁰ 10. loco octavo major duplo ipsius 54. 50. indice differentia 8, dupla ipsius 4, inter terminos minores.

	Est	At proportio inter 10. 9. valet	Excessus illarum
10. 9.	100. 90.	100. 90.	
9. 8.	90. 80.	90. 81.	81. 80.
8. 7.	80. 70.	80. 72.	72. 70.
7. 6.	70. 60.	70. 63.	63. 60.
6. 5.	60. 50.	60. 54.	54. 50.
5. 4.	50. 40.	50. 45.	45. 40.
4. 3.	40. 30.	40. 36.	36. 30.
3. 2.	30. 20.	30. 27.	27. 20.
2. 1.	20. 10.	20. 18.	18. 10.

Cùm igitur in priori exemplo mille numerorum, minimus excessus sit 998001. 998000. facilè secamus proportionem primam 1000. 999. in partes aequales minores, posito excessus numero. Reducatur enim ille excessus ad terminum minorem dividendae, fiat scilicet ut 998000 ad 998001, sic 999000000000 ad 999001002004. etc. unde apparet [†] differentiam terminorum fieri 1002004. etc. quae est paulò major quàm ³⁰ millesima pars de differentia terminorum proportionis primae. Ergò per 13. non totupla pars proportionis 1000. 999 est in excessu proportionis sequentis 999. 998. ¹

Quaeratur ergò medium proportionale inter 1000. 999. Id secabit ²¹ proportionem terminorum in aequales duas partes, per 1. Prop. Quaeratur secundò inter hanc inventam mediam et 1000. alia media proportio-

27) excessu

nalis, ut ita prior media intelligatur, circumdata duabus mediis proportionalibus aliis, quarum tamen unius solum, versus terminum 1000. investigatione opus est. Per has igitur tres medias (ut est in Ax. 2) secabitur proportio in partes 4. Sic proportionalis tertia inter prius inventam et 1000. secabit in partes 8. quarta in 16. et sic consequenter (per Postul. 2.) in 32. 64. 128. 256. 512. 1024. quod fit actu decimo. Hic itaque numerus 1024. certò constituit particulas proportionis 1000. 999. minores supra investigato excessu: quia proportio capit hujus excessus minus quàm mille; hic verò constituuntur mille viginti quatuor particulae. Hic igitur particula millesima vicesima quarta capiat loco mensurae differentiam termini sui minoris, seu mediae proportionalis decimae à termino majore 1000. per 3. Postulat.

Pergimus ad similem sectionem proportionis inter 1000. 998. Haec igitur est incommensurabilis priorì 1000. 999. Nam per 11. Prop. proportio 999. 998. est incommensurabilis proportioni 1000. 999. quia termini bini differunt unitate aequaliter, sed proportio 1000. 998. componitur ex illis inter se incommensurabilibus per Axiom. 1. Cum verò totum in incommensurabilia secatur, ipsum singulis est incommensurabile per 17. decimi EVCL.

Est verò haec proportio 1000. 998. major quàm dupla prioris 1000. 999. excessu incommensurabili, ut supra allegatione praemissae 14. indicatum. Pars igitur ejus millesima vigesima quarta plus quàm duplo major est minimo elemento prioris; bisecetur igitur, ut totius fiant partes 2048. per inquisitionem undecimae proportionalis. Tunc sanè elementum hoc ejus erit proximè aequale ¹ elemento minimo prioris, majus tamen illo etiamnum, et illi incommensurabile per 16. praemissam.

Si ergò illud accepit mensuram differentiam suorum terminorum, hoc jam elementum proportionis, quippe majus illo, mensuram habebit majorem differentiâ suorum terminorum, per 12. Prop. Ac proinde si prioris elementi terminorum differentia multiplicetur 1024^{ies} pro mensurâ proportionis inter 1000. 999. tunc posterioris elementi terminorum differentia, multiplicata 2048^{ies}, adhuc minor erit mensurâ proportionis inter 1000. 998.

Veruntamen si attendamus ad quantitatem hujus defectus, illa est omninò subtilissima, et nullâ calculi diligentia observabilis. Quia enim proportio inter 1000. et 999 secta est in particulas plus quàm mille, et elementi tam parvi mensura constituta est differentia terminorum 1000000. et 999999. scilicet 1. et major adhuc certè proportio proxima inter 999999. 999998. major priorì per 12. Prop. mensuram habebit,

15) qui 39) minor *statt* major

quae excedat terminorum differentiam primam vix millies millesimâ suâ. Ac proinde composita proportio 1000000. 999998. major est dupla prioris vix millies millesimâ prioris particulâ. At jam elementum secundae proportionis inter 1000. 998. in superioribus constitutum, nequaquam est majus duplo prioris proportionis elemento; sed ob id ipsum factae sunt partes non 1024. sed 2048. ut esset pars ista proximè aequalis priori, quo modo excedit illam rursum vix millesima parte illius, si ergò totum superadderet differentiae suae millies millesimam, ad constituendam proportionis mensuram, pars utique millesima totius non plus addet, quàm millies millesimae prioris elementi millesimam. 10

Transeamus ad sectionem sequentis Proportionis inter 1000. 997. Haec verò est paulò major quàm tripla primae inter 1000.¹ 999. Quare si 23
secetur in aequales 1024. particulas: particula talis etiam erit paulò major quàm tripla elementi primi. Sin ulterius illae bisecentur per undecimam proportionalem, existent numero 2048. eritque unaquaelibet major quàm sesquialtera primi elementi. Nam triplae dimidia est ipsa sesquialtera totius. Quia ergò superant primum elementum plus quàm dimidio ipsius, bisecentur denuò constitutione duodecimae proportionalis, ut fiant partes 4096: quaelibet major dodrante prioris elementi, quia sesquialteri dimidium est dodrans. Satis igitur appropinquat elemento 20
priori. Si igitur huic elemento proportionis tertiae mensura seorsim ponatur differentia terminorum ipsius, peccabit quidem illa excessu, per 12. praemissam, at peccato nunquam aestimabili, ob causas in secundae sectione dictas.

Hoc pacto proportio inter 1000. 996. per sectionem in 4096. paulò majus sortitur elementum, quàm est elementum primae, et proportio inter 1000. 995. paulò majus quinque quartis primi elementi. At proportio inter 1000. 994. jam per tredecimam proportionalem capere debet partes 8192. ut sint rursum paulò majores dodrante primi elementi. Et proportio inter 1000. 993. paulò majores habebit septem 30
octavis primi, et proportio inter 1000. 992. rursum paulò majores primo elemento.

Hoc igitur tantisper obtinet, quoad numeri ordinis millenarii proximi invicem appropinquaverint magis ipsi 500. dimidio primi, quàm ipsi primo 1000.

Nam quia proportio inter 500. 499. major est quàm dupla proportionis inter 1000. 999. per 15. praemissam: Jam igitur excessus ipsius 500. 499. super ipsam 1000. 999. superat ipsam 1000. 999. quare in sectione proportionum, quae proximè antecedunt proportionem inter 500. et 499. per unam superabundantem bisectionem, vel etiam quadrisectio- 40

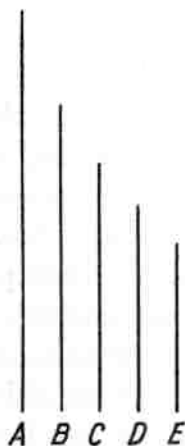
27) quantis staff quartis

24 nem, redigendum ¹ est elementum emergens ad propinquitatem elementi prioris in Propositione praeinitam. At in iis quae sequuntur proportionem inter 501. et 500. sectione porrò non est opus. Nam quia proportio inter 500. 499. eadem est quae inter 1000. 998. iccirco si fuerit notificata 1000. 998. et 1000. 500. noscetur etiam composita ex utraque 1000. 499. sine sectione laboriosa. Igitur inquisitio proportionalium desinit in proportionem dupla, scilicet inter 1000. et 500.

XVIII. Propositio

*Cognitâ proportionem numeri cujuscunque ad primum 1000 :
10 simul cognoscitur etiam numerorum reliquorum continuæ ejus-
† dem proportionis ad eundem primum 1000. proportio.*

Nota sit mensura proportionis inter A et B. Et sit ut A ad B, sic B ad C, et C ad D, et D ad E. Erunt igitur aequales mensurae proportionum harum singularum ei, quae est primò notae A ad B per 1. Postul. Iam verò proportio A ad C componitur ex proportionibus A ad B, et B ad C, per 1. Ax. quare et mensura proportionis A. C componetur ex duarum proportionum A. B, et B. C mensuris. Id est, mensura ipsius A. B duplicata, dat
20 mensuram ipsius A. C, triplicata ipsius A. D, quadruplicata ipsius A. E.



Hoc pacto cognitâ proportionem inter 1000. 900. cognoscitur etiam ipsius 1000. ad 810, et ad 729.

Et ex 1000. ad 800. etiam 1000. ad 640. et ad 512.

Et ex 1000. ad 700. etiam 1000. ad 490. et ad 343.

Et ex 1000. ad 600. etiam 1000. ad 360. et ad 216.

Et ex 1000. ad 500. etiam 1000. ad 250. et ad 125.

Corollarium

27 30 Hinc oritur praeceptum quadrandi, cubicè multiplicandi, etc. et vici-
cissim radicem quadratam, cubicam, etc. extrahendi in primis ¹ numerorum figuris. Est enim ut Maximus Chiliadis tanquam denominator ad Numerum propositum tanquam numeratorem, sic hic ad fractionis quadratum, et hoc ad cubum.

XIX. Propositio

Cognita proportionem numeri ad primum 1000: si duo alii in eâdem inter se proportionem fuerint: eorum unius proportionem ad 1000. cognitâ, noscetur etiam reliqui proportio ad eundem 1000.

Sit A 1000, et nota mensura proportionis A ad B. Sit verò ut A ad B, sic C ad D, et sit nota mensura proportionis A ad C. Dico, etiam innotescere mensuram proportionis A ad D. Quia enim nota est mensura ipsius A.B proportionis, nota etiam erit ipsius C.D proportionis, ut quae illi ponitur aequalis, per 1. Postul. Nota verò est etiam A.C, et A.D est composita ex A.C et C.D, per 1. Ax. quare etiam mensura ipsius A.D componetur ex mensurâ ipsius A.C, ut ex mensurâ ipsius C.D, id est, ipsius A. B.

Corollarium I

Hoc pacto ex notificatis proportionibus quindecim, prop. 18. prae-
missis, noscentur aliae centum viginti numerorum intra millenarium
ad ipsum millenarium. †

Quoties enim datae fuerint proportiones ad 1000. duorum numero-
rum talium, in quibus, vel ambobus, duos ultimos locos habuerint
cyphrae, ut 900. 800, vel in eorum altero quidem duos, in reliquo verò
unum, ut 700. 810, vel ut 700. 10. vel si unum solum, eumque ulti-
mum in utroque numero locum ex tribus obtinuerit cyphra: quae tamen
hanc cyphram antecedit figura in altero numero, ex paribus in reliquo
quinarius fuerit, ut 620. 950. sic 1 620. 50. sic 20. 950. vel si alter quidem 26
cyphrâ in ultimo loco caruerit, ex paribus tamen fuerit ut 512. 12. vel 20
2. reliquus fuerit 500. Omnibus hisce casibus institutâ multiplicatione
numerorum, proveniunt in fine tres cyphrae, quibus abjectis formatur
numerus, unus ex mille ordinis naturalis, seu progressionis Arithmeticae.

Corollarium II

Hinc oritur praeceptum tractandi regulam trium, quando uno loco
occurrit rotundus 1000.

Nam si ille occurrit primo loco in tali situ: A 1000. dat B, quid C?

Tunc additur mensura proportionis A.B ad mensuram proportionis
A.C, ita fit mensura proportionis A.D. Sin autem 1000. occurrat loco
secundo vel tertio, in tali situ: B dat A 1000, quid C? vel tali: B dat C, 30
quid A 1000?

Tunc aufertur mensura proportionis A. B, à mensura proportionis
A. C, vel ejus multiplicis proximè majoris, ita relinquitur mensura vel
ipsius proportionis A. D, vel ejus aequè multiplicis.

XX. Propositio

*Quando fuerint ut primus ad secundum, sic tertius ad quartum, notae verò
fuerint proportionis ipsius 1000. ad tres priores, innotescet etiam proportio
ejusdem 1000. ad quartum.*

Sit enim A 1000, et sit ut B ad C, sic D ad E. Notae verò sint proportionibus A.B, A.C, A.D; dico innotescere etiam proportionem A.E. Nam
 27 quia ut B ad C, sic D ad E, aequalis est igitur¹ mensura proportionis B.C, mensurae proportionis D.E. Sed B.E est composita ex B.D, D.E per 1. Axiom. Aequalis igitur erit proportio B.E, proportionibus B.D, B.C simul sumptis. Sed et A.E est composita ex A.B, B.E: sic A.D ex A.B, B.D, sic A.C ex A.B, B.C per 1. Axioma. Si ergò pro B.D, B.C sumantur proportionibus notae A.D, A.C, tunc A.B bis accessit. Vicissim si pro B.E sumatur A.E proportio quaesita, tunc A.B semel tantum
 10 accessit. Si ergò à junctis A.D, A.C notis abstuleris A.B notam semel, relinquitur A.E proportio quaesita.

Corollarium I

Hâc methodo praeterquam quod superiorum Chiliadis multae iteratò exquiruntur, accedunt illis insuper aliquot aliae.

Corollarium II

Hinc oritur praeceptum tractandi Regulam trium, quando nuspiam occurrit rotundus 1000, ut si sic collocentur tres: B dat C, quid D?

Nam additur mensura proportionis AC, mensurae proportionis AD, et à summâ aufertur mensura proportionis AB, vel ejus aliqua pars
 20 aliquota: ita relinquitur mensura proportionis AE, vel ejus aequè multiplex.

Definitio

*Mensura cujuslibet proportionis inter 1000. et numerum eo minorem, ut est definita in superioribus, expressa numero, apponatur ad hunc numerum minorem in Chiliade, dicaturque LOGARITHMVS ejus, hoc est, numerus (ἀριθμὸς)
 28 indicans proportionem (λόγον) quam¹ habet ad 1000. numerus ille, cui Logarithmus apponitur.*

XXI. Propositio

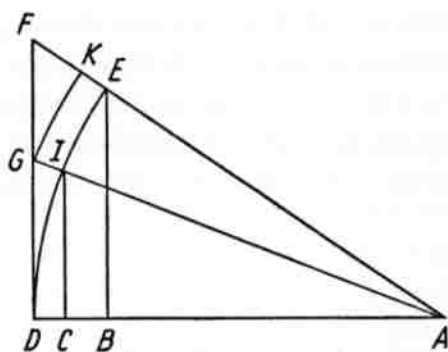
*Si primus numerus fit semidiameter Circuli seu Sinus totus: omnis numerus
 30 minor, ut Sinus complementi alicujus arcus, Logarithmum habet majorem sagittâ arcus, minorem verò excessu secantis arcus supra radium seu semidiameter, excepto unico proximo post semidiameter, quia illius Logarithmus ex hypothesi est aequalis sagittae.*

Sit A centrum circuli, AD semidiameter, DI, DE arcus, eorumque Sinus IC, EB, Sinus verò complementorum sint CA, BA, sagittae CD, BD. Sit autem ut AD ad AC, sic AC ad AB. Amplius sint eorundem

9) quaesitae

38 Kepler IX

arcuum secantes AG, AF, per terminos I, E in tangentes DG, DF educti, et ipsi AG aequalis abscindatur ab AF, quae sit AK, denique fit CD mensura proportionis CA, AD, ut minimi elementi arbitrarii. Dico, mensuram proportionis BA ad AD, hoc est, Logarithmum ipsius BA



maiores esse quàm BD, minorem verò quàm EF. Quod major sit quàm BD, demonstratum est supra propositione duodecima. Quod verò minores sint mensurae proportionum harum IG. EF sic probatur. Primum de CA, cum ipsa CD sagitta, utpote in mi'nimo proportionum elemento ponatur esse Logarithmus ipsius CA: CD sanè est minor quàm IG. Vt enim CA ad

AD, sic IA, hoc est, DA ad AG, quia DG et CI parallelae. Est igitur AD media proportionalis inter CA et AG. Vt igitur CA ad AD, sic differentia CA, AD, hoc est, CD ad differentiam sequentem DA, AG, hoc est, ad IG. Sed CA est minor quàm AD, ergò et CD est minor quàm IG. Sed CD est Logarithmus ipsius CA, Sinus complementi arcus ID, et IG est excessus secantis ejusdem arcus. Ergò Logarithmus minor est hoc excessu.

Transeamus ad BA: cujus Logarithmus major est quàm BD. Demonstrandum est, illum non esse tantò majorem ipsâ BD, quin interim maneat minor ipso EF. Rursum igitur AD est media proportionalis inter BA et AF. Et quia posita est ut BA ad AC, sic CA ad AD: quare etiam ut EA ad AG, vel AK, sic KA, vel GA ad AF. Sunt igitur continuè proportionales istae AB, AC, AD, AK, vel AG et AF. In eâdem igitur proportionem sunt etiam BC, CD, IG, vel EK et KF. Minor verò est CD, quàm IG, ut prius ostensum, minor igitur erit etiam IG vel EK, quàm KF. Tota igitur EF major est quàm dupla ipsius IG, multò magis igitur EF major erit quàm dupla ipsius CD minoris. At proportionis inter BA, AD, ut quae dupla est ipsius BA, AC per 1. Propositionem, mensura seu Logarithmus ipsius BA, est praecisè duplus ipsius CD per 1. Postul. Minor est ergo Logarithmus ipsius BA excessu secantis EF. Erat autem major sagittâ BD. Patet ergo propositum.

XXII. Propositio

Isdem positis, sagitta arcus cum excessu secantis superat duplum Logarithmi ad Sinum complementi apponendi.¹

1) EF statt AF 10) CF statt EF 30) KE statt KF

30 Sit enim primo Sinus complementi longissimus, aut longissima
 mediarum proportionalium, quibus aliqua proportio dividitur in partes
 arbitrario numero multas; sic ut ejus, verbi causa, AC residuum CD,
 seu sagitta arcus ID sit ipsissima mensura arbitraria proportionis CD,
 Logarithmus igitur ipsius CA est CD. At IG est major ipsâ CD. Juncti
 igitur excessus secantis IG et sagitta CD plus efficiunt, quàm duplum
 ipsius CD.

Sit deinde alia quaecunque minor linea proportionis continuae, ut AB,
 et educta ex B perpendiculari in circumferentiam E, connexisque AE
 10 et DG continuatis in F, sit EF excessus secantis, et BD sagitta ejus-
 dem scilicet arcus ED. Dico junctos EF et BD facere plus quàm du-
 plum Logarithmi ad BA apponendi, seu mensurae ipsius BA, AD pro-
 portionis.

Quia est ut BA ad AD, sic DA ad AF, et CA media proportionalis
 inter BA, AD, ut igitur BA ad AC, sic GA ad AF, quare per 25. quinti
 EVCL. BA, AF junctae sunt longiores junctis CA, AG, sive quia, ut BA
 ad AD, sic DA ad AF, quare BA, AF junctae, superant DA, AD duas
 medias. Vt verò BA ad AC, sic etiam BC ad CD, et IG ad KF per 2. Prop.
 quare etiam BC et KF junctae, superant CD et IG junctas. At CD, IG
 20 plus sunt quàm duplum ipsius CD. Ergò BC, KF junctae multò plus
 sunt, quàm duplum ipsius CD. Et sic BD, EF plus sunt quàm qua-
 druplum ipsius CD. Sed duplum ipsius CD est Logarithmus seu mensura
 proportionis BA, AD per 1. Postul. Ergò BD, EF junctae plus sunt
 quàm duplum Logarithmi ipsius BA, seu mensurae proportionis
 BA, AD.¹

31 Sit tertio proportio BA, AC minor vel major quàm CA, AD, demon-
 strabitur nihilominus, quod junctae BC, KF superent duplum tantae
 portionis de CD, quanta portio est proportio BA, AC, proportionis
 CA, AD.

30

Corollarium

Logarithmus Sinus complementi est minor medio Arithmetico inter
 sagittam et excessum secantis.

Praeceptum

*Sinus inventi in Canone Sinuum residuum ad totum adde excessui secantis
 complementi, summae dimidium superat Logarithmum, sagitta ipsa proximè
 minor est Logarithmo.*

28) partitionis statt portionis

Esto Sinus 99970.1490	Arcus complementi
Ejus residuum ad sin. totum 29.8510	Sagitta arcus complementi minor Logarithmo
29.8599	Excessus secantis
59.7109	Summa
29.8555	Dimidium majus Logarithmo
Ergò Logarithmus est inter	29.8510 29.8555

Praeceptum aliud

Invento Sinus Logarithmo, inuenies etiam proximè Logarithmum Numeri rotundi, qui sinu tuo scrupuloso proximè minor est, si sinus scrupulosi excessum supra numerum rotundum adjeceris Logarithmo Sinus invento.

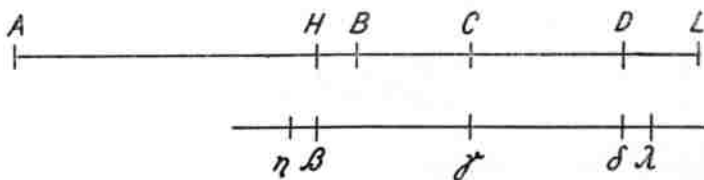
Vt quia sinus 99970.149 Logarithmus inventus est 29.854 circiter, si jam vis scire Logarithmum rotundi 99970.000. vides excessum tui Sinus scrupulosi esse 149. hunc adde ad inventum Sinus Logarithmum, observato puncto. Sic 29.854.

$$\begin{array}{r} .149. \\ 29.854. \\ \hline 29.854. \end{array}$$

Hic est Logarithmus rotundi numeri 99970.000. proximè.

XXIII. Propositio

Si tres quantitates invicem successerint, aequalibus excessibus differentes, mensura proportionis inter maximam et mediam, cum mensurâ alterius inter mediam et minimam constituet proportionem, majorem quidem proportionem majorum, minorem verò proportionem minorum.



Sint tres quantitates AD, AC, AH, aequalibus excessibus DC, CH; sit autem mensura proportionis DA, AC linea $\delta\gamma$, mensura verò proportionis CA, AH, linea $\gamma\eta$. Dico, proportionem ipsius $\delta\gamma$ ad $\gamma\eta$ majorem quidem esse proportionem ipsius CA ad AD, minorem verò proportionem ipsius HA ad AC. Fiat enim ut DA ad AC, sic CA ad AB. Vt igitur DA ad AC, sic DC ad CB per 2. Prop. Sed longior est DA, quàm AC, longior igitur DC, quàm CB, longior igitur et CH, quàm CB, differentia BH.

1) complementi fehlt

11) scrupulato statt scrupuloso

Cum igitur aequales sint proportiones DA, AC et CA, AB, per 1. Prop. mensura verò ipsius DA, AC sit linea $\delta\gamma$, habebit et CA, AB mensuram aequalem ipsi $\delta\gamma$, per 1. Postul. Et cum proportio CA, AH sit composita ex proportionibus CA, AB et proportione BA, AH; major igitur erit proportio CA, AH, quàm proportio DA, AC, aequalis ipsi CA, AB. Major igitur etiam mensura ejus $\gamma\eta$, quàm $\gamma\delta$. Abscindatur à $\gamma\eta$ aequalis ipsi $\gamma\delta$,
 33 quae sit $\gamma\beta$, res¹idua igitur $\beta\eta$ mensura erit residuae proportionis BA, AH. Erit autem proportio $\gamma\beta$ ad CB minor quàm $\beta\eta$ ad BH per 12. Coroll. id est, major est $\beta\eta$ respectu $\beta\gamma$ vel $\gamma\delta$, quàm HB respectu BC. Compositis
 10 igitur terminis, illic $\gamma\beta$ et $\beta\eta$ in $\gamma\eta$, hic CB et BH in CH, major erit $\gamma\eta$ respectu $\gamma\beta$, vel ejus aequalis $\gamma\delta$, quàm CH respectu CB. Major igitur est proportio inter $\delta\gamma$, $\gamma\eta$, quàm inter BC, CH, id est, CD.

Vt verò BC ad CD, sic CA ad AD per 2. Prop. major igitur proportio inter $\delta\gamma$, $\gamma\eta$, quàm inter CA, AD. Sed $\delta\gamma$ et $\gamma\eta$ sunt mensurae, illa quidem proportionis inter DA, AC majores, haec verò proportionis inter CA, AH minores. Ergò proportio mensurarum major est proportionem terminorum majorum.

Rursum fiat ut HA ad AC, sic CA ad AL. Vt igitur HA ad AC, sic HC ad CL, per 2. Sed brevior est HA, quàm AC, brevior igitur HC,
 20 hoc est DC, quàm CL, differentia DL. Cum igitur aequales sint proportionibus HA, AC, et CA, AL, per 1. Prop. mensura verò ipsius HA, AC sit linea $\eta\gamma$, habebit et CA, AL mensuram aequalem ipsi $\eta\gamma$, per 1. Postul. Esto $\gamma\lambda$. Minor verò erat proportionis CA, AD mensura, puta $\gamma\delta$, minor igitur est $\gamma\delta$, quàm $\gamma\lambda$. Excessus igitur $\delta\lambda$ erit mensura proportionis inter DA, AL, appositae ad proportionem inter CA, AD. Et quia termini DA, AL sunt longiores quàm CA, AD, quare per
 12. Coroll. minor est $\delta\lambda$ respectu $\lambda\gamma$, vel $\gamma\eta$, quàm DL respectu LC, major igitur residua $\gamma\delta$ respectu $\gamma\lambda$, vel $\gamma\eta$, quàm CD, vel HC, respectu CL. Et quia proportio minuitur aucto minori termino, per Ax. 1.
 30 minor igitur est proportio inter $\delta\gamma$, $\gamma\eta$, quàm inter HC, CL. Vt verò HC ad CL, sic termini trium minores HA ad AC, per 2. conversam. Minor est igitur proportio inter $\delta\gamma$, $\gamma\eta$ mensuras proportionum, quarum
 34 unam¹ facit major terminus cum medio, alteram medius cum minimo, quàm inter terminos minores.

XXIV. Propositio

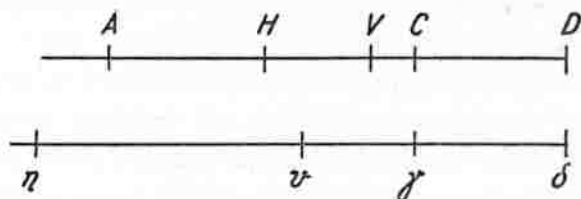
Dicta proportio inter duas mensuras est minor dimidiâ proportionem inter terminos extremos.

Sint enim termini extremi, ut prius AH, AD, Media duo, Arithmeticum AC, Geometricum AV, sit proportionis DA, AC mensura $\delta\gamma$,

17) minorum *statt* majorum

29) cuncto *statt* aucto

vel aequalis ipsi DC, vel etiam major per Postul. 3. et applicetur ipsi $\delta\gamma$, alia $\gamma\nu$, quae sit mensura justa proportionis CA, AV, ut sic tota $\delta\nu$ mensuret proportionem DA, AV, residuae igitur proportionis VA, AH



mensura erit priori $\delta\nu$ aequalis per. 1. Postul. et 1. Prop. sit ea $\nu\eta$: Quia igitur $\delta\gamma$ est vel aequalis, vel major quàm DC, sequentis $\gamma\nu$ proportio ad CV erit major quàm proportio ipsius $\gamma\delta$ ad CD, et tertiae $\nu\eta$ proportio ad VH rursum erit major quàm secundae $\gamma\nu$ ad secundam CV. Et per compositionem totius $\eta\delta$ ad totam HD major erit proportio, quàm partis $\nu\gamma$ ad partem VC. Permutatim igitur major erit proportio totius $\eta\delta$ termini majoris in priori, ad $\nu\gamma$ majorem in posteriori, quàm totius HD termini minoris, in priori proportionem, ad VC terminum minorem in posteriori. Sed tota $\eta\delta$ constat ex terminis $\eta\gamma$, $\gamma\delta$, quorum differentia $\gamma\nu$, similiter DH, constat ex terminis DV, VH, quorum differentia VC: Major igitur est proportio terminorum $\eta\gamma$, $\gamma\delta$ junctorum ad suam differentiam $\gamma\nu$, quàm terminorum DV, VH ad differentiam VC. At verò auctâ proportionem summae terminorum, ad suam differentiam, minuitur ipsorum inter se terminorum¹ seorsim posit³⁷ torum proportio, per Coroll. Prop. 13. et communem notitiam, quod proportionalium eadem sit ratio: Minor est itaque proportio inter $\eta\gamma$, $\gamma\delta$, quàm inter DV, VH. Sed proportio DV ad VH est aequalis pro-²⁰ portioni DA ad AV per 2. Haec verò DA ad AV proportio est dimidia ipsius DA ad AH per 1. Prop. Minor est ergò proportio inter $\eta\gamma$, $\gamma\delta$, mensuras proportionum HA, AC et CA, AD, quàm dimidia inter terminos HA, AD.

Exemplum hic est.

Numeri	Numerorum differentiae	Logarithmi	Logarithmorum differentia, seu mensura proportionis
1000.		00.	
750.	250.	28768.21.	28768.21.
500.	250.	69314.72.	40546.51.

14/15) junctorum

18) Coroll. 4. 13.

28/29) mensurae proportio

Si verò fiat ut 1000. ad medium proportionale inter terminos extremos 1000. et 500. (id est, ad 70710.68.) sic mensura proportionis prioris, quae est 28768.21. ad aliquem, is prodibit 40684.40, major quàm mensura proportionis posterioris.

Si verò fiat ut Medium proportionale inter 1000. et 360. (id est, ut 600.) ad 1000. sic mensura proportionis posterioris 63598.86. ad aliquem, is prodibit 38159.32. minor quàm mensura proportionis prioris inter 1000. et 680.

Aliud Exemplum.

1000.		0.	
	320.		38566.25.
680.		38566.25.	
	320.		63598.86.
360.		102165.11.	

Corollarium

Cum igitur medium Arithmeticum dispescat proportionem in partes inaequales, quarum una major est semisse totius, altera minor, si quaeratur, quae ergò sit ipsarum proportionum proportio inter se, respondetur, quod ea sit paulò minor semisse dicto.

Exemplum inquirendi proximè majus, et proximè minus aliquid, mensurà proportionis propositae.

Nota sit mensura proportionis inter 1000. 900. quae sit 10536.05. quaeritur mensura proportionis 900. 800. ut sint aequales differentiae inter 1000. 900. et inter 900. 800.

Est igitur ut 9. ad 10. sic 10536.05 ad 11706.72. Mensura verò proportionis 9. 8. est major. Rursum ut medium proportionale inter 8. 10. (quod est 89442.719) ad 10. sic 10536.05 ad 11779.66. At mensura proportionis inter 9. et 8. est minor, scilicet 11778.30.

Notitia communis

Omnis Numerus quantitatem exprimit effabilem.

XXV. Propositio

Si numeri mille succedant invicem ordine naturali, bini differentes unitate; suscipiantur verò bini quicumque, deinceps ordinati, tanquam termini proportionis alicujus: erit hujus proportionis mensura ad mensuram proportionis inter

4) prioris statt posterioris 8) 600 statt 680 22) 10536.15 25) 9. ad 8. sic . . . ad 10706.72.
27) 89.442719) . . . ad 10779.66.

duos maximos Chiliadis, in proportionem majorem quidem, quàm quantam habet maximus ipse 1000. ad majorem ex terminis susceptis; minore verò quàm quantam habet idem 1000. ad minorem ex susceptis. Minore etiam, quàm quantam habet 1000. ad medium proportionale inter susceptos. †

Suscipiantur enim ex mille duo quicunque deinceps, puta 501.¹ et 500. 37
Et sit Logarithmus prioris 69114.92. posterioris 69314.72. Horum Logarithmorum differentia est 199.80. Quare per definitionem proportionis inter 501. et 500. mensura est 199.80. Eodem modo, quia maximi 1000. Logarithmus est 0. proximi verò 999. Logarithmus est 100.05, et horum duorum Logarithmorum differentia itidem 100.05, 10
mensura igitur proportionis inter 1000. 999. (vel inter 100000.00. et 99900.00.) est 100.05. copuletur jam maximus 1000. cum utroque susceptorum, scilicet cum 501. et cum 500. copuletur etiam mensura 199.80. cum mensurâ 100.05, dico proportionem inter 1000. et 501. majorem esse proportionem inter 199.80. et 100.05, minorem verò eandem proportionem inter 1000. 500.

Demonstratum est enim in Prop. 23. mensuras duarum proportionum deinceps ordinatarum comprehendere proportionem majorem minore earum, quae sint deinceps. Vt si sint tres termini deinceps 1000. 999. 998. quorum priores quidem 1000. 999. faciant proportionem praecedentem, 20
postiores 999. 998. sequentem, praecedentis quidem proportionis mensura ut prius erit 100.05. sequentis verò mensura erit 100.15. Hae duae mensurae 100.15. et 100.05. constituunt proportionem majorem, quàm termini 1000. et 999. †

Jam verò duae mensurae, altera quidem proportionis inter 1000. et 999. hoc est, 100.05. altera verò proportionis inter 501. et 500. hoc est, 199.80. hae, inquam, duae mensurae ut termini consideratae, proportionem inter se constituunt compositam ex proportionibus omnibus omnium binarum, et binarum deinceps mensurarum, intercedentium per Axiom. 1. Similiter verò etiam termini ipsi 1000. et 501. proportionem 30
inter se constituunt compositam ex totidem, hoc est, omnibus proportionibus omnium binorum, et binorum deinceps numerorum inter 1000. et 501. intercedentium per idem Ax. 1.¹

Compositorum verò ex partibus aequè multiplicibus proportionalibus 38
eadem est proportio, quae partium inter se singularum, hinc et inde combinatorum per 1. quinti EVCL. Ergò etiam hae non deinceps sitae, sed longè distantes mensurae 100.05. et 199.80. proportionem facient majorem quàm termini non deinceps siti, sed distantes longè scilicet 1000. et 501. Eodem tenore rursum incipiendo syllogismum eundem inferemus duas mensuras deinceps 100.15. et 100.05. constituere pro- 40

1) quantum

14) 1000. et 50.

33) intercedentem

portionem minorem quàm duos terminos deinceps 999. et 998. Mensurarum verò 100.05. et 199.80. proportionem componi ex omnibus interjectis, et similiter terminorum 999. et 500. proportionem componi ex totidem interjectis, quare etiam proportionem inter 100.05. et 199.80. minorem esse quàm inter 999. et 500. multò igitur minorem quàm inter 1000. et 500. ut quae ad proportionem 999. 500. addit proportionem 1000. 999.

Tertio per eadem Syllogismi vestigia euntes, sic colligemus ex Prop. 24. praemissâ.

- 10 Mensurarum deinceps sitarum, scilicet 100.15. et 100.05. proportio est minor quàm ea, quae est inter 1000. et medium proportionale Terminorum 1000. 998. vel quàm ea, quae est inter hoc medium proportionale Terminorum 1000. 998. et terminum 998. Mensurarum verò non deinceps, ut 100.05. et 199.80. proportio componitur ex interjectis omnium binarum, et binarum deinceps proportionalibus; et terminorum, quorum unus est medium proportionale inter 1000. et 998. id est, $\sqrt{998,000}$. alter 500: vel quod idem est unus 1000. et alter medium proportionale inter 501. et 500. seu $\sqrt{250500}$; haec, inquam, proportio componitur ex proportionibus, quas constituunt totidem interjectae binorum, et
20 binorum numerorum mediae proportionales lineae, accensito termino
30 1000. Quare etiam mensurae non deinceps sitae, scilicet 100.05. et 199.80. proportionem exhibent minorem quàm 1000. cum medio proportionali inter susceptos 501. et 500.

Corollarium I

- Proposito numero quocunque infra 1000. ejusque Logarithmo, quaecunque differentiae Logarithmorum antecedunt propositum versus initium Chiliadis, sunt ad ultimum Logarithmum (qui scilicet ad 999. apponitur) in proportionem majore, quàm 1000. ad propositum; quaecunque sequuntur versus ultimum Logarithmum, sunt ad eum in pro-
30 portione minore.

Corollarium II

Hoc adjumento facile implentur loca Chiliadis, quae per superiores propositiones nondum sunt sortita suos Logarithmos.

XXVI. Propositio

Differentia binorum Logarithmorum, qui sunt adscripti ad numeros deinceps, est ad eorundem numerorum differentiam in proportionem majore quidem quàm

4) 100. et 999.80. 10) 1000.15. et 1000.05.

est 1000. ad numerorum majorem; minore verò quàm idem 1000. est ad numerorum minorem. †

Facile demonstratur per antecedentem ejusque Corollarium. Nam ex unâ parte differentia duorum deinceps numerorum perpetuò est unitas (seu in prolongatis perpetuò 100.00). Jam verò ultimus Logarithmus est 100.05, idem, qui et mensura ultimae et minimae proportionis. Nulla igitur differentia numerorum deinceps differt à mensurâ ultimae proportionis plus quàm quinque unitatibus numerorum prolongatorum. Ex alterâ verò parte mensura proportionis duorum deinceps numerorum nihil est aliud, quàm differentia duorum ad illos numeros positorum 10 Logarithmorum, per definitionem. Si igitur inter mensuram susceptae proportionis, et inter mensuram ¹ proportionis ultimae est major pro- 40 portio, quàm inter 1000. et terminum susceptae majorem, erit etiam inter differentiam Logarithmorum deinceps, et inter differentiam numerorum, ad quos sunt Logarithmi, portio major quàm inter 1000. et terminum susceptae majorem. Nam quod majori majus est, ipsius quoque multo est majus. Sed portio inter differentiam Logarithmorum deinceps, (verbi causa) inter 199.80. et 100.00. differentiam perpetuam numerorum deinceps, est major quàm portio inter 199.80. et 100.05. excessus enim est portio inter 100.05. et 100.00. Et inter 199.80. et 20 100.05. portio major fuit demonstrata in praecedenti quàm inter 1000. et 501. Ergò multò est major portio inter 199.80. et 100.00. quàm inter 1000. et (verbi causa) 501. terminum susceptae majorem. Est verò eadem portio inter 199.80. differentiam Logarithmorum, et 100.00. differentiam numerorum, etiam minor quàm portio inter 1000. et 500. terminum susceptae minorem, quod sic probo.

Portio inter 199.80. et 100.05. est minor quàm portio inter 999. et 500. per demonstrata 25. praecedente; similiter verò etiam portio inter 100.05. et 100.00. seu inter 20.01. et inter 20.00. est minor quàm portio inter 1000. et 999. per Coroll. ad 13. quia scilicet 30 eadem est differentia numerorum majorum, 2001. et 2000. quae minorum 1000. et 999. utrobique scilicet unitas.

Componitur verò portio inter 199.80. et 100.00. ex utraque suae societatis minore, scilicet ex proportionione 199.80. ad 100.05. et ex proportionione 100.05. ad 100.00. Sic etiam portio 1000. ad 500. componitur ex utrâque suae societatis majore, scilicet ex proportionione 999. ad 500. et ex proportionione 1000. ad 999. Ergò etiam ipsa composita prior erit minor, et composita posterior erit major.¹

6) mensurae 18) et 1000.00. 21/22) quàm inter 1000. et 501. *fehlt*

41

10 *constituat proportionem cum radio, quàm differentia proposita cum omnium primâ, major majorem, atque etiam medium proportionale inter secantes majorem itidem.*

The diagram shows a right-angled triangle \$FGA\$ where \$D\$ is the origin \$(0,0)\$, \$F\$ is on the vertical axis, and \$A\$ is on the horizontal axis. Points \$G\$, \$I\$, and \$E\$ lie on the vertical segment \$FA\$. Points \$C\$ and \$B\$ lie on the horizontal segment \$DA\$. A curve starts at \$D\$ and passes through \$I\$ and \$E\$. Another curve starts at \$F\$ and passes through \$K\$ and \$E\$. Below the horizontal axis, three segments are marked with tick marks and labeled \$\delta\$, \$\gamma\$, and \$\beta\$ from left to right.

39•

Corollarium I

Idem obtinet etiam tunc, si duo termini differunt, non solâ unitate elementi minimi, sed aliâ unitate, quae sit illius decupla, centupla, millecupla.

Corollarium II

Hinc differentiae satis justae, praesertim ubi absoluti numeri satis magni sunt, extrui possunt, sumpto medio Arithmetico inter duos secantes parvos, vel etiam (si placet labor) medio Geometrico inter secantes majores, exque differentiis continuè additis, accumulari Logarithmi.

10

Corollarium III. Praeceptum

Divide sinum totum per utrumque proportionis susceptae terminum, quotientis utriusque medium Arithmeticum est quaesitum incrementum, hoc adde ad Logarithmum termini majoris, prodit Logarithmus † termini minoris.

Exemplum

Propius et omnino proximum vero est Medium Geometricum, at non est precium operae tam operosae, quando unus solus vel alter Logarithmus est constituendus.

Datus esto Logarithmus ad 700. scilicet 35667.4948.¹ quaeritur †
Logarithmus ad 699. Divide ergò Radium per 700, prodit 142857.
142857.142857.142857. etc. divide etiam per 699, prodit 1430615. etc.

Medium Arithmeticum est . . . 142.959.

20

Adde hoc ad . . . 35667.4948.

Prodit Logarithmus ad 699 . . . 35810.4538.

Corollarium IV. Praeceptum de Logarithmis sinuum

Incrementum Logarithmorum inter duos sinus sic inquire: inter † secantes complementorum constituatur medium Geometricum, dividaturque per differentiam sinuum, prodit differentia Logarithmorum.

Exemplum

Sit Sin. Gr. 0. 1. 29. 09. Sec. compl. 343774682.

0. 2. 58. 18. Sec. compl. 171887348.

Diff. 29. 09. Medium Geom. 2428. circiter 2909. 30

Quotiens 80000. est major quaesito incremento Logarithmorum, quia secantes admodum magni sunt.

19) 1430672. 20) 142.962. 22) 35810.4568.

Appendix

Eodem ferè modo posset etiam demonstrari, differentias secundas esse in duplâ proportionem primarum, tertias in duplâ secundarum. Verbi causâ, cum in ipso principio Logarithmorum differentia prima sit 100.00000. aequalis scilicet ipsi differentiae numerorum 100000.00000. et 99900.00000. secunda seu differentiarum differentia 10000. Tertia 100. Postquam ad numerum 50000.00000. ventum fuerit, Logarithmi
 44 qui'dem proximi differentiam faciunt 200.00000. quae sic se habet ad differentiam primam, sicut numerus 50000.00000 ad maximum
 10 100000.00000. Secunda verò differentia est 40000, in qua 10000. continetur 4^{ter}, Tertia 328. in qua 20. continetur 16^{ies}. At cùm in re insolitâ laboremus penuriâ vocabulorum: quare ne nimium obscura proponamus, demonstratio dimittatur intentata.

XXVIII. Propositio

Nullus numerus exactè exprimit mensuram proportionis inter binos unius Millenarii numeros, methodo superiori constitutam.

Nam quia termini uniuscuiusque proportionis extremi non sunt ad invicem, ut duo numeri ejusdem speciei figurativae, tam multorum graduum, quot vices arbitrariae sunt assumptae ad secundam proportionem
 20 in minima elementa arbitraria: mediae ergò proportionales elementa constituentes sunt ineffabiles per 9. Prop. Differentia igitur inter mediarum proportionalium maximam et terminum per 1000. significatum est et ipsa ineffabilis. Sed mensura proportionis inter 1000. et terminum minorem effabilem in Chiliade est multiplex hujus differentiologiae, id est, et commensurabilis est illi. Ergò mensura haec est terminis incommensurabilis, hoc est, ineffabilis. At nullus ergò numerus, et sic neque Logarithmus exactè exprimit hanc mensuram.

Admonitio

Interest igitur observare, quousque sese proferat hoc vitium. Nam
 30 si proportio 999. 1000. secatur in particulas 1677216. per 24^{tas} proportionales medias, et in particulae unius mensurâ numero expressâ peccetur semisse unitatis: multiplicatus hic error cum ipsâ mensurâ Elementi in numerum Elementorum proportionis, efficiet 8000000. unitates.¹

8) se fehlt 17) ab statt ad

XXIX. Propositio

45

Si mensurae proportionum omnium exprimantur numeris seu Logarithmis: non omnes proportiones sortientur legitimam suam mensurae portionem ad omnem minutiarum scrupulositatem.

Nam per 11. Prop. proportiones numerorum Chiliadis inter se sunt incommensurabiles, omnes verò eorum Logarithmi sunt effabiles per Postul. 3. et sic indicant mensuras inter se commensurabiles: injustâ igitur partitione, si ad minima veniatur.

Nota

Locum idem habet etiam in sinibus, inque proportionem circuli ad circumferentiam, et passim; et interest animadvertere, à quâ figurâ numeri vitium incipiat, ne in numeris eâ posterioribus frustrâ impendamus operam.

XXX. Propositio

Si ad Numerum 1000. Chiliadis maximum referantur aliqui majores, ipsi verò 1000. sit applicatus Logarithmus 0. Logarithmi majoribus competentes erunt privati.

Referatur ad 1000. major 1024. fiatque ut 1024. ad 1000. sic hic ad 97656. 25, sit etiam mensura proportionis inter 100000. 00. et 97656. 25, Logarithmus 2371.6526. Cùm ergò proportio inter 1024. et 1000. sit aequalis proportioni inter 100000.00. et 97656.25. erit eadem mensura ejus. Et si ad 1024. apponeretur Logarithmus 0. tunc ad 1000. apponendus esset Logarithmus 2371.6526. ad numerum verò 97656.25. duplum hujus Logarithmi, quia proportio 102400.00. ad 97656.25. est dupla proportionis 1024. ad 1000. Sed quia ad 1000. in Chiliade apponitur Log. 0. deterso Logarithmo 2371.6526, et à duplo hujus etiam apud 97656.25. simplum est detersum in Canone Chiliadis, ergò etiam à Logarithmo ipsius 1024, cui applicaveramus Logarithmum 0, detergendum est tantundem. Si verò à 0 auferas 2371.6526. relinquitur 2371.6526. privativum cum signo Cossico. ¹

30

7) Ax. statt Postul.

24) 10240000.

26) Logarithmo, et 2371. 6526,

46 METHODVS COMPENDIOSISSIMA CONSTRVENDI
CHILIADA LOGARITHMORVM

Principio inquiratur Logarithmus, qui metitur proportionem inter
100000.00. et 97656.25. quaesitâ mediâ proportionali maximâ vice-
simarum quartarum inter hos terminos, ejusque et numeri totalis pro-
longati differentiâ toties duplicatâ: emerget autem Logarithmus
2371.6526. qui idem est etiam numeri 1024. defectivus per 30. Se-
cundò idem fiat etiam cum proportione inter 1000. et 500: emerget
autem Logarithmus ad 500. iste 69314.7193, qui idem etiam duplica-
10 tionis Logarithmus dicitur.

Jam quia ut 1000. ad 500. sic 1024. ad 512. et hic ad 256. et hic ad
128. et hic ad 64. et hic ad 32. et hic ad 16. et hic ad 8. et hic ad 4. et hic
ad 2. et hic ad 1.

Decupla est igitur proportio 1024. ad 1. proportionis 1000. ad 500.
Quare Logarithmus ad 1. tunc quidem erit decuplus Logarithmi ad
500. cum numerus 1024. acceperit Logarithmum 0. sed ubi ei privati-
vus 2371.6526. fuerit applicatus, etiam ipsius 1. Logarithmus erit di-
47 minuendus tanto. Diminuatur decuplum ¹ duplicantis

693147.1928.

20 2371.6526.

† Hic est Logarithmus unitatis 690775.5422.

in Chiliade nostrâ seu 100.00.

Est igitur 10.00. 921034.0563.

Et quia ut 1. ad 10. sic hic ad 100. et hic ad 1000. tripla est itaque pro-
portio 1000. ad 1. proportionis 1000. ad 100. tertia igitur pars Logarith-
mi ad 1. est apponenda pro Logarithmo ad 100. puta 230258.5141. et
hic etiam est Logarithmus decuplicationis, duae verò tertiae sunt Loga-
rithmus ad 10. scilicet 460517.0282. Quod si duplicantem abstuleris à
Logarithmo ad 1. emergit Logarithmus ad 2. si ab hoc abstuleris Loga-
30 rithmum ad 10. restat Logarithmus quinduplicationis.

Logar. ad 1. 690775.5422.

Duplicans 69314.7193.

Logar. ad 2. 621460.8229.

Logar. ad 10. 460517.0281.

Quinduplicans 160943.7948.

Hisce sic praeparatis jam construantur Logarithmi centum maximo-
rum, initio facto à 999. hâc methodo. Totalis 1000. prolongatus 7.
cyphris dividatur per singulos ordine; quotientes referantur in Ta-

bellam, sunt enim secantes illorum arcuum, quorum complementa habent divisores istos pro sinubus, ut si divisor seu sinus complementi 999. quotiens seu secans erit 100.10010. sin dividat 901. quotiens erit 110.98779. sin 900. quotiens erit 111.11111. Divisio autem continuatur propterea usque ad octavam figuram, ut constet nobis quantum differat medium Arithmeticum à Geometrico, ubi maximè. Vt si, multiplicatis in se duobus ultimis quotientibus, radix quaeratur, ea erit 111.04942. At medium Arithmeticum inter duos quotientes est 111.04945.¹

In structurâ igitur centum minimorum Logarithmorum media haec 10 48
duo inter se sunt aequalia, usque ad septimam figuram inclusivè: in octavâ oritur differentia ternarii. Pone in omnibus centum mediis esse tantam. Si ergò centum media Arithmetica ordine accumules, peccarent illa excessu non majore quàm 00300. ternarii scilicet in tertiâ figurâ post punctum. At verò non est in omnibus centum tanta differentia: in initialibus enim penitus evanescit, ut inter 100.00000. et 100.10010. Hic enim utrumque medium est 100.05005. et differentia occultatur in figuris ulterioribus, si quis illas erueret. Quare centum minimos Logarithmos tutissimè constituimus per accumulationem mediarum proportionalium inter quotientes per 27. Prop. Semper enim additis duobus 20
secantibus ad Logarithmi prioris duplum, conflatur duplum Logarithmi †
posterioris.

Constructis his Logarithmis eligatur Logar. ad 960. qui erit 4082.2001. ferè. Huic si continuè adjeceris duplicantem, emergent Logarithmi ad 480.240.120.60.30.15. Quia proportio 960. ad 15. est sextupla proportionis 1000. ad 500. ita emerget Logarithmus ad 15. qui est 419970.5159. et ad 30. Log. 350655. 7965. Hunc si abstuleris à Logar. ad 10. scilicet

460517.0281.

Restabit 109861.2316. Triplicans Logarithmus.

Hunc ergò aufer à Logar. ad 1. 690775.5422. 30

Restat Logar. ad 3. 580914.3106.

Idem etiam ex Log. ad 900. elici potest, probationis causa. Nam hujus Logar. est 10536.0535. etsi jam hic est nimius ob causam dictam. Nam ut 1000. ad 900. sic 9000. ad 8100. et ut 10000. ad 8100. sic hic ad 6561. Quadruplum ergò Logarithmi ¹ ad 900. respondet numero 6561. (seu 49
90000.00. numero 65610.00.) scilicet 42144.2140. Atqui numerus 65610.00. est ternarii de 10.00. continuè multiplex. Ecce 6561. 2187. 729. 243. 81. 27. 9. 3. 1. Ergò proportio 6561. ad 1. est octupla proportionis 3. ad 1.

5) constat 13) acumules 19) accumulationem 34) 1000. statt 10000. 37) 1000. statt 10.00.

Ergò Logarithmo ad 10.00. scilicet 921034.0563.

Aufer Log. ad 65610.00. scilicet 42144.2140.

Residui 878889.8423.

Pars octava 109861.2303. Est paulò minor
quàm prius.

Scilicet, quia Logarithmus ad 900. et sic etiam ejus quadruplum justo
majus fuit, id verò subtractum à justo Logar. ad. 1. relinquit justo minus.
Et sanè etiam bisectio continua proportionis inter 10. et 9. ostendit ultimas
hujus Logar. ad 900. figuras, non 0535. sed 0513. per 22. minus, cujus
10 quadruplum est 88. peccatum residui, et hujus pars octava 11. ad 2303.
addita facit 2314. planè ut in priori processu invenimus 2316.

Idem etiam ex priori Logar. ad 960. alià viâ, quia 1000. ad 960. est ut
9600. ad 9216. et cum Logarithmus 960. sit 4082. 2001. erit Logar. ad
9216. duplus prioris scilicet 8164. 4002. At verò proportio 9216. ad
9. est decupla proportionis 1000. ad 500. Ecce: 9216. 4608. 2304.
1152. 576. 288. 144. 72. 36. 18. 9. et proportio 9. ad 1. est dupla pro-
portionis 3. ad 1.

Ergò ad decuplum duplicationis 693147.1928.

adde Logar. ad numerum 92160.00. scilicet 8164.4002.

20 701311.5930.

Aufer à Logar. ad 10.00. summam,

quae est Logar. ad 90.00. scilicet 921034.0563.

Restat 219722.4633.

Hujus dimidium 109861.2316.

est Triplicans ut prius.¹

10 Sic ex Log. ad 990. (vel 99000.00.) qui est 1005.0331. vel sine de-
cuplicante, vel per eum pervenimus ad Logarithmum ad 11. (vel
1100.00.) Nam ad 98010.00. erit Logarithmus duplus

scilicet 2010.0675.

30 Hic additur ad quadruplum triplicantis, 439444.9256.

Facit 441454.9931. Log. ad 1210.00.

Hoc aufer à Log. ad 10.00. 921034.0563.

Restat 479579.0632.

Hujus dimidium 239789.5316. Vndecuplat.

Aufer à Logar. ad 1. 690775.5422.

Restat 450986.0106. Log. ad 1100.00.

Sic quia ut 1000. ad 980. sic hic est ad 9604. Duplus igitur Logarithmi
ad 980. est Logarithmus ad 9604. scil. 4040. 5422. Et verò proportio

4) Et statt Est 28) 100.00.) 33) 439579.4632. 36) 450986.0100.

9604. ad 2401. est dupla proportionis 1000. ad 500. et proportio 24010.00. ad 10.00. est quadrupla proportionis 70.00. ad 10.00. Adde igitur duplum duplicantis scilicet 138629.4386.

	ad	4040.5422.	
Summam		142669.9808.	Log. ad 2401.
Aufer à Log. 10.00.		921034.0563.	
Residui		778364.0775.	f
Pars quarta		194591.0194.	Septuplat.
Hoc igitur aufer à Log. ad 100.		230258.5141.	
Restat Logar. ad 700. vel 70000.00.		35667.4947. ¹	10

Atque hic idem ad 700. per continuam bisectionem proportionis 10. 7. per maximam tricesimarum proportionalium exactissimè tantus prodiiit. Vide hanc suprà in Tabellâ. Sic quia ut 1000. ad 950. sic 9500. est ad 9025. Ergò Logarithmus ad 9025. est illius duplus scilicet

		10258.6606.	
Adde duplum quinduplicantis sc.		321887.5896.	
Consurgit		332146.2502.	Log. ad 3610.00.
Hunc aufer à Log. ad 10.00.		921034.0563.	
Residui		588887.8061.	
Dimidium		294443.9030.	Novemdecuplat.
Aufer id à Logar. ad 1. vel ad 100.00.		690775.5422.	20
Restat		396331.6392.	Log. ad 1900.00.

Eundem derivabimus etiam ex 912. cujus Logar. 9211. 5306. et quia proportio 912. ad 57. est quadrupla proportionis 1000. ad 500. Duplicantis adde quadruplum, scilicet 277258. 8771. Consurgit 286470.4077. Huic adde Triplicantem

		109861.2316.	
Prodit		396331.6393.	Log. ad 1900.00.
Eundem ex 950. derivabimus aliâ viâ:			
Logar. ad 95000.00.		5129.3303.	
Decuplans		230258.5141.	30
Logar. ad 9500.00.		235387.8444.	
Quinduplicans		160943.7948.	
Logar. ad 1900.00.		396331.6392. ¹	
Sic ad Logar. ad 988.		1207.2583.	52
Adde duplicantis duplum		138629.4386.	
Venit Logar. ad 247.		139836.6969.	

6) 10.10000. 12) exactissimi 14) Logarithmus ad 9015. 17) 332146.2402. 27) Restat stat Prodit

Novemdecuplicans addatur	294443.9030.
Prodit Logar. ad 13.	434280.5999.
Auferatur à Logarith. ad 1.	690775.5422.
Restat	256494.9423. Tridecuplans.
Sic ad Logar. ad 969.	3149.0672.
Adde triplicantem	109861.2316.
Venit Log. ad 323.	113010.2988.
Adde Novemdecuplum	294443.9030.
Venit Log. ad 17.	407454.2018. Aufer hunc
10 à Logarith. ad 1.	690775.5422.
Restat Septemdecuplans	283321.3404.
Sic ad Logar. ad 986.	1409.8927.
Adde duplicantem	69314.7193.
Et Septemdecuplum	283321.3404.
Venit Logar. ad 29.	354045.9524. Auferatur
à Logar. ad 1.	690775.5422.
Restat	336729.5898. Vndetrigintuplans. ¹
13 Et ad Log. ad 966.	3459.1450.
Adde duplicantem	69314.7193.
20 Et Triplicantem	109861.2316.
Et Septuplicantem	194591.0194.
Venit Log. ad 23.	377226.1153. qui ablatus
à Logar. ad 1.	690775.5422.
Relinquit	313549.4269. Vigintitriplians.
Eundem ex Log. 920. Quia ut 1000. ad 920. sic 9200. ad 8464. Ergo	
Logar. ad 920. duplum	16676.3247.
Adde ad quadruplum duplicantis	277258.8771.
Consurgit	293935.2018. Aufer
à Logar. ad 1. de 10000	921034.0563.
30 Restat	627098.8545.
Dimidium	313549.4272.
Eundem ex Logar. ad 920. jam abundanti sic extruo:	
Ad Logar. ad 920.	8338.1624.
Adde duplicantis duplum	138629.4386.
Et decuplicantem	230258.5141.
Venit Logar. ad 23.	377226.1151.

3) à *fehlt* 16) à Logar. 0. 17) Vndetriginduplans. 23) ad 10.00. 24) Viginticuplans. 29) ad *fehlt*

Sic ad Logar. ad 930.	7257.0706. majusculum
Adde triplicantem	109861.2316.
Et decuplicantem	230258.5141.
Venit Logar. ad 31.	347376.8163. majusculus autem
	8149. verior. Aufer
à Logar. ad 1.	690775.5422.
Relinquit	343398.7259. undetrigintuplicans
	minusculus. ¹

Eundem ex Log. ad 961. elicio sic. Nam quia ut 961. ad 31. sic hoc 54
ad 1. Ergò. 10

Aufer Logarithmum ad 961.	3978.0876.
à Logar. ad 1.	690775.5422.
Restat	686797.4546.
Hujus dimid.	343398.7273. Vndetrigintuplicans.
	Hic est justior.

Jam quia intra millenarium quadratus major non est quàm 961. non igitur opus nobis erit multiplicationibus aliis secundum primos majores ipso 31. Nam omnis primi majoris multiplex infra 1000. secundum aliquem numerum minorem, quàm 31. est multiplex: ut 979. est undecuplus primi 89. 20

Vbi notandum, quod Logarithmus alicujus proportionis multiplicis sit differentia inter Logarithmum unitatis in Chiliade, et inter Logarithmum numeri, qui multiplicitate proportionis prodit. Is igitur Logarithmus Multiplicator additus Logarithmo cujusque numeri, constituit Logarithmum partis, abstractus Logarithmum multiplicis. Idem verum est de Logarithmis proportionum non multiplicium, qui sunt nihil aliud quàm differentiae, vel Multiplicantium Logarithmorum, vel appositorum ad numeros multiplicium denominatores: ut eadem est differentia inter septuplicantem et triplicantem, quae est inter Logar. ad 7. et Logar. ad 3. Haec igitur addita Logarithmo numeri tertii constituit Logarithmum Numeri proportionalis tertio minoris, ablata constituit Logar. Numeri proportionalis tertio majoris. 30

Hoc modo plerorumque Primorum infra 500 Logarithmi eruuntur ex uno centum positorum: nam in primo centenario nullus superest, in secundo soli quinque, 127. 149. 167. 173. 179. in tertio undecim, 211. 223. 251. 257. 263. 269. 271. 277. 281. ¹ 283. 293. in quarto undecim, 37
337. 347. 349. 353. 359. 367. 373. 379. 383. 389. 397. in quinto novem, 401. 409. 419. 421. 431. 433. 439. 443. 449. Summa 36.

12) 69077.5422.

14) Vndetrigintupla.

Restant ii qui sunt inter 500. et 900. primi 59. numero, praetereaue etiam multiplices jam expressorum triginta sex totidem scilicet dupli; ex iis minorum sedecim tripli, primorum septem quadrupli, et ex his priorum quinque quintupli, duorum 127. et 149. sextupli, unius 127. septuplus.

Vt igitur etiam ad hos, et ad primos supra 500. numero 59. Logarithmi habeantur, considerandae sunt differentiae Logarithmorum positorum ad interspersos hisce: et quâ methodo differentiae prius sunt constitutae Logarithmorum 100. minorum serie continua, eadem nunc etiam
10 per Prop. 27. Coroll. 3. et maximè per ejus appendicem, si quis ea dextrè utatur, interrupta serie, et quidem longè facilius hae differentiae sunt supplendae, quia plerunque vel unus solus, vel bini deinceps, rarò tres deinceps Logarithmis suis carebunt, ita ut in accumulatione differentiarum crebrò reversio fiat, ad Logarithmum jam antea certum.¹

CHILIAS LOGARITHMORVM

JOH. KEPLERI

Mathematici Caesarei

SINUS seu Numeri absoluti	LOGARITHMI cum differentiis		SINUS seu Numeri absoluti	LOGARITHMI cum differentiis	H
1	1611809. 60 69314. 72		1. 00	1151292. 57 69314. 72	
2	1542494. 88 40546. 51		2. 00	1081977. 85 40546. 51	10
3	1501948. 37— 28768. 21		3. 00	1041431. 34 28768. 21	H _p
4	1473180. 16 22314. 35		4. 00	1012663. 13 22314. 35	
5	1450865. 80— 18232. 16		5. 00	990348. 78— 18232. 16	
6	1432633. 65 15415. 07		6. 00	972116. 62 15415. 07	
7	1417218. 58 13353. 14		7. 00	956701. 55 13353. 14	20
8	1403865. 44 11778. 30		8. 00	943348. 41— 11778. 30	
9	1392087. 14— 10536. 05		9. 00	931570. 11— 10536. 05	
10	1381551. 08— 69314. 72		10. 00	921034. 06— 69314. 72	
20	1312236. 37— 40546. 51		20. 00	851719. 34— 40546. 51	
30	1271689. 85— 28768. 21		30. 00	811172. 82— 28768. 21	30
40	1242921. 65— 22314. 35		40. 00	782404. 62 22314. 35	
50	1220607. 29 18232. 16		50. 00	760090. 27 18232. 16	
60	1202375. 13— 15415. 07		60. 00	741858. 11— 15415. 07	
70	1186960. 07— 13353. 14		70. 00	726443. 04— 13353. 14	
80	1173606. 93— 11778. 30		80. 00	713089. 90 11778. 30	40
90	1161828. 62 10536. 05		90. 00	701311. 59— 10536. 05	

	ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
	— 3. 26			10536. 05	
	0. 3. 26	100.00	0. 1. 26	690775. 54	0. 4
	— 3. 27			69314. 72	
	0. 6. 53	200.00	0. 2. 53	621460. 82+	0. 7
	— 3. 26			40546. 51	
10	0. 10. 19	300.00	0. 4. 19	580914. 31	0. 11
	— 3. 26			28768. 21	
	0. 13. 45	400.00	0. 5. 46	552146. 10+	0. 14
	— 3. 27			22314. 35	
H 2	0. 17. 12	500.00	0. 7. 12	529831. 75—	0. 18
	— 3. 26			18232. 16	
	0. 20. 38	600.00	0. 8. 38	511599. 59	0. 22
	— 3. 26			15415. 07	
	0. 24. 4	700.00	0. 10. 5	496184. 52+	0. 25
	— 3. 26			13353. 14	
20	0. 27. 30	800.00	0. 11. 31	482831. 38+	0. 29
	— 3. 26			11778. 30	
	0. 30. 56	900.00	0. 12. 58	471053. 08	0. 32
	— 3. 27			10536. 05	
	0. 34. 23	1000.00	0. 14. 24	460517. 03	0. 36
	— 3. 26			9531. 02	
	0. 37. 49	1100.00	0. 15. 50	450986. 01	0. 40
	— 3. 26			8701. 14	
	0. 41. 15	1200.00	0. 17. 17	442284. 87	0. 43
	— 3. 27			8004. 27	
30	0. 44. 42	1300.00	0. 18. 43	434280. 60	0. 47
	— 3. 26			7410. 80	
	0. 48. 8	1400.00	0. 20. 10	426869. 80+	0. 50
	— 3. 26			6899. 28	
	0. 51. 34	1500.00	0. 21. 36	419970. 52—	0. 54
	— 3. 26			6453. 85	
	0. 55. 0	1600.00	0. 23. 2	413516. 67—	0. 58
	— 3. 27			6062. 47	
	0. 58. 27	1700.00	0. 24. 29	407454. 20	1. 1
	— 3. 26			5715. 84	
40	1. 1. 53	1800.00	0. 25. 55	401738. 36	1. 5
	— 3. 27			5406. 72	
	1. 5. 20	1900.00	0. 27. 22	396331. 64	1. 8
	— 3. 26			5129. 33	
	1. 8. 46	2000.00	0. 28. 48	391202. 31	1. 12
	— 3. 26			4879. 02	
	0. 12. 12	2100.00	0. 30. 14	386323. 29	1. 16
	— 3. 26			4652. 00	
	1. 15. 38	2200.00	0. 31. 41	381671. 29	1. 19
	— 3. 27			4445. 17	
50	1. 19. 5	2300.00	0. 33. 7	377226. 12—	1. 23
	— 3. 26			4255. 97	
	1. 22. 31	2400.00	0. 34. 34	372970. 15+	1. 26
	— 3. 26			4082. 20	
H 20	1. 25. 57	2500.00	0. 36. 0	368887. 95+	1. 30
	— 3. 27			3922. 07	
	1. 29. 24	2600.00	0. 37. 26	364965. 88	1. 34
	— 3. 26			3774. 03	
	1. 32. 50	2700.00	0. 38. 53	361191. 85—	1. 37
	— 3. 26			3636. 77	
60	1. 36. 16	2800.00	0. 40. 19	357555. 08+	1. 41
	— 3. 27			3509. 13	
	1. 39. 43	2900.00	0. 41. 46	354045. 95	1. 44
	— 3. 26			3390. 15	
	1. 43. 9	3000.00	0. 43. 12	350655. 80—	1. 48
	— 3. 26			3278. 99	

ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
— 3. 26			3278. 99	
1. 46. 35	3100.00	0. 44. 38	347376. 81—	1. 52
— 3. 27			3174. 86	
1. 50. 2	3200.00	0. 46. 5	344201. 95—	1. 55
— 3. 26			3077. 17	
1. 53. 28	3300.00	0. 47. 31	341124. 78	1. 59
— 3. 27			2985. 29	
1. 56. 55	3400.00	0. 48. 58	338139. 49—	2. 2
— 3. 26			2898. 76	
2. 0. 21	3500.00	0. 50. 24	335240. 73	2. 6
— 3. 26			2817. 08	
2. 3. 47	3600.00	0. 51. 50	332423. 65—	2. 10
— 3. 26			2739. 90	
2. 7. 13	3700.00	0. 53. 17	329683. 75—	2. 13
— 3. 27			2666. 83	
2. 10. 40	3800.00	0. 54. 43	327016. 92	2. 17
— 3. 27			2597. 55	
2. 14. 7	3900.00	0. 56. 10	324419. 37—	2. 20
— 3. 26			2531. 78	
2. 17. 33	4000.00	0. 57. 36	321887. 59	2. 24
— 3. 26			2469. 26	
2. 20. 59	4100.00	0. 59. 2	319418. 33	2. 28
— 3. 27			2409. 75	
2. 24. 26	4200.00	1. 0. 29	317008. 58—	2. 31
— 3. 26			2353. 05	
2. 27. 52	4300.00	1. 1. 55	314655. 53—	2. 35
— 3. 27			2298. 95	
2. 31. 19	4400.00	1. 3. 22	312356. 58—	2. 38
— 3. 26			2247. 29	
2. 34. 45	4500.00	1. 4. 48	310109. 29—	2. 42
— 3. 27			2197. 89	
2. 38. 12	4600.00	1. 6. 14	307911. 40—	2. 46
— 3. 26			2150. 62	
2. 41. 38	4700.00	1. 7. 41	305760. 78—	2. 49
— 3. 26			2105. 34	
2. 45. 4	4800.00	1. 9. 7	303655. 44—	2. 53
— 3. 27			2061. 93	
2. 48. 31	4900.00	1. 10. 34	301593. 51—	2. 56
— 3. 27			2020. 27	
2. 51. 58	5000.00	1. 12. 0	299573. 24—	3. 0
— 3. 27			1980. 27	
2. 55. 25	5100.00	1. 13. 26	297592. 97—	3. 4
— 3. 26			1941. 81	
2. 58. 51	5200.00	1. 14. 53	295651. 16—	3. 7
— 3. 27			1904. 81	
3. 2. 18	5300.00	1. 16. 19	293746. 35—	3. 11
— 3. 27			1869. 22	
3. 5. 45	5400.00	1. 17. 46	291877. 13—	3. 14
— 3. 26			1834. 91	
3. 9. 11	5500.00	1. 19. 12	290042. 22—	3. 18
— 3. 27			1801. 85	
3. 12. 38	5600.00	1. 20. 38	288240. 37	3. 22
— 3. 26			1769. 96	
3. 16. 4	5700.00	1. 22. 5	286470. 41	3. 25
— 3. 27			1739. 17	
3. 19. 31	5800.00	1. 23. 31	284731. 24—	3. 29
— 3. 27			1709. 45	
3. 22. 58	5900.00	1. 24. 58	283021. 79	3. 32
— 3. 26			1680. 71	
3. 26. 24	6000.00	1. 26. 24	281341. 08	3. 36
— 3. 27			1652. 93	

	ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
	— 3. 27			1652. 93	
	3. 29. 51	6100.00	1. 27. 50	279688. 15	3. 40
	— 3. 26			1626. 05	
	3. 33. 17	6200.00	1. 29. 17	278062. 10—	3. 43
	— 3. 27			1600. 04	
	3. 36. 44	6300.00	1. 30. 43	276462. 06+	3. 47
10	— 3. 27			1574. 83	
	3. 40. 11	6400.00	1. 32. 10	274887. 23	3. 50
	— 3. 26			1550. 42	
<i>H3v</i>	3. 43. 37	6500.00	1. 33. 36	273336. 81—	3. 54
	— 3. 27			1526. 75	
	3. 47. 4	6600.00	1. 35. 2	271810. 06	3. 58
	— 3. 26			1503. 79	
	3. 50. 30	6700.00	1. 36. 29	270306. 27+	4. 1
	— 3. 27			1481. 50	
	3. 53. 57	6800.00	1. 37. 55	268824. 77+	4. 5
20	— 3. 27			1459. 88	
	3. 57. 24	6900.00	1. 39. 22	267364. 89	4. 8
	— 3. 26			1438. 88	
	4. 0. 50	7000.00	1. 40. 48	265926. 01	4. 12
	— 3. 27			1418. 46	
	4. 4. 17	7100.00	1. 42. 14	264507. 55	4. 16
	— 3. 27			1398. 62	
	4. 7. 44	7200.00	1. 43. 41	263108. 93—	4. 19
	— 3. 26			1379. 33	
	4. 11. 10	7300.00	1. 45. 7	261729. 60—	4. 23
30	— 3. 27			1360. 57	
	4. 14. 37	7400.00	1. 46. 34	260369. 03—	4. 26
	— 3. 27			1342. 31	
	4. 18. 4	7500.00	1. 48. 0	259026. 72+	4. 30
	— 3. 27			1324. 52	
	4. 21. 31	7600.00	1. 49. 26	257702. 20	4. 34
	— 3. 26			1307. 21	
	4. 24. 57	7700.00	1. 50. 53	256394. 99+	4. 37
	— 3. 27			1290. 34	
	4. 28. 24	7800.00	1. 52. 19	255104. 65+	4. 41
40	— 3. 27			1273. 90	
	4. 31. 51	7900.00	1. 53. 46	253830. 75	4. 44
	— 3. 27			1257. 88	
	4. 35. 18	8000.00	1. 55. 12	252572. 87	4. 48
	— 3. 27			1242. 25	
	4. 38. 45	8100.00	1. 56. 38	251330. 62	4. 52
	— 3. 27			1227. 01	
	4. 42. 12	8200.00	1. 58. 5	250103. 61	4. 55
	— 3. 26			1212. 14	
	4. 45. 38	8300.00	1. 59. 31	248891. 47+	4. 59
50	— 3. 27			1197. 61	
	4. 49. 5	8400.00	2. 0. 58	247693. 86—	5. 2
	— 3. 27			1183. 45	
<i>H4</i>	4. 52. 32	8500.00	2. 2. 24	246510. 41	5. 6
	— 3. 27			1169. 60	
	4. 55. 59	8600.00	2. 3. 50	245340. 81—	5. 10
	— 3. 27			1156. 09	
	4. 59. 26	8700.00	2. 5. 17	244184. 72+	5. 13
	— 3. 27			1142. 86	
	5. 2. 53	8800.00	2. 6. 43	243041. 86—	5. 17
60	— 3. 27			1129. 96	
	5. 6. 20	8900.00	2. 8. 10	241911. 90	5. 20
	— 3. 28			1117. 33	
	5. 9. 48	9000.00	2. 9. 36	240794. 57—	5. 24
	— 3. 27			1104. 99	

ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>sen Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
— 3. 27			1104. 99	
5. 13. 15	9100.00	2. 11. 2	239689. 58+	5. 28
— 3. 27			1092. 90	
5. 16. 42	9200.00	2. 12. 29	238596. 68	5. 31
— 3. 27			1081. 09	
5. 20. 9	9300.00	2. 13. 55	237515. 59	5. 35
— 3. 27			1069. 53	
5. 23. 36	9400.00	2. 15. 22	236446. 06—	5. 38
— 3. 27			1058. 21	
5. 27. 3	9500.00	2. 16. 48	235387. 85—	5. 42
— 3. 28			1047. 13	
5. 30. 31	9600.00	2. 18. 14	234340. 72—	5. 46
— 3. 27			1036. 28	
5. 33. 58	9700.00	2. 19. 41	233304. 44—	5. 49
— 3. 27			1025. 65	
5. 37. 25	9800.00	2. 21. 7	232278. 79—	5. 53
— 3. 27			1015. 24	
5. 40. 52	9900.00	2. 22. 34	231263. 55—	5. 56
— 3. 28			1005. 03	
5. 44. 20	10000.00	2. 24. 0	230258. 52—	6. 0
— 3. 27			995. 04	
5. 47. 47	10100.00	2. 25. 26	229263. 48+	6. 4
— 3. 28			985. 23	
5. 51. 15	10200.00	2. 26. 53	228278. 25+	6. 7
— 3. 28			975. 61	
5. 54. 43	10300.00	2. 28. 19	227302. 64	6. 11
— 3. 27			966. 20	
5. 58. 10	10400.00	2. 29. 46	226336. 44+	6. 14
— 3. 28			956. 94	
6. 1. 38	10500.00	2. 31. 12	225379. 50	6. 18
— 3. 27			947. 87	
6. 5. 5	10600.00	2. 32. 38	224431. 63—	6. 22
— 3. 27			938. 98	
6. 8. 32	10700.00	2. 34. 5	223492. 65+	6. 25
— 3. 28			930. 24	
6. 12. 0	10800.00	2. 35. 31	222562. 41+	6. 29
— 3. 27			921. 66	
6. 15. 27	10900.00	2. 36. 58	221640. 75	6. 32
— 3. 28			913. 25	
6. 18. 55	11000.00	2. 38. 24	220727. 50—	6. 36
— 3. 27			904. 99	
6. 22. 22	11100.00	2. 39. 50	219822. 51+	6. 40
— 3. 28			896. 86	
6. 25. 50	11200.00	2. 41. 17	218925. 65	6. 43
— 3. 28			888. 90	
6. 29. 18	11300.00	2. 42. 43	218036. 75	6. 47
— 3. 27			881. 06	
6. 32. 45	11400.00	2. 44. 10	217155. 69	6. 50
— 3. 28			873. 37	
6. 36. 13	11500.00	2. 45. 36	216282. 32	6. 54
— 3. 28			865. 80	
6. 39. 41	11600.00	2. 47. 2	215416. 52—	6. 58
— 3. 27			858. 38	
6. 43. 8	11700.00	2. 48. 29	214558. 14	7. 1
— 3. 28			851. 07	
6. 46. 36	11800.00	2. 49. 55	213707. 07	7. 5
— 3. 28			843. 88	
6. 50. 4	11900.00	2. 51. 22	212863. 19—	7. 8
— 3. 27			836. 83	
6. 53. 31	12000.00	2. 52. 48	212026. 36	7. 12
— 3. 28			829. 88	

10

20

30

H₄^v

40

50

60

	ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
	— 3. 28			829. 88	
	6. 56. 59	12100.00	2. 54. 14	211196. 48	7. 16
	— 3. 28			823. 05	
	7. 0. 27	12200.00	2. 55. 41	210373. 43	7. 19
	— 3. 28			816. 33	
10	7. 3. 55	12300.00	2. 57. 7	209557. 10	7. 23
	— 3. 27			809. 72	
	7. 7. 22	12400.00	2. 58. 34	208747. 38—	7. 26
	— 3. 28			803. 22	
I	7. 10. 50	12500.00	3. 0. 0	207944. 16	7. 30
	— 3. 28			796. 82	
	7. 14. 18	12600.00	3. 1. 26	207147. 34+	7. 34
	— 3. 28			790. 51	
	7. 17. 46	12700.00	3. 2. 53	206356. 83—	7. 37
	— 3. 28			784. 32	
20	7. 21. 14	12800.00	3. 4. 19	205572. 51	7. 41
	— 3. 28			778. 22	
	7. 24. 42	12900.00	3. 5. 46	204794. 29+	7. 44
	— 3. 28			772. 20	
	7. 28. 10	13000.00	3. 7. 12	204022. 09—	7. 48
	— 3. 29			766. 29	
	7. 31. 39	13100.00	3. 8. 38	203255. 80	7. 52
	— 3. 28			760. 46	
	7. 35. 7	13200.00	3. 10. 5	202495. 34	7. 55
	— 3. 28			754. 72	
30	7. 38. 35	13300.00	3. 11. 31	201740. 62	7. 59
	— 3. 28			749. 07	
	7. 42. 3	13400.00	3. 12. 58	200991. 55+	8. 2
	— 3. 28			743. 50	
	7. 45. 31	13500.00	3. 14. 24	200248. 05+	8. 6
	— 3. 28			738. 00	
	7. 48. 59	13600.00	3. 15. 50	199510. 05+	8. 10
	— 3. 29			732. 61	
	7. 52. 28	13700.00	3. 17. 17	198777. 44	8. 13
	— 3. 28			727. 27	
40	7. 55. 56	13800.00	3. 18. 43	198050. 17	8. 17
	— 3. 28			722. 03	
	7. 59. 24	13900.00	3. 20. 10	197328. 14	8. 20
	— 3. 28			716. 85	
	8. 2. 52	14000.00	3. 21. 36	196611. 29	8. 24
	— 3. 28			711. 74	
	8. 6. 20	14100.00	3. 23. 2	195899. 55—	8. 28
	— 3. 29			706. 72	
	8. 9. 49	14200.00	3. 24. 29	195192. 83	8. 31
	— 3. 28			701. 76	
50	8. 13. 17	14300.00	3. 25. 55	194491. 07+	8. 35
	— 3. 28			696. 86	
	8. 16. 45	14400.00	3. 27. 22	193794. 21—	8. 38
	— 3. 29			692. 05	
Iv	8. 20. 14	14500.00	3. 28. 48	193102. 16	8. 42
	— 3. 28			687. 28	
	8. 23. 42	14600.00	3. 30. 14	192414. 88—	8. 46
	— 3. 28			682. 61	
	8. 27. 10	14700.00	3. 31. 41	191732. 27+	8. 49
	— 3. 29			677. 96	
60	8. 30. 39	14800.00	3. 33. 7	191054. 31—	8. 53
	— 3. 28			673. 41	
	8. 34. 7	14900.00	3. 34. 34	190380. 90+	8. 56
	— 3. 29			668. 90	
	8. 37. 36	15000.00	3. 36. 0	189712. 00+	9. 0
	— 3. 29			664. 45	

ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
— 3. 29			664. 45	
8. 41. 5	15100.00	3. 37. 26	189047. 55	9. 4
— 3. 28			660. 07	
8. 44. 33	15200.00	3. 38. 53	188387. 48	9. 7
— 3. 29			655. 74	
8. 48. 2	15300.00	3. 40. 19	187731. 74	9. 11
— 3. 29			651. 47	
8. 51. 31	15400.00	3. 41. 46	187080. 27+	9. 14
— 3. 28			647. 25	
8. 54. 59	15500.00	3. 43. 12	186433. 02+	9. 18
— 3. 29			643. 09	
8. 58. 28	15600.00	3. 44. 38	185789. 93+	9. 22
— 3. 29			638. 98	
9. 1. 57	15700.00	3. 46. 5	185150. 95+	9. 25
— 3. 29			634. 92	
9. 5. 26	15800.00	3. 47. 31	184516. 03	9. 29
— 3. 29			630. 92	
9. 8. 55	15900.00	3. 48. 58	183885. 11+	9. 32
— 3. 30			626. 96	
9. 12. 25	16000.00	3. 50. 24	183258. 15	9. 36
— 3. 29			623. 06	
9. 15. 54	16100.00	3. 51. 50	182635. 09+	9. 40
— 3. 29			619. 19	
9. 19. 23	16200.00	3. 53. 17	182015. 90	9. 43
— 3. 29			615. 38	
9. 22. 52	16300.00	3. 54. 43	181400. 52	9. 47
— 3. 29			611. 63	
9. 26. 21	16400.00	3. 56. 10	180788. 89	9. 50
— 3. 30			607. 90	
9. 29. 51	16500.00	3. 57. 36	180180. 99—	9. 54
— 3. 29			604. 24	
9. 33. 20	16600.00	3. 59. 2	179576. 75+	9. 58
— 3. 29			600. 60	
9. 36. 49	16700.00	4. 0. 29	178976. 15+	10. 1
— 3. 29			597. 01	
9. 40. 18	16800.00	4. 1. 55	178379. 14—	10. 5
— 3. 29			593. 48	
9. 43. 47	16900.00	4. 3. 22	177785. 66	10. 8
— 3. 29			589. 97	
9. 47. 16	17000.00	4. 4. 48	177195. 69	10. 12
— 3. 30			586. 51	
9. 50. 46	17100.00	4. 6. 14	176609. 18—	10. 16
— 3. 29			583. 09	
9. 54. 15	17200.00	4. 7. 41	176026. 09—	10. 19
— 3. 29			579. 72	
9. 57. 44	17300.00	4. 9. 7	175446. 37	10. 23
— 3. 29			576. 37	
10. 1. 13	17400.00	4. 10. 34	174870. 00+	10. 26
— 3. 30			573. 07	
10. 4. 43	17500.00	4. 12. 0	174296. 93+	10. 30
— 3. 29			569. 79	
10. 8. 12	17600.00	4. 13. 26	173727. 14—	10. 34
— 3. 30			566. 58	
10. 11. 42	17700.00	4. 14. 53	173160. 56	10. 37
— 3. 30			563. 38	
10. 15. 12	17800.00	4. 16. 19	172597. 18	10. 41
— 3. 30			560. 23	
10. 18. 42	17900.00	4. 17. 46	172036. 95	10. 44
— 3. 29			557. 10	
10. 22. 11	18000.00	4. 19. 12	171479. 85—	10. 48
— 3. 30			554. 02	

10

20

30

I 2

40

50

60

	ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
	— 3. 30			554. 02	
	10. 25. 41	18100.00	4. 20. 38	170925. 83	10. 52
	— 3. 30			550. 97	
	10. 29. 11	18200.00	4. 22. 5	170374. 86+	10. 55
	— 3. 30			547. 94	
	10. 32. 41	18300.00	4. 23. 31	169826. 92—	10. 59
10	— 3. 30			544. 96	
	10. 36. 11	18400.00	4. 24. 58	169281. 96—	11. 2
	— 3. 29			542. 01	
120	10. 39. 40	18500.00	4. 26. 24	168739. 95	11. 6
	— 3. 30			539. 08	
	10. 43. 10	18600.00	4. 27. 50	168200. 87	11. 10
	— 3. 30			536. 20	
	10. 46. 40	18700.00	4. 29. 17	167664. 67	11. 13
	— 3. 30			533. 33	
20	10. 50. 10	18800.00	4. 30. 43	167131. 34	11. 17
	— 3. 30			530. 51	
	10. 53. 40	18900.00	4. 32. 10	166600. 83	11. 20
	— 3. 30			527. 70	
	10. 57. 10	19000.00	4. 33. 36	166073. 13—	11. 24
	— 3. 31			524. 94	
	11. 0. 41	19100.00	4. 35. 2	165548. 19	11. 28
	— 3. 30			522. 19	
	11. 4. 11	19200.00	4. 36. 29	165026. 00—	11. 31
	— 3. 30			519. 49	
30	11. 7. 41	19300.00	4. 37. 55	164506. 51+	11. 35
	— 3. 30			516. 79	
	11. 11. 11	19400.00	4. 39. 22	163989. 72—	11. 38
	— 3. 30			514. 15	
	11. 14. 41	19500.00	4. 40. 48	163475. 57+	11. 42
	— 3. 31			511. 50	
	11. 18. 12	19600.00	4. 42. 14	162964. 07—	11. 46
	— 3. 30			508. 91	
	11. 21. 42	19700.00	4. 43. 41	162455. 16	11. 49
	— 3. 30			506. 33	
40	11. 25. 12	19800.00	4. 45. 7	161948. 83—	11. 53
	— 3. 30			503. 78	
	11. 28. 42	19900.00	4. 46. 34	161445. 05	11. 56
	— 3. 31			501. 25	
	11. 32. 13	20000.00	4. 48. 0	160943. 80—	12. 0
	— 3. 30			498. 76	
	11. 35. 43	20100.00	4. 49. 26	160445. 04+	12. 4
	— 3. 31			496. 28	
	11. 39. 14	20200.00	4. 50. 53	159948. 76+	12. 7
	— 3. 31			493. 83	
50	11. 42. 45	20300.00	4. 52. 19	159454. 93+	12. 11
	— 3. 30			491. 40	
	11. 46. 15	20400.00	4. 53. 46	158963. 53+	12. 14
	— 3. 31			489. 00	
13	11. 49. 46	20500.00	4. 55. 12	158474. 53+	12. 18
	— 3. 31			486. 61	
	11. 53. 17	20600.00	4. 56. 38	157987. 92	12. 22
	— 3. 31			484. 26	
	11. 56. 48	20700.00	4. 58. 5	157503. 66—	12. 25
	— 3. 31			481. 94	
60	12. 0. 19	20800.00	4. 59. 31	157021. 72+	12. 29
	— 3. 30			479. 61	
	12. 3. 49	20900.00	5. 0. 58	156542. 11—	12. 32
	— 3. 31			477. 33	
	12. 7. 20	21000.00	5. 2. 24	156064. 78	12. 36
	— 3. 31			475. 06	

ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
— 3. 31			475. 06	
12. 10. 51	21100.00	5. 3. 50	155589. 72—	12. 40
— 3. 31			472. 81	
12. 14. 22	21200.00	5. 5. 17	155116. 91—	12. 43
— 3. 31			470. 59	
12. 17. 53	21300.00	5. 6. 43	154646. 32—	12. 47
— 3. 31			468. 39	
12. 21. 24	21400.00	5. 8. 10	154177. 93—+	12. 50
— 3. 31			466. 20	
12. 24. 55	21500.00	5. 9. 36	153711. 73	12. 54
— 3. 32			464. 04	
12. 28. 27	21600.00	5. 11. 2	153247. 69—+	12. 58
— 3. 31			461. 89	
12. 31. 58	21700.00	5. 12. 29	152785. 80	13. 1
— 3. 31			459. 77	
12. 35. 29	21800.00	5. 13. 55	152326. 03	13. 5
— 3. 31			457. 67	
12. 39. 0	21900.00	5. 15. 22	151868. 36	13. 8
— 3. 32			455. 58	
12. 42. 32	22000.00	5. 16. 48	151412. 78—	13. 12
— 3. 31			453. 52	
12. 46. 3	22100.00	5. 18. 14	150959. 26	13. 16
— 3. 31			451. 47	
12. 49. 34	22200.00	5. 19. 41	150507. 79—+	13. 19
— 3. 32			449. 43	
12. 53. 6	22300.00	5. 21. 7	150058. 36—	13. 23
— 3. 31			447. 43	
12. 56. 37	22400.00	5. 22. 34	149610. 93	13. 26
— 3. 32			445. 44	
13. 0. 9	22500.00	5. 24. 0	149165. 49	13. 30
— 3. 32			443. 46	
13. 3. 41	22600.00	5. 25. 26	148722. 03	13. 34
— 3. 32			441. 50	
13. 7. 13	22700.00	5. 26. 53	148280. 53	13. 37
— 3. 32			439. 56	
13. 10. 45	22800.00	5. 28. 19	147840. 97	13. 41
— 3. 32			437. 64	
13. 14. 17	22900.00	5. 29. 46	147403. 33—+	13. 44
— 3. 33			435. 73	
13. 17. 50	23000.00	5. 31. 12	146967. 60	13. 48
— 3. 32			433. 84	
13. 21. 22	23100.00	5. 32. 38	146533. 76	13. 52
— 3. 32			431. 96	
13. 24. 54	23200.00	5. 34. 5	146101. 80—	13. 55
— 3. 32			430. 11	
13. 28. 26	23300.00	5. 35. 31	145671. 69	13. 59
— 3. 32			428. 27	
13. 31. 58	23400.00	5. 36. 58	145243. 42	14. 2
— 3. 33			426. 44	
13. 35. 31	23500.00	5. 38. 24	144816. 98	14. 6
— 3. 32			424. 63	
13. 39. 3	23600.00	5. 39. 50	144392. 35	14. 10
— 3. 32			422. 83	
13. 42. 35	23700.00	5. 41. 17	143969. 52	14. 13
— 3. 32			421. 05	
13. 46. 7	23800.00	5. 42. 43	143548. 47—	14. 17
— 3. 33			419. 29	
13. 49. 40	23900.00	5. 44. 10	143129. 18—	14. 20
— 3. 32			417. 54	
13. 53. 12	24000.00	5. 45. 36	142711. 64	14. 24
— 3. 32			415. 80	

10

20

30

130

40

50

60

	ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
	— 3. 32			415. 80	
	13. 56. 44	24100.00	5. 47. 2	142295. 84	14. 28
	— 3. 33			414. 08	
	14. 0. 17	24200.00	5. 48. 29	141881. 76	14. 31
	— 3. 33			412. 37	
10	14. 3. 50	24300.00	5. 49. 55	141469. 39	14. 35
	— 3. 32			410. 68	
	14. 7. 22	24400.00	5. 51. 22	141058. 71	14. 38
	— 3. 33			409. 00	
I 4	14. 10. 55	24500.00	5. 52. 48	140649. 71	14. 42
	— 3. 33			407. 33	
	14. 14. 28	24600.00	5. 54. 14	140242. 38	14. 46
	— 3. 33			405. 68	
	14. 18. 1	24700.00	5. 55. 41	139836. 70	14. 49
	— 3. 33			404. 04	
	14. 21. 34	24800.00	5. 57. 7	139432. 66—	14. 53
20	— 3. 32			402. 42	
	14. 25. 6	24900.00	5. 58. 34	139030. 24	14. 56
	— 3. 33			400. 80	
	14. 28. 39	25000.00	6. 0. 0	138629. 44	15. 0
	— 3. 33			399. 20	
	14. 32. 12	25100.00	6. 1. 26	138230. 24—	15. 4
	— 3. 33			397. 62	
	14. 35. 45	25200.00	6. 2. 53	137832. 62+	15. 7
	— 3. 33			396. 04	
	14. 39. 18	25300.00	6. 4. 19	137436. 58+	15. 11
30	— 3. 33			394. 47	
	14. 42. 51	25400.00	6. 5. 46	137042. 11—	15. 14
	— 3. 34			392. 93	
	14. 46. 25	25500.00	6. 7. 12	136649. 18—	15. 18
	— 3. 33			391. 39	
	14. 49. 58	25600.00	6. 8. 38	136257. 79	15. 22
	— 3. 33			389. 87	
	14. 53. 31	25700.00	6. 10. 5	135867. 92+	15. 25
	— 3. 34			388. 35	
	14. 57. 5	25800.00	6. 11. 31	135479. 57+	15. 29
40	— 3. 33			386. 84	
	15. 0. 38	25900.00	6. 12. 58	135092. 73—	15. 32.
	— 3. 34			385. 36	
	15. 4. 12	26000.00	6. 14. 24	134707. 37—	15. 36
	— 3. 33			383. 88	
	15. 7. 45	26100.00	6. 15. 50	134323. 49	15. 40
	— 3. 34			382. 41	
	15. 11. 19	26200.00	6. 17. 17	133941. 08	15. 43
	— 3. 34			380. 95	
	15. 14. 53	26300.00	6. 18. 43	133560. 13	15. 47
50	— 3. 33			379. 51	
	15. 18. 26	26400.00	6. 20. 10	133180. 62	15. 50
	— 3. 34			378. 07	
I 4 v	15. 22. 0	26500.00	6. 21. 36	132802. 55	15. 54
	— 3. 34			376. 65	
	15. 25. 34	26600.00	6. 23. 2	132425. 90	15. 58
	— 3. 35			375. 23	
	15. 29. 9	26700.00	6. 24. 29	132050. 67—	16. 1
	— 3. 34			373. 84	
	15. 32. 43	26800.00	6. 25. 55	131676. 83+	16. 5
60	— 3. 34			372. 43	
	15. 36. 17	26900.00	6. 27. 22	131304. 40	16. 8
	— 3. 35			371. 07	
	15. 39. 52	27000.00	6. 28. 48	130933. 33+	16. 12
	— 3. 34			369. 67	

ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
— 3. 34			369. 67	
15. 43. 26	27100.00	6. 30. 14	130563. 66—	16. 16
— 3. 34			368. 33	
15. 47. 0	27200.00	6. 31. 41	130195. 33—	16. 19
— 3. 35			366. 98	
15. 50. 35	27300.00	6. 33. 7	129828. 35	16. 23
— 3. 34			365. 63	
15. 54. 9	27400.00	6. 34. 34	129462. 72	16. 26
— 3. 35			364. 30	
15. 57. 44	27500.00	6. 36. 0	129098. 42—+	16. 30
— 3. 34			362. 97	
16. 1. 18	27600.00	6. 37. 26	128735. 45	16. 34
— 3. 35			361. 67	
16. 4. 53	27700.00	6. 38. 53	128373. 78	16. 37
— 3. 35			360. 36	
16. 8. 28	27800.00	6. 40. 19	128013. 42	16. 41
— 3. 34			359. 07	
16. 12. 2	27900.00	6. 41. 46	127654. 35	16. 44
— 3. 35			357. 78	
16. 15. 37	28000.00	6. 43. 12	127296. 57	16. 48
— 3. 35			356. 51	
16. 19. 12	28100.00	6. 44. 38	126940. 06—+	16. 52
— 3. 35			355. 23	
16. 22. 47	28200.00	6. 46. 5	126584. 83—	16. 55
— 3. 35			353. 98	
16. 26. 22	28300.00	6. 47. 31	126230. 85—+	16. 59
— 3. 35			352. 74	
16. 29. 57	28400.00	6. 48. 58	125878. 11	17. 2
— 3. 36			351. 50	
16. 33. 33	28500.00	6. 50. 24	125526. 61—+	17. 6
— 3. 35			350. 26	
16. 37. 8	28600.00	6. 51. 50	125176. 35—+	17. 10
— 3. 35			349. 04	
16. 40. 43	28700.00	6. 53. 17	124827. 31	17. 13
— 3. 35			347. 82	
16. 44. 18	28800.00	6. 54. 43	124479. 49—	17. 17
— 3. 36			346. 63	
16. 47. 54	28900.00	6. 56. 10	124132. 86	17. 20
— 3. 35			345. 42	
16. 51. 29	29000.00	6. 57. 36	123787. 44	17. 24
— 3. 35			344. 24	
16. 55. 4	29100.00	6. 59. 2	123443. 20—+	17. 28
— 3. 36			343. 04	
16. 58. 40	29200.00	7. 0. 29	123100. 16—	17. 31
— 3. 35			341. 89	
17. 2. 15	29300.00	7. 1. 55	122758. 27	17. 35
— 3. 36			340. 72	
17. 5. 51	29400.00	7. 3. 22	122417. 55—+	17. 38
— 3. 36			339. 55	
17. 9. 27	29500.00	7. 4. 48	122078. 00—	17. 42
— 3. 35			338. 41	
17. 13. 2	29600.00	7. 6. 14	121739. 59—	17. 46
— 3. 36			337. 27	
17. 16. 38	29700.00	7. 7. 41	121402. 32	17. 49
— 3. 36			336. 14	
17. 20. 14	29800.00	7. 9. 7	121066. 18—+	17. 53
— 3. 36			335. 01	
17. 23. 50	29900.00	7. 10. 34	120731. 17—+	17. 56
— 3. 37			333. 89	
17. 27. 27	30000.00	7. 12. 0	120397. 28—+	18. 0
— 3. 36			332. 78	

10

20

30

K

40

50

60

	ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
	— 3. 36			332. 78	
	17. 31. 3	30100.00	7. 13. 26	120064. 50+	18. 4
	— 3. 36			331. 67	
	17. 34. 39	30200.00	7. 14. 53	119732. 83	18. 7
	— 3. 37			330. 58	
	17. 38. 16	30300.00	7. 16. 19	119402. 25	18. 11
10	— 3. 36			329. 49	
	17. 41. 52	30400.00	7. 17. 46	119072. 76	18. 14
	— 3. 37			328. 41	
K ₁	17. 45. 29	30500.00	7. 19. 12	118744. 35+	18. 18
	— 3. 37			327. 33	
	17. 49. 6	30600.00	7. 20. 38	118417. 02	18. 22
	— 3. 36			326. 26	
	17. 52. 42	30700.00	7. 22. 5	118090. 76—	18. 25
	— 3. 37			325. 21	
	17. 56. 19	30800.00	7. 23. 31	117765. 55+	18. 29
20	— 3. 37			324. 15	
	17. 59. 56	30900.00	7. 24. 58	117441. 40+	18. 32
	— 3. 37			323. 10	
	18. 3. 33	31000.00	7. 26. 24	117118. 30+	18. 36
	— 3. 37			322. 06	
	18. 7. 10	31100.00	7. 27. 50	116796. 24	18. 40
	— 3. 37			321. 03	
	18. 10. 47	31200.00	7. 29. 17	116475. 21+	18. 43
	— 3. 37			320. 00	
	18. 14. 24	31300.00	7. 30. 43	116155. 21+	18. 47
30	— 3. 38			318. 98	
	18. 18. 2	31400.00	7. 32. 10	115836. 23+	18. 50
	— 3. 37			317. 96	
	18. 21. 39	31500.00	7. 33. 36	115518. 27	18. 54
	— 3. 37			316. 96	
	18. 25. 16	31600.00	7. 35. 2	115201. 31	18. 58
	— 3. 37			315. 96	
	18. 28. 53	31700.00	7. 36. 29	114885. 35+	19. 1
	— 3. 38			314. 96	
	18. 32. 31	31800.00	7. 37. 55	114570. 39+	19. 5
40	— 3. 37			313. 97	
	18. 36. 8	31900.00	7. 39. 22	114256. 42+	19. 8
	— 3. 38			312. 99	
	18. 39. 46	32000.00	7. 40. 48	113943. 43	19. 12
	— 3. 38			312. 01	
	18. 43. 24	32100.00	7. 42. 14	113631. 42	19. 16
	— 3. 38			311. 05	
	18. 47. 2	32200.00	7. 43. 41	113320. 37+	19. 19
	— 3. 38			310. 07	
	18. 50. 40	32300.00	7. 45. 7	113010. 30	19. 23
50	— 3. 39			309. 12	
	18. 54. 19	32400.00	7. 46. 34	112701. 18	19. 26
	— 3. 38			308. 17	
K ₂	18. 57. 57	32500.00	7. 48. 0	112393. 01	19. 30
	— 3. 38			307. 21	
	19. 1. 35	32600.00	7. 49. 26	112085. 80	19. 34
	— 3. 38			306. 29	
	19. 5. 13	32700.00	7. 50. 53	111779. 51+	19. 37
	— 3. 39			305. 34	
	19. 8. 52	32800.00	7. 52. 19	111474. 17	19. 41
60	— 3. 38			304. 41	
	19. 12. 30	32900.00	7. 53. 46	111169. 76—	19. 44
	— 3. 38			303. 49	
	19. 16. 8	33000.00	7. 55. 12	110866. 27—	19. 48
	— 3. 39			302. 58	

ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
— 3. 39			302. 58	
19. 19. 47	33100.00	7. 56. 38	110563. 69+	19. 52
— 3. 38			301. 66	
19. 23. 25	33200.00	7. 58. 5	110262. 03+	19. 55
— 3. 39			300. 75	
19. 27. 4	33300.00	7. 59. 31	109961. 28	19. 59
— 3. 38			299. 85	
19. 30. 42	33400.00	8. 0. 58	109661. 43+	20. 2
— 3. 39			298. 95	
19. 34. 21	33500.00	8. 2. 24	109362. 48	20. 6
— 3. 39			298. 06	
19. 38. 0	33600.00	8. 3. 50	109064. 42—	20. 10
— 3. 39			297. 18	
19. 41. 39	33700.00	8. 5. 17	108767. 24—	20. 13
— 3. 39			296. 30	
19. 45. 18	33800.00	8. 6. 43	108470. 94	20. 17
— 3. 40			295. 42	
19. 48. 58	33900.00	8. 8. 10	108175. 52	20. 20
— 3. 39			294. 55	
19. 52. 37	34000.00	8. 9. 36	107880. 97	20. 24
— 3. 39			293. 69	
19. 56. 16	34100.00	8. 11. 2	107587. 28+	20. 28
— 3. 40			292. 82	
19. 59. 56	34200.00	8. 12. 29	107294. 46	20. 31
— 3. 39			291. 97	
20. 3. 35	34300.00	8. 13. 55	107002. 49—	20. 35
— 3. 39			291. 12	
20. 7. 14	34400.00	8. 15. 22	106711. 37—	20. 38
— 3. 40			290. 28	
20. 10. 54	34500.00	8. 16. 48	106421. 09	20. 42
— 3. 40			289. 44	
20. 14. 34	34600.00	8. 18. 14	106131. 65	20. 46
— 3. 39			288. 60	
20. 18. 13	34700.00	8. 19. 41	105843. 05+	20. 49
— 3. 40			287. 77	
20. 21. 53	34800.00	8. 21. 7	105555. 28+	20. 53
— 3. 40			286. 94	
20. 25. 33	34900.00	8. 22. 34	105268. 34	20. 56
— 3. 41			286. 13	
20. 29. 14	35000.00	8. 24. 0	104982. 21+	21. 0
— 3. 40			285. 30	
20. 32. 54	35100.00	8. 25. 26	104696. 91	21. 4
— 3. 40			284. 49	
20. 36. 34	35200.00	8. 26. 53	104412. 42—	21. 7
— 3. 40			283. 70	
20. 40. 14	35300.00	8. 28. 19	104128. 72+	21. 11
— 3. 41			282. 88	
20. 43. 55	35400.00	8. 29. 46	103845. 84	21. 14
— 3. 40			282. 09	
20. 47. 35	35500.00	8. 31. 12	103563. 75	21. 18
— 3. 41			281. 29	
20. 51. 16	35600.00	8. 32. 38	103282. 46—	21. 22
— 3. 41			280. 50	
20. 54. 57	35700.00	8. 34. 5	103001. 96—	21. 25
— 3. 41			279. 73	
20. 58. 38	35800.00	8. 35. 31	102722. 23	21. 29
— 3. 42			278. 94	
21. 2. 20	35900.00	8. 36. 58	102443. 29	21. 32
— 3. 41			278. 16	
21. 6. 1	36000.00	8. 38. 24	102165. 13—	21. 36
— 3. 41			277. 39	

	ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>sen Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
	— 3. 41			277. 39	
	21. 9. 42	36100.00	8. 39. 50	101887. 74—	21. 40
	— 3. 41			276. 63	
	21. 13. 23	36200.00	8. 41. 17	101611. 11	21. 43
	— 3. 42			275. 86	
10	21. 17. 5	36300.00	8. 42. 43	101335. 25	21. 47
	— 3. 41			275. 11	
	21. 20. 46	36400.00	8. 44. 10	101060. 14+	21. 50
	— 3. 42			274. 34	
K ₃	21. 24. 28	36500.00	8. 45. 36	100785. 80—	21. 54
	— 3. 41			273. 60	
	21. 28. 9	36600.00	8. 47. 2	100512. 20—	21. 58
	— 3. 42			272. 86	
	21. 31. 51	36700.00	8. 48. 29	100239. 34	22. 1
	— 3. 41			272. 10	
20	21. 35. 32	36800.00	8. 49. 55	99967. 24	22. 5
	— 3. 42			271. 38	
	21. 39. 14	36900.00	8. 51. 22	99695. 86+	22. 8
	— 3. 42			270. 63	
	21. 42. 56	37000.00	8. 52. 48	99425. 23	22. 12
	— 3. 41			269. 90	
	21. 46. 37	37100.00	8. 54. 14	99155. 33—	22. 16
	— 3. 42			269. 18	
	21. 50. 19	37200.00	8. 55. 41	98886. 15	22. 19
	— 3. 42			268. 46	
30	21. 54. 1	37300.00	8. 57. 7	98617. 69	22. 23
	— 3. 42			267. 74	
	21. 57. 43	37400.00	8. 58. 34	98349. 95	22. 26
	— 3. 43			267. 02	
	22. 1. 26	37500.00	9. 0. 0	98082. 93—	22. 30
	— 3. 42			266. 31	
	22. 5. 8	37600.00	9. 1. 26	97816. 62	22. 34
	— 3. 43			265. 61	
	22. 8. 51	37700.00	9. 2. 53	97551. 01	22. 37
	— 3. 43			264. 90	
40	22. 12. 34	37800.00	9. 4. 19	97286. 11	22. 41
	— 3. 43			264. 20	
	22. 16. 17	37900.00	9. 5. 46	97021. 91	22. 44
	— 3. 44			263. 50	
	22. 20. 1	38000.00	9. 7. 12	96758. 41—	22. 48
	— 3. 43			262. 82	
	22. 23. 44	38100.00	9. 8. 38	96495. 59+	22. 52
	— 3. 43			262. 12	
	22. 27. 27	38200.00	9. 10. 5	96233. 47	22. 55
	— 3. 44			261. 44	
50	22. 31. 11	38300.00	9. 11. 31	95972. 03	22. 59
	— 3. 43			260. 75	
	22. 34. 54	38400.00	9. 12. 58	95711. 28—	23. 2
	— 3. 44			260. 08	
K _{3v}	22. 38. 38	38500.00	9. 14. 24	95451. 20	23. 6
	— 3. 43			259. 41	
	22. 42. 21	38600.00	9. 15. 50	95191. 79+	23. 10
	— 3. 44			258. 73	
	22. 46. 5	38700.00	9. 17. 17	94933. 06	23. 13
	— 3. 44			258. 06	
60	22. 49. 49	38800.00	9. 18. 43	94675. 00—	23. 17
	— 3. 43			257. 40	
	22. 53. 32	38900.00	9. 20. 10	94417. 60	23. 20
	— 3. 44			256. 75	
	22. 57. 16	39000.00	9. 21. 36	94160. 85+	23. 24
	— 3. 44			256. 07	

ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
— 3. 44			256. 07	
23. 1. 0	39100.00	9. 23. 2	93904. 78—	23. 28
— 3. 44			255. 43	
23. 4. 44	39200.00	9. 24. 29	93649. 35—	23. 31
— 3. 45			254. 78	
23. 8. 29	39300.00	9. 25. 55	93394. 57	23. 35
— 3. 44			254. 13	
23. 12. 13	39400.00	9. 27. 22	93140. 44	23. 38
— 3. 45			253. 49	
23. 15. 58	39500.00	9. 28. 48	92886. 95+	23. 42
— 3. 45			252. 84	
23. 19. 43	39600.00	9. 30. 14	92634. 11—	23. 46
— 3. 45			252. 21	
23. 23. 28	39700.00	9. 31. 41	92381. 90	23. 49
— 3. 44			251. 57	
23. 27. 12	39800.00	9. 33. 7	92130. 33	23. 53
— 3. 45			250. 94	
23. 30. 57	39900.00	9. 34. 34	91879. 39	23. 56
— 3. 45			250. 31	
23. 34. 42	40000.00	9. 36. 0	91629. 08—	24. 0
— 3. 45			249. 69	
23. 38. 27	40100.00	9. 37. 26	91379. 39	24. 4
— 3. 45			249. 07	
23. 42. 12	40200.00	9. 38. 53	91130. 32+	24. 7
— 3. 46			248. 45	
23. 45. 58	40300.00	9. 40. 19	90881. 87	24. 11
— 3. 45			247. 83	
23. 49. 43	40400.00	9. 41. 46	90634. 04+	24. 14
— 3. 46			247. 22	
23. 53. 29	40500.00	9. 43. 12	90386. 82+	24. 18
— 3. 46			246. 61	
23. 57. 15	40600.00	9. 44. 38	90140. 21+	24. 22
— 3. 46			246. 00	
24. 1. 1	40700.00	9. 46. 5	89894. 21+	24. 25
— 3. 45			245. 40	
24. 4. 46	40800.00	9. 47. 31	89648. 81+	24. 29
— 3. 46			244. 79	
24. 8. 32	40900.00	9. 48. 58	89404. 02—	24. 32
— 3. 46			244. 21	
24. 12. 18	41000.00	9. 50. 24	89159. 81+	24. 36
— 3. 46			243. 60	
24. 16. 4	41100.00	9. 51. 50	88916. 21	24. 40
— 3. 47			243. 01	
24. 19. 51	41200.00	9. 53. 17	88673. 20	24. 43
— 3. 47			242. 43	
24. 23. 38	41300.00	9. 54. 43	88430. 77	24. 47
— 3. 46			241. 83	
24. 27. 24	41400.00	9. 56. 10	88188. 94—	24. 50
— 3. 47			241. 26	
24. 31. 11	41500.00	9. 57. 36	87947. 68	24. 54
— 3. 47			240. 68	
24. 34. 58	41600.00	9. 59. 2	87707. 00+	24. 58
— 3. 47			240. 09	
24. 38. 45	41700.00	10. 0. 29	87466. 91	25. 1
— 3. 46			239. 52	
24. 42. 31	41800.00	10. 1. 55	87227. 39—	25. 5
— 3. 47			238. 95	
24. 46. 18	41900.00	10. 3. 22	86988. 44—	25. 8
— 3. 47			238. 38	
24. 50. 5	42000.00	10. 4. 48	86750. 06	25. 12
— 3. 47			237. 81	

10

20

30

K 4

40

50

60

	ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>sen Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
	— 3. 47			237. 81	
	24. 53. 52	42100.00	10. 6. 14	86512. 25—	25. 16
	— 3. 48			237. 25	
	24. 57. 40	42200.00	10. 7. 41	86275. 00—	25. 19
	— 3. 47			236. 69	
10	25. 1. 27	42300.00	10. 9. 7	86038. 31—	25. 23
	— 3. 48			236. 12	
	25. 5. 15	42400.00	10. 10. 34	85802. 19—	25. 26
	— 3. 48			235. 57	
K 4 p	25. 9. 3	42500.00	10. 12. 0	85566. 62—	25. 30
	— 3. 48			235. 02	
	25. 12. 51	42600.00	10. 13. 26	85331. 60—	25. 34
	— 3. 49			234. 47	
	25. 16. 40	42700.00	10. 14. 53	85097. 13	25. 37
	— 3. 48			233. 92	
20	25. 20. 28	42800.00	10. 16. 19	84863. 21—	25. 41
	— 3. 48			233. 37	
	25. 24. 16	42900.00	10. 17. 46	84629. 84	25. 44
	— 3. 48			232. 83	
	25. 28. 4	43000.00	10. 19. 12	84397. 01	25. 48
	— 3. 48			232. 27	
	25. 31. 52	43100.00	10. 20. 38	84164. 74—	25. 52
	— 3. 49			231. 77	
	25. 35. 41	43200.00	10. 22. 5	83932. 97—	25. 55
	— 3. 48			231. 21	
30	25. 39. 29	43300.00	10. 23. 31	83701. 76—	25. 59
	— 3. 49			230. 68	
	25. 43. 18	43400.00	10. 24. 58	83471. 08	26. 2
	— 3. 49			230. 15	
	25. 47. 7	43500.00	10. 26. 24	83240. 93	26. 6
	— 3. 49			229. 62	
	25. 50. 56	43600.00	10. 27. 50	83011. 31	26. 10
	— 3. 50			229. 10	
	25. 54. 46	43700.00	10. 29. 17	82782. 21—	26. 13
	— 3. 49			228. 57	
40	25. 58. 35	43800.00	10. 30. 43	82553. 64	26. 17
	— 3. 49			228. 05	
	26. 2. 24	43900.00	10. 32. 10	82325. 59	26. 20
	— 3. 50			227. 53	
	26. 6. 14	44000.00	10. 33. 36	82098. 06—	26. 24
	— 3. 49			227. 02	
	26. 10. 3	44100.00	10. 35. 2	81871. 04	26. 28
	— 3. 50			226. 50	
	26. 13. 53	44200.00	10. 36. 29	81644. 54	26. 31
	— 3. 50			225. 99	
	26. 17. 43	44300.00	10. 37. 55	81418. 55—	26. 35
50	— 3. 50			225. 48	
	26. 21. 33	44400.00	10. 39. 22	81193. 07—	26. 38
	— 3. 51			224. 97	
L	26. 25. 24	44500.00	10. 40. 48	80968. 10	26. 42
	— 3. 50			224. 46	
	26. 29. 14	44600.00	10. 42. 14	80743. 64—	26. 46
	— 3. 51			223. 97	
	26. 33. 5	44700.00	10. 43. 41	80519. 67	26. 49
	— 3. 51			223. 46	
	26. 36. 56	44800.00	10. 45. 7	80296. 21	26. 53
60	— 3. 50			222. 97	
	26. 40. 46	44900.00	10. 46. 34	80073. 24	26. 56
	— 3. 51			222. 47	
	26. 44. 37	45000.00	10. 48. 0	79850. 77	27. 0
	— 3. 51			221. 97	

ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>sen Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
— 3. 51			221. 97	
26. 48. 28	45100.00	10. 49. 26	79628. 80—	27. 4
— 3. 51			221. 49	
26. 52. 19	45200.00	10. 50. 53	79407. 31	27. 7
— 3. 51			220. 99	
26. 56. 10	45300.00	10. 52. 19	79186. 32	27. 11
— 3. 52			220. 51	
27. 0. 2	45400.00	10. 53. 46	78965. 81	27. 14
— 3. 51			220. 02	
27. 3. 53	45500.00	10. 55. 12	78745. 79	27. 18
— 3. 52			219. 54	
27. 7. 45	45600.00	10. 56. 38	78526. 25	27. 22
— 3. 52			219. 06	
27. 11. 37	45700.00	10. 58. 5	78307. 19	27. 25
— 3. 52			218. 58	
27. 15. 29	45800.00	10. 59. 31	78088. 61+	27. 29
— 3. 52			218. 10	
27. 19. 21	45900.00	11. 0. 58	77870. 51	27. 32
— 3. 53			217. 63	
27. 23. 14	46000.00	11. 2. 24	77652. 88	27. 36
— 3. 52			217. 15	
27. 27. 6	46100.00	11. 3. 50	77435. 73—	27. 40
— 3. 53			216. 69	
27. 30. 59	46200.00	11. 5. 17	77219. 04	27. 43
— 3. 52			216. 21	
27. 34. 51	46300.00	11. 6. 43	77002. 83—	27. 47
— 3. 53			215. 75	
27. 38. 44	46400.00	11. 8. 10	76787. 08—	27. 50
— 3. 53			215. 29	
27. 42. 37	46500.00	11. 9. 36	76571. 79	27. 54
— 3. 53			214. 82	
27. 46. 30	46600.00	11. 11. 2	76356. 97	27. 58
— 3. 54			214. 36	
27. 50. 24	46700.00	11. 12. 29	76142. 61—	28. 1
— 3. 53			213. 91	
27. 54. 17	46800.00	11. 13. 55	75928. 70	28. 5
— 3. 54			213. 45	
27. 58. 11	46900.00	11. 15. 22	75715. 25+	28. 8
— 3. 53			212. 99	
28. 2. 4	47000.00	11. 16. 48	75502. 26	28. 12
— 3. 54			212. 54	
28. 5. 58	47100.00	11. 18. 14	75289. 72	28. 16
— 3. 54			212. 09	
28. 9. 52	47200.00	11. 19. 41	75077. 63	28. 19
— 3. 54			211. 64	
28. 13. 46	47300.00	11. 21. 7	74865. 99	28. 23
— 3. 54			211. 19	
28. 17. 40	47400.00	11. 22. 34	74654. 80	28. 26
— 3. 55			210. 75	
28. 21. 35	47500.00	11. 24. 0	74444. 05	28. 30
— 3. 54			210. 30	
28. 25. 29	47600.00	11. 25. 26	74233. 75—	28. 34
— 3. 55			209. 87	
28. 29. 24	47700.00	11. 26. 53	74023. 88	28. 37
— 3. 54			209. 42	
28. 33. 18	47800.00	11. 28. 19	73814. 46—	28. 41
— 3. 55			208. 99	
28. 37. 13	47900.00	11. 29. 46	73605. 47	28. 44
— 3. 55			208. 55	
28. 41. 8	48000.00	11. 31. 12	73396. 92	28. 48
— 3. 55			208. 12	

	ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
	— 3. 55			208. 12	
	28. 45. 3	48100.00	11. 32. 38	73188. 80+ 207. 68	28. 52
	— 3. 56			72981. 12	28. 55
	28. 48. 59	48200.00	11. 34. 5	207. 25	
10	— 3. 55			72773. 87— 206. 83	28. 59
	28. 52. 54	48300.00	11. 35. 31	72567. 04 206. 40	29. 2
	— 3. 56			72360. 64 205. 97	29. 6
L 2	28. 56. 50	48400.00	11. 36. 58	72154. 67 205. 55	29. 10
	— 3. 55			71949. 12 205. 13	29. 13
	29. 0. 45	48500.00	11. 38. 24	71743. 99 204. 71	29. 17
	— 3. 56			71539. 28 204. 29	29. 20
	29. 4. 41	48600.00	11. 39. 50	71334. 99 203. 87	29. 24
	— 3. 56			71131. 12— 203. 46	29. 28
	29. 8. 37	48700.00	11. 41. 17	70927. 66 203. 05	29. 31
	— 3. 56			70724. 61+ 202. 63	29. 35
20	29. 12. 33	48800.00	11. 42. 43	70521. 98 202. 23	29. 38
	— 3. 57			70319. 75+ 201. 81	29. 42
	29. 16. 30	48900.00	11. 44. 10	70117. 94— 201. 41	29. 46
	— 3. 56			69916. 53— 201. 01	29. 49
	29. 20. 26	49000.00	11. 45. 36	69715. 52 200. 60	29. 53
	— 3. 57			69514. 92 200. 20	29. 56
	29. 24. 23	49100.00	11. 47. 2	69314. 72 199. 80	30. 0
	— 3. 57			69114. 92 199. 40	30. 4
	29. 28. 20	49200.00	11. 48. 29	68915. 52— 199. 01	30. 7
	— 3. 57			68716. 51+ 198. 61	30. 11
30	29. 32. 17	49300.00	11. 49. 55	68517. 90+ 198. 21	30. 14
	— 3. 58			68319. 69 197. 83	30. 18
	29. 36. 15	49400.00	11. 51. 22	68121. 86+ 197. 43	30. 22
	— 3. 57			67924. 43 197. 04	30. 25
	29. 40. 12	49500.00	11. 52. 48	67727. 39— 196. 66	30. 29
	— 3. 57			67530. 73— 196. 27	30. 32
	29. 44. 9	49600.00	11. 54. 14	67334. 46— 195. 89	30. 36
	— 3. 58				
	29. 48. 7	49700.00	11. 55. 41		
	— 3. 57				
40	29. 52. 4	49800.00	11. 57. 7		
	— 3. 58				
	29. 56. 2	49900.00	11. 58. 34		
	— 3. 58				
	30. 0. 0	50000.00	12. 0. 0		
	— 3. 58				
	30. 3. 58	50100.00	12. 1. 26		
	— 3. 59				
	30. 7. 57	50200.00	12. 2. 53		
	— 3. 58				
50	30. 11. 55	50300.00	12. 4. 19		
	— 3. 59				
	30. 15. 54	50400.00	12. 5. 46		
	— 3. 59				
L 2 v	30. 19. 53	50500.00	12. 7. 12		
	— 3. 59				
	30. 23. 52	50600.00	12. 8. 38		
	— 4. 0				
	30. 27. 52	50700.00	12. 10. 5		
	— 3. 59				
	30. 31. 51	50800.00	12. 11. 31		
	— 4. 0				
60	30. 35. 51	50900.00	12. 12. 58		
	— 4. 0				
	30. 39. 51	51000.00	12. 14. 24		
	— 4. 0				

ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
— 4. 0			195. 89	
30. 43. 51	51100.00	12. 15. 50	67138. 57	30. 40
— 4. 1			195. 50	
30. 47. 52	51200.00	12. 17. 17	66943. 07	30. 43
— 4. 0			195. 12	
30. 51. 52	51300.00	12. 18. 43	66747. 95	30. 47
— 4. 0			194. 75	
30. 55. 52	51400.00	12. 20. 10	66553. 20+	30. 50
— 4. 1			194. 36	
30. 59. 53	51500.00	12. 21. 36	66358. 84	30. 54
— 4. 0			193. 99	
31. 3. 53	51600.00	12. 23. 2	66164. 85+	30. 58
— 4. 1			193. 61	
31. 7. 54	51700.00	12. 24. 29	65971. 24+	31. 1
— 4. 1			193. 23	
31. 11. 55	51800.00	12. 25. 55	65778. 01—	31. 5
— 4. 1			192. 87	
31. 15. 56	51900.00	12. 27. 22	65585. 14	31. 8
— 4. 1			192. 49	
31. 19. 57	52000.00	12. 28. 48	65392. 65—	31. 12
— 4. 2			192. 12	
31. 23. 59	52100.00	12. 30. 14	65200. 53—	31. 16
— 4. 1			191. 76	
31. 28. 0	52200.00	12. 31. 41	65008. 77	31. 19
— 4. 2			191. 39	
31. 32. 2	52300.00	12. 33. 7	64817. 38	31. 23
— 4. 2			191. 02	
31. 36. 4	52400.00	12. 34. 34	64626. 36	31. 26
— 4. 2			190. 65	
31. 40. 6	52500.00	12. 36. 0	64435. 71—	31. 30
— 4. 3			190. 30	
31. 44. 9	52600.00	12. 37. 26	64245. 41	31. 34
— 4. 2			189. 94	
31. 48. 11	52700.00	12. 38. 53	64055. 47+	31. 37
— 4. 3			189. 57	
31. 52. 14	52800.00	12. 40. 19	63865. 90	31. 41
— 4. 3			189. 21	
31. 56. 17	52900.00	12. 41. 46	63676. 69—	31. 44
— 4. 3			188. 86	
32. 0. 20	53000.00	12. 43. 12	63487. 83	31. 48
— 4. 4			188. 50	
32. 4. 24	53100.00	12. 44. 38	63299. 33	31. 52
— 4. 3			188. 15	
32. 8. 27	53200.00	12. 46. 5	63111. 18	31. 55
— 4. 4			187. 79	
32. 12. 31	53300.00	12. 47. 31	62923. 39	31. 59
— 4. 4			187. 44	
32. 16. 35	53400.00	12. 48. 58	62735. 95—	32. 2
— 4. 4			187. 10	
32. 20. 39	53500.00	12. 50. 24	62548. 85+	32. 6
— 4. 4			186. 74	
32. 24. 43	53600.00	12. 51. 50	62362. 11+	32. 10
— 4. 5			186. 38	
32. 28. 48	53700.00	12. 53. 17	62175. 73+	32. 13
— 4. 4			186. 05	
32. 32. 52	53800.00	12. 54. 43	61989. 68	32. 17
— 4. 5			185. 71	
32. 36. 57	53900.00	12. 56. 10	61803. 97	32. 20
— 4. 5			185. 36	
32. 41. 2	54000.00	12. 57. 36	61618. 61+	32. 24
— 4. 5			185. 00	

10

20

30

Lj

40

50

60

	ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
	— 4. 5			185. 00	
	32. 45. 7	54100.00	12. 59. 2	61433. 61	32. 28
	— 4. 5			184. 67	
	32. 49. 12	54200.00	13. 0. 29	61248. 94—	32. 31
	— 4. 6			184. 34	
	32. 53. 18	54300.00	13. 1. 55	61064. 60	32. 35
10	— 4. 5			183. 99	
	32. 57. 23	54400.00	13. 3. 22	60880. 61—	32. 38
	— 4. 6			183. 66	
<i>L. 3 v</i>	33. 1. 29	54500.00	13. 4. 48	60696. 95	32. 42
	— 4. 6			183. 32	
	33. 5. 35	54600.00	13. 6. 14	60513. 63	32. 46
	— 4. 6			182. 98	
	33. 9. 41	54700.00	13. 7. 41	60330. 65	32. 49
	— 4. 7			182. 65	
	33. 13. 48	54800.00	13. 9. 7	60148. 00	32. 53
20	— 4. 6			182. 31	
	33. 17. 54	54900.00	13. 10. 34	59965. 69	32. 56
	— 4. 7			181. 99	
	33. 22. 1	55000.00	13. 12. 0	59783. 70—	33. 0
	— 4. 7			181. 65	
	33. 26. 8	55100.00	13. 13. 26	59602. 05—	33. 4
	— 4. 7			181. 32	
	33. 30. 15	55200.00	13. 14. 53	59420. 73	33. 7
	— 4. 8			181. 00	
	33. 34. 23	55300.00	13. 16. 19	59239. 73	33. 11
30	— 4. 7			180. 67	
	33. 38. 30	55400.00	13. 17. 46	59059. 06	33. 14
	— 4. 8			180. 34	
	33. 42. 38	55500.00	13. 19. 12	58878. 72	33. 18
	— 4. 8			180. 02	
	33. 46. 46	55600.00	13. 20. 38	58698. 70	33. 22
	— 4. 8			179. 70	
	33. 50. 54	55700.00	13. 22. 5	58519. 00	33. 25
	— 4. 9			179. 37	
	33. 55. 3	55800.00	13. 23. 31	58339. 63	33. 29
40	— 4. 8			179. 05	
	33. 59. 11	55900.00	13. 24. 58	58160. 58	33. 32
	— 4. 9			178. 73	
	34. 3. 20	56000.00	13. 26. 24	57981. 85	33. 36
	— 4. 9			178. 41	
	34. 7. 29	56100.00	13. 27. 50	57803. 44	33. 40
	— 4. 9			178. 10	
	34. 11. 38	56200.00	13. 29. 17	57625. 34—	33. 43
	— 4. 10			177. 77	
	34. 15. 48	56300.00	13. 30. 43	57447. 57	33. 47
50	— 4. 9			177. 46	
	34. 19. 57	56400.00	13. 32. 10	57270. 11—	33. 50
	— 4. 10			177. 16	
<i>L. 4</i>	34. 24. 7	56500.00	13. 33. 36	57092. 95—	33. 54
	— 4. 10			176. 82	
	34. 28. 17	56600.00	13. 35. 2	56916. 13—	33. 58
	— 4. 11			176. 53	
	34. 32. 28	56700.00	13. 36. 29	56739. 60—	34. 1
	— 4. 10			176. 21	
	34. 36. 38	56800.00	13. 37. 55	56563. 39	34. 5
60	— 4. 11			175. 90	
	34. 40. 49	56900.00	13. 39. 22	56387. 49—	34. 8
	— 4. 11			175. 60	
	34. 45. 0	57000.00	13. 40. 48	56211. 89—	34. 12
	— 4. 11			175. 28	

ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
— 4. 11			175. 28	
34. 49. 11	57100.00	13. 42. 14	56036. 61	34. 16
— 4. 12			174. 98	
34. 53. 23	57200.00	13. 43. 41	55861. 63+	34. 19
— 4. 11			174. 67	
34. 57. 34	57300.00	13. 45. 7	55686. 96—	34. 23
— 4. 12			174. 37	
35. 1. 46	57400.00	13. 46. 34	55512. 59	34. 26
— 4. 12			174. 06	
35. 5. 58	57500.00	13. 48. 0	55338. 53—	34. 30
— 4. 13			173. 76	
35. 10. 11	57600.00	13. 49. 26	55164. 77—	34. 34
— 4. 12			173. 47	
35. 14. 23	57700.00	13. 50. 53	54991. 30+	34. 37
— 4. 13			173. 16	
35. 18. 36	57800.00	13. 52. 19	54818. 14	34. 41
— 4. 13			172. 86	
35. 22. 49	57900.00	13. 53. 46	54645. 28	34. 44
— 4. 13			172. 56	
35. 27. 2	58000.00	13. 55. 12	54472. 72	34. 48
— 4. 14			172. 27	
35. 31. 16	58100.00	13. 56. 38	54300. 45+	34. 52
— 4. 13			171. 97	
35. 35. 29	58200.00	13. 58. 5	54128. 48+	34. 55
— 4. 14			171. 67	
35. 39. 43	58300.00	13. 59. 31	53956. 81+	34. 59
— 4. 14			171. 37	
35. 43. 57	58400.00	14. 0. 58	53785. 44—	35. 2
— 4. 14			171. 09	
35. 48. 11	58500.00	14. 2. 24	53614. 35—	35. 6
— 4. 15			170. 80	
35. 52. 26	58600.00	14. 3. 50	53443. 55	35. 10
— 4. 14			170. 50	
35. 56. 40	58700.00	14. 5. 17	53273. 05—	35. 13
— 4. 15			170. 22	
36. 0. 55	58800.00	14. 6. 43	53102. 83+	35. 17
— 4. 15			169. 92	
36. 5. 10	58900.00	14. 8. 10	52932. 91	35. 20
— 4. 16			169. 63	
36. 9. 26	59000.00	14. 9. 36	52763. 28—	35. 24
— 4. 15			169. 35	
36. 13. 41	59100.00	14. 11. 2	52593. 93—	35. 28
— 4. 16			169. 06	
36. 17. 57	59200.00	14. 12. 29	52424. 87—	35. 31
— 4. 16			168. 78	
36. 22. 13	59300.00	14. 13. 55	52256. 09	35. 35
— 4. 17			168. 49	
36. 26. 30	59400.00	14. 15. 22	52087. 60	35. 38
— 4. 16			168. 21	
36. 30. 46	59500.00	14. 16. 48	51919. 39	35. 42
— 4. 17			167. 93	
36. 35. 3	59600.00	14. 18. 14	51751. 46+	35. 46
— 4. 17			167. 64	
36. 39. 20	59700.00	14. 19. 41	51583. 82	35. 49
— 4. 18			167. 37	
36. 43. 38	59800.00	14. 21. 7	51416. 45+	35. 53
— 4. 17			167. 08	
36. 47. 55	59900.00	14. 22. 34	51249. 37	35. 56
— 4. 18			166. 81	
36. 52. 13	60000.00	14. 24. 0	51082. 56	36. 0
— 4. 18			166. 53	

10

20

30

L. 4^v

40

50

60

	ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
	— 4. 18			166. 53	
	36. 56. 31	60100.00	14. 25. 26	50916. 03 +	36. 4
	— 4. 19			166. 25	
	37. 0. 50	60200.00	14. 26. 53	50749. 78 +	36. 7
	— 4. 19			165. 97	
10	37. 5. 9	60300.00	14. 28. 19	50583. 81	36. 11
	— 4. 18			165. 70	
	37. 9. 27	60400.00	14. 29. 46	50418. 11	36. 14
	— 4. 19			165. 43	
M	37. 13. 46	60500.00	14. 31. 12	50252. 68 +	36. 18
	— 4. 19			165. 15	
	37. 18. 5	60600.00	14. 32. 38	50087. 53	36. 22
	— 4. 20			164. 88	
	37. 22. 25	60700.00	14. 34. 5	49922. 65	36. 25
	— 4. 19			164. 61	
20	37. 26. 44	60800.00	14. 35. 31	49758. 04	36. 29
	— 4. 20			164. 34	
	37. 31. 4	60900.00	14. 36. 58	49593. 70 +	36. 32
	— 4. 20			164. 07	
	37. 35. 24	61000.00	14. 38. 24	49429. 63 +	36. 36
	— 4. 21			163. 80	
	37. 39. 45	61100.00	14. 39. 50	49265. 83 +	36. 40
	— 4. 20			163. 53	
	37. 44. 5	61200.00	14. 41. 17	49102. 30	36. 43
	— 4. 21			163. 26	
30	37. 48. 26	61300.00	14. 42. 43	48939. 04 —	36. 47
	— 4. 21			163. 00	
	37. 52. 47	61400.00	14. 44. 10	48776. 04 —	36. 50
	— 4. 22			162. 74	
	37. 57. 9	61500.00	14. 45. 36	48613. 30 +	36. 54
	— 4. 21			162. 47	
	38. 1. 30	61600.00	14. 47. 2	48450. 83 +	36. 58
	— 4. 22			162. 20	
	38. 5. 52	61700.00	14. 48. 29	48288. 63	37. 1
	— 4. 22			161. 95	
40	38. 10. 14	61800.00	14. 49. 55	48126. 68 +	37. 5
	— 4. 23			161. 68	
	38. 14. 37	61900.00	14. 51. 22	47965. 00 +	37. 8
	— 4. 22			161. 42	
	38. 18. 59	62000.00	14. 52. 48	47803. 58 +	37. 12
	— 4. 23			161. 16	
	38. 23. 22	62100.00	14. 54. 14	47642. 42	37. 16
	— 4. 24			160. 90	
	38. 27. 46	62200.00	14. 55. 41	47481. 52	37. 19
	— 4. 23			160. 64	
50	38. 32. 9	62300.00	14. 57. 7	47320. 88	37. 23
	— 4. 24			160. 39	
	38. 36. 33	62400.00	14. 58. 34	47160. 49 +	37. 26
	— 4. 24			160. 12	
Mv	38. 40. 57	62500.00	15. 0. 0	47000. 37 —	37. 30
	— 4. 25			159. 88	
	38. 45. 22	62600.00	15. 1. 26	46840. 49 +	37. 34
	— 4. 25			159. 61	
	38. 49. 47	62700.00	15. 2. 53	46680. 88 —	37. 37
	— 4. 24			159. 37	
60	38. 54. 11	62800.00	15. 4. 19	46521. 51 +	37. 41
	— 4. 25			159. 11	
	38. 58. 36	62900.00	15. 5. 46	46362. 40 +	37. 44
	— 4. 25			158. 85	
	39. 3. 1	63000.00	15. 7. 12	46203. 55	37. 48
	— 4. 26			158. 61	

ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
— 4. 26			158. 61	
39. 7. 27	63100.00	15. 8. 38	46044. 94+	37. 52
— 4. 27			158. 35	
39. 11. 54	63200.00	15. 10. 5	45886. 59	37. 55
— 4. 27			158. 10	
39. 16. 21	63300.00	15. 11. 31	45728. 49	37. 59
— 4. 27			157. 86	
39. 20. 48	63400.00	15. 12. 58	45570. 63+	38. 2
— 4. 26			157. 60	
39. 25. 14	63500.00	15. 14. 24	45413. 03	38. 6
— 4. 27			157. 36	
39. 29. 41	63600.00	15. 15. 50	45255. 67+	38. 10
— 4. 27			157. 10	
39. 34. 8	63700.00	15. 17. 17	45098. 57—	38. 13
— 4. 28			156. 87	
39. 38. 36	63800.00	15. 18. 43	44941. 70+	38. 17
— 4. 27			156. 62	
39. 43. 3	63900.00	15. 20. 10	44785. 08+	38. 20
— 4. 28			156. 37	
39. 47. 31	64000.00	15. 21. 36	44628. 71	38. 24
— 4. 28			156. 12	
39. 51. 59	64100.00	15. 23. 2	44472. 59—	38. 28
— 4. 29			155. 89	
39. 56. 28	64200.00	15. 24. 29	44316. 70	38. 31
— 4. 29			155. 65	
40. 0. 57	64300.00	15. 25. 55	44161. 05+	38. 35
— 4. 30			155. 40	
40. 5. 27	64400.00	15. 27. 22	44005. 65+	38. 38
— 4. 29			155. 15	
40. 9. 56	64500.00	15. 28. 48	43850. 50—	38. 42
— 4. 30			154. 92	
40. 14. 26	64600.00	15. 30. 14	43695. 58	38. 46
— 4. 30			154. 68	
40. 18. 56	64700.00	15. 31. 41	43540. 90	38. 49
— 4. 31			154. 44	
40. 23. 27	64800.00	15. 33. 7	43386. 46	38. 53
— 4. 31			154. 20	
40. 27. 58	64900.00	15. 34. 34	43232. 26	38. 56
— 4. 32			153. 97	
40. 32. 30	65000.00	15. 36. 0	43078. 29	39. 0
— 4. 32			153. 73	
40. 37. 2	65100.00	15. 37. 26	42924. 56+	39. 4
— 4. 33			153. 48	
40. 41. 35	65200.00	15. 38. 53	42771. 08	39. 7
— 4. 32			153. 26	
40. 46. 7	65300.00	15. 40. 19	42617. 82	39. 11
— 4. 33			153. 03	
40. 50. 40	65400.00	15. 41. 46	42464. 79+	39. 14
— 4. 33			152. 79	
40. 55. 13	65500.00	15. 43. 12	42312. 00+	39. 18
— 4. 33			152. 55	
40. 59. 46	65600.00	15. 44. 38	42159. 45	39. 22
— 4. 33			152. 32	
41. 4. 19	65700.00	15. 46. 5	42007. 13—	39. 25
— 4. 34			152. 09	
41. 8. 53	65800.00	15. 47. 31	41855. 04—	39. 29
— 4. 33			151. 87	
41. 13. 26	65900.00	15. 48. 58	41703. 17+	39. 32
— 4. 34			151. 62	
41. 18. 0	66000.00	15. 50. 24	41551. 55—	39. 36
— 4. 35			151. 40	

10

20

30

M₂

40

50

60

	ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
	— 4. 35			151. 40	
	41. 22. 35	66100.00	15. 51. 50	41400. 15—	39. 40
	— 4. 35			151. 18	
	41. 27. 10	66200.00	15. 53. 17	41248. 97+	39. 43
	— 4. 36			150. 94	
	41. 31. 46	66300.00	15. 54. 43	41098. 03	39. 47
10	— 4. 35			150. 72	
	41. 36. 21	66400.00	15. 56. 10	40947. 31+	39. 50
	— 4. 36			150. 49	
<i>M₂₇</i>	41. 40. 57	66500.00	15. 57. 36	40796. 82	39. 54
	— 4. 36			150. 26	
	41. 45. 33	66600.00	15. 59. 2	40646. 56	39. 58
	— 4. 37			150. 03	
	41. 50. 10	66700.00	16. 0. 29	40496. 53—	40. 1
	— 4. 37			149. 82	
	41. 54. 47	66800.00	16. 1. 55	40346. 71+	40. 5
20	— 4. 38			149. 58	
	41. 59. 25	66900.00	16. 3. 22	40197. 13—	40. 8
	— 4. 37			149. 37	
	42. 4. 2	67000.00	16. 4. 48	40047. 76	40. 12
	— 4. 38			149. 14	
	42. 8. 40	67100.00	16. 6. 14	39898. 62—	40. 16
	— 4. 38			148. 92	
	42. 13. 18	67200.00	16. 7. 41	39749. 70—	40. 19
	— 4. 39			148. 70	
	42. 17. 57	67300.00	16. 9. 7	39601. 00—	40. 23
30	— 4. 39			148. 48	
	42. 22. 36	67400.00	16. 10. 34	39452. 52—	40. 26
	— 4. 39			148. 26	
	42. 27. 15	67500.00	16. 12. 0	39304. 26	40. 30
	— 4. 40			148. 04	
	42. 31. 55	67600.00	16. 13. 26	39156. 22	40. 34
	— 4. 40			147. 82	
	42. 36. 35	67700.00	16. 14. 53	39008. 40	40. 37
	— 4. 40			147. 60	
	42. 41. 15	67800.00	16. 16. 19	38860. 80	40. 41
40	— 4. 41			147. 38	
	42. 45. 56	67900.00	16. 17. 46	38713. 42—	40. 44
	— 4. 41			147. 17	
	42. 50. 37	68000.00	16. 19. 12	38566. 25	40. 48
	— 4. 42			146. 95	
	42. 55. 19	68100.00	16. 20. 38	38419. 30	40. 52
	— 4. 42			146. 74	
	43. 0. 1	68200.00	16. 22. 5	38272. 56+	40. 55
	— 4. 43			146. 52	
	43. 4. 44	68300.00	16. 23. 31	38126. 04+	40. 59
50	— 4. 42			146. 30	
	43. 9. 26	68400.00	16. 24. 58	37979. 74—	41. 2
	— 4. 43			146. 09	
<i>M₃</i>	43. 14. 9	68500.00	16. 26. 24	37833. 65—	41. 6
	— 4. 43			145. 88	
	43. 18. 52	68600.00	16. 27. 50	37687. 77—	41. 10
	— 4. 43			145. 67	
	43. 23. 35	68700.00	16. 29. 17	37542. 10	41. 13
	— 4. 44			145. 45	
	43. 28. 19	68800.00	16. 30. 43	37396. 65—	41. 17
60	— 4. 44			145. 25	
	43. 33. 3	68900.00	16. 32. 10	37251. 40+	41. 20
	— 4. 45			145. 03	
	43. 37. 48	69000.00	16. 33. 36	37106. 37	41. 24
	— 4. 45			144. 83	

ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
— 4. 45			144. 83	
43. 42. 33	69100.00	16. 35. 2	36961. 54→	41. 28
— 4. 45			144. 61	
43. 47. 18	69200.00	16. 36. 29	36816. 93	41. 31
— 4. 46			144. 40	
43. 52. 4	69300.00	16. 37. 55	36672. 53—	41. 35
— 4. 46			144. 20	
43. 56. 50	69400.00	16. 39. 22	36528. 33→	41. 38
— 4. 47			143. 99	
44. 1. 37	69500.00	16. 40. 48	36384. 34→	41. 42
— 4. 47			143. 78	
44. 6. 24	69600.00	16. 42. 14	36240. 56→	41. 46
— 4. 48			143. 57	
44. 11. 12	69700.00	16. 43. 41	36096. 99	41. 49
— 4. 48			143. 37	
44. 16. 0	69800.00	16. 45. 7	35953. 62	41. 53
— 4. 48			143. 17	
44. 20. 48	69900.00	16. 46. 34	35810. 45→	41. 56
— 4. 49			142. 96	
44. 25. 37	70000.00	16. 48. 0	35667. 49→	42. 0
— 4. 49			142. 75	
44. 30. 26	70100.00	16. 49. 26	35524. 74	42. 4
— 4. 49			142. 55	
44. 35. 15	70200.00	16. 50. 53	35382. 19	42. 7
— 4. 50			142. 35	
44. 40. 5	70300.00	16. 52. 19	35239. 84→	42. 11
— 4. 50			142. 14	
44. 44. 55	70400.00	16. 53. 46	35097. 70—	42. 14
— 4. 51			141. 95	
44. 49. 46	70500.00	16. 55. 12	34955. 75—	42. 18
— 4. 51			141. 75	
44. 54. 37	70600.00	16. 56. 38	34814. 00→	42. 22
— 4. 52			141. 54	
44. 59. 29	70700.00	16. 58. 5	34672. 46	42. 25
— 4. 52			141. 34	
45. 4. 21	70800.00	16. 59. 31	34531. 12	42. 29
— 4. 52			141. 14	
45. 9. 13	70900.00	17. 0. 58	34389. 98—	42. 32
— 4. 53			140. 95	
45. 14. 6	71000.00	17. 2. 24	34249. 03	42. 36
— 4. 53			140. 74	
45. 18. 59	71100.00	17. 3. 50	34108. 29—	42. 40
— 4. 54			140. 55	
45. 23. 53	71200.00	17. 5. 17	33967. 74—	42. 43
— 4. 54			140. 35	
45. 28. 47	71300.00	17. 6. 43	33827. 39	42. 47
— 4. 54			140. 15	
45. 33. 41	71400.00	17. 8. 10	33687. 24—	42. 50
— 4. 55			139. 96	
45. 38. 36	71500.00	17. 9. 36	33547. 28—	42. 54
— 4. 55			139. 77	
45. 43. 31	71600.00	17. 11. 2	33407. 51	42. 58
— 4. 56			139. 57	
45. 48. 27	71700.00	17. 12. 29	33267. 94→	43. 1
— 4. 56			139. 37	
45. 53. 23	71800.00	17. 13. 55	33128. 57	43. 5
— 4. 57			139. 18	
45. 58. 20	71900.00	17. 15. 22	32989. 39	43. 8
— 4. 57			138. 98	
46. 3. 17	72000.00	17. 16. 48	32850. 41—	43. 12
— 4. 58			138. 79	

10

20

30

M_{3v}

40

50

60

	ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>sen Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
	— 4. 58			138. 79	
	46. 8. 15	72100.00	17. 18. 14	32711. 61—+	43. 16
	— 4. 58			138. 60	
	46. 13. 13	72200.00	17. 19. 41	32573. 01	43. 19
	— 4. 59			138. 41	
10	46. 18. 12	72300.00	17. 21. 7	32434. 60	43. 23
	— 4. 59			138. 21	
	46. 23. 11	72400.00	17. 22. 34	32296. 39	43. 26
	— 4. 59			138. 03	
<i>M₄</i>	46. 28. 10	72500.00	17. 24. 0	32158. 36—+	43. 30
	— 5. 0			137. 83	
	46. 33. 10	72600.00	17. 25. 26	32020. 53	43. 34
	— 5. 0			137. 65	
	46. 38. 10	72700.00	17. 26. 53	31882. 88	43. 37
	— 5. 1			137. 46	
	46. 43. 11	72800.00	17. 28. 19	31745. 42—+	43. 41
20	— 5. 1			137. 27	
	46. 48. 12	72900.00	17. 29. 46	31608. 15—+	43. 44
	— 5. 1			137. 07	
	46. 53. 13	73000.00	17. 31. 12	31471. 08—	43. 48
	— 5. 2			136. 90	
	46. 58. 15	73100.00	17. 32. 38	31334. 18	43. 52
	— 5. 2			136. 70	
	47. 3. 17	73200.00	17. 34. 5	31197. 48—	43. 55
	— 5. 3			136. 53	
30	47. 8. 20	73300.00	17. 35. 31	31060. 95	43. 59
	— 5. 3			136. 33	
	47. 13. 23	73400.00	17. 36. 58	30924. 62	44. 2
	— 5. 4			136. 14	
	47. 18. 27	73500.00	17. 38. 24	30788. 48	44. 6
	— 5. 5			135. 96	
	47. 23. 32	73600.00	17. 39. 50	30652. 52	44. 10
	— 5. 5			135. 78	
	47. 28. 37	73700.00	17. 41. 17	30516. 74	44. 13
	— 5. 6			135. 60	
	47. 33. 43	73800.00	17. 42. 43	30381. 14—+	44. 17
40	— 5. 6			135. 40	
	47. 38. 49	73900.00	17. 44. 10	30245. 74—	44. 20
	— 5. 7			135. 23	
	47. 43. 56	74000.00	17. 45. 36	30110. 51	44. 24
	— 5. 7			135. 04	
	47. 49. 3	74100.00	17. 47. 2	29975. 47	44. 28
	— 5. 7			134. 86	
	47. 54. 10	74200.00	17. 48. 29	29840. 61—	44. 31
	— 5. 8			134. 68	
	47. 59. 18	74300.00	17. 49. 55	29705. 93	44. 35
50	— 5. 8			134. 50	
	48. 4. 26	74400.00	17. 51. 22	29571. 43	44. 38
	— 5. 9			134. 32	
<i>M₄v</i>	48. 9. 35	74500.00	17. 52. 48	29437. 11	44. 42
	— 5. 9			134. 14	
	48. 14. 44	74600.00	17. 54. 14	29302. 97	44. 46
	— 5. 10			133. 96	
	48. 19. 54	74700.00	17. 55. 41	29169. 01	44. 49
	— 5. 10			133. 78	
	48. 25. 4	74800.00	17. 57. 7	29035. 23	44. 53
60	— 5. 11			133. 60	
	48. 30. 15	74900.00	17. 58. 34	28901. 63	44. 56
	— 5. 11			133. 42	
	48. 35. 26	75000.00	18. 0. 0	28768. 21—	45. 0
	— 5. 12			133. 25	

ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>sen Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
— 5. 12			133. 25	
48. 40. 38	75100.00	18. 1. 26	28634. 96+ 133. 06	45. 4
— 5. 13			28501. 90	45. 7
48. 45. 51	75200.00	18. 2. 53	132. 90	
— 5. 13			28369. 00+ 132. 71	45. 11
48. 51. 4	75300.00	18. 4. 19	28236. 29	45. 14
— 5. 14			132. 54	
48. 56. 18	75400.00	18. 5. 46	28103. 75+ 132. 36	45. 18
— 5. 14			27971. 39	45. 22
49. 1. 32	75500.00	18. 7. 12	132. 19	
— 5. 15			27839. 20+ 132. 01	45. 25
49. 6. 47	75600.00	18. 8. 38	27707. 19	45. 29
— 5. 15			131. 84	
49. 12. 2	75700.00	18. 10. 5	27575. 35+ 131. 66	45. 32
— 5. 16			27443. 69— 131. 50	45. 36
49. 17. 18	75800.00	18. 11. 31	27312. 19	45. 40
— 5. 16			131. 32	
49. 22. 34	75900.00	18. 12. 58	27180. 87+ 131. 14	45. 43
— 5. 17			27049. 73— 130. 98	45. 47
49. 27. 51	76000.00	18. 14. 24	26918. 75 130. 81	45. 50
— 5. 18			26787. 94+ 130. 63	45. 54
49. 33. 9	76100.00	18. 15. 50	26657. 31 130. 46	45. 58
— 5. 18			26526. 85 130. 29	46. 1
49. 38. 27	76200.00	18. 17. 17	26396. 56— 130. 12	46. 5
— 5. 19			26266. 43+ 129. 95	46. 8
49. 43. 46	76300.00	18. 18. 43	26136. 48 129. 79	46. 12
— 5. 19			26006. 69+ 129. 62	46. 16
49. 49. 5	76400.00	18. 20. 10	25877. 07+ 129. 45	46. 19
— 5. 20			25747. 62+ 129. 28	46. 23
49. 54. 25	76500.00	18. 21. 36	25618. 34 129. 11	46. 26
— 5. 21			25489. 23— 128. 95	46. 30
49. 59. 46	76600.00	18. 23. 2	25360. 28— 128. 79	46. 34
— 5. 21			25231. 49+ 128. 61	46. 37
50. 5. 7	76700.00	18. 24. 29	25102. 88 128. 46	46. 41
— 5. 22			24974. 42+ 128. 29	46. 44
50. 10. 29	76800.00	18. 25. 55	24846. 13+ 128. 12	46. 48
— 5. 22				
50. 15. 51	76900.00	18. 27. 22		
— 5. 23				
50. 21. 14	77000.00	18. 28. 48		
— 5. 24				
50. 26. 38	77100.00	18. 30. 14		
— 5. 24				
50. 32. 2	77200.00	18. 31. 41		
— 5. 25				
50. 37. 27	77300.00	18. 33. 7		
— 5. 26				
50. 42. 53	77400.00	18. 34. 34		
— 5. 26				
50. 48. 19	77500.00	18. 36. 0		
— 5. 27				
50. 53. 46	77600.00	18. 37. 26		
— 5. 27				
50. 59. 13	77700.00	18. 38. 53		
— 5. 28				
51. 4. 41	77800.00	18. 40. 19		
— 5. 28				
51. 10. 9	77900.00	18. 41. 46		
— 5. 29				
51. 15. 38	78000.00	18. 43. 12		
— 5. 30				

	ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
	— 5. 30			128. 12	
	51. 21. 8	78100.00	18. 44. 38	24718. 01 +	46. 52
	— 5. 31			127. 95	
	51. 26. 39	78200.00	18. 46. 5	24590. 06 —	46. 55
	— 5. 31			127. 80	
10	51. 32. 10	78300.00	18. 47. 31	24462. 26 —	46. 59
	— 5. 32			127. 63	
	51. 37. 42	78400.00	18. 48. 58	24334. 63 —	47. 2
	— 5. 33			127. 47	
N ^v	51. 43. 15	78500.00	18. 50. 24	24207. 16	47. 6
	— 5. 33			127. 31	
	51. 48. 48	78600.00	18. 51. 50	24079. 85	47. 10
	— 5. 34			127. 15	
	51. 54. 22	78700.00	18. 53. 17	23952. 70 +	47. 13
	— 5. 34			126. 98	
20	51. 59. 56	78800.00	18. 54. 43	23825. 72	47. 17
	— 5. 35			126. 82	
	52. 5. 31	78900.00	18. 56. 10	23698. 90 —	47. 20
	— 5. 36			126. 67	
	52. 11. 7	79000.00	18. 57. 36	23572. 23 +	47. 24
	— 5. 37			126. 50	
	52. 16. 44	79100.00	18. 59. 2	23445. 73	47. 28
	— 5. 38			126. 34	
	52. 22. 22	79200.00	19. 0. 29	23319. 39 —	47. 31
	— 5. 38			126. 19	
30	52. 28. 0	79300.00	19. 1. 55	23193. 20 +	47. 35
	— 5. 39			126. 02	
	52. 33. 39	79400.00	19. 3. 22	23067. 18	47. 38
	— 5. 40			125. 86	
	52. 39. 19	79500.00	19. 4. 48	22941. 32	47. 42
	— 5. 41			125. 71	
	52. 45. 0	79600.00	19. 6. 14	22815. 61	47. 46
	— 5. 41			125. 55	
	52. 50. 41	79700.00	19. 7. 41	22690. 06	47. 49
	— 5. 42			125. 39	
40	52. 56. 23	79800.00	19. 9. 7	22564. 67	47. 53
	— 5. 42			125. 24	
	53. 2. 5	79900.00	19. 10. 34	22439. 43 +	47. 56
	— 5. 43			125. 07	
	53. 7. 48	80000.00	19. 12. 0	22314. 36 —	48. 0
	— 5. 44			124. 93	
	53. 13. 32	80100.00	19. 13. 26	22189. 43 +	48. 4
	— 5. 45			124. 76	
	53. 19. 17	80200.00	19. 14. 53	22064. 67	48. 7
	— 5. 46			124. 61	
50	53. 25. 3	80300.00	19. 16. 19	21940. 06	48. 11
	— 5. 46			124. 46	
	53. 30. 49	80400.00	19. 17. 46	21815. 60 +	48. 14
	— 5. 47			124. 30	
N ²	53. 36. 36	80500.00	19. 19. 12	21691. 30	48. 18
	— 5. 48			124. 15	
	53. 42. 24	80600.00	19. 20. 38	21567. 15	48. 22
	— 5. 49			123. 98	
	53. 48. 13	80700.00	19. 22. 5	21443. 17 —	48. 25
	— 5. 50			123. 85	
60	53. 54. 3	80800.00	19. 23. 31	21319. 32 +	48. 29
	— 5. 51			123. 68	
	53. 59. 54	80900.00	19. 24. 58	21195. 64 —	48. 32
	— 5. 52			123. 54	
	54. 5. 46	81000.00	19. 26. 24	21072. 10 +	48. 36
	— 5. 52			123. 38	

ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
— 5. 52			123. 38	
54. 11. 38	81100.00	19. 27. 50	20948. 72+	48. 40
— 5. 53			123. 23	
54. 17. 31	81200.00	19. 29. 17	20825. 49+	48. 43
— 5. 54			123. 07	
54. 23. 25	81300.00	19. 30. 43	20702. 42	48. 47
— 5. 55			122. 93	
54. 29. 20	81400.00	19. 32. 10	20579. 49+	48. 50
— 5. 56			122. 77	
54. 35. 16	81500.00	19. 33. 36	20456. 72—	48. 54
— 5. 57			122. 63	
54. 41. 13	81600.00	19. 35. 2	20334. 09+	48. 58
— 5. 58			122. 47	
54. 47. 11	81700.00	19. 36. 29	20211. 62—	49. 1
— 5. 58			122. 32	
54. 53. 9	81800.00	19. 37. 55	20089. 30—	49. 5
— 5. 59			122. 18	
54. 59. 8	81900.00	19. 39. 22	19967. 12	49. 8
— 6. 0			122. 03	
55. 5. 8	82000.00	19. 40. 48	19845. 09+	49. 12
— 6. 1			121. 87	
55. 11. 9	82100.00	19. 42. 14	19723. 22—	49. 16
— 6. 2			121. 73	
55. 17. 11	82200.00	19. 43. 41	19601. 49	49. 19
— 6. 3			121. 58	
55. 23. 14	82300.00	19. 45. 7	19479. 91	49. 23
— 6. 3			121. 43	
55. 29. 17	82400.00	19. 46. 34	19358. 48	49. 26
— 6. 4			121. 29	
55. 35. 21	82500.00	19. 48. 0	19237. 19	49. 30
— 6. 5			121. 14	
55. 41. 26	82600.00	19. 49. 26	19116. 05	49. 34
— 6. 6			120. 99	
55. 47. 32	82700.00	19. 50. 53	18995. 06	49. 37
— 6. 7			120. 84	
55. 53. 39	82800.00	19. 52. 19	18874. 22—	49. 41
— 6. 8			120. 71	
55. 59. 47	82900.00	19. 53. 46	18753. 51+	49. 44
— 6. 9			120. 55	
56. 5. 56	83000.00	19. 55. 12	18632. 96	49. 48
— 6. 10			120. 41	
56. 12. 6	83100.00	19. 56. 38	18512. 55	49. 52
— 6. 11			120. 27	
56. 18. 17	83200.00	19. 58. 5	18392. 28+	49. 55
— 6. 12			120. 12	
56. 24. 29	83300.00	19. 59. 31	18272. 16+	49. 59
— 6. 13			119. 97	
56. 30. 42	83400.00	20. 0. 58	18152. 19	50. 2
— 6. 14			119. 83	
56. 36. 56	83500.00	20. 2. 24	18032. 36	50. 6
— 6. 15			119. 69	
56. 43. 11	83600.00	20. 3. 50	17912. 67—	50. 10
— 6. 16			119. 55	
56. 49. 27	83700.00	20. 5. 17	17793. 12	50. 13
— 6. 18			119. 40	
56. 55. 45	83800.00	20. 6. 43	17673. 72—	50. 17
— 6. 19			119. 26	
57. 2. 4	83900.00	20. 8. 10	17554. 46—	50. 20
— 6. 20			119. 12	
57. 8. 24	84000.00	20. 9. 36	17435. 34	50. 24
— 6. 21			118. 98	

	ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
	— 6. 21			118. 98	
	57. 14. 45	84100.00	20. 11. 2	17316. 36+	50. 28
	— 6. 22			118. 83	
	57. 21. 7	84200.00	20. 12. 29	17197. 53—	50. 31
	— 6. 23			118. 70	
10	57. 27. 30	84300.00	20. 13. 55	17078. 83	50. 35
	— 6. 24			118. 55	
	57. 33. 54	84400.00	20. 15. 22	16960. 28—	50. 38
	— 6. 25			118. 41	
N 3	57. 40. 19	84500.00	20. 16. 48	16841. 87—	50. 42
	— 6. 26			118. 28	
	57. 46. 45	84600.00	20. 18. 14	16723. 59+	50. 46
	— 6. 27			118. 13	
	57. 53. 12	84700.00	20. 19. 41	16605. 46	50. 49
	— 6. 28			117. 99	
20	57. 59. 40	84800.00	20. 21. 7	16487. 47—	50. 53
	— 6. 30			117. 86	
	58. 6. 10	84900.00	20. 22. 34	16369. 61+	50. 56
	— 6. 31			117. 71	
	58. 12. 41	85000.00	20. 24. 0	16251. 90—	51. 0
	— 6. 32			117. 58	
	58. 19. 13	85100.00	20. 25. 26	16134. 32	51. 4
	— 6. 33			117. 44	
	58. 25. 46	85200.00	20. 26. 53	16016. 88—	51. 7
	— 6. 35			117. 31	
30	58. 32. 21	85300.00	20. 28. 19	15899. 57+	51. 11
	— 6. 36			117. 16	
	58. 38. 57	85400.00	20. 29. 46	15782. 41	51. 14
	— 6. 37			117. 03	
	58. 45. 34	85500.00	20. 31. 12	15665. 38	51. 18
	— 6. 39			116. 89	
	58. 52. 13	85600.00	20. 32. 38	15548. 49+	51. 22
	— 6. 40			116. 75	
	58. 58. 53	85700.00	20. 34. 5	15431. 74	51. 25
	— 6. 41			116. 62	
40	59. 5. 34	85800.00	20. 35. 31	15315. 12	51. 29
	— 6. 42			116. 48	
	59. 12. 16	85900.00	20. 36. 58	15198. 64—	51. 32
	— 6. 44			116. 35	
	59. 19. 0	86000.00	20. 38. 24	15082. 29	51. 36
	— 6. 45			116. 21	
	59. 25. 45	86100.00	20. 39. 50	14966. 08—	51. 40
	— 6. 46			116. 06	
	59. 32. 31	86200.00	20. 41. 17	14850. 02—	51. 43
	— 6. 47			115. 95	
50	59. 39. 18	86300.00	20. 42. 43	14734. 07+	51. 47
	— 6. 49			115. 82	
	59. 46. 7	86400.00	20. 44. 10	14618. 25+	51. 50
	— 6. 51			115. 68	
N 3 v	59. 52. 58	86500.00	20. 45. 36	14502. 57	51. 54
	— 6. 52			115. 53	
	59. 59. 50	86600.00	20. 47. 2	14387. 04—	51. 58
	— 6. 53			115. 41	
60	60. 6. 43	86700.00	20. 48. 29	14271. 63	52. 1
	— 6. 54			115. 27	
	60. 13. 37	86800.00	20. 49. 55	14156. 36	52. 5
	— 6. 56			115. 14	
	60. 20. 33	86900.00	20. 51. 22	14041. 22	52. 8
	— 6. 57			115. 01	
	60. 27. 30	87000.00	20. 52. 48	13926. 21—	52. 12
	— 6. 59			114. 88	

ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
— 6. 59			114. 88	
60. 34. 29	87100.00	20. 54. 14	13811. 33	52. 16
— 7. 1			114. 74	
60. 41. 30	87200.00	20. 55. 41	13696. 59	52. 19
— 7. 3			114. 72	
60. 48. 33	87300.00	20. 57. 7	13581. 87	52. 23
— 7. 4			114. 38	
60. 55. 37	87400.00	20. 58. 34	13467. 49+	52. 26
— 7. 6			114. 35	
61. 2. 43	87500.00	21. 0. 0	13353. 14	52. 30
— 7. 8			114. 22	
61. 9. 51	87600.00	21. 1. 26	13238. 92	52. 34
— 7. 9			114. 09	
61. 17. 0	87700.00	21. 2. 53	13124. 83+	52. 37
— 7. 10			113. 96	
61. 24. 10	87800.00	21. 4. 19	13010. 87	52. 41
— 7. 12			113. 83	
61. 31. 22	87900.00	21. 5. 46	12897. 04	52. 44
— 7. 13			113. 70	
61. 38. 35	88000.00	21. 7. 12	12783. 34—	52. 48
— 7. 15			113. 57	
61. 45. 50	88100.00	21. 8. 38	12669. 77—	52. 52
— 7. 16			113. 45	
61. 53. 6	88200.00	21. 10. 5	12556. 32	52. 55
— 7. 18			113. 31	
62. 0. 24	88300.00	21. 11. 31	12443. 01—	52. 59
— 7. 20			113. 19	
62. 7. 44	88400.00	21. 12. 58	12329. 82	53. 2
— 7. 22			113. 06	
62. 15. 6	88500.00	21. 14. 24	12216. 76+	53. 6
— 7. 24			112. 93	
62. 22. 30	88600.00	21. 15. 50	12103. 83+	53. 10
— 7. 26			112. 80	
62. 29. 56	88700.00	21. 17. 17	11991. 03	53. 13
— 7. 27			112. 68	
62. 37. 23	88800.00	21. 18. 43	11878. 35+	53. 17
— 7. 29			112. 55	
62. 44. 52	88900.00	21. 20. 10	11765. 80+	53. 20
— 7. 31			112. 42	
62. 52. 23	89000.00	21. 21. 36	11653. 38	53. 24
— 7. 33			112. 29	
62. 59. 56	89100.00	21. 23. 2	11541. 09—	53. 28
— 7. 35			112. 17	
63. 7. 31	89200.00	21. 24. 29	11428. 92—	53. 31
— 7. 37			112. 05	
63. 15. 8	89300.00	21. 25. 55	11316. 87	53. 35
— 7. 40			111. 92	
63. 22. 48	89400.00	21. 27. 22	11204. 95	53. 38
— 7. 42			111. 79	
63. 30. 30	89500.00	21. 28. 48	11093. 16—	53. 42
— 7. 44			111. 67	
63. 38. 14	89600.00	21. 30. 14	10981. 49	53. 46
— 7. 46			111. 55	
63. 46. 0	89700.00	21. 31. 41	10869. 94+	53. 49
— 7. 48			111. 42	
63. 53. 48	89800.00	21. 33. 7	10758. 52	53. 53
— 7. 50			111. 29	
64. 1. 38	89900.00	21. 34. 34	10647. 23—	53. 56
— 7. 52			111. 18	
64. 9. 30	90000.00	21. 36. 0	10536. 05	54. 0
— 7. 54			111. 05	

	ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
	— 7. 54			111. 05	
	64. 17. 24	90100.00	21. 37. 26	10425. 00	54. 4
	— 7. 56			110. 92	
	64. 25. 20	90200.00	21. 38. 53	10314. 08—	54. 7
	— 7. 58			110. 81	
10	64. 33. 18	90300.00	21. 40. 19	10203. 27+	54. 11
	— 8. 1			110. 68	
	64. 41. 19	90400.00	21. 41. 46	10092. 59	54. 14
	— 8. 3			110. 56	
N ^{4v}	64. 49. 22	90500.00	21. 43. 12	9982. 03+	54. 18
	— 8. 6			110. 43	
	64. 57. 28	90600.00	21. 44. 38	9871. 60	54. 22
	— 8. 9			110. 32	
	65. 5. 37	90700.00	21. 46. 5	9761. 28+	54. 25
	— 8. 12			110. 19	
20	65. 13. 49	90800.00	21. 47. 31	9651. 09	54. 29
	— 8. 14			110. 07	
	65. 22. 3	90900.00	21. 48. 58	9541. 02	54. 32
	— 8. 17			109. 95	
	65. 30. 20	91000.00	21. 50. 24	9431. 07	54. 36
	— 8. 19			109. 83	
	65. 38. 39	91100.00	21. 51. 50	9321. 24	54. 40
	— 8. 21			109. 71	
	65. 47. 0	91200.00	21. 53. 17	9211. 53	54. 43
	— 8. 24			109. 59	
30	65. 55. 24	91300.00	21. 54. 43	9101. 94	54. 47
	— 8. 26			109. 47	
	66. 3. 50	91400.00	21. 56. 10	8992. 47	54. 50
	— 8. 29			109. 35	
	66. 12. 19	91500.00	21. 57. 36	8883. 12+	54. 54
	— 8. 32			109. 23	
	66. 20. 51	91600.00	21. 59. 2	8773. 89+	54. 58
	— 8. 35			109. 11	
	66. 29. 26	91700.00	22. 0. 29	8664. 78	55. 1
	— 8. 39			108. 99	
40	66. 38. 5	91800.00	22. 1. 55	8555. 79	55. 5
	— 8. 42			108. 87	
	66. 46. 47	91900.00	22. 3. 22	8446. 92—	55. 8
	— 8. 46			108. 76	
	66. 55. 33	92000.00	22. 4. 48	8338. 16	55. 12
	— 8. 49			108. 63	
	67. 4. 22	92100.00	22. 6. 14	8229. 53—	55. 16
	— 8. 51			108. 52	
	67. 13. 13	92200.00	22. 7. 41	8121. 01—	55. 19
	— 8. 54			108. 40	
50	67. 22. 7	92300.00	22. 9. 7	8012. 61—	55. 23
	— 8. 58			108. 29	
	67. 31. 5	92400.00	22. 10. 34	7904. 32	55. 26
	— 9. 1			108. 16	
0	67. 40. 6	92500.00	22. 12. 0	7796. 16—	55. 30
	— 9. 4			108. 05	
	67. 49. 10	92600.00	22. 13. 26	7688. 11—	55. 34
	— 9. 8			107. 94	
	67. 58. 18	92700.00	22. 14. 53	7580. 17+	55. 37
	— 9. 13			107. 81	
60	68. 7. 31	92800.00	22. 16. 19	7472. 36—	55. 41
	— 9. 15			107. 70	
	68. 16. 46	92900.00	22. 17. 46	7364. 66—	55. 44
	— 9. 20			107. 59	
	68. 26. 6	93000.00	22. 19. 12	7257. 07	55. 48
	— 9. 23			107. 47	

ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicezi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
— 9. 23			107. 47	
68. 35. 29	93100.00	22. 20. 38	7149. 60	55. 52
— 9. 27			107. 35	
68. 44. 56	93200.00	22. 22. 5	7042. 25	55. 55
— 9. 31			107. 24	
68. 54. 27	93300.00	22. 23. 31	6935. 01	55. 59
— 9. 35			107. 12	
69. 4. 2	93400.00	22. 24. 58	6827. 89—	56. 2
— 9. 39			107. 01	
69. 13. 41	93500.00	22. 26. 24	6720. 88—	56. 6
— 9. 44			106. 90	
69. 23. 25	93600.00	22. 27. 50	6613. 98	56. 10
— 9. 48			106. 78	
69. 33. 13	93700.00	22. 29. 17	6507. 20	56. 13
— 9. 53			106. 67	
69. 43. 6	93800.00	22. 30. 43	6400. 53—	56. 17
— 9. 57			106. 55	
69. 53. 3	93900.00	22. 32. 10	6293. 98	56. 20
— 10. 3			106. 44	
70. 3. 6	94000.00	22. 33. 36	6187. 54	56. 24
— 10. 7			106. 32	
70. 13. 13	94100.00	22. 35. 2	6081. 22—	56. 28
— 10. 12			106. 22	
70. 23. 25	94200.00	22. 36. 29	5975. 00	56. 31
— 10. 17			106. 10	
70. 33. 42	94300.00	22. 37. 55	5868. 90	56. 35
— 10. 22			105. 99	
70. 44. 4	94400.00	22. 39. 22	5762. 91	56. 38
— 10. 27			105. 87	
70. 54. 31	94500.00	22. 40. 48	5657. 04—	56. 42
— 10. 34			105. 77	
71. 5. 5	94600.00	22. 42. 14	5551. 27	56. 46
— 10. 39			105. 65	
71. 15. 44	94700.00	22. 43. 41	5445. 62	56. 49
— 10. 46			105. 54	
71. 26. 30	94800.00	22. 45. 7	5340. 08	56. 53
— 10. 51			105. 43	
71. 37. 21	94900.00	22. 46. 34	5234. 65	56. 56
— 10. 57			105. 32	
71. 48. 18	95000.00	22. 48. 0	5129. 33	57. 0
— 11. 4			105. 21	
71. 59. 22	95100.00	22. 49. 26	5024. 12	57. 4
— 11. 12			105. 09	
72. 10. 34	95200.00	22. 50. 53	4919. 03—	57. 7
— 11. 18			104. 99	
72. 21. 52	95300.00	22. 52. 19	4814. 04	57. 11
— 11. 24			104. 88	
72. 33. 16	95400.00	22. 53. 46	4709. 16	57. 14
— 11. 31			104. 77	
72. 44. 47	95500.00	22. 55. 12	4604. 39—	57. 18
— 11. 39			104. 65	
72. 56. 26	95600.00	22. 56. 38	4499. 74—	57. 22
— 11. 47			104. 55	
73. 8. 13	95700.00	22. 58. 5	4395. 19	57. 25
— 11. 54			104. 44	
73. 20. 7	95800.00	22. 59. 31	4290. 75	57. 29
— 12. 3			104. 33	
73. 32. 10	95900.00	23. 0. 58	4186. 42	57. 32
— 12. 13			104. 22	
73. 44. 23	96000.00	23. 2. 24	4082. 20	57. 36
— 12. 22			104. 11	

	ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
	— 12. 22			104. 11	
	73. 56. 45	96100.00	23. 3. 50	3978. 09	57. 40
	— 12. 30			104. 01	
	74. 9. 15	96200.00	23. 5. 17	3874. 08+	57. 43
	— 12. 41			103. 89	
10	74. 21. 56	96300.00	23. 6. 43	3770. 19—	57. 47
	— 12. 50			103. 79	
	74. 34. 46	96400.00	23. 8. 10	3666. 40	57. 50
	— 13. 1			103. 68	
0 2	74. 47. 47	96500.00	23. 9. 36	3562. 72	57. 54
	— 13. 13			103. 57	
	75. 1. 0	96600.00	23. 11. 2	3459. 15—	57. 58
	— 13. 23			103. 47	
	75. 14. 23	96700.00	23. 12. 29	3355. 68	58. 1
	— 13. 37			103. 36	
	75. 28. 0	96800.00	23. 13. 55	3252. 32	58. 5
20	— 13. 50			103. 25	
	75. 41. 50	96900.00	23. 15. 22	3149. 07—	58. 8
	— 14. 3			103. 15	
	75. 55. 53	97000.00	23. 16. 48	3045. 92	58. 12
	— 14. 16			103. 04	
	76. 10. 9	97100.00	23. 18. 14	2942. 88	58. 16
	— 14. 30			102. 93	
	76. 24. 39	97200.00	23. 19. 41	2839. 95	58. 19
	— 14. 45			102. 83	
	76. 39. 24	97300.00	23. 21. 7	2737. 12	58. 23
30	— 15. 1			102. 72	
	76. 54. 25	97400.00	23. 22. 34	2634. 40	58. 26
	— 15. 18			102. 62	
	77. 9. 43	97500.00	23. 24. 0	2531. 78	58. 30
	— 15. 37			102. 51	
	77. 25. 20	97600.00	23. 25. 26	2429. 27	58. 34
	— 15. 55			102. 41	
	77. 41. 15	97700.00	23. 26. 53	2326. 86+	58. 37
	— 16. 17			102. 30	
	77. 57. 32	97800.00	23. 28. 19	2224. 56	58. 41
40	— 16. 40			102. 20	
	78. 14. 12	97900.00	23. 29. 46	2122. 36+	58. 44
	— 17. 5			102. 09	
	78. 31. 17	98000.00	23. 31. 12	2020. 27	58. 48
	— 17. 31			101. 99	
	78. 48. 48	98100.00	23. 32. 38	1918. 28	58. 52
	— 17. 59			101. 88	
	79. 6. 47	98200.00	23. 34. 5	1816. 40—	58. 55
	— 18. 27			101. 78	
	79. 25. 14	98300.00	23. 35. 31	1714. 62—	58. 59
50	— 18. 58			101. 68	
	79. 44. 12	98400.00	23. 36. 58	1612. 94	59. 2
	— 19. 34			101. 58	
0 2 p	80. 3. 46	98500.00	23. 38. 24	1511. 36+	59. 6
	— 20. 12			101. 47	
	80. 23. 58	98600.00	23. 39. 50	1409. 89+	59. 10
	— 20. 53			101. 37	
	80. 44. 51	98700.00	23. 41. 17	1308. 52+	59. 13
	— 21. 42			101. 26	
	81. 6. 33	98800.00	23. 42. 43	1207. 26	59. 17
60	— 22. 53			101. 17	
	81. 29. 26	98900.00	23. 44. 10	1106. 09+	59. 20
	— 24. 6			101. 06	
	81. 53. 32	99000.00	23. 45. 36	1005. 03+	59. 24
	— 25. 6			100. 96	

ARCUS <i>Circuli cum differentiis</i>	SINUS <i>seu Numeri absoluti</i>	<i>Partes vicesi- mae quartae</i>	LOGARITHMI <i>cum differentiis</i>	<i>Partes sexagenariae</i>
— 25. 6			100. 96	
82. 18. 38	99100.00	23. 47. 2	904. 07 +	59. 28
26. 28			100. 85	
82. 45. 6	99200.00	23. 48. 29	803. 22 —	59. 31
— 27. 54			100. 76	
83. 13. 0	99300.00	23. 49. 55	702. 46	59. 35
30. 20			100. 65	
83. 43. 20	99400.00	23. 51. 22	601. 81	59. 38
— 32. 40			100. 56	
84. 16. 0	99500.00	23. 52. 48	501. 25 +	59. 42
36. 30			100. 45	
84. 52. 30	99600.00	23. 54. 14	400. 80	59. 46
— 41. 9			100. 35	
85. 33. 39	99700.00	23. 55. 41	300. 45	59. 49
48. 54			100. 25	
86. 22. 33	99800.00	23. 57. 7	200. 20	59. 53
— 1. 3. 42			100. 15	
87. 26. 15	99900.00	23. 58. 34	100. 05	59. 56
2. 33. 45			100. 05	
90. 0. 0	100000.00	24. 0. 0	000000.00	60. 0

10

20

Joannis Kepleri,
IMP. CÆS. FERDINANDI II.
MATHEMATICI,
SUPPLEMENTUM
CHILIADIS
LOGARITHMORUM,
Continens
PRÆCEPTA DE EORUM USU,
AD
ILLUSTRISS. PRINCIPEM ET DOMINUM,
DN. PHILIPPUM LAND-
GRAVIUM HASSIÆ, &c.



MARPURGI,
Ex officina Typographica Casparis Chemlini.

clō lō cXXV.

SUPPLEMENTUM CHILIADIS LOGARITHMORUM,
CONTINENS
PRAECEPTA DE EORUM USU.

LECTORI S.

Cum anno 1621. venissem in Germaniam superiorem, passimque cum peritis rerum Mathematicarum de Logarithmis Neperianis contulissem: deprehendi eos, quibus aetas prudentiam addebat, promptitudinem minuebat, super hoc genere numerorum, loco Canonis Sinuum in usum recipiendo, cunctari: quod dicerent turpe esse Professore Mathematico, super compendio aliquo calculi pueriliter exultare, interimque sine demonstratione legitimâ formam calculi in usum recipere, quae olim, cum minimè metueres, in erroris insidias te pertrahere posset. Querebantur NEPERI demonstrationem niti figmento motus cujusdam Geometrici, cujus lubricitas et fluxibilitas inepta esset, in quâ solidus ille stilus Rationis Demonstrationumque firmum poneret vestigium. Haec mihi causa fuit, statim tunc concipiendi rudimentum aliquod Demonstrationis legitimæ; quod posterius, ut primùm Lincium reversus sum, excolui diligentius: maximè postquàm initio anni 1622. super ea re cum Illustri et Generoso D. D. PETRO HENRICO à STRALENDORFF, S. Caes. ¹ Majest. in consistorio Imperiali Aulico vice Praeside, etc. contulissem; qui ut est harum artium avidissimus, rogando plurium me rerum admonuit, quàm liber aliquis benè crassus praecipiendo admonere posset. Per illam igitur hyemem solennem rei demonstrationem sum aggressus; subjectum hujus speculationis, quodnam esset genuinum, descripsi; quodque id non esset verè sub genere vel linearum, vel motus fluxusque, aut cujusquàm alterius quantitatis sensilis, ut sic dicam, sed sub genere Relationum quantitatisque mentalis, evidentibus enunciationibus constitui: deinde cum, ut omnes caeterae, sic etiam mentalis ista quantitas (*λογος* Graecis dicta, quod Latini Rationem minus usitatè, crebrius Proportionem transferunt) divisionem in infinitum recipiat: metas etiam hujus divisionis congruas, ex eodem scilicet genere rerum constitui: Lineae enim punctis, motus articulis temporum dividi solet; at Proportionem dispescunt termini

20) supra 30) quantitas

inter extremos magnitudine medii. Hisce sic constitutis feliciter, procedebat demonstratio: vera proportionum omnium communicantium communisque mensura facta est et ipsa de genere proportionum: locus est factus Arbitrio, in eligendo proportionis Elemento, quodnam deberet haberi pro minimo, proque mensura: demonstratum etiam est plerunque esse proportionem inter se incommunicabiles; eoque minimum unius Elementum quod placuisset, non posse esse mensuram genuinam proportionis cujuscunque alterius: semper enim peccari vel excessu, vel defectu. Ea de causa factus jam est hic alter locus Arbitrio, ut quidam defectus, quae minimorum Elementorum incommunicabilium differentia dissimulari posset, inque profundum insensibilitatis demergi, constitueretur, ut sic tandem in usum ipsum numerorum redundaret, absurda quidem demonstranti, sed utilissima computanti, *incommunicabilium proportionum communis mensura, Logarithmus dicta.* 10

Simul autem fuit ipso opere monendus Lector meus, Logarithmos non primum nasci cum Sinubus, seu rectis in Circulo, quod Neperiana descriptio incautius inspecta prae se ferre videtur, sed foris extra Geometriam Circuli constitui, tanquam intra metas libri quinti EVCLIDIS: inde verò transsumptos, applicari Sinubus, eoque concipiendam esse animo (quam ipse dudum descripseram in Tabula) Matricem quandam Logarithmorum, ex qua omnis per numeros expressa quantitas, etiam Sinus ipsi, suos Logarithmos peterent, ea ipsa numerorum fide, quâ Sinus ipsi sunt in Geometria Circuli definiti: ut si qui Sinus non legitimo numero sit expressus, idem etiam ex hac Matrice Logarithmum imperfectum hausurus sit, nullo Matricis, sed suo proprio vitio. Hoc igitur proposito et computata est à me Chilias Logarithmorum, et adornata etiam demonstratio; quae Ordinem praecipuè numerorum Chiliadis est complexa, causasque ejus in lucem profert. De usu Chiliadis populari cogitatio aequalis quidem tempore, naturâ tamen fuit posterior. Chiliada cum demonstratione, ut primùm perfecta fuit, transmissi Lincio tanquam ad PHILIPPVM LANDGRAVIVM HASSIAE, sed per ambages itinerum, in quibus libellus haesit in tertium annum usque. Spes interdum affulsit mihi, libellum excusum iri curâ peritorum: sed ea subinde iterum extincta fuit. Itaque refrixit etiam apud me studium libelli exornandi. Tandem in manus Patroni sui Illustrissimi perlatum, me penitus ignaro, nec quicquam tale opinante, typis mandatum fuit; ut prius ex Catalogo Nundinarum Francofurtensium, quàm ex Literis Cels. suae (quas adhucdum in itinere esse nuper admodum rescivi) quid ageretur perceperim. Non dubito, quin Cels. sua in literis me moneat, si quid de usu Chiliadis conceperim, ut id subsidio mittam, quo commendatio et utilior libellus exeat. Nam illi jam superius commemorati fines scrip-

tionis, reconditiorem sensum habent, adque paucos pertinent. Et habet sanè ipsa Chalias tres columnas superadditas, quae totae se à subtilitate illa demonstrationum subducunt, adque usum conferunt. Vt igitur, quod in hac editione temporum et locorum culpâ fuit omissum, suppleatur, ut scilicet Chalias ista, è penetralibus illis speculationum et demonstrationum, quarum praecipuè causâ composita fuit, etiam ad populares usus educatur, prius sunt aliqua mihi praefanda de Titulo. Is profitetur Demonstrationem legitimam ortus Logarithmorum. Et spero fassuros esse Geometras, quod in chartis excusis hunc scopum
 10 sim consecutus. Profitetur verò etiam Demonstrationem usus Logarithmorum. Hic subsiste lector. Dum enim rei demonstrationem polliceor, rem ipsam praesuppono jam antea notam, vulgoque tritam. Quenam verò res ista? quis usus Logarithmorum? Nimirum is ipse, qui jam ante decem annos à primo autore NEPERO fuit traditus, quique tribus verbis potest concipi: *Vbicunque occurrunt in Arithmetica communi, inque Regula Trium duo numeri inter se multiplicandi, ibi sunt eorum Logarithmi in unam summam addendi; ubi verò Numerus absolutus jubetur factum dividere, ibi Logarithmus illius est auferendus à Logarithmorum summâ: ut Logarithmus illic acervatus, hic residuus, monstret numerum in qualibet*
 20 *operatione quaesitum.* Hic, inquam, est usus Logarithmorum. Hujus usus demonstrationem habes in Propositionibus XVIII. XIX. XX. ut vides in earum Corollariis expressis verbis indicatum. Perpende rem, dices, scio nihil promissum esse in tituli verbis allegatis, quod non sit praestitum in his tribus Propositionibus. Quod verò pulli Arithmeticorum
 116 implumes, facilitatum avi'di, rostra ad hanc usus mentionem in immensum pandunt, velut hausuri omnes praeceptiuncularum particularium bolos, quibus exsatientur: id equidem praestare in chartis istis, quae demonstrationi fundamentorum erant destinatae, non potui. At dixeris, sequentia verba Tituli de novâ Arithmeticâ omninò plura
 30 polliceri? Video equidem irritamenta cupiditatum talium, et rideo; mirorque non incidisse mihi, cum subito tabellarii discessu ad properandum compulsus, illud Elogium inventi Neperiani, quo Typographus aliquis illiceretur, titulo libelli mei subjungerem, fore ut in majus acciperetur, veluti propria mea gloriatio. Sed utcunque quis hoc meum consilium accipiat, de intentione saltem, me excusat constructio Grammatica. Non de Chiliadis libello, non de mea demonstratione usus dictum vides, sed de Logarithmis ipsis, invento scilicet Neperiano; quod iis nova tradatur Arithmetica. Nec ego haec sequentia praecepta de usu Chiliadis hujus in id submittenda libello jam excuso statui, ut hanc
 40 posteriorem tituli partem penitus ad ipsam meam Chiliada traducerem:

segregetur ea pars tituli à labore meo, adque inventum ipsum Neperianum, et ad Canonem Logarithmorum Quadrantis referatur. Non titulus iste subito conceptus, sed utilitas ipsa emptoris me monet, ut quomodo singulae Chiliadis columnae possint ad usum popularem referri et quatenus, pauculis praeceptis docerem. Ea verò referam in certa Capitula. In primo paucula praemittam de Tabula Chiliadis. In secundum Caput referam comparisonem Columnae arcuum, cum Columnâ Rotundorum. Tertio dicam de comparatione Columnae secundae Sinuum, cum tertia Quadrivicenaria, et quinta Sexagesimorum. Quarto comparabo Quadrivicenariam cum Sexagenariâ. In quinto Capite erit usus 10 Quadrivicenariae, et Logarithmicae columnarum junctarum. In sexto Sexagenariae et Logarithmicae. In septimo comparabitur Columna prima arcuum, cum quartâ Logarithmorum. In octavo jungentur Columna secunda Absolutorum, et Quarta Logarithmorum. In nono denique Columna Logarithmorum jungetur duabus aliis columnis.¹

DE TABULA CHILIADIS, EIUSQUE COLUMNIS

Primum sciat Lector, Exemplar meum in formâ folii scriptum, divisum fuisse in vestibulum Chiliadis, et in Chiliada ipsam. In vestibulum accensentur lineae 36. ut Chiliadis ipsius principium habeatur ibi, ubi est numerus 100.00. Hac monitione opus est. Nam vestibuli non est eadem proportionum sequela, quae Chiliadis ipsius, ut apparet ex ipsis Logarithmorum differentiis: quarum series quater ad idem re-
 10 in vestibulo, qui in Chiliade, eaque de causa relictæ sunt vacantes: denique totum vestibulum abesse posset, nisi capite octavo tribuendum id esset Analogiæ cum Arithmeticâ communi, et integrationi Numerorum omnium.

Jam Columnas Chiliadis ipsius vides esse quinque, lineas mille. Prima est Columna arcuum Quadrantis, qui habent pro Sinibus Rotundos illos secundæ Columnæ numeros. Arcus isti sunt expressi ternis membris per puncta inter se discretis, in primo sunt gradus, in secundo scrupula prima, in tertio scrupula secunda, quæ, cum suis tertiis et quartis careant, non possunt exacta esse, præterquam in unico arcu 30.
 20 G. inque fine Quadrantis. Quanquam inepta est cura de parte unius
 122 Secundi, cùm ipsa applicatio arcuum¹ horum ad suas lineas, rotundis numeris expressas, eoque effabiles, non sit secuta demonstrationis aliqujus subtilitatem, sed solum popularem inquisitionem partis proportionalis ex Canone Sinuum. Itaque fieri potest, præsertim circa finem quadrantis, ut scrupula secunda paucula passim vel deficient, vel abundant. Inter lineas insertæ sunt differentiæ, quantæ arcubus per singulas millesimas totius semidiametri accrescunt. Earum minima in principio quadrantis est 3'. 26'' +, maxima in fine quadrantis est 153'. 45''. seu
 2. G. 33'. 45''. quadragecupla quintupla minimæ.

30 Sequitur secunda Columna numerorum: ipsorum Rotundorum. Rotundos hic appello, qui continent exactè partes millesimas sui Maximi in fine positi scilicet 100000.00. hoc est: Rotundi habentur, qui terminantur in quatuor minimum Cyphas rotundas, Nullas dictas.

Vicissim Numeri scrupulosi habentur respectu Chiliadis hujus, qui desinunt in cyphas significativas, aut qui minus quàm quatuor Nullas habent in fine. Vt 96300.00. est rotundus, sic etiam 90000.00. At 96350.00. et 96357.00. et 96300.68. et 90000.05. sunt scrupulosi. Atque hi rotundi nostræ Chiliadis, respectu quidem arcuum ad latus sinistrum

positorum, appellantur Sinus, respectu verò columnarum caeterarum ad dextram appellantur Absoluti, quia in caeteris columnis intelliguntur numeri significatione aliquâ certâ revincti.

Hic venit observanda causa, cur, cùm Chiliada scribere proposuerim, numerus tamen maximus non sit 1000. sed potius 100000.00. ejusque unitas non 1. sed 100.00. Deinde cur semper ultimae duae numeri cujusque figurae interposito puncto sint separatae, et velut abscissae à reliquis versus sinistram. Causa igitur utriusque rei est eadem, quia nimirum in vulgato Canone Sinuum, maximus seu semidiameter Circuli constat figuris totidem, vel enim 100000. vel 10000000. solet usurpari. Et quia Radius ille ad quinque Cyphras continuatus plerunque sufficit ad calculum, alterius qui septem cyphris exprimitur, rarior est necessitas: hinc postremi Canonis Sinuum excultores coeperunt duas ultimas, tanquam minus necessarias, puncto separare. Atque hoc ego mihi ratus sum observandum in rotundis meis, ut qui sunt etiam loco Sinuum. Si quis iis, ut absolutis, velit uti, poterit quatuor ultimas Cyphras rejicere, quoties id usus aut praecepta sequentia exegerint. 10 123

Porrò haec causa attinet etiam columnam quartam, quae praecipua est, Logarithmorum scilicet cum differentiis, de qua nunc plura dicam.

Primum operae precium fecerit computista, qui hâc Chiliade est usus, si subordinationem differentiarum sub suos Logarithmos subtilibus lineolis adjuvet, ut singulae figurae illarum singulis horum respondeant. 20

Deinde notet calculator, numeros hos non esse ἀριθμοὺς absolutos, sed esse λογαρίθμους, numeros scilicet relatos singulos ad binos alios numeros, proportionem significantes, quae est inter absolutum ad latus sinistrum positum, et inter maximum Chiliadis seu 100000.00.

Tertiò hi Logarithmi omnes sunt scrupulosi, hoc est, non rotundi. Non tamen exhausta est omnis eorum scrupulositas continuatione hâc eorum usque ad duas figuras ultra punctum. Atque hoc indicatur ibi per signa + plus et — minus passim apposita. 30

Nam quibus nullum tale adest signum, iis intellige non unum quadrantem unitatis neque deficere, neque abundare: qui verò habent signum +, ii habent insuper plus quàm quadrantem, minus quàm semissem unitatis, aut summum semissem: qui denique habent signum —, eos intellige minuendos ¹ aliquâ particulâ unitatis, quae sit inter quadrantem et semissem. Qui igitur vult accuratissimè computare, is si duos Logarithmos est additurus cum signo +, summae poterit addere unum insuper semissem: Sin duos cum signo —, de summâ detrahet semissem. Et in Subtractione, si qui est cum signo — subtrahendus erit ab 40

30) indicatur + ibi 32) unam

aliquo cum signo $\rightarrow$, is residuum faciet semisse auctius. Sin è contrario is qui habet $\rightarrow$ subtrahi debet ab eo qui habet $\rightarrow$, Residuum semisse minuendum erit.

Exempla additionis.	12783.34 —	59783.70 $\rightarrow$
	230258.52 —	61618.61 $\rightarrow$
	243041.85 $\frac{1}{2}$	121402.31 $\frac{1}{2}$
	sive 86 —	sive 32 —
Exempla subtractionis.	59783.70 $\rightarrow$	231263.55 —
	12783.34 —	1005.03 $\rightarrow$
	47000.36 $\frac{1}{2}$	230258.51 $\frac{1}{2}$
	sive 37 —	sive 52 —

Haec scrupulositas locum habet tantum in Logarithmis, qui sunt expressi in Chiliade, quorum correctionem vide in calce harum paginarum: in aliis intercidentibus praestari non facile potest: nusquam verò est absolute necessaria. Immo plerumque contemni possunt duae ultimae post punctum. Denique quanto major Logarithmus, tanto minus periculi in neglectu figurarum differentiae, post duas ad sinistram primas omnium.

Restant Columnae Tertia et Quinta. Et in Tertia quidem sunt numeri Logistici non absoluti; maximus habet 24. G. quot scilicet sunt unius diei Horae, etsi possunt significare promiscue vel horas, vel gradus.¹

In Quinta rursum sunt numeri Logistici, complectentes collectionem sexagenariam: itaque maximus est 60'. Tertia quidem numeros exhibet suos tribus membris, in primo sunt integri gradus vel horae, in secundo scrupula prima unius integri, in tertio scrupula secunda. Quinta duobus membris est contenta, scrupulis nimirum et secundis. Cum autem divisio millenaria non sit apta numeris 24. G. et 60'. fit ut in his duabus columnis ultima unitas scrupulorum secundorum non sit exacta: nam minutiae ejus, quae minus semisse efficiunt, neglectae sunt, quae plus, eae completionem unitatis sunt confusae et oblitteratae. Pars enim millesima de 24. G. est 0. G. 1'. 26". 24'''. pro qua scripta sunt 0. G. 1'. 26". Duae tales partes sunt 2'. 52". 48'''. pro hoc scripta sunt 2'. 53''. Et in sexagenaria pars millesima est 0'. 3". 36'''. pro qua scripta sunt 0'. 4''. Duae millesimae sunt 0'. 7". 12'''. pro quo scripta sunt 0'. 7''. Itaque quaternis lineis semper excessu vel defectu peccantibus, solae quintae sunt exactae. Propriam verò et accommodatam hae columnae subdivisionem sortientur in Tabulis Rudolphi. In praesens Chiliadi dandae fuerunt partes potiores: Et electus est à me millenarius, tanquam propria collectio numerorum Absolutorum: quia, ut initio dic-

1) eis statt is 30) ea

tum, scopus meus fuit, monere lectorem, quod proportionales, earumque mensurae, Logarithmi, accedant primò Numeris Absolutis. Nihil tamen impedit has duas columnas, Tertiam et Quintam, etiam per hanc dispositionem minus exactam et impropriam, millenariam scilicet, fieri utiles: ut in sequentibus dicetur.

CAPUT II

DE ASSOCIATIONE COLUMNAE ARCUUM, ET COLUMNAE ROTUNDORUM

Dixi cur in columnâ Numerorum absolutorum statuerim progressionem Arithmeticam continuam ab unitate ad mille, ¹ seu à 100.00. ad 100000.00. et qua ratione cuilibet ex hisce rotundis in columnâ Arcuum, associaverim suum arcum. 10 126

Cùm autem arcus hi omnes sint scrupulosi, fit creberrimè, ut oblato arcu non scrupuloso, aut scrupuloso quidem, sed sic, ut non exactè reperiatur inter arcus Chiliadis, sed inter binos intercitat, ut his, inquam, arcubus jubeamur assignare suos sinus; ut ita Chalias nostra quadamtenus etiam serviat loco Canonis Sinuum, ejusque vices suppleat. Id autem fieri poterit hac ratione.

Per arcum Chiliadis proximè minorem proposito excerpe Sinum Rotundum, eundem arcum aufer à proposito: residua scrupula, prima et secunda, colloca in regula Detri ad dextram, differentiam verò binorum arcuum, inter quos positus intercitat, colloca ad sinistram, in medio colloca numerum progressionis perpetuum scilicet 100.00. et operare per Regulam Detri, prodibunt enim figurae 4. ultimae scrupulosae adjiciendae exscripto sinui rotundo, seu loco deletarum ejus 4. Cyphrarum finalium scribendae. 20

Vicissim dato sinu scrupuloso, indagabimus etiam ejus arcum; si cum sinu rotundo Chiliadis proximè minore quàm est propositus, hoc est, cùm ejus tribus primis figuris ex septem, excerpamus arcum, deinde de differentia interjecta inter duos arcus proximos, sumamus partem proportionalem scrupulositati, quam 4. ultimae sinus dati figurae complectuntur. 30

Hic cùm misceantur Numeri diversorum generum, facilè compendium aliquod invenies ex teipso, si bonus es Arithmeticus, ingenioque polles. Si verò nescis compendium, utere nostro, quod huic rei servitutum in Cap. IX. Num. VII. et VIII. rejectum est.

Non quidem erit exactissima vel una, vel altera operatio, praesertim in fine Quadrantis, quia differentia tunc fit subito magna. Itaque con-

duceret, decem ultimas differentias in denas subdividere, et interpositis
 127 Sinubus usque ad quartam figuram ¹ scrupulosis, suos illis ex Canone
 Quadrantis assignare arcus, quod quilibet privatâ operâ poterit. Exceptis
 verò decem ultimis differentiis, per reliquum Quadrantis pervenimus in
 notitiam Sinuum ad 5. saltem figuras continuatorum, non multò in-
 certius, facilius etiam, quàm per Canonem Sinuum ad singula scrupula
 prima extensorum: quia laborem quaerendae partis, quae sit propor-
 tionalis adhaerentibus secundis, per Logarithmos sublevamus, ut
 Capite IX. doceberis. Quomodo etiam secantes arcuum quodammodo
 10 haberi ex hâc Chiliade possint, infra apparebit Capite VIII.

Jam quorsum sint nobis utiles Sinus arcuum, id non est hujus loci
 docere, ubi omnia per Logarithmos perficimus. Adeantur libri qui
 tradunt Doctrinam Triangulorum per rectos Quadrantis.

CAPUT III

DE COMPARATIONE COLUMNAE SECUNDAE SINUUM, CUM
 TERTIA QUADRIVICENARIA, VEL CUM QUINTA
 SEXAGESIMORUM

† **F**it interdum, sic exigente parte Arithmeticae, quae Logistica dicitur,
 ut semidiameter circuli aliter divisa offeratur, quàm in partes
 20 denarias, centenarias, millenarias, etc. Verbi causâ diameter Solis vel
 Lunae deficientis dividitur in partes 12. quas digitos appellamus. Quod
 si igitur detur aliqua portio diametri in partibus, qualium est semi-
 diameter 100000. ea portio quaesita inter absolutos, statim monstrat è
 regione sub Quadrivicenariâ quadruplum numerum digitorum, quos
 valet illa portio.¹

128 Vt si deficiat sexta pars de ipsâ circumferentiâ Lunae; ad sciendum
 quot digiti supersint in lumine, posito quod umbra terrae secet dia-
 metrum ut recta linea ad rectos angulos: supersunt igitur in lumine
 300. gradus. Horum dimidium est 150. G. hoc est 90. G. et 60. G.
 30 Partes igitur diametri respondentes erunt 100000. et 86603. Illa in
 Quadrivicenariâ ostendit 24. G. ista 20. G. 47'. 2''. Summa 44. G. 47'. 2''.
 Hinc quarta pars est 11. G. 11'. 45''. Et tot sunt digiti rescissi de
 diametro.

Vicissim si deficiat digitus, quid is valet in dimensione, qualium semi-
 diameter, hoc est 6. digiti, sunt 100000? Quia igitur 24. numerus hujus
 columnae maximus est quadruplum de 6. sume etiam quadruplum digiti
 unius, id est 4. G. Hoc verò quaesitum in Quadrivicenaria, offert inter
 Absolutos 16675.00. circiter.

Eodem modo fit interdum, ut semidiameter valeat Authoribus non 100000. sed 60'. ut solet PTOLOMAEVUS, et plerique Astronomorum in indicatione proportionis Orbium. Ii Authores, si exprimant in hac dimensione Sinus arcuum, aut partes quascunque semidiametri: quaesitae eae partes in Sexagenariâ, exhibent in Absolutis valorem illius partis in dimensione hodiernâ Sinuum progressionis denariae.

Exempli causa, quaeritur 38'. 47''. quantum faciat sinum, qualium 60'. est 100000, respondetur 64630. circiter.

Sic etiam vicissim quaeritur 9265. Eccentricitas Martis, quot faciat scrupula, qualium 100000. facit 60'. respondetur 5'. 33''. 10

CAPUT IV

DE COMPARATIONE QUADRIVICENARIAE CUM SEXAGENARIA

Solet esse pars Tabularum Astronomicarum conversio horarum in scrupula diei et vicissim.¹

Haec conversio habetur per has duas tabulas satis exactè, praesertim 129
in quintis lineis, quas rotundas dicere possumus.

Verbi causâ Horae 6. G. 28'. 54''. quot valeant scrupula diei? In columna tertia occurrunt 6. G. 28'. 48''. quae faciunt in quinta 16'. 12''. exactè, quia linea est rotunda et quinarîi ultima. Residua igitur 6''. 20
unius minuti horarii, quaesita ut horae, dant 15'. 0''. quae jam valent 15''', junctis scilicet apicibus residui horarii 6'', et horum 15'. horis 6. G. respondentium. Ergò totus numerus 6. G. 28'. 54''. valet scrupula diei 16'. 12''. 15'''.

Vicissim 47'. 39''. scrupula diei quot valent horas?

In Quinta 47'. 38''.+ valent horas 19. G. 3'. 22''.— residuum secundum unicum seu 60''', quaesita ut 60'. ostendunt 24''. (duobus apicibus, quos illis 60'''. detraxeramus, numero ostenso 24. G. superpositis). Ergò proposita scrupula 47'. 39''. valent horas 19. G. 3'. 46''.— Non prodit enim hic exactum, quia linea est scrupulosa, quarta scilicet 30
sui quinarîi.

Sed si memor eris eorum, quae capite primo sunt dicta de his linearum quinarîis, quod scilicet in primis intelligantur accedere quadrivicenario numero 24'''. in secundo deficere 12'''. in tertio accedere 12'''. in quarto deficere 24'''. et sexagenario numero in primâ linea deficere 24'''. in secunda accedere 12'''. in tertia deficere 12'''. in quarta accedere 24'''. poteris etiam ex quatuor prioribus quinarîi lineis exactè excerpere con-

20) Residuum

versiones istas. Nam exactè $47'. 38''. 24'''$. valent 19. G. $3'. 21''. 36'''$. Ergò residua $36'''$. unius secundi quaesita $36'$. ostendunt horas 14. G. $24'$. valentque $14''. 24'''$. Itaque totus $47'. 39''$. valet exactè horas 19. G. $3'. 36''. 0'''$.

† In Tabulis Rudolphi exacta erit ista conversio in lineis omnibus, quia servabitur naturalis, et propria divisio numerorum 24. G. et 60. G. in lineis omnibus.

130 Alia quoque conversio est in usu crebro, Horarum 24. in 1 Gradus Aequatoris 360. et vicissim. Et potest haec quoque conversio perfici
10 ope harum 2. Tabularum in hunc modum.

Quaeritur, Horae 19. $25'. 37''$. quot faciunt gradus et scrupula Aequatoris. In columna igitur tertia 19. H. $26'. 24''$. dant $48'. 36''$. exactè. Sed temporaria $47''$. quaesita ut temporaria $47'$. dant $1'. 58''$. quae valent $1''. 58'''$. Ergò propositae 19. H. $25'. 37''$. dant $48'. 34''. 2'''$. quae multiplica in 6, et diminue apices, proveniunt 291. G. $24'. 12''$. Gradus Aequatoris.

Vicissim Gradus Aequatoris sic convertes in horas: Divide eos per 6, et auge apices: quotiens in sexagenariam immissus, ostendit è regione horas quaesitas.

20 Quaeruntur gr. 259. $34'. 17''$. quot sint horae?

Sexta pars est 43. $15'. 43''$. Quaere igitur $43'. 15''. 43'''$. et monstrabunt in tertia 17. H. $18'. 14''$. —

CAPUT V

DE QUADRIVICENARIA CUM LOGARITHMIS COMPOSITA

I. **T**abula Diurnorum et Horariorum solet Ephemeridibus praefigi, proluxa admodum: ubi docemur, dato diurno excerptere horarium ad datum horarum numerum. Excerptio ipsa licet non fatiget mentem multiplicatione, fatigat tamen et mentem additione, et oculos
30 manusque excerptione. At hinc conjunctio Columnae quartae cum tertia, et tollit necessitatem Tabulae diurnorum, et opus peragere docet longè facilius, quippe additione simplici (non Logistica) Logarithmorum.

Quaere enim tam diurnum, quàm horas in Quadrivicenaria, et Logarithmos ab iis monstratos adde in unam summam; 1 quae inter Logarithmos quaesita, monstrabit è regione in Columna tertiâ portionem motus
131 † competentem horis.

Vtile est hoc Praeceptum, ubi magnus est diurnus, non major tamen quàm Gr. 24. ut in Lunâ et Cometarum nonnullis.

12) dat

Exemplum

Sit diurnus Lunae 14. G. 23'. Quaeritur quantum competat Horis 19.42.

Logarithmus ad 14. 23. 0''. est 51200. circiter.

Logarithmus ad 19. 42. 0. est 19730. circiter.

Summa 70930.

Haec quaesita inter Logarithmos, ostendit in Quadrivicenariâ 11. G. 48'. 0''. Tot gradus competunt horis 19. 42'.

Aliud Exemplum

Sit diurnus 2. G. 15'. Horae 9. 38'.

Logarithmus 2. 15. est 237000. circiter.

Logarithmus 9. 38. est 91200. circiter.

Summa 328200. dat 0. G. 54'. 0''.

Potest verò hoc exemplum, ubi diurnus est adeò parvus, aliter etiam et faciliori viâ computari, quam referam in Caput 9.

II. Huc pertinet etiam Ratio computandi Adspectus Lunae cum stellis. Vt si detur separatio diurna duorum Planetarum, et distantia eorum minor quàm illa; quaeraturque quot horis ea conficiatur?

Tunc enim à Logarithmo Distantiae auferatur Logarithmus separationis diurnae, residuum inter Logarithmos quaesitum, ostendit è regione sub Quadrivicenariâ horas competentes.¹

Exemplum

Sit Mercurii diurnus Retrogradus 2. G. 15'.

Lunae directus 15. 2.

Separatio igitur diurna 17. 17.

Logarithmus est 32840. circiter

Sit Distantia Lunae et Mercurii 12. 23.

Logarithmus 66170. circiter

Residuum 33330. dat 17. G. 12'.

Tot igitur horis fit aspectus Lunae, ante vel post momentum, quo invenitur haec distantia, prout Luna post vel ante Mercurium fuerit.

Si uterque Directus, vel uterque Retrogradus esset, minor diurnus à majori subtraheretur, ad eruendam separationem diurnam, uti docemur in Astronomia. De Aspectibus tardiorum inter se infra Cap. 9.

III. Diurnum indagare (minorem quidem quàm 24. H.) ex motu aliquot horarum.

Tunc Logarithmum horarum aufer à Logarithmo Motus competentis, restabit Logarithmus motus diurni.

Exemplum

Promotum deprehendatur Sidus aliquod in horis 4. 27'. Gradus 1. 53'. quantus erit diurnus?

Gradus 1. 53'. Logar. 254500. circiter.

Hor. 4. 27. Logar. 168400.

Residuum 86100. dat gr. 10. 9'. diurnum.

Infra Cap. 9. erit alius modus pro diurnis parvis.

133 IV. Datis tribus stellis in unâ rectâ, datisque singula^lrum latitudinibus, duarum verò solarum longitudinibus, indagare et tertiae longitudinem.

10 Item, si pro latitudinibus notae fuerint declinationes, pro longitudine verò sumatur Ascensio Recta.

Cùm hae rectae plerumque sint breves et infra 24. G. nihil nobis nocebit abusus ἄτεργος curvilinearum ut rectilinearum triangulorum.

Pone in Regula Detri ad sinistram differentiam latitudinum duarum, in medio differentiam longitudinum earundem; ad dextram differentiam iterum latitudinis stellae tertiae et priorum unius; quaesitisque his arcubus in Quadrivicenariâ, exscribantur Logarithmi; additisque secundo et tertio, de summa dematur primus; restabit Logarithmus differentiae longitudinis stellae tertiae.

20 Vsus hujus praecepti peropportunos est in tractatione observationum per lineas rectas trium stellarum.

CAPUT VI

DE SEXAGENARIA CUM LOGARITHMIS COMPOSITA

Tabulae Hexacontádôn usus est in Logisticâ multiplex, praecipuus quidem ad multiplicationes et divisiones Logisticas, scrupulositatis infinitae, ubi fit progressio ad tertia, quarta, quinta, sexta, et sic deinceps. Tantam subtilitatem non profitetur usus Chiliadis nostrae. Maneat igitur haec utilitas propria Tabulae Hexacontádôn.

30 Sed quia haec Tabula praefigi solet etiam Tabulis Astronomicis et Ephemeridibus, in quibus non fit progressio ultra secunda, vel ad 134 summum tertia: hunc ejus usum Tabula nostra sexa^lgenaria plenissimè praestat, ejusque necessitatem penitus tollit: quod docebo praeceptis sequentibus.

I. Multiplicationes logisticas perficere compendiosissimè.

Primum capiant numeri, qui sunt in se mutuò multiplicandi, denominationes seu apices familiares Tabulae Chiliadis. Nam quia in Logistica

apices antecedentes integra 1. G. versus sinistram, sunt indices sexagenarum, sequentes verò integra 1. G. sunt indices sexagesimorum scrupulorum, seu fractionum unius integri: sciendum igitur, numeros in columnâ sexagenariâ propriè intelligi de sexagesimis scrupulis primis et secundis, tanquam fractionibus unius integri. Ergò si offerantur gradus et minuta in datorum alterutro, pro gradibus scribantur Minuta, pro Minutis Secunda. Tunc iis in sexagenaria quaesitis, excerpantur Logarithmî, addanturque in unam summam; quae inter Logarithmos quaesita exhibebit sub sexagenaria factum in primis et secundis. Sed si prius apices multiplicandorum fuerunt mutati, nunc etiam facti apices 10 erunt mutandi in contrarium, nam quot apices utrique junctim additi sunt, totidem jam uni soli quotienti sunt adimendi, et vicissim.

Exemplum

Sint multiplicandi $25'. 35''$. Log. 85240 .

et $49'. 50''$. Log. 18566 .

Summa 103806 . dat $21'. 14''$. factum.¹

Aliud

135

15. G. $38'. 40''$. sint multiplicanda in $53'. 49''$.

Scribe $15'. 38''. 40'''$. Log. 134400 . Hic apices aucti sunt unitate.

et $53'. 49''$. Log. 10900 .

20

Summa 145300 . dat $14'. 2''$.

Sed scribe 14. G. $2'$. detracta ab apicibus unitate vicissim.

Aliud

Sexagenae.

Sexagesimae.

39. G. $20'$. sint multiplicanda

$46. 15. G.$

Scribe $39'. 20''$. Log. 42227 . Hic apices aucti unitate.

$46'. 15''$. Log. 26028 . Hic apices aucti binario.

Summa 68255 . dat $30'. 19''. 0'''$.

Sed scribe $30. 19. 0. G.$ detracto ternario ab apicibus sexagesimariis.

Scilicet hic factus non est $30'$. scrupula sexagesima prima, et $19''$. 30 secunda, sed 30 . sexagenae secundae et 19 . primae, etc.

Aliud Exemplum

Sint multiplicandae sexagenae $37. 41. G.$ in sexagesimas $32''. 29'''$.

Scribe $37'. 41''$. Log. 46513 . Hic apices sunt aucti binario.

$32''. 29'''$. Log. 61362 . Hic apices deminuti unitate.

Summa 107875 . dat $20'. 24''$.

Sed scribe 20. G. $24'$.

Nam propter primum detrahendus esset ab apicibus binarius, propter secundum addenda unitas vicissim. Compensatione igitur contrariorum facta, adhuc detrahenda fuit à facti apicibus unitas.¹

136

II. Quadrare numerum Logisticum facillimè.

Rursum esto memor, quod numeri in sexagenariâ sint fractiones, eoque numerus quadratus prodiens, quod aestimationem apicum attinet, minor seu minoris valoris sit, quàm quadrandus. Propriissimè quidem quadratus, de quo quaeritur, sic est ad quadrandum, ut hic ad unitatem 1. G. seu 60'. scr. ut sit quadrare logisticè nihil aliud, quàm tertiam
10 proportionalem à maximo columnae sexagenariae invenire.

Numeri igitur quadrandi in sexagenariâ quaesiti Logarithmum duplica, duplum in Logarithmis quaesitum exhibet ex sexagenariâ quadratum, quod quaerebatur.

Exemplum

Sit quadrandus 49'. 53''. Ejus Logarithmus 18450. dupletur ut sit 36900. Hoc in Logarithmis quaesitum exhibet 41'. 29''. Dico igitur 41'. 29''. 0''' . 0'''' . esse quadratum numeri 49'. 53''.

Si quid mutandum in apicibus, ut Quadrandus inveniri possit in Chiliade, tunc valent praecepta eadem, quae prius in multiplicatione,
20 tantummodò ut memineris, Quadrandum esse vice duorum in se multiplicandorum.

III. Divisiones Logisticas perficere compendiosissimè.

Primò observentur eadem de aptatione apicum, quae prius circa multiplicandos. Deinde observa, num dividendus (sic aptatus si opus fuit) major fuerit, quàm divisor, an minor. Nam si major, non propriè pertinet operatio ad Chiliada; sed ejus loco dividendus est, vel excessus ejus supra divisorem, vel ejus pars aliquota, minor divisore.

137 Si igitur hoc pacto dividendus logisticus fuerit minor ipso ¹ divisore, tunc Logarithmus divisoris auferatur à Logarithmo dividendi, restabitque Logarithmus Quotientis. Atque is quotiens vel erit excessus itidem,
30 addendus dividendo, ut constituatur verus quotiens, vel erit itidem pars aequè multiplex quotientis, vel denique, si nulla permutatio facta in datis numeris, erit ipse quotiens.

At mutatio in apicibus facta adhuc est compensanda. Nam quantum fuit additum vel subtractum Apicibus divisoris, tantum etiam addendum vel subtrahendum Apicibus Quotientis. Quantum verò apicibus divi-

29) Bogarithmus

47 Kepler IX

dendi vel additum, vel subtractum: tantum contrariâ ratione subtrahendum vel addendum apicibus Quotientis, seorsim utrumque.

Exemplum

Dividantur $29'. 30''$. Log. 70995.

in $59'. 0''$. Log. 1681.

69314. dat $30'. 0''$.

Hic nulla est facta mutatio apicum, nec in divisore, nec in dividendo, quippe dividendus erat minor divisore, casusque proprius Chiliadi. Ergò $30'. 0''$. erit quotiens justus. Quod mirari non debes $29\frac{1}{2}'$. distributa in partes $59'$, facere portiones magnitudine $30'$. majore, quàm erat totus dividendus. Debes enim cogitare, illa $59'$. non esse integra, sed fractionem unius integri, proinde quotiens $30'$. est portio debita non uni 1. scrupulo primo, sed uni 1. integro. 10

Aliud

Dividantur Gr. $'6. 0.$

in horas $59. 3'.$

Scribe $6'. 0''$. Log. 230258.

$59'. 3''$. Log. 1550.

Residuum 228708.¹

Hoc residuum ostendit $6'. 6''$. Si ergò dati habuissent illos apices, cum quibus excerpimus Logarithmos, tunc quotiens hic fuisset. At quia apicibus dividendi sunt adjectae duae unitates, sic ut ex 0. G. fierent sexagesima $0''$. ex sexagenis verò $'6.$ fierent sexagesima $6'$: Vicissim igitur quotienti huic $6'. 6''$. adimendi duo apices sexagesimarii, ut fiat $'6. 6.$ G. Quia verò etiam divisoris apicibus fuit adjecta unitas sexagesimaria, ut pro $59.$ G. scriberentur $59'$. et pro $3''$. scriberentur $3''$. rursum igitur idem est faciendum Quotienti primo mutato, ut pro $'6. 6.$ G. scribatur itidem 6. G. $6'$. 138

Exemplum ubi dividendus major

Dividantur $57'. 23''$. major

in $41'. 15''$. ut minorem.

Subtrahe, manet $16'. 8''$. residuum jam minus divisore. 30

Ergò divide $16'. 8''$. Log. 131300.

in $41'. 15''$. Log. 37470.

Residuum 93830. ostendit $23'. 29''$.

15) Gr. $6'. 0.$
33) 93880.

16) dies statt horas

18) $6'. 8''$.

21) $'0. . .$ sexagesima $'6:$

31) 131350.

Cui adde divisorem ipsum totum semel, quia semel tantum erat subtractus à dividendo, colligitur 1. G. 4'. 44''. Quotiens debitus uni integro, cujus divisor 41'. 15'', erat pars seu fractio.

Exemplum de parte aliquota

Sint dividendi 3. G. 45'. 13''. per 57'. 8''. Cùm igitur contineatur divisor in dividendo, crassâ aestimatione, minus quàm quater: operabor per dividendi partem quartam, quae facilè sumitur, estque

$$\begin{array}{r} 56'. 18''. 15'''. \text{ Log. } 6360. \\ \text{Divisoris } 57'. 8''. \quad \text{Log. } 4900. \\ \hline \text{Residuum } 1460.^1 \end{array}$$

139 Hoc ostendit quotientem 59'. 8''. Hujus igitur sumendum est iterum quadruplum scilicet 3. G. 56'. 32''.

Nota hoc Exemplum potuisset etiam tractari aliter pro 3. G. 45'. 13''.

$$\begin{array}{r} \text{scribendo } 3'. 45''. 13'''. \text{ Log. } 277000. \\ \text{Divisor } 57'. 8''. \quad \text{Log. } 4900. \\ \hline \text{Residuum } 272100. \end{array}$$

Hoc enim ostendit 3'. 56''. 30''. Quia verò apicibus dividendi fuit apposita unitas: detrahatur vicissim apicibus quotientis unitas, fietque quotiens 3. G. 56'. 30'', ut prius.

20 Quomodo compendiosè sit agendum, si dividendus fuerit aliquoties major divisore, tradetur infra Capite 9. modus etiam alius.

IV. Operari per Regulam Proportionum, Detri dictam, in Logisticis.

Si trium datorum unus sit pura unitas, sic ut ea possit aptari pro 1. G. seu 60': siquidem haec unitas fuerit primo loco ad sinistram: tunc operatio absolvitur per meram additionem Logarithmorum, loco primo traditam. Sin autem fuerit haec pura unitas 1. G. seu 60'. loco secundo vel tertio, tunc operatio perficitur per simplicem subtractionem Logarithmorum loco secundo propositam. At si nuspiam fuerit pura unitas, 30 tunc sinistimi Logarithmus aufertur à summa duorum Logarithmorum residuorum, si potest: vel quod idem est, sinistimi Logarithmus auferatur ab uno duorum residuorum, si potest; residuum addetur Logarithmo tertii: utroque modo conficitur Logarithmus Quotientis. ¹

17) Haec

Exemplum

140

29'. 45''. dat	15'. 43''. quid	58'. 47'?	Vel	133970.
Log. 70150.	133970.	2050.	Aufer	70150.
	Adde	133970.	Resid.	63820.
	Summa	136020.	Adde	2050.
	Aufer	70150.		65870. ut prius.
	Residuum	65870.		

Quotiens ostenditur 31'. 3''.

Si sinistimi Logarithmus à summâ reliquorum subtrahi non potest, si nimirum sinistimus datus, minor fuerit utroque reliquorum dato 10 seorsim: id indicio est, Quotientem excrescere supra 1. G. seu 60'. Quare operare per secundi vel tertii partem aliquotam, quotientisque prodeuntis sume aequè multiplicem: vel operare per excessum alterutrius datorum, supra datum sinistimum; Quotientique emergenti adjunge ipsum sinistimum: uti in divisione doctus es.

V. *A Numero Logistico proposito Radicem extrahere Quadratam facillimè.*

Ne turberis, quod Radix sit major suo Quadrato: fit enim hoc propterea, quia numeri Sexagenariae sunt fractiones unius integri: ut suprâ dictum. Radix enim Logistica nihil est aliud, quàm medium proportio- 20 nale inter integrum 1. G. et numerum Logisticum integro minorem, vel etiam majorem.

Ergò numeri propositi Logistici Logarithmum bipartire, semissis enim quaesitus inter Logarithmos in sexagenariâ ostendet radicem quaesitam.

Exemplum

Quadratus esto 50'. 27''. Logar. 17360.
Semissis 8680.¹

Hic semissis ostendit Radicem 55'. 0''. eritque ut 1. G. 0'. 0''. ad 141 55'. 0''. sic hoc ad 50'. 27''. ferè. 30

Quod si Quadratus habuerit alios apices, quàm in sexagenariâ, quaeratur ejus partis quadratae, quae minor fuerit integro, puta quartae, vel nonae, vel sedecimae, etc. radix, eaque inventa vicissim duplicetur, triplicetur, vel quadruplicetur, etc.

Sit Quadratum 1. G. 39'. 20''. Hic cùm excurrat supra integrum, sic ut inveniri non possit in sexagenariâ, tento ejus quadrantem 24'. 50''. Hic cùm jam inveniatur in sexagenariâ, ejus ergò Log. 88190. semis-

19) qui 36) tanto

sis 44095. ostendit 38'. 36''. radicem Quadrantis; ejus ergò duplum 1. G. 17'. 12''. est radix quaesita; seu magis propriè est medium proportionale inter 1. G. 0'. 0''. et 1. G. 39'. 20''.

Mirabitur hoc imperitus, quomodo 1. G. 17'. sit radix de 1. G. 39'. reputans illic esse 77'. hic 99'. et verò radicem de 99'. esse paulò minorem quàm 10'. At memineris integrum in sexagenariâ non esse unum scrupulum, sed unum gradum: proinde hujus unitatis linearis quadratum, itidem est unitas superficialia valens Gr. 1. seu 60'. Et sic unitatis linearis, cum fractione appendice, per 17'. expressâ, quadratum rectè
 10 fit unitas superficialia cum fractione appendice per 39'. expressâ. Si verò cogitationem ab hâc unitate gradus transferas ad unitatem scrupulariam: tunc unitas linearis scrupularia quadratum habet unitatem superficialiam, quae valet scrupulum: Et sic prioris unitatis graduariae 60'. scrupula in formam redacta quadratam, latus habebunt paulò brevius 8. unitatibus lineae scrupulariae. Vnde elucet consensus rei utriusque.

VI. Inter duos numeros Logísticos medium proportionale constituere.

Si datorum unus est 1. G. 0'. 0''. jam modò doctus es idem facere per
 142 extractionem radiceis. Haec est enim medium proportionalle. Si verò
 20 non est intègrum sexagenariae, scilicet 1. G. inter datos, adde datorum Logarithmos, summae semissem quaere inter Logarithmos, et excerpes ex sexagenariâ quaesitum Medium proportionale.

Exemplum

Sint dati	25'. 35''.	Logarith.	85240.
et	49'. 50''.	Logarith.	18566.
		Summa	103806.
		Semissis	51903. dat 35'. 43''.

Erit igitur ut 25'. 35''. ad 35'. 43'', sic hoc ad 49'. 50''.

VII. In specie hîc docemur partem proportionalem venari in Tabulis aequationum et alibi.

30

Fit autem secundum praecepta praemissa multò compendiosissimè, quoties totum, quod debetur uni gradui, seu Horae, seu 60. minutis, non superat 60'. minuta. Adduntur enim Logarithmi: 1. Differentiae uni gradui, vel horae respondentis, et 2. scrupulorum, integris gradibus vel horis adhaerentium summa inter Logarithmos quaesita exhibet ad latus sub sexagenariâ partem proportionalem quaesitam.

3) 39'. 28''. 15) consensui

Sit Anomalia 136. G. 47'. 14''. et excerpatur cum integris 136. G. aequatio 4. G. 15'. 23''. Sitque differentia aequationum duarum vicinarum decrementum 37'. 29''. Quaeritur pars proportionalis scrupulis 47'. 14''.

Logarith. 47'. 14''. est 23920. circiter.

Logarith. 37'. 29''. est 47050. circiter.

Summa 70970. dat 29'. 30''.

partem proportionalem decrementi, ablata igitur haec à 4. G. 15'. 23''. relinquit 3. G. 45'. 53''. aequationem correctam. ¹

Exemplum aliud

143

Sit Horarius 31'. 24''. sint Minuta unius Horae 41'. 48''. quaeritur 10 quantum iis debeatur de Horario? Adde Logarithmos 64770, et 36150. Summa 100920. ostendit partem proportionalem 21'. 52''.

VIII. Dato Horario Lunae à Sole, datisque scrupulis incidentiae, Morae dimidia, vel durationis dimidia: eruere Tempus incidentiae, Moram dimidiam, vel durationem dimidiam in Eclipsibus.

Vel:

Dato Horario, datoque arcu percurrento, indagare numerum Horarum et Minutorum, intra quos arcus percurritur.

Primum aufer Horarium Lunae à Sole quoties potes à datis scrupulis, totiesque scribe unam Horam.

20

Deinde à Logarithmo residui, quod minus erit Horario, aufer Logarithmum Horarii, restabit Logarithmus Minutorum horis integris adjiciendorum.

Sint scrupula 53'. 16''.

Horar. Lunae à Sole 31'. 24''. Aufer semel et scribe Hor. 1.

Residuum 21'. 52''. Logar. 100920.

Horarii 31'. 24''. Logar. 64770.

Residuum 36150. dat 41'. 48''.

Ergò tempus est H. 1. 41'. 48''. ¹

IX. Dato numero Horarum et Minutorum, cui respondeat datus minor numerus 30 144 Graduum et Scrupulorum, inquirere Horarium: oportet autem Horarum numerum infra 60'. esse.

Quaere datos (diminutis signis) in sexagenariâ, et Logarithmum Horarum, aufer à Logarithmo graduum; residuum est Logarithmus Horarii ex eadem sexagenariâ excerpenti cum ipsis signis.

8) 3. G. 41'. 55''.

Vt si horis 50. 26'. Luna promoveatur Gr. 28. 3'.

Diminue signa, ut stent illic 50'. 26''. hic 28'. 3''.

Jam igitur à Logarithmo 28'. 3''. sc. 76036.

Aufer Logarithmum 50'. 26''. sc. 17469.

Residuum 58567.

ostendit Horarium 33'. 24''. retentis signis.

Appendix

Si plures essent gradus quàm horae, aufer numerum Horarum à numero Graduum quoties potes, totiesque scribe unum gradum in quotiente. Deinde cum eo, quod de gradibus fuerit residuum, operare, ut
10 jam dictum, prodibuntque scrupula et secunda, gradibus integris in quotiente scriptis, addenda.

Sed haec Cap. 9. tradentur per alium modum simpliciozem, et magis proprium, ut mutatione apicum non sit opus.

Compendium

Conducit etiam ad brevitatem, si major numerus fuerit infra 30, uti tunc operemur per utriusque duplum.

Vt si Horis 25. 13'. Luna promoveretur Gr. 14. 1 $\frac{1}{2}$. hoc perinde esset ac si Horis 50. 26'. responderent gr. 28. 3'.¹

145 20 X. Si Triangulum Rectangulum, seu planum, seu Sphaericum, omnia latera minora habuerit quàm 1. G. seu 60' : tunc datis duobus lateribus circa rectum, per Logarithmos invenire latus tertium recto subtensum, seu Basin.

Facilius quidem fit, in Sphaericis quidem per Antilogarithmos Canonis, seu ut Cap. 7. dicitur, per Logarithmos complementi: si tamen per opportunitatem etiam sexagenariâ placeat uti: sic poterit operatio institui.

Logarithmos laterum excerptos singulos seorsim duplica, cum his duplis, ut Logarithmis, excerpe laterum Quadrata ex sexagenariâ, eaque in unam summam adde, summa quaesita in sexagenariâ, exhibebit
30 è regione Logarithmum, cujus semissis, ut Logarithmus quaesitus, ex eadem sexagenariâ exhibebit Basin quaesitam.

Vt si sint latera 28'. 17''. et 50'. 31''. eorum Logarithmi 75200. et 17200. dupli horum 150400. et 34400. ostendunt quadrata laterum 13'. 20''. et 42'. 32''. Summa utriusque est 55'. 52''. Hujus Logarithmus 7140. Et hujus semissis 3570. ostendit Basin 57'. 54''.

13) tradantur 24) dicatur

XI. *Vicissim datâ Basi, in sic comparatis, et latere alterutro, invenire latus reliquum.*

Rursum duplica Logarithmos basis et lateris dati; per haec dupla excerpe quadrata ex sexagenariâ, minusque à majori subtrahe; residui Logarithmus est duplus Logarithmi lateris quaesiti.

Vt si Basis $57'. 54''$. latus $28'. 17''$. Logarithmi 3570. 75200. Duplicati sunt 7140. 150400. Quadrata $55'. 52''$. et $13'. 20''$. Residuum $42'. 32''$. Logarithmus 34400. dimidium 17200. quod ostendit $50'. 31''$. latus quaesitum. ¹

CAPUT VII

10 146

DE COPULATIONE COLUMNAE ARCUUM CUM
COLUMNA LOGARITHMORUM

Per solos Logarithmos Arcuum et Angulorum, omnia Triangula Sphaerica solvere, omnia scilicet quaesita ex tribus datis eruere.

Prima autem sunt Rectangula, eorumque casus sedecim, in quibus [†] inter tria data intelligitur semper ipse Rectus Angulus.

Hic autem vox Complementi crebrò usurpanda, cùm sic solitariè sumitur, semper dat subintelligi *ad Quadrantem*: Basis verò vox pro latere maximo sumitur, quod scilicet angulo recto opponitur. Et loquimur de talibus Rectangulis, quorum latera sunt minora quadrante ²⁰ singula.

I. *Ex Basi et angulo latus oppositum.*

Addantur invicem Logarithmi datorum, conficietur Logarithmus quaesiti lateris.

II. *Ex lateribus Basin.*

Addantur invicem Logarithmi Complementorum datorum laterum, conficietur Logarithmus Complementi quaesitae Basis. Vide Cap. 6. Numero 10. modum alium.

III. *Ex Angulo et latere adjacente Angulum reliquum.*

Addantur invicem Logarithmi anguli et Complementi lateris, conficietur Logarithmus complementi quaesiti Anguli. ³⁰ ¹

IV. *Ex Basi et Latere Angulum oppositum.*

147

Auferatur Logarithmus Basis à Logarithmo lateris, restabit Logarithmus Anguli oppositi.

3) duplicia

6) 57200. statt 75200.

23) conficitur

31) complenti

V. Ex Angulo et latere opposito Basis.

Auferatur Logarithmus Anguli à Logarithmo lateris oppositi, restabit Logarithmus Basis.

VI. Ex Angulo et latere subtenso Angulum reliquum.

Auferatur Logarithmus Complementi lateris dati à Logarithmo Complementi Anguli dato oppositi, restat Logarithmus ipsius Anguli residui quaesiti.

VII. Ex latere et Basi latus reliquum.

Auferatur Logarithmus Complementi lateris à Logarithmo Complementi Basis, restabit Logarithmus Complementi lateris reliqui. Vide suprà Cap. 6. Num. 11. modum alium.

VIII. Ex Angulis latus.

Auferatur Logarithmus anguli, qui lateri quaesito adjacet, à Logarithmo Complementi Anguli oppositi, restat Logarithmus Complementi lateris quaesiti.

IX. Ex lateribus Angulum.

Addantur in unam summam Logarithmi Complementorum datorum laterum, summa excerpt arcum: Ejus arcus Complementi Logarithmus auferatur à Logarithmo lateris quaesito angulo oppositi, restat Logarithmus Anguli quaesiti.

X. Ex Basi et Angulo residuum angulum.

Addantur in unam summam Logarithmi datorum, summa excerpt arcum: ejus complementi Logarithmus auferatur à Logarithmo complementi Anguli dati, restabit Logarithmus Anguli quaesiti.

XI. Ex Angulo et latere adjacente, latus oppositum reliquum.

Addantur in unam summam Logarithmi Anguli et complementi lateris, summa excerpt arcum: ejus complementi Logarithmus auferatur à Logarithmo complementi anguli dati, restabit Logarithmus complementi lateris quaesiti.

21) residuus angulus.

48 Kepler IX

Pro his compositis casibus aptior est Canon ipse Logarithmorum Quadrantis, quàm Chilias nostra: quia in illo non opus est excerptione arcus, quippe cum ejus complementum statim cum Logarithmo suo è regione in conspectum veniat. Vt jam non dicam, quòd Mesologarithmi Canonis, quibus caret Chilias nostra, praestent hos compositos etiam simplices.

XII. Ex Basi et Angulo latus adjacens.

Addantur Logarithmi datorum, summa excerptat arcum; ejus complementi Logarithmus auferatur à Logarithmo complementi Basis, restabit Logarithmus complementi lateris quaesiti, angulo adjacentis.

XIII. Ex Basi et latere Angulum adjacentem.

Auferatur Logarithmus complementi lateris à Logarithmo complementi Basis, residuum excerptat arcum, ab hujus complementi arcu auferatur Logarithmus Basis, restabit Logarithmus anguli adjacentis.

XIV. Ex Angulo et latere opposito latus reliquum.

Auferatur Logarithmus Anguli à Logarithmo lateris, residuum excerptat arcum, à cujus complementi Logarithmo auferatur Logarithmus complementi lateris: restabit Logarithmus complementi lateris reliqui.

XV. Ex Angulo et latere adjacente Basin.

Addantur invicem Logarithmi Anguli et complementi lateris; summa excerptat arcum; hujus complementi Logarithmus auferatur à Logarithmo lateris dati, restabit Logarithmus Basis.

XVI. Ex Angulis Basin.

Auferatur Logarithmus anguli unius à Logarithmo complementi Anguli alterius; residuum excerptat arcum, ab hujus complementi Logarithmo aufer Logarithmum ipsius Anguli alterius, seu posterius hîc adhibiti, restat Logarithmus Basis.

Exemplum casuum omnium

Sit Basis 72. G. 0'. Angulus 50. G. 0'.

		Logarithmi.	Complementa.	Logarithmi.
Basis	72. G. 0'. F	5030. A	18. G. 0'. L	117440. O †
Angulus	50. 0'. G	26650. B	40. 0'. M	44190. P
Latus oppositum	46. 45'. H	31680. C	43. 15'. N	37805. Q
Latus majus . . .	63. 12'. I	11370. D	26. 48'. R	79635. T
Angulus major .	69. 48'. K	6340. E	20. 12'. S	106350. V

Hoc Exemplum sic fuit constructum

F. G. sunt ex arbitrio, quae dant L. M. Ergò habentur A. B. O. P. Jam per I. ex A. B. habetur C. hinc H. hinc N. hinc Q. Tunc per VII.

4) Logarithus 29) Angelus

ex O. Q. habetur T. hinc R. hinc I. hinc D. Etiam per IV. ex A. D. habetur E. hinc K. hinc S. hinc V. Reliqua Praecepta omnia erunt loco probationis, verbi causâ primum. Ex Basi F. et angulo K. latus I. illi oppositum, invenitur enim D. qui dat I.

Ex primo.	Ex secundo.	Ex tertio.	
5030. A.	37805. Q.	26650. B.	6340. E.
6340. E.	79635. T.	79635. T.	37805. Q.
11370. D.	117440. O.	106285. V.	44145. P.
		pro 106350.	pro 44190. ¹

Ex quarto.	Ex quinto.		Ex sexto.	
5030. A.	26650. B.	6340. E.	44190. P.	106350. V.
31680. C.	31680. C.	11370. D.	37805. Q.	79635. T.
26650. B.	5030. A.	5030. A.	6385. E.	26715. B.
			pro 6340.	pro 26650.

Ex septimo.	Ex octavo.		Ex nono.	
117440. O.	26650. B.	6340. E.	37805. Q.	
79635. T.	106350. V.	44190. P.	79635. T.	
37805. Q.	79700. T.	37850. Q.	117440. O. 18. G. o'.	117440. O.
	pro 79635.	pro 37805.	31680. C.	11370. D.
			5030. A. 72. o'.	5030. A.
			26650. B.	6340. E.

Ex decimo.		Ex undecimo.		Ex duodecimo.	
5030. A.	5030. A.	26650. B.	6340. E.	5030. A.	5030. A.
26650. B.	6340. E.	79635. T.	37805. Q.	26650. B.	6340. E.
31680. C.	11370. D.	106285. V.	44145. P.	31680. C.	11370. D.
37805. Q.	79635. T.	6340. E.	26650. B.	37805. Q.	79635. T.
44190. P.	106350. V.	44190. P.	106350. V.	117440. O.	117440. O.
6385. E.	26715. B.	37850. Q.	79700. T.	79635. T.	37805. Q.
pro 6340.	pro 26650.				

Ex decimo tertio.		Ex decimo quarto.	
37805. Q.	79635. T.	26650. B.	6340. E.
117440. O.	117440. O.	31680. C.	11370. D.
79635. T.	37805. Q.	5030. A.	5030. A.
11370. D.	31680. C.	117440. O.	117440. O.
5030. A.	5030. A.	37805. Q.	79635. T.
6340. E.	26650. B.	79635. T.	37805. Q. ¹

3) ex prim. statt primum.

17) 73805. Q.

22) 3640. E.

27) (1. Kal.) 73805. Q.

Ex decimo quinto.		Ex decimo sexto.		151
26650. B.	6340. E.	26650. B.	6340. E.	
79635. T.	37805. Q.	106350. V.	44190. P.	
106285. V.	44145. P.	79700. T.	37850. Q.	
6340. E.	26650. B.	11370. D.	31680. C.	
11370. D.	31680. C.	6340. E.	26650. B.	
5030. A.	5030. A.	5030. A.	5030. A.	

Primi igitur octo casus perficiuntur per operationem simplicem; reliqui octo per duplicem, in quibus scilicet semper aliquid aliud quaeritur ante id, quod proponitur, per unum ex octo prioribus.

Resolvuntur itaque 9. in 2. et 4. Sic 10. in 1. et 6. Sic 11. in 3. et 8. Sic 12. in 1. et 7. Sic 13. in 7. et 4. Sic 14. in 5. et 7. Sic 15. in 3. et 5. Sic 16. in 8. et 5.

Excerpsi autem studio Logarithmos rudes, ut si arcus propositus caderet medius inter duos expressos in Chiliade, medium etiam aliquid inter duos illorum Logarithmos eligerem, rotundo fine; ut monerem, etsi neque arcus, neque eorum Logarithmi in Chiliade Rotundi sint, nihil tamen opus esse, ut Calculator sese ubique maceret, minutias consecretando, quod equidem grave esset in hâc Chiliade: facilius aliquantò in Canone quadrantis; in quo arcus rotundi sunt, et singula minuta suos habent Logarithmos.

Aliud etiam Compendium non contemnendum (ut ad marginem monui) habet Canon prae meâ Chiliade, quod is arcuum Complementa cum suis Logarithmis exhibet è regione. Itaque quod ego in Chiliade cogor circumloqui longius, Logarithmum scilicet Complementi arcus, lateris, basis, vel anguli: id in Canone brevius exprimimus, Antilogarithmum arcus, lateris, basis et anguli dicentes: ut innuamus excerptum esse Antilogarithmum è regione Logarithmi. ¹

Tertium compendium Canonis est in eo, quod is habet etiam Mesologarithmos, per quos casus octo posteriores fiunt simplices, qui sunt hic duplices: verum hoc Canonis compendium apud inexercitatos conjunctum est cum dispendio, quod distrahitur animus additionibus et subtractionibus Mesologarithmorum Cossicis, hoc est, multitudine cautionum, quibus Arithmetica Cossica constat.

Sed quod attinet Logarithmos paulò exactiores, ex ipsâ etiam Chiliade excerptendos, ut etiam in hoc satisfiat curiositati quorundam: tradam Cap. sequenti 8. modum elaborandi Logarithmum cuique sinui respondentem; Capite verò 9. modum alium subsidiarium capiendi pro Logarithmis partem proportionalem vulgarem, idque sine labore, mediantibus aliis Logarithmis.

12) 13. in 2. et 14. 30) pro *statt* per

Hactenus igitur de Triangulis Sphaericis Rectangulis egimus. Nunc ad Obliquangula transeamus.

DE TRIANGULIS OBLIQUANGULIS SPHAERICIS:

in quibus Casus sunt 12.

† I. Si dentur duo latera, et angulus uni oppositus: quaeraturque angulus alteri datorum laterum oppositus: ad Logarithmum anguli adde Logarithmum lateris dati, quaesito oppositi, à summa aufer Logarithmum lateris angulo dato oppositi, restabit Logarithmus anguli quaesiti, recto seu majoris, seu minoris.

10 Exemplum casus primi, Logarithmis rudibus seu rotundis

In Triangulo P. V. S. data sunt latera duo P. V. 38. G. 30'. V. S. 40. G. 0'. Angulus V. P. S. 31. G. 34'. oppositus ipsi V. S. Quaeritur angulus V. S. P. lateri V. P. oppositus. ¹

113	V. P. S. 31. G. 34'.	Logarith.	64720.
	V. P. 38. 30.	Logarith.	47480.
		Summa	112200.
	V. S. 40. G. 0'.	Logarith.	44190. subt.
		Residuum	68010. ut

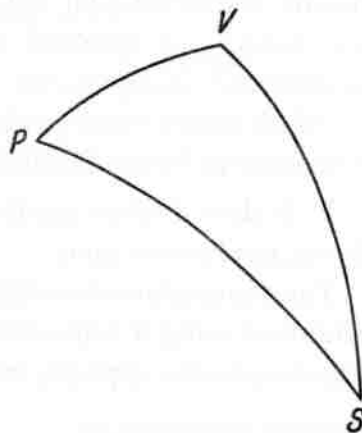
20 Logarithmus dat V. S. P. 30. G. 26'. circiter.

Hic sitne ipse quaesitus, an ejus residuum ad Semicirculum, facile discerni poterit ex habitudine laterum, praesertim oppositi P.V. Non est enim mei instituti minimas cautiones hâc vice consecrari.

II. Si iisdem datis, quaeratur latus tertium: Tunc adde Logarithmos anguli dati, et lateris attigui dati, prodit Logarithmus perpendiculari dictus. Ejus perpendiculari Logarithmus complementi ablati à datorum laterum Logarithmis complementi, relinquit Logarithmos duorum arcuum, quorum vel
30 differentia, vel complementorum summa, est latus quaesitum tertium.

III. Si iisdem datis, quaeratur angulus inter latera data comprehensus.

Tunc quaeratur latus tertium, ut praecepto secundo horum. Ejus Logarithmo adde Logarithmum anguli dati, à summâ



aufer Logarithmum lateris, cui datus angulus opponitur: restat Logarithmus anguli comprehensi, ejusque complementi ad duos rectos. ¹

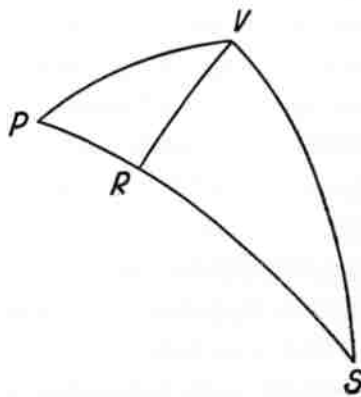
Exemplum II. et III. Casuum

154

Iisdem datis, quaeratur PS et PVS.

VS. 40.	G. 0'.	Log. 44190.	Compl. 50.	G. 0'.	Log. 26660.
VPS. 31.	34.	Log. 64720.			
VP. 38.	30.	Log. 47480.	Compl. 51.	30.	Log. 24510.
VR. 19.	0.	Log. 112200.	Compl. 71.	0.	Log. 5600.
SR. 35.	54.		Compl. 54.	6.	Log. 21060.
PR. 34.	8.		Compl. 55.	52.	Log. 18910. 10
SP. 70.	2.	Log. 6190.			
		70910.			
SVP. 49.	57.	Log. 26720.			

Residuum hoc est angulus comprehensus, seu complementum anguli ad duos rectos, quod facile patet ex magnâ proportionem PS ad PV, VS. Quando verò dubitari potest, tunc quaerenda sunt ejus elementa PVR, RVS.



IV. Si datis duobus lateribus et angulo comprehenso, quaeratur latus tertium.

Tunc ad Logarithmum lateris minoris adde Logarithmum comprehensi, prodit Logarithmus perpendiculari in latus majus, quod perpendiculum constituit duo illius lateris elementa: Hujus enim perpendiculari Logarithmus complementi ablatus à Logarithmo complementi lateris minoris, dat Logarithmum arcus, cujus complementum est alterum ex illis elementis, eoque vel addi, vel auferri debet à toto latere majori; summae vel residui, ut elementi alterius Logarithmum complementi adde Logarithmo complementi perpendiculari, fietque Logarithmus complementi lateris tertii quaesiti. Prior casus est, quando angulus comprehensus et datus obtusus est, posterior, quando acutus. ¹

V. Si datis duobus lateribus et angulo comprehenso quaeratur angulorum residuorum unus.

Tunc quaere latus tertium, ut in quarto praecepto horum. Ejus Logarithmum aufer à summa Logarithmorum anguli initio dati, et lateris angulo quaesito oppositi, restabit Logarithmus anguli quaesiti.

14) angulus comprehensus *fehlt*

Exemplum IV. et V. Casuum

Dentur VP, PS et VPS, quaeratur VS, et PVS.

			Logar.	Compl.	Logar.
	PV. 38. G. 30'.		47480.	51. G. 30'.	24510.
	VPS. 31. 34.		64720.		
Perpendiculum	VR. 19. 0.		112200.	71. 0.	5600.
Elementum unum	PR. 34. 8.			55. 52.	18910.
	PS. 70. 2.		6190.		
Elementum alterum	RS. 35. 54.			54. 6.	21070.
10 Quaesitum latus	VS. 40. 0.		44190.	50. 0.	26670.
Summa Log. VPS. et PS.			70910.		
Quaesit. angulus	PVS. 49. 57.		26720.		

VI. Si datis tribus lateribus quaeritur angulus.

† Tunc laterum circa quaesitum angulum exquire differentiam; illam à latere tertio aufer, eidemque adde, et tam residui quàm summae constitue semisses. Hâc praeparatione praemissâ, jam excerpe quatuor Logarithmos, duos semissium, et duos laterum circa quaesitum angulum, summamque horum aufer à summa illorum: Differentiae, quae futura est, semissis, ut Logarithmus, ostendet semissem anguli quaesiti.¹

176 20

Exemplum sexti Casus

Dentur VP, PS, SV, quaeratur VPS.

	VP. 38. G. 30'.		Log. 47480.
	PS. 70. 2.		Log. 6190.
	Diff. 31. 32.		53670. Summa.
	VS. 40. 0.	Semisses.	
Residuum	8. 28.	4. 14'.	Log. 260400.
Summa	71. 32.	35. 46.	Log. 53700.
			314100. Summa.
			260430. Summar. diff.
30 Quaesitus VPS.	31. 34.	15. 47.	Log. 130215. semissis.

Quaeratur PVS.

VP. 38. G. 30'.	Log. 47480.
VS. 40. 0.	Log. 44190.
1. 30.	91670.

4) PV. 30. G.

PS.	70.	2.	Semisses		
	68.	32.	34.	16.	Log. 57440.
	71.	32.	35.	46.	Log. 53700.
					111140.
					19470. Summar. diff.
Quaesitus PVS.	130.	14.	65.	7.	Log. 9735. Dimid. ¹

Quaeratur PSV.

117

SV.	40.	G.	0'.	Log.	44190.
PS.	70.		2.	Log.	6190.
					50380.
VP.	38.		30.	Semisses.	
	8.		28.	4.	14. Log. 260400.
	68.		32.	34.	16. Log. 57440.
					317840.
					267460. Summar. diff.
Quaesitus VSP.	30.	26.	15.	13.	133730. Dimidium.

10

VII. Si datis duobus angulis, et latere alteri datorum subtenso, quaeratur latus reliquo subtensum: Ad Logarithmum lateris dati adde Logarithmum anguli adjacentis dati, à summâ aufer Logarithmum anguli lateri dato oppositi; restabit Logarithmus lateris quaesiti, ejusque 20 complementi ad Semicirculum: ubi pro ratione quantitatis datorum, vel ipse Logarithmi arcus, vel ejus complementum ad Semicirculum sumendum est pro latere.

Exemplum VII. Casus

Dentur PVS, VPS, VS, quaeratur PS.

			Logarith.		Aliud.		
VS.	40.	G.	0'.	44190.	Latus	40.	G. 0'. 44194.
PVS.	130.		3.	26720.	Ang.	30.	28. 67917.
							112111.
VPS.	31.		34.	64720.	Ang.	80.	0. 1531. 30
Quaesitum PS.	70.		2.	6190.	Lat. quaes.	19.	19. 110580. ¹

VIII. Si iisdem datis quaeratur Angulus tertius.

158

Tunc adde Logarithmos lateris dati, et anguli alterius adjacentis: prodit Logarithmus perpendiculi ex angulo quaesito demissi: cujus Logarithmus complementi, ablatus à datorum angulorum Logarithmis complementi, relinquit Logarithmos duorum elementorum anguli quaesiti,

11) VP. *fehlt* 31) Quaesitum VS

à perpendiculo constitutorum: quorum ideò vel summa constituit quaesitum, si perpendiculum cadit intra Triangulum, vel differentia, si extra.

IX. Si iisdem datis, quaeratur latus interjectum datis angulis.

Tunc quaeratur angulus tertius, ut praecepto VIII. horum. Ejus Logarithmo adde Logarithmum lateris dati; à summa aufer Logarithmum anguli, qui lateri illi dato opponitur, restabit Logarithmus lateris interjecti.

Exemplum VIII. et IX. Casuum

10 Dentur PVS, VPS, VS, quaeratur VSP et VP.

			Logar.	Compl.	Logar.
	VS. 40. G. 0'.		44190.		
	PVS. 130. 3.		26720.	40. G. 3'.	44080.
Perpendic. ex angulo S.	29. 29.		70910.	60. 31.	13870.
	VPS. 31. 34.			58. 26.	16000.
Elementum unum				47. 40.	30210.
Elementum alterum				78. 14.	2130.
VSP. Quaesitus				30. 34. per	
				subtractionem.	

20	VSP. 30. G. 34'.	67630.
		111820.
	VPS.	64720.
	Quaesitum VP. 38. 37.	47100.

Nota: Arcus 130. G. 3'. } Logarithmus est idem.
 et 49. 57. }
 At 40. 3. est minoris quadrante complementum;
 majoris quadrante Excessus.¹

Aliud exemplum

			Logar.	Compl.	Logar.
30	Latus	40. G. 0'.	44194.	G. '.	
	Ang. adjac.	30. 28.	67917.	59. 32.	14859.
	Perpendic. ex angulo . .	19. 1.	112111.	70. 59.	5612.
	Ang. alter, lateri oppos.	80. 0.	1531.	10. 0.	175072.
	Elementum unum			65. 44. ¹ / ₂	9247.
	Elementum alterum			10. 35.	169460.
	Ang. quaesitus			76. 19. per addit.	

23) Quaesitus 32) 5613. statt 5612. 34) 56.44½. 99247 35) 169470.

Angulus tertius 76. G. 19'. 2879.

47073.

Latus quaesitum angulo 39. 22. 45542.

tertio quaesito oppositum.

X. Si datis duobus angulis et latere interjecto, quaeratur angulus tertius, lateri dato oppositus: Tunc ad Logarithmum anguli minoris adde Logarithmum lateris interjecti, prodit Logarithmus perpendiculari ex majori angulo; cujus perpendiculari Logarithmus complementi et asservari debet, et auferri ab anguli illius ejusdem Logarithmo complementi, relinquetur Logarithmus unius elementi illius anguli, unde 10 perpendicularum est demissum. Hoc igitur ablatum ab angulo ipso toto, vel ille ab hoc, relinquit ejus elementum alterum.

Hujus iterum Logarithmus addatur Logarithmo asservato, ita fiet Logarithmus complementi anguli tertii quaesiti, vel ejus excessus supra Quadrantem.

Si datorum angulorum alter est major quadrante, latus datum minus esse debet Quadrante.¹

Si latus datum est quadrante majus, tunc elementum anguli, quod illi 160 respondet, est etiam quadrante majus, et sic Triangulum obtusangulum, ubi perpendicularis cadit extra. 20

XI. Si datis duobus angulis, et latere interjecto, quaeratur laterum residuorum unum: Tunc quaere angulum tertium, ut in praecepto X. horum, ejus Logarithmum aufer à summa Logarithmorum lateris initio dati, et anguli lateri quaesito oppositi, restabit Logarithmus lateris quaesiti.

Exemplum X. et XI. Casuum

Dentur PVS, VPS, VP, quaeratur VSP, et VS.

			Logar.	Compl.	Logar.
Ang. tot. PVS. 130. G.	3'.	26720.	40. G.	3'.	
VPS.	31. 34.	64720.	58.	26.	16000.
VP.	38. 30.	47480.			
Perpendic. ex V.	19. 1.	112200.	70.	59.	5610. Asservandus.
Vnius elementi					
anguli	64. 23.				10390.
Alterum ele-					
mentum ang.	65. 40.	9300.			
		5610. asservatus.			
		14910.	59.	29.	
Quaesitus VSP.	30. 31.	67780.			
Quaesitum VS.	39. 54.	44420.			

XII. Si datis tribus Sphaerici angulis, quaeratur laterum aliquod.

Tunc primum pro angulo maximo scribe et usurpa ejus complementum ad Semicirculum, deinde angulorum latus quaesitum attingentium exquire differentiam: illam ab angulo tertio aufer, eidemque adde, et tam residui quàm summae constitue semisses.¹

¹⁶¹ Horum Logarithmos adde in unam summam, à quâ aufer summam Logarithmorum duorum angulorum latus attingentium: residui semissis, ut Logarithmus, dat semissem lateris quaesiti ex columnâ arcuum. Excipe casum unum, si nimirum in Acutangulo Triangulo latus ¹⁰ quaesitum subtensum fuerit angulorum maximo: tunc operatione per ejus complementum ad Semicirculum peractâ, ut prius, prodit semissis, non ipsius lateris quaesiti, sed ejus itidem complementi ad Semicirculum.

At in Obtusangulo, etiamsi latus quaesitum subtensum fuerit obtuso, et sic maximo, valet nihilominus regula generalis, proditque semissis lateris quaesiti ipsius.

Exemplum XII. Casus

Dentur anguli PVS, VSP, SPV, quaeratur PS.				Logarithmi.
VSP.	30.	G.	28'.	67910.
VPS.	31.	34.		64720.
Differentia	1.	6.		132630. Summa.
Complementum PVS.				
ad Semicirc.	49.	57.	Semisses.	
Differentia	48.	51.	24. 25 $\frac{1}{2}$.	88309.
Summa	51.	3.	25. 31 $\frac{1}{2}$.	84187.
				172496. Summa.
				39866. Diff. sum.
Quaesitum PS.	70.	0.	35. 0.	19933. Semissis. ¹

Quaeratur PV.

PVS. 130. G. 3'.				Logarithmi.
Compl. ad Semicirc.	49.	57.		26725.
VPS.	31.	34.		64724.
	18.	23.		91449.
VSP.	30.	28.	Semisses.	
	12.	5.	6. 2 $\frac{1}{2}$.	225142.
	48.	51.	24. 25 $\frac{1}{2}$.	88309.
				313451.
				222002.
Quaesitum VP.	38.	29.	19. 14 $\frac{1}{2}$.	111001.

⁴⁾ exquire

Quaeratur VS.

PVS. 130. G. 3'.	Logarithmi.
Compl. ad Semicirc. 49. 57.	26725.
VSP. 30. 28.	67917.
19. 29.	94642.
VPS. 31. 34. Semisses.	
12. 5. 6. $2\frac{1}{2}$.	225142.
51. 3. 25. $31\frac{1}{2}$.	84187.
	309329.
	214687.
Quaesitum VS. 39. 57. 19. $58\frac{1}{2}$.	107343. ¹

10

Aliud Exemplum

163

Sint Anguli circa latus quaesitum.	Logarithmi.
30. G. 28'.	67917.
76. 19.	2879.
Differentia 45. 51.	70796. Summa.
Ang. oppos. 80. 0. Maximus trium.	
Compl. ad Semicirc. 100. 0.	
54. 9. 27. $4\frac{1}{2}$.	78712.
145. 51. 72. $55\frac{1}{2}$.	4508.
	83220. Summa.
	12424. Diff. sum.
140. 2. 70. 1.	6212. Semissis.
Quaesitum 39. 58.	

20

Vicissim sint anguli circa quaesitum hi:

Maximus trium 80. G. 0'. }	Logarithmi.
Compl. ad Semicirc. 100. 0. }	1531.
Alter 76. 19.	2879.
Differentia 23. 41.	4410. Summa.
Tertius 30. 28. Semisses.	
Differentia 6. 47. 3. $23\frac{1}{2}$.	282750.
Summa 54. 9. 27. $4\frac{1}{2}$.	78712.
	361462. Summa.
	357052. Diff. sum.
Quaesitum latus 19. 19. 9. $39\frac{1}{2}$.	178526. Semiss. ¹

30

164 Atque haec de obliquangulis, et in universum de Sphaericae superficiei Triangulis curvilineis, quae formantur arcubus Circulorum maximorum.

De Rectilineis verò Triangulis, seu quae formantur in superficie planâ, Capite Nono agetur.

CAPUT VIII

DE COPULATIONE COLUMNAE SINUUM, SEU NUMERORUM ABSOLUTORUM, ET COLUMNAE LOGARITHMORUM

PRAECEPTUM I

10 *Logarithmum excerpere accuratum Numeri scrupulosi propositi.*

Etsi rarissimè est opus tantâ scrupulositate, quoties tamen est opus, fit per Prop. 27. Corollarium 3. in hunc modum.

Propositi Numeri scrupulosi excessum super Rotundum Chiliadis
† proximè minorem continua, appositis versus dextram septem Cyphris;
sic continuatum divide per hunc ipsum proximè minorem, elaboratum
tamen prius seu continuatum per unam insuper vel duas figuras scrupulosas, quae contineant dimidium duarum primarum figurarum excessus, vel aliquid proximè minus dimidio: Quotientem aufer à Logarithmo ad dictum rotundum proximè minorem, restabit Logarithmus propositi
20 scrupulosi.¹

Exemplum

Propositus esto scrupulosus	23456.78.	
Chilias exhibet ad Rotundum		
proximè minorem	23400.00.	Log. 145243.42.
Igitur excessus scrupulosi est	56.78.	Log. 242.36.
		Quotiens aufe- ratur.
		145001.06.
		Hic est Logarithmus quaesitus accuratius.

Ei apponantur 7 Cyphrae 567800000 00.

4) superficiei 26) 145001.66.

Hunc divide per inventum Rotundum Chiliadis proximè minorem

2340000.

Sed elaboratum per duas figuras significativas, quae sint dimidium de 56. primis duabus figuris in excessu scilicet per 28.

Vt 2342800.

Divisio compendiosa.

56780	
23428	
46856	2.
9924	
9371	4.
553	
469	2.
84	
70	3.
14	
14	6.

10

Aliud Exemplum

Sin. gr. 81. scrupulosus . . 987 | 68.83 $\frac{2}{5}$.

Minor Chiliadis 987 | 00.00. Log. 1308.52.

Excessus appositus Cyphris 68834000000

Divisor 98734 00

592404 6.

959360

888606 9.

Logarith. 1308.52.

Quotiens. 69.72.

1238.80.

quaesitus.

707540

691138 7.

164020

197468. 2. Quotiens.

20

Hic prodeunt tantum quatuor figurae.¹

Aliud Exemplum

166

Sit Sinus Gr. 9. 15643.45.

Rotundi ergò . 15600.00.

Excessus 43.45.

Divisor 15621

31242 2.

122080

109347 7.

127330

124968 8.

23620

15621 1.

8000 5.

Log. 185789.93.

278.15. Quotiens subt.

185511.78. Log. quaesitus. ³⁰

2) proximi 32) 12208 35) 124960 38) 80000

Cautio

Rarò usu venit, ut opus nobis sit Logarithmo tam scrupuloso et accurato: plerunque sufficit Logarithmus Rotundus, cui non sint plures à sinistris figurae significantes, quàm in quot figuris Logarithmi bini Chiliadis, proximi invicem, nihil inter se differunt, unâ plus.

Vt quia Logarithmus ad	23400.00. est 1452.	43.42.
Sed Logarithmus ad	23500.00. est 1448.	16.98.
Sufficit igitur Logarithmus Rotundus	1450.	00.00.
Quia 1450. est medium inter 1452. et 1448.		

10

Cautio alia

167 Si vero omninò esset opus Logarithmo accuratiore, tunc¹ scito, quod in Logarithmis valdè magnis ad numeros parvos Chiliadis, divisor debeat esse vicinissimus medio Geometrico inter numerum datum scrupulosum, et inter proximè eo minorem Chiliadis: paulò tamen major medio Geometrico: ut docet allegata Propositio.

Exempli causa

Si quaeratur Logarithmus numeri 150.00. Hic numerus scrupulosus est, quia cadit inter duos Chiliadis proximos, scilicet inter 100.00. et 200.00. Excessus est 50.00. Si hunc divideres per 12500. quod est inter
20 15000. datum scrupulosum, et inter datum proximè minorem 10000. medium Arithmeticum, prodiret quotiens 40000.00. auferendus à 690775.54. restaretque 650775.54. Sin autem divides per 12000. Geometricum medium inter 15000. et 10000. quotiens erit 41666.67. qui ablati à Logarithmo proximè minoris scilicet à 690775.54. relinquit 649108.87. quasi Logarithmum ad propositum absolutum seu Sinum 150.00.

Quod verò Logarithmus iste sit jam minor justo, sic patet per usum praecepti sequentis.

30 Pro 150.00. sume centuplum 15000.00. ejusque Logarithmum 189712.00. adde Logarithmo centuplicationis 460517.03. Sic colligitur Logarithmus Numeri 150.00. scilicet 650229.03.

Quare Quotiens 41666.67. quem subtrahebamur, erat major justo, ac proinde medium proportionale inter scrupulosum et Chiliadis proximè minorem scilicet 120.00. erat divisor minor justo.¹

11) accuratone 26) 125.00. 32) 4166667. quam

Alia exemplaris observatio pro scrupulosorum magnorum Logarithmis accuratis indagandis.

168

Sit numerus Scrupulosus seu Sinus Gr. 81. 98768.834. Log. accuratus est 1238.80.

	Sagitta	1231.166.	
Secantis complementi (9. G.) Exc.		1246.513.	
	Summa	2477.679.	
Horum med. Arithmeticum		1238.840.	
Differentia medii arith. et sagitt.		7.673.	
Adde ad sagittam fit		1238.839.	Logarithmus 10
Vel differentia Excess. et sag.		15.347.	ferè: qui dif-
	Ejus dimidium	7.673.	fert à Log-
arithmo accurato solis 4. unitatibus loco secundo post punctum, scilicet quia Logarithmus est adhuc parvus.			

Sic per complementum scrupulosi parvum.

Sin. Gr. 84. 16'.	99499.762.		
Chiliadis numerus major .	99500.000. dat Log.	501. 25.	
Complementum scrupulosi parvum	2380000000	24. Quotientem adde.	
	Divisor 99500000	2 501. 49. Log.	20
		4 Quotiens.	
Hic Sagitta	500.238.		
et Excess. secant. in Canone	502.753.		
Faciunt summam	1002.991.		
Dimidium	501.496.	Paulò majus est Logarithmo accurato.	

Vide super hac re etiam Prop. XXII. Corollaria et praecepta, fol. 31. ¹ †

Vt compendiosè excerptas Logarithmos Numerorum quorundam scrupulosorum, scilicet sine Divisione.

169

Casus primus

30

Si propositus numerus scrupulosus fuerit minor quàm 10000.00. minor scilicet quàm decima pars Maximi in Chiliade: sic ut Logarithmus ejus sit valdè magnus, et differentiae Logarithmorum circa illa loca non magnae tantùm, sed insuper etiam notabilibus incrementis crescentes. Tunc Logarithmo propositi decupli (qui facilius elaboratur)

19) 238000000 20) 9950000

adde Logarithmum decuplicationis, vel Logarithmo centupli Logarithmum centuplicationis, etc. ita habetur Logarithmus propositi Numeri.

Exemplum

Propositus esto scrupulosus 2345.68. hic cùm sit minor quàm 10000.00. ergò quaere Logarithmum ejus decupli sc. 23456.80. Is autem invenitur superiori Methodo 145001.00. Huic igitur adde Logarithmum decuplicationis

230258.51.

Summa 375259.51. est Log. quaesitus Numeri 2345.68.

Aliud exemplum

Propositus esto Numerus scrupulosus 175.00. ut ejus Logarithmus exactus habeatur: quaere centupli 17500.00. Logarithmum, qui est 174296.93. Et pro apposis 00.

adde centuplicationis 460517.03.

Emergit Numeri 175.00. Log. 634813.96.

Aliud exemplum

Sinus unius Minuti solet exprimi hoc numero 29.09. quaeritur hujus numeri Logarithmus. ¹

Scribe millecuplum 29090.00.

Hoc proximè minor invenitur 29000.00. Log. 123787.43.

Excessus 90.00.

Hic continuatus septem Cyphris, et divisus per 29045.00. medium Arithmeticum inter datum et excerptum: seu ille continuatus 5. Cyphris, et divisus per 29045. dat quotientem 309.87. qui ablatas ab exscripto Logarithmo, relinquit

Logarithmum millecupli 123477.56.

Huic igitur adde Millecuplatorem 690775.54.

Provenit Logarithmus quaesitus 814253.10.

Quod si numerus 29.09. exactè exprimeret Sinum unius Minuti, tunc hic etiam exactus esset Logarithmus unius Minuti: at quia in 29.09. ultima unitas non est omninò plena, ideò etiam Logarithmus unius Minuti est paulò major: ut quidem VRSINVS eum exprimit sic 814257.

Casus secundus

Idem ferè processus est, si datus scrupulosus fuerit major quidem quàm 10000.00. parvus tamen etiamnum et minor quàm maximus Chiliadis. Tunc enim Logarithmo dupli, vel tripli, vel quadrupli (quod quidem non excedat maximum Chiliadis) additur Logarithmus totuplans.

Vt si detur Numerus scrupulosus 23456.78.

Hic etsi major est quàm 10000.00. est adhuc tam parvus, ut ejus quadruplus scilicet 93827.12. sit adhuc minor maximo Chiliadis. Quæ-
ratur igitur hujus Logarithmus: ¹

Ad 93800.00. est Log. 6400.53.

171

Appendix scrupulosa 27.12. Aufer 28.91. Quotiens auferend.

138629.44. Log. quadruplans add.

Haec dividitur per 938135 145001.06. Logarithmus quaesitus. †

1876270	2
8357300	
7505080	8
8522200	
8443215	9
78985	1

10

Hic casus generaliter proponi potest, ut circumspicias, in quâ pro-
portione (terminorum quidem Rotundorum) sit numerus propositus
ad aliquem proximè minorem maximo Chiliadis. Tunc constituitur
proportionis illius Logarithmus, et per eum augetur Logarithmus illius
proximè minoris.

Sit Sinus quicunque, puta 15643.45. hic continetur in 100000.00. ²⁰
sexies, sextuplum enim est 93860.70. Huc potest accedere triens 5214.48.
et conficitur 99075.18. Est igitur 15643.45. ad 99075.18. ut 19. ad 3.
Logarithmus Novemdecupli est 294443.90. Hinc aufer triplicantem
109861.23. Logarithmus igitur proportionis est 184582.67.

Quare Logarithmus illius multiplicis proximè minoris Maximo Chilia-
dis per divisionem elaboratus est iste: ¹

99075.18.		Logar.	172
99000.00.		1005.03.	
Exc. 75.18.		75.91. Quotiens.	
		929.12.	30
Exc. 75180000000	Adde Log. prop.	184582.67.	
Div. 9903700000		185511.79. Log. quaesitus	
693259	7.	Numeri absoluti 15643.45.	
585410			
495185	5.		
902250			
891333	9.		
10917	1. Quotiens.		

6) Aufert 28.82. 23) 299443.90. 24) 189582.67. statt 184582.67.

Causus tertius

Si scrupulosus minor quàm 50000.00. habuerit non plures quàm 4. figuras significativas, earumque ultima fuerit quinaris:

Tunc dupli vel quadrupli Logarithmo in Chiliade invento, adde Logarithmum duplicantem, vel quadruplicantem.

Exempla

Vt si datus sit numerus scrupulosus 49950.00. minor scilicet quàm 50000.00. ejus dupli 99900.00. Logarithmo 100.05. adde Logarithmum duplicationis 69314.72. fit 69414.77. Logarithmus quaesitus.

Aliud

Suprà casu primo quaerendus fuit Logarithmus ad Numerum 17500.00. propter scilicet ejus centesimae 175.00. Logarithmum indagandum. Hic si non positus esset in ipsâ Chiliade, posset sic investigari.

Duplum est 35000.00. quadruplum 70000.00.

Hujus verò Logarithmus est 35667.49.

Huic adde Logarithmum Quadruplatorem 138629.44.

Prodit qui supra 174296.93.¹

Causus quartus

Si datus scrupulosus, duplicatus continuè, tandem sortiatur non plures figuras significativas, quàm tres primas à sinistris, sed tunc excesserit maximum Chiliadis, tum Logarithmo partis 10. vel 100. de hoc sic multiplicato, adde Logarithmum duplicationis vel quadruplicationis, etc. à summâ aufer Logarithmum decuplationis vel centuplicationis, etc.

Vt si proponatur Numerus scrupulosus 51250.00.

Hujus duplus est 102500.00.

Et hujus duplus est 205000.00. habens significantivas figuras non ultra tres.

Hic verò jam est major quàm 100000.00.

Ergò ejus partis decimae 20500.00. Logarithmo 158474.53.

adde Logarithmum quadruplicantem hoc loco 138629.44.

Et aufer Logarithmum decuplantem hoc loco 230258.51.

Restat Numeri 51250.00. Logarith. 66845.46.

Potuit etiam sumi duplus ipsius 205. etc. scilicet 410. etc. et rursum hujus duplus 820. etc. hujus Log.

	19845.09.
Adde sedecuplatorem	277258.88.
	297103.97.
Et aufer decuplatorem	230258.51.
Restat idem quod prius	66845.46.

Casus quintus

Si datus scrupulosus habuerit partem aliquotam, quae solas tres figuras à sinistris habeat significativas: Tunc Logarithmo illius partis aufer Logarithmum totuplantem. ¹

Vt si proponatur Numerus 19980.00. scrupulosus.

Hujus semissis est 9990.00. Hujus numeri Logarithmus per praeceptum primi casus invenitur sic:

Decupli 99900.00. Logarith. est	100.05.
Huic adde Logarithmum decuplationis	230258.51.
Ita fit Log. 9990.00. partis dimidia	230358.56.
Hinc aufer Logarithmum duplationis	69314.72.
Restat Log. numeri 19980.00. quaesitus	161043.84.

PRAECEPTUM II

*Dato Numero absoluto, qui excedit maximum Chiliadis (ut sunt secantes ar-
cuum) invenire ejus Logarithmum.*

Excedentis dati constitue partem aliquotam, quae non excedat, puta decimam, centesimam, millesimam, etc. vel etiam dimidiam, tertiam, quartam, per Cas. II. praeced.

Ejus partis in Chiliade quaesitae Logarithmus auferatur à Logarithmo totuplationis (ut Decuplationis, Centuplationis, Millicuplationis, vel etiam Duplationis, Triplationis, Quadruplationis) restabitque Logarithmus excedentis privativus.

Vt si quaeratur Logarithmus numeri 102400.00. Hic numerus habet loca octo, cum Chiliadis maximus 100000.00. habens loca itidem octo, sit tamen minor. Quare sumatur numeri dati pars decima 10240.00. utpote quae jam fit minor maximo Chiliadis. Hic numerus cum jam sit in quarto loco scrupulosus, Logarithmum exactum non invenit in Chiliade, quare per praeceptum praecedens elaborandus est ejus Logarithmus sic: ¹

175	Numerus 10240.00.		
	In Chil. prox. minor	10200.00. habens Log.	228278.25.
	Excess. nostri prolong.	40.000000000	Quotiens 391.39. Subt.
	Divisor est	1022 000	227886.86.
	Medium scil. Arithmeti-	3066	3. Hic est Logarithmus partis decimae: qui ab- latus à Logarithmo 230258.51. decuplatio- nis, relinquit Logarith- mum 2371.65. priva- tivum signo —, Numeri scilicet dati excedentis 9. 102400.00.
	cum inter datum, et	9340	
	proximè minorem	9198	
	Chiliadis.	1420	
		1022	
10		3980	1. tivum signo —, Numeri
		3066	3. scilicet dati excedentis
		9140	9. 102400.00.
		9198	

In hoc exemplo, quia pars decima numeri propositi fuit scrupulosa, praestabat nos uti praecepti prioris casu V.

Ecce: Numeri 102400.00. propositi.

Semissis 51200.00. rotundus, habet Log. 66943.07. Subt.

Logarithmus duplicationis est 69314.72.

Restat quod prius 2371.65.

20 In genere, si fuerint tres numeri continuè proportionales, eorumque Medius idem, qui et Maximus Chiliadis: tunc excedens maximum hunc Chiliadis Logarithmum habet eundem cum minimo trium, sed privativum, signo — praeponendo, ne videatur nihil aliud significare, quàm defectum in figurâ ultimâ, ut Cap. I.

Vt si sit 80000.00. ad 100000.00. ut hic ad 125000.00. †

176 Quia igitur numeri 80000.00. Logarithmus est 22314.36. positivus, erit ergò et Numeri 125000.00. Logarithmus 22314.36. sed privativus.

Aliter et facilitate inopinabili

† A dato Numero excedente rejice tres ultimas figuras ad dextram. Sic
30 curtatum quaere inter Logarithmorum differentias interlineares: et Logarithmum ipsum ei differentiae proximum, planeque respondentem exscribe; erit enim hic ipse Logarithmus Numeri propositi excedentis, sed privativus.

Vt si quaeratur, quis sit Logarithmus intervalli Martis et Solis 152500. seu prolongati 152500.00. ut sit intervallum Solis et Terrae mediocre 100000.00. deletis ergò tribus ultimis restat 152.50. Huic verò numero proximus invenitur inter Logarithmorum incrementa interlinearia iste 152.55. habens ante se Logarithmum 42312.00. post se 42159.45. ut sic

ipsi differentiae 152.55. intermediae respondeat etiam intermedius 42236.00. circiter. Hic igitur est Numeri 152500.00. Logarithmus Privativus.

Admonitio de Secantibus

Atque hinc apparet, etiam secantes ipsos Arcuum complementorum quodammodo haberi per differentias Logarithmorum ad illos arcus, prolongatas tribus locis, quod suprâ Cap. II. promisi me indicaturum.

Admonitio alia

Hic potest vicem Chiliadis implere, Canonis Neperiani columna Media Mesologarithmorum, juncto Canone Tangentum in hunc modum. 10 †

Datum numerum excedentem quaere inter Tangentes, et nota ejus arcum in gradibus et scrupulis: cum hoc excerpe ex Canone Mesologarithmorum Mesologarithmum privativum, habebis sic excedentis Logarithmum privativum. 177

PRAECEPTUM III

Dato Logarithmo, qui non exactè reperiatur in Chiliade, assignare Numerum Absolutum justum cum scrupulositate suâ, sicubi eâ sit opus.

Dato Logarithmo proximè majorem exscribe ex Chiliade, cum † Numero absoluto Rotundo respondente, factâque subtractione dati ab exscripto, residuum duc in absolutum exscriptum ut multiplican- 20 tem, factus, absectis septem ultimis ad dextram locis, collocetur loco quatuor Cyphrarum exscripti Absoluti: Ita prodit quam proximè justus Absolutus, dato Logarithmo competens. Sed quia ei adhuc deest aliquid, corrigatur sic, si facti curtati dimidium colles loco ultimarum Cyphrarum Multiplicantis, et multiplicationem repetas.

Exemplum

Datus esto Log. 145001.10. Subtr.

Hoc prox. major Chiliadis Log. 145243.42. ei resp. absol. 23400.00.

Residuum 242.32.

Duc in Abs. exscript. 23400.00.

4846	4
726	96
96	9280000.

Factus absectis 7. ultimis 5670. | Hic esset addendus ad exscriptum Absolutum, fieretque 23456.70. Sed quia pars addenda non-

7) indicatorum. 24) corrigetur

178 dum est perfecta, ideò dimidium ejus 2835. appono ad Multipli-
 cantem, ut fiat 2342835. repetoque multiplicationem sic:

$$\begin{array}{r}
 242.32. \\
 \hline
 2342835. \\
 4846 \overline{) 4} \\
 726 \overline{) 96} \\
 96 \overline{) 928} \\
 4 \overline{) 8464} \\
 1 \overline{) 93856} \\
 72696 \\
 121160
 \end{array}$$

Compendiosè sic, 242.32.
 quia ultimi 35. 23428.
 parum aut nihil 4846 $\overline{) 4}$.
 efficiunt. 727 $\overline{) 0}$.
 96 $\overline{) 9}$.
 4 $\overline{) 8}$.
 1 $\overline{) 9}$.
 1.

5677.

Factus correctior 5677.

Facile autem videbit exercitatus calculator, non totam sibi multipli-
 cationem esse repetendam, sed multiplicatione per anteriores figuras
 Multiplicantis peractâ, et summâ constitutâ, jam id quod per figuras
 anteriores semissis de emergente facto fit, tantummodò subjiciendum
 esse decenter facto priori, in hunc modum.

242.32

234

$$\begin{array}{r}
 4846 \overline{) 4} \\
 727 \overline{) 0} \\
 96 \overline{) 9} \\
 \hline
 5670 \overline{) 3} \\
 28.4 \overline{) 8} \\
 1 \overline{) 9} \\
 \hline
 5677. \overline{) 1}
 \end{array}$$

Hoc igitur correctiori facto apposito

ad primo exscriptum 23400.00.

Fit absolutus justus 23456.77.

Cautio

In Logarithmis valdè magnis, non est accuratissima haec ratio: id
 tamen, quod peccatur, utcunque magnum, in Logarithmis magnis
 30 non efficit tamen sensibile quippiam in iis, quorum causâ sunt Log-
 arithmi.

Alia Admonitio

Plerunque non est nobis opus scrupulositate numeri quaesiti: sic
 ut sufficiat exscribere aliquem Absolutum medium inter duorum cir-
 cumstantium Logarithmorum Absolutos. Et tunc etiam sufficit scribere
 tam Numeros, quàm Logarithmos usque ad punctum; quod quidem
 punctum huic ipsi compendio servit.

PRAECEPTUM IV

Dato Numeri Logarithmo privativo, invenire Numerum.

Privativum datum aufer à Multiplicatore aliquo majore, ut à Decuplatore vel Centuplatore, etc. vel etiam à Duplicante, Triplicante, etc. Cum residuo quaere Numerum in Chiliade, qui erit quaesiti pars decima vel centesima, etc. vel etiam dimidia, tertia, etc.

Vt si detur Logarithmus – 2371.65. privativus: ut scias quis ei respondeat numerus: aufer eum à Logarithmo decuplationis 230258.51. quippe qui jam est illo major, restabit 227886.86. Hic indicat in Chiliade Numerum 10240.00. qui erit pars decima quaesiti: quare quaesitus ipse 102400.00. ferè.

Vel aufer datum privativum à 69314.72. duplicationis Logarithmo, quia etiam hic jam est major dato privativo, restabit 66943.07. qui ostendit in Chiliade 51200.00. qui est pars dimidia quaesiti: quare ipse quaesitus est 102400.00. ¹

Aliter et facilitate inopinabili

180

Privativum datum quaere inter Logarithmos Chiliadis, et incrementum duorum proximorum, illi respondens, exscriptum auge tribus figuris ad dextram, sic formatus erit Numerus Logarithmi dati quaesitus.

Vt si datus sit idem, qui prius 2371.65. Hic inter Logarithmos quaesitus, cadit medius inter 2429.27. et 2326.86. et differentia horum, itidem media, est 102.41. Hanc auge tribus locis, fiet 102410.00. Numerus respondens, ferè.

Admonitio

Atque hîc iterum vicem Chiliadis supplet ex Canone Logarithmorum Quadrantis columna Media Mesologarithmorum. Quaesitus enim in eâ Logarithmus excerpit arcum, gradus scilicet in calce (quippe cum sit privativus) minuta in margine dextro. Hic arcus translatus in Canonem Sinuum et Tangentum, ostendit inter Tangentes Numerum quaesitum.

PRAECEPTUM V

30

De usu Differentiarum interlinearium.

Etsi incrementa Logarithmorum Chiliadis respiciunt (intra eam) solos Numeros absolutos, ad latus positos, eorumque Logarithmos, inter quos sunt inserta: sciendum tamen est, illa eadem, eodem ordine à primo Chiliadis ipsius (dissimulato jam ejus vestibulo) servire cuicumque alii

Tabulae construendae, quae alios numeros (progressione tamen Arithmeticâ aequabili surgentes) alios etiam eorum Logarithmos habuerit, dummodò pauciores mille fuerint.

Verbi causâ, si pro Numero maximo 100000.00. placeat statuere maximum 60'. 0". et hujus partes facere 720. sic ut una pars sit 0'. 5". pro eo quod in Chiliade est 100.00. Logarithmus in ¹ Chiliade ad numerum 720. est 32850.41. Hunc aufer à Logarithmo ad 100.00. scilicet 690775.54. residuus erit Logarithmus ad 0'. 5". novae Tabulae, scilicet 657925.13. Quod si jam subtraxeris ordine omnia incrementa (seu potius decrementa) Logarithmica Chiliadis ipsius (excluso jam ejus vestibulo) orsus à primo 69314. 72. usque ad ultimum ex 720. scilicet 138.98. constituti erunt Logarithmi ad omnes partium novarum collectiones, puta ad 0'. 10". et 0'. 15". etc. Idem fiet, si unum et eundem Logarithmum, qui est ad numerum 720. seu 72000.00. subtraxeris ab omnibus et singulis 720. Logarithmis, ordine invicem succedentibus in Chiliade.

Aliud exemplum

Si quis in subsidium rei Monetariae vellet construere Tabulam, cujus maximus numerus sit una Marca, hoc est 16. Vnciae, hoc est 256. oboli;

Logarithmus ad absolutum 25600.00. Chiliadis scilicet	136257.79.
ablatus à Logarithmo primo Chiliadis scilicet	690775.54.
relinquit Logarithmum unius oboli scilicet	554517.75.

Ab hoc Logarithmo ablata prima 256. incrementa Logarithmica Chiliadis, quorum primum sit 69314.72. ultimum verò 391.39. constituent omnium numerorum Monetariarum Logarithmos.

Vsus verò talis Tabulae facillè intelligitur ex comparatione harum praeceptionum.

Ego quidem illum hâc vice praetereo, cùm nulla pars Chiliadis à re Monetaria nomen sortiatur.

Alius usus indicatus est praecepto II.

PRAECEPTUM VI

Duos numeros absolutos in se mutuò multiplicare per Logarithmos, et factum invenire.

Multa quidem sequentium praeceptorum, seipsis inutilia ¹ videbuntur, cùm facilius et exactius operationes aliquae peragantur viâ communi: at propter cognationem cum aliis utilioribus, negligenda non fuerunt, lucis causâ.

7) 690775.57. 21) oboli 25) intelligatur

51 Kepler IX

Quando igitur numeri duo absoluti sunt inter se multiplicandi, ut sciatur factus: tunc hoc est perinde, ac si in Regula Trium poneretur primo loco ad sinistram unitas, loco secundo et tertio Multiplicans et Multiplicandus; ut Factus occupet locum quartum, veluti peractâ Regulâ Trium Quotientem.

Igitur adde Logarithmos duorum numerorum, excerptos ex Chiliade: summa, quaesita rursum inter Logarithmos, monstrat Absolutum in illorum columnâ numerum, qui semper est quaesiti pars multiplex, proportionis decuplae continuae. Nam si uterque numerorum absolutorum fuit minor maximo Chiliadis: tunc numero per summam Logarithmorum monstrato sunt apponendae septem cyphrae ad dextram, ut ita factus hic rectè comparari possit cum facientibus.

Exemplum

Sint invicem multiplicandi 51200.00. Log. 66943.07.
et 76800.00. Log. 26396.55.
Summa 93339.62.

Haec summa dat Absolutum 39330.00. circiter.

Igitur factus ex multiplicandis est 3933000000.00. circiter.

Sin autem facientes excedunt maximum Chiliadis, tunc per eos excerpti non potest, sed per eorum partes decimas vel centesimas, etc. et tunc etiam facto, sic conformato, ut vult praeceptum superius, apponendae sunt insuper omnes cyphrae, quae facientium utrique junctim fuerunt adimendae, ut excerptio fieri posset.

Vt si numerorum superiorum alter fuisset uno loco longior, scilicet 768000.00. etiam factus prodiret uno loco longior, scilicet 393300000000.00. Sin autem etiam alter fuisset duobus locis longior, scilicet 5120000.00. factus prodiret in universum tribus locis longior, scilicet 39330000000000.00.

Cautio

Si Logarithmus ex additione excresceret supra maximum Chiliadis Logarithmum, ipsius etiam vestibuli: aufer ab eo Decuplatorem vel Centuplatorem, etc. sic ut remaneat minor Maximo Chiliadis: per hoc residuum excerptus numerus absolutus, et per praeceptum conformatus, debet jam vicissim curtari unâ, duabus, etc. figuris.

PRAECEPTUM VII

Numerum absolutum quadrare, seu ejus Quadratum praeter propter invenire.

Duplica Logarithmum numeri quadrandi, duplum hoc inter Logarithmos quaesitum, exhibet ex columnâ suâ numerum absolutum, cui sunt apponendae ad dextram septem cyphrae; sic habebitur Quadratum numeri propositi, saltem in primis ejus figuris ad sinistram. Nam loca reliqua ad dextram cyphris impleta, nullius sunt momenti, etiamsi vel scrupulosissimè exprimerentur.

Exemplum

10	Quadrandus sit 3100.00. Log.	347376.81.
	Ejus duplum	694753.62.
	Hoc duplum indicat absolutum	96.10.
	Ergò quadratum quaesitum est	9610000.0000.
	Vel	
	Sit quadrandus 31000.00. Log.	117118.30.
	Duplum	234236.60. ¹
184	Hoc duplum indicat absolutum	9610.00.
	Ergò quadratum quaesitum est	961000000.0000

PRAECEPTUM VIII

20 *Numeri absoluti Cubum invenire.*

Triplica Logarithmum numeri, triplum hoc inter Logarithmos quaesitum, exhibebit primas Cubi quaesiti figuras, quibus apponendae sunt aliae 14.

Exemplum

Numeri absoluti 90000.00. Logarithmus 10536.05. triplicatus facit 31608.15. qui ut Logarithmus dat ex columnâ numerorum absolutorum 72900.00.

Ergò Cubus est 72900000000000.000000.

PRAECEPTUM IX

30 *Si duorum Numerorum absolutorum major dividendus est per minorem; quotientem eruere per Logarithmos.*

Quando dividendus est major per minorem: tunc hoc est perinde ac si in Regulâ Trium primo loco ad sinistram collocaretur minor, secundo

major, tertio unitas, quartoque loco ad dextram quotiens. Nam ut minor est ad majorem, sic unitas ad quotientem.

Aufer igitur Logarithmum minoris à Log. unitatis absolutae in vestibulo Chiliadis, scilicet ab 1611809.59. residuo adde Logarithmum majoris, summa inter Logarithmos quaesita ostendit inter Absolutos quotientem.

Exemplum

Sit dividendus 99200.00. per 3200.00. Hujus ergò Logarithmum 344201.94. aufer, et vicissim illius Logarithmum 803.22. adde ad 1611809.59. conficietur Logarithmus 1268410.87. qui ostendit absolutum 0.31. Ergò 0.31. est quotiens. ¹

Vel

Aufer Logarithmum minoris à proximè majori Logarithmo unitatis cujuscunque in Chiliade, residuo adde Logarithmum majoris, provenit Logarithmus Numeri, à quo sunt abscindenda totidem loca, quot cyphras habuit unitas illa, quae Logarithmum dedit.

Vt si in exemplo superiori Logarithmum minoris 344201.94. abstulisses à 460517.03. Logarithmo numeri 1000.00. residuus fuisset

	116315.09.	
Cui additus majoris Log.	803.22.	20
Confecisset Logarithmum	117118.31.	

Hic verò indicat 31000.00. Quia verò numerus seu unitas illa 1000.00. habet 5. cyphras, decurta igitur hunc vicissim 5. ultimis locis, manetque 31.

Observationes

Si per Divisoris decuplum divideris; prodibit pars decima quotientis quaesiti: et sic consequenter.

Si unus vel ambo excesserint maximum Chiliadis: decurtatis am-bobus aequali numero locorum, sic ut fiant minores maximo Chiliadis, operatio peragatur, prodibitque Quotiens justus.

Exempla dimissis figuris post punctum

Dividendus sit 100000. per 4362.

Hic possum uti divisoris decuplo 43620. cujus Logarithmus cùm sit 82965. auferam eum à Logarithmo proximè majori unitatis alicujus ex Chiliade, scilicet à numeri 10000. Logarithmo 230259. restat 147294.

8) pro *stiff* per 10) 1268412.87. *stiff* 1268410.87. . . . absolutum 35) numeris

cui jam nihil additur, quia Logarithmus numeri 100000. est 0. Hic ergò Logarithmus ostendit absolutum 22950. Sed quia unitas usurpata habet
 186 quatuor cyphras, debent ergò vicissim rejici ab hoc absoluto, quatuor quidem loca, ut formetur pars decima quotientis, tria verò, ut ipse Quotiens. Erit igitur ille 23. vel $22\frac{95}{100}$.

Quod si dividendus fuisset 1000000. divisor 4362: Tunc pro 1000000. Chiliadis maximum (usque ad punctum) superante, scripsissem 100000. ut qui non superat, et pro 4362. $436\frac{1}{5}$. utrumque scilicet curtassem aequaliter.

10 Tunc usus priore processu, pro $436\frac{1}{5}$. usus essem ejus centuplo 43620. Et prodisset $2\frac{295}{1000}$. centesima quotientis, ipse igitur Quotiens $229\frac{5}{10}$.

Alius dividendi modus

Dividendum majorem decurta, uti curtatus fiat minor divisore. Tunc à Logarithmo curtati aufer Logarithmum divisoris, residuum erit Logarithmus numeri, qui decurtandus est tot locis, ut decurtatio utraque deleat loca 7. (vel si omittimus figuras post punctum, loca 5.).

Vt si sit dividendus 99200. per 3200.

Rejectis à dividendo duabus figuris fit 992. jam minor divisore. Jam igitur per observationes superiores sume utriusque decuplum, ut fiant
 20 proximi maximo Chiliadis.

Ergò 32000. Logar. 113943.

9920. Logar. 231062.

Residuum 117119. est Logarithmus numeri 31000.

Quia igitur à dividendo rejectae sunt figurae duae, rejiciantur jam à Quotiente tres, ut rejectarum sint 5. formabitur quotiens 31. †

PRAECEPTUM X

Ex numero absoluto, ut Quadrato, Radicem extrahere quadrati.

† A numero absoluto proposito reseca loca bina et bina, tantisper, quoad loca residua ad sinistram repraesentent numerum non majorem
 30 maximo Chiliadis: Numeri sic decurtati Logarithmum adde Logarithmo unitatis purae in vestibulo Chiliadis: summae semissis quaesitus inter Logarithmos, ostendet è regione inter absolutos primas figuras radicis quaesitae, cui numero pro binis locis prius resectis, restituendae sunt singulae cyphrae. Ita formatur Radix quadrata quaesita.

11) $2\frac{259}{1000} \dots 225\frac{9}{10}$.

Exemplum

Quadratum esto 96100.0000. quaeritur ejus Radix quadrata. Numerus igitur iste habet loca 9. cùm maximus Chiliadis habeat tantùm 8. Abscinde duo ultima (numero pari) ut restent septem.

Ergò 96100.00. habet Log. 3978.00.

Sed purae unitatis in vestib. Log. 1611809.59.

Summa 1615787.59.

Semissis 807893.80.

Hic semissis indicat absolutum 31.00. huic verò pro duobus locis prius rejectis jam restitue unam cyphram, fietque vera radix 310.00. 10

Alius modus sine Logarithmo unitatis

A numero proposito rejice loca ad dextram numero impari, ut fiat minor maximo Chiliadis.

Hujus numeri decurtati Logarithmum ipsum bipartire, cum¹ semisse 188 inter Logarithmos quaesito, excerpe ex columnâ absolutorum numerum competentem, qui offert primas ad sinistram figuras radices quaesitae: sed nisi septem omninò loca dempta fuerint initiò, nondum erit hic numerus radix ipsa. Pro binis enim minus quàm septem illic ademptis, singulae cyphrae hîc sunt adimendae, pro binis plus quàm septem ademptis singulae restituendae. 20

Et nota, quod etiam si numerus ipse statim initio fuerit minor maximo Chiliadis, tamen unus illi locus sit demendus, ut radici demantur tria loca, vel unus adjiciendus, ut radici demantur quatuor, vel si tam est parvus, tres adjiciendi, ut radici demantur quinque.

Exemplum

Vt si quadratus proponatur 9610.00000. Hic cùm habeat loca 9. si auferres unum, adhuc haberet nimium, octo scilicet, et in primo novenario, cùm maximus Chiliadis habeat octo quidem et ipse, sed in eorum primo unitatem. Aufer ergò loca tria (numero scilicet impari) restant sex, numerus scilicet 9610.00. Hujus Logarithmus est 234236. 30 usque ad punctum, semissis hujus 117118. ostendit 31000.00.

Quia igitur quadrato loca sunt dempta 4. minus quàm 7. demenda jam sunt huic numero duo, formaturque radix 310.00.

Si quadratus fuisset 961000000000. constans scilicet locis 13. ut igitur minor restet numerus, quàm maximus Chiliadis: oportet rescindere loca 7. numero scilicet impari: et tunc peractâ operatione de

2) 961000000. 26) 961000000. . . . habent 30) 961000.

invento absoluto rescinderetur nihil, quia loca à quadrato rescissa, fuerunt numero septenario, quot cyphas habet maximus Chiliadis.

Si verò quadratus habuisset loca 15. rescindenda fuissent loca 9. numero scilicet impari, ut semper in hoc modo: ut scilicet restaret
 189 numerus minor maximo Chiliadis. Cùm autem 9. excedat¹ 7. binario, jam igitur ad numerum per operationem inventum vicissim fuisset apponenda una cyphra.

Denique si quadratus fuisset 9610000. adhuc rejiciendus fuisset ab illo locus unus, semper enim in hoc modo aliquid impari numero mu-
 10 tandum est. Vnum verò à 7. ablatum relinquit 6. tres igitur cyphrae tunc fuissent rejiciendae, ut radix tunc fiat 3100.

Et si quadratus fuisset 96100. rejici poterit unus locus, poterit et addi unus, ut prolongatus nihilominus sit minor maximo Chiliadis. Sed tunc qui apponit unum, is demit uno minus quàm nihil. Differentia verò inter 7. et inter unum minus quàm nihil, est 8. quatuor ergo demeret loca de invento 31000.00. ut sic formetur ipsius 96100. radix 310.

Ita si quadratus fuisset 9610. potuissent addi loca tria, fuissetque 96100.00. minor maximo Chiliadis, habens Logarithmum 3978. Semissis verò 1989. ostendisset absolutum 98029.00.

20 Tria verò loca prius apposita pro 7. delendis, faciunt decem: quinque igitur hîc dele, ut restet Radix 98. plus, numeri quadrati 9610. ferè.

PRAECEPTUM XI

Medium proportionale inter duos Absolutos datos invenire.

Quia hoc fit in Arithmetica vulgari, multiplicatis in se mutuò duobus datis, factique radice quaesitâ: fit igitur per Logarithmos similiter, conjunctione in unum sexti et decimi praeceptorum; in hunc tamen modum commodissimè.

Absolutus uterque acquirat loca 7. nisi fortè unus eorum fuerit ipse maximus Chiliadis, huic relinqui possunt loca octo. Tunc sic aptatorum
 30 Logarithmi adduntur, cum summae semisse, ut Logarithmo, excerpi-
 190 tur numerus absolutus; cui sunt restituen¹da loca prius abscissa vel demenda, quae erant prius adjecta facientibus utrisque.

Exemplum

Sint duo numeri 987654321. et 59643. quaeritur eorum Medius proportionalis. A primo rejice loca duo ad dextram, ad secundum appone duas cyphas:

11) 31.00.

Ergò 9876543. Log.	1242.25.
5964300. Log.	51679.34.
Summa	52921.59.
Semissis	26460.80.

Hic dat absolutum 76750.65. Cùm igitur uni datorum dempta sint loca duo, alteri totidem apposita: vicissim huic invento duo sunt apponenda, † duo vicissim demenda, hoc est, compensatione factâ nihil mutandum. Ita hic ipse est Medium Proportionale quaesitum.

Hic operae precium est videre, quantus error fuisset commissus, si Logarithmi fuissent excerpti per proximè minores vel majores Abso- 10 lutos sine elaboratione scrupulosâ.

Numero 98765.43. vicinior Chiliadis et major	
98800.00. dat Log.	1207.26. Minorem justo.
Et Numero 59643.00. vicinior Chiliadis et minor	
59600.00. dat Log.	51751.46. Majorem justo.
Summa	52958.72. Propè vera.
Semissis	26479.36.

Jam Logarithmus Chiliadis hoc proximè major, ut qui propior, dat absolutum 76700.00. Ergò semissi ipsi respondebit plus aliquid. Itaque si medium eligam inter 76700. et 76800. ¹ puta 76750.00. id erit proxi- 20 191 mum vero. Sanè suprâ vides inventum 76750.65.

PRAECEPTUM XII

Propositi Numeri Radicem invenire Cubicam, ejusque radice Quadratum.

Quia unitas est ad Radicem Cubicam, ut haec ad Quadratum ejus, et hoc ad Cubum ejus: ergò à Numero Absoluto, qui ut Cubus proponitur, rejice ad dextram loca terna et terna tantisper, quoadusque loca residua repraesentent non majorem maximo Chiliadis: Numeri sic decurtati Logarithmum aufer à Logarithmo unitatis purae in Chiliadis vestibulo, residui tertiam partem, si adjeceris Logarithmo Numeri, constitues Logarithmum utilem indagando Cubicae radice quadrato, si 30 duas tertias adjeceris, fiet Logarithmus pro ipsa radice Cubicâ. Excerpe igitur Absolutos cum utrâque summâ constitutâ, inter Logarithmos quaesitâ, et pro ternis locis prius demptis appone Radicis quidem numero Cyphas singulas, ejus verò Quadrati numero binas: ita formabitur et Radix Cubica et ejus Quadratum.

19) semisse

Exemplum

Propositus esto Cubicus numerus 729. cum 18. cyphris, loca scilicet habens 21. Rejice loca 15. quinquies scilicet terna: quia si 12. rejiceres, restarent 9. plura scilicet quàm habet maximus Chiliadis.

Jam igitur 7290.00. dat Log. 261866.63.

Sed unitatis primae in vestib. Log. est 1611809.59.

Differentia 1349942.96.¹

¹⁹² Seu quod idem est 72900.00. dat Log. 31608.15.

Sed unitatis secundae in vestibulo Log. 1381551.08.

¹⁰ Differentia 1349942.93.

Hujus pars tertia 449980.98.

Summa pro Quadrato 711847.61.

Summa pro Rad. Cub. 1161828.59.

Ergò summa prior dat 81.00. cui appone propter loca 15. prius rejecta, cyphras 10. fiet 81000000000000. Quadratum Radicis Cubicae.

Sic posterior summa dat 90. cui appone pro 15. locis prius rejectis jam cyphras 5. ita fit Radix Cubica 9000000.

PRAECEPTUM XIII

Invenire Logarithmum indicem proportionis inter duos numeros datos.

²⁰ Magnum habet usum hoc praeceptum ad Triangula plana solvenda, de quibus agemus Capite sequenti.

Sunt autem Casus varii. Aut enim uterque datorum terminorum invenitur expressus in Chiliade; aut alter solum, aut neuter. Et si uterque in Chiliade; tunc ii aut proximi sunt invicem, ut 237. 238. seu 23700.00. 23800.00. et tunc differentia Logarithmorum Numeris ad latus respondentium, est quaesitus proportionis Index; ut in hoc

³⁰ Exemplo 421.05. indicat proportionem inter 237. 238. Aut non sunt invicem proximi, sed distant interjectis aliis: tunc Logarithmus majoris auferatur à Logarithmo minoris, restabit Logarithmus proportionis

¹⁹³ inter datos terminos.¹

Exempla

Sint termini Proportionis 1. et 60.

Numeri 1000.00. Logar. 460517.03.

Numeri 60000.00. Logar. 51082.56. aufer.

Restat Log. proportionis inter datos 409434.47. qui ideò et sexagecuplatores dici potest.

5) 72900.00. 9) vestibus 17) 90000.00.

Sic Numeri 1000.00. Logar. 460517.03.

Et Numeri 2400.00. Logar. 372970.14.

Restat Log. viginti quadruplae proport. 87546.89.

Sin vel neuter ex terminis, vel alteruter solùm invenitur expressus in Chiliade: tunc vel cadit talis inter duos Chiliadis, proximos invicem, estque scrupulosus, vel excedit maximum Chiliadis.

In priori casu elaboretur prius Logarithmus numeri scrupulosi; et tunc per eum operatio est eadem, quae prius.

In posteriori casu sumantur numeri utriusque aequè multiplices partes, minores maximo Chiliadis, et cum eorum Logarithmis agatur ut 10
suprà.

Vt si quaeratur proportio inter 102400.00. et 100000.00.

Decurta eos aequaliter, ut sint eorum partes decimae, scilicet

10240.00. Log. 227886.86.

10000.00. Log. 230258.51.

Erit proportionis Log. 2371.65.

Nota

Si numerorum alter fuerit ipse Maximus Chiliadis, tunc ipse Logarithmus alterius numeri est Index proportionis inter utrumque, seu Positivus fuerit Logarithmus, seu Privativus. Logarithmus enim definitus est 20
post Prop. XX. nihil aliud quàm haec ipsa Proportio.¹

PRAECEPTUM XIV

194

Proportionem cum terminis suis datam secare in partes, quae sint ad invicem in alia proportionem propositâ.

Data sit Proportio inter terminos 37. et 53.

Haec proportio sit secunda in partes duas, quarum una sit ad alteram, ut 5. ad 2.

Igitur constituatur quantitas proportionis secundae per praecedens praeceptum.

	Logar.		Logar.
Termini 5300.	293746.	vel 53000.	63488.
3700.	329684.	37000.	99425.
Proportio	35938.		35937.

30

Jam secundae Proportionis, secundum quam secunda est prima, Termini sunt 5. et 2. Summa 7. Divide igitur proportionis primae

2) 24000.00.

quantitatem in 7. erit pars septima 5134. et duae septimae 10268. Ergò
quinque septimae 25670.

Quantitate partium inventâ, jam duplici viâ potest secari in has partes
prima proportio: Aut enim ut pars major stet à plagâ termini majoris.

Igitur termini majoris Logarithmo 63488.

Adde partem majorem 25670.

Summa 89158.

Haec ut Logarithmus ostendit absolutum 41000. ferè. Ergò ut se
habet 5. ad 2. sic se habere fecimus proportionem inter 53. 41. ad pro-
10 portionem inter 41. 37.

Aut ut pars minor sectae, stet à plaga termini Majoris.[†]

191 Eidem ergò termini majoris Logarithmo 63488.

Adde partem minorem 10268.

Summa 73756.

Haec ut Logarithmus ostendit 47830. circiter.

Ergò ut se habet 2. ad 5. sic fecimus se habere proportionem inter 53.
47 $\frac{83}{100}$. ad proportionem inter 47 $\frac{83}{100}$. 37.

Idem efficiemus etiam per Logarithmum Termini Minoris, subtrahen-
tes ab eo.

20

Aliud exemplum et nobile quidem

Datur proportio inter dies 687. periodi Martis et 365 $\frac{1}{4}$. periodi Solis
(TERRAE COPERNICO). Sit haec proportio secunda in partes duas, sic
ut major ad minorem se habeat, ut 2. ad 1. et ut major pars proportionis
divisae stet à plaga termini minoris, ut ita Proportio tota sit ejus partis
majoris sesquialtera.

Ergò Termini Majoris 68700. Log. 37542.

Termini Minoris 36525. Log. 100740.

Quantitas ergò proportionis 63198.

Proportionis verò divisoriae termini 2. 1. faciunt 3. quâ summâ divisa
30 quantitas Proportionis, facit ejus trientem 21066. et

duos trientes 42132. Hos aufer

à Logarithmo partis minoris 100740.

Restat 58608.

† Hoc ut Logarithmus ostendit Numerum absolutum 55650. Ergò ut 1.
ad 2. sic fecimus proportionem inter 68700. 55650. ad proportionem
inter 55650. 36525.[†]

35) 58608. statt 55650. 36) 58608. statt 55650.

Quod si ex termino minori 36525. fiat 100000. distantia mediocris 196
Solis et Terrae, tunc ex hoc invento termino majori 55650. fiet 152400.
ferè: distantia Solis et Martis mediocris.

Et fit manifestum, quod proportio Periodicorum temporum sit
sesquialtera proportionis Intervallorum mediocrium: ut indicavi in
Epitomes Astronomiae Cop. libro IV.

PRAECEPTUM XV

*Regulam Proportionum seu Detri absolvere per Logarithmos, seu sine Multi-
plicatione et Divisione.*

Positis in Regula tribus datis Numeris, in Chiliade comprehensis, ut 10
docet vulgaris Arithmetica, aufer Logarithmum sinistimi à Logarithmo
medii, vel hunc ab illo: differentiam Logarithmo dextimi adde in primo
casu, subtrahe in secundo, si potest: summa illic, vel hic Residuum, est
Logarithmus Quarti quaesiti seu Quotientis positivus.

Rursum autem si Logarithmus Tertii fuerit minor residuo, subtrahe
vicissim illum ab hoc, remanebitque privativus Logarithmus, numeri
scilicet absoluti, seu Quotientis, superantis maximum Chiliadis.

Exemplum primi casus

77100.	dat 53200.	quid 92500.	
	Log. 63111.		
—	Log. 26006. Subt.		
	Residuum 37105.		
	Logar. 7796. adde		
	Logar. 44901. Quotientis 63800. plus. ¹		

20

Exemplum secundi casus

876.	dat 941.	quid 765.	
	Log. 6081. Subtrahatur ut minor.		
—	Log. 13239.		
	Residuum 7158. Subtrahe quia secundus subtractus.		
	Logarithmus 26788.		
	Logarithmus 19630. Quotientis 822. minus.		

197

30

2) Lunae statt Terrae . . . 58608, fiat 152400. 6) Epitomen 21) 26007.

Exemplum casus tertii

889. dat 996.

quid 960.

Log. 401. Subtrahatur ut minor.

Log. 11766.

Residuum 11365. Subtrahendum erat,

quia secundus subtractus fuit.

Logarith. 4082. Subtrahe hunc

quia minor est residuo.

Logarith. 7283. privativus, quia tertius subtractus fuit. Hic igitur privativus per IV. praeceptum, dat Quotientem 1075. majorem maximo Chiliadis 1000. ut hîc quidem operamur per curtatos.

10

Nota

Licet autem commoditatis causa, omnes tres in Regulâ positos, vel prolongare, vel curtare, ut fiant proximè minores maximo Chiliadis: et tunc quotiens, qui pro sic accommodatis elicitur, idem debet pati, quod passus est sinistimus: eos verò locos, qui secundo et tertio fuerunt adepti vel appositi, solus quotiens omnes contrariâ ratione vel recipere debet, vel amittere.¹

198

CAPUT IX

DE COPULATIONE COLUMNAE LOGARITHMORUM CUM
DUABUS ALIIS IUNCTIS

20

PRAECEPTUM GENERALE

Quotiescunque in Regulam Proportionum offeruntur diversarum Columnarum Numeri, sic ut duo quidem ex iis sint ex unius Columnae genere, unus verò residuus cum quotiente quaesito competat in columnam alteram: tunc operatio per Logarithmos perfici potest, tam in vulgaribus seu Absolutis Numeris, quàm in Logisticis.

Hujus mixturae dabo aliquot Exempla, tanquam Praecepta particularia.

I. PRAECEPTUM

Dividere Horas vel Gradus per sexagenaria scrupula.

† 30 Quia enim est, ut Divisor Sexagenarius ad Dividendum, sic Integrum seu 60'. ad Quotientem: Divisor igitur et Integrum sunt ex genere eodem sexagenario, Dividendus verò et Quotiens possunt esse ex

5) 13365. 13) accommodatos

Quadrivicenariâ. Possunt igitur illa Exempla Capitis VI. Praecepti III. ubi dividendus aliquot integra continet, possunt, inquam, plerunque per Quadrivicenariam perfici.

Vt si dividendi, ut suprâ 3. G. 45'. 13''. in 57'. 8''. sic age:

Gr. 3. 45'. 13''. Log. 185470. circ. ex Quadrivic.

Scr. 57'. 8''. Log. 4900. ex Sexagenar.

Residuum 180570. dat ex Quadrivicenaria quotientem 3. G. 56'. 30''. ut et Cap. VI.¹

II. PRAECEPTUM

199

Partem proportionalem scrupulis sexagenariis capere de differentiâ, excedente integrum. 10

Addantur Logarithmi Scrupulorum in sexagenaria, et differentiae excedentis in Quadrivicenaria, quaesitorum summa ex Quadrivicenaria ostendit partem proportionalem.

Vt si uni Gradui Anomaliae mediae respondeant 1. G. 24'. 17''. coaequatae, quid competit Minutis 49. 23.

Gr. 1. 24'. 17''. Log. 284000. circiter.

Scr. 49. 23. Log. 19480.

Summa 303480. dat 1. G. 9'. 15''. tantum competit scrupulis 49. 23. 20

III. PRAECEPTUM

Dato diurno Solis vel Planetarum 5. unius, colligere aliquot horarum motum.

Si diurnus minor est quàm 60'. ut in Saturno, Jove, Marte, et in Sole: quaere eum in Sexagenaria, numerum Horarum in Quadrivicenaria, et adde eorum Logarithmos; Summa in Logarithmis quaesita, eruet ex Sexagenaria partem Horis competentem.

In Sole, Venere, Mercurio, si diurnus est inter 1. et 2. G. quaere proportionalem partem de excessu supra 1. G. eamque adde ad id, quod horis datis in sexagenaria respondet per Caput IV. In Mercurio verò, si ejus diurnus superat 2. G. partem proportionalem de excessu, adde 30 duplo illius, quod horis datis respondet in sexagenaria.

Aliter, quia diurnus plerunque constat integris scrupulis, sine appendice secundorum: quaerere illa poteris non in sexagenariâ, ¹ sed inter absolutos, prolongata priùs, ut Cap. VIII. docui: et tunc quae ex Logarithmis colligitur summa, quaesita in Logarithmis, rursum inter absolutos ostendet partem proportionalem decurtandam iterum totidem locis. 200

Exempla

Sit diurnus 17'. horae 19. 48'. 0''.		Vel	
Horarum 19. 48'. Log. 19237.			19237.
Scr. 17'. ex sexag. Log. 126200.		Ex absolutis 17000.	
	Summa 145437.		Log. 177200.
Pars proportionalis ex sexa-			Summa 196437.
genariâ	14'. 1''.	Ex absol. colum.	14020.

Jam si Veneris diurnus fuisset 1. G. 17'. tunc è regione H. 19. 48'.
 inuenio scrupula 49'. 30''. quae addenda sunt ad 14'. 1''. partem pro-
 10 portionalem de excessu, essetque arcus quaesitus 1. G. 3'. 1''. Et si
 Mercurii diurnus fuisset 2. G. 17'. duplicanda fuissent illa 49'. 30''.
 addendaque 14'. 1''. ita collegissemus 1. G. 53'. 1''.

IV. PRAECEPTUM

Horarium elicere ex motu aliquot Horarum datarum, minore quàm 60'.

Auferatur Logarithmus Horarum datarum, in quadrivicenariâ quaesi-
 tarum, à Logarithmo ex sexagenariâ scrupulorum, Horis competen-
 tium; Residuum, ut Logarithmus, ex sexagenaria exhibebit Horarium.
 Exempla sunt facilia et obvia.

V. PRAECEPTUM

Datâ separatione diurnâ minore quàm 60'. et distantia Planetæ ab alterius
 20 *aspectu, minore ea quàm est diurnus, prædere Horarum intervallum respondens.*

In sexagenariâ, vel etiam inter Absolutos, quaesitis diurna¹ separa-
 20 ¹ *tione et distantia*, Logarithmus illius aufertur à Logarithmo hujus,
 residuum, ut Logarithmus exhibet Horas ex Quadrivicenariâ, respon-
 dentes distantiae seu intervallo.

VI. PRAECEPTUM

Hoc modo etiam ingressus Solis in signa computatur: Per diurnum
 scilicet Solis, et per distantiam ejus à principio signi in meridie vicino,
 in sexagenariâ quaesitis, et Logarithmo illius ablato à Logarithmo hujus.
 Residuum enim, ut Logarithmus, ostendit in Quadrivicenariâ Horas
 30 ante vel post meridiem.

15) Aufertur

Plurima alia per hanc combinationem columnarum perfici possunt: sed sex ista exemplorum loco sufficiant. Jam enim ad rariora et scrupulosiora nonnulla transeundum, suprâ dilata, et in hunc locum rejecta.

VII. PRAECEPTUM

Cuilibet arcui Sinum suum scrupulosum assignare per Logarithmos.

Subsidium, ut vides, paratur hîc Capiti II. ut in ejus tractatione promiseram. Quanta igitur sit operationis certitudo, vide ibi: nunc modum doceo.

Ab arcu dato aufer proximè minorem Chiliadis, et exscribe ejus Sinum Rotundum, ut jam corrigatur, suamque acquirat scrupulositatem. Tunc in sexagenariâ quaesitis et excessu arcus dati, et differentiâ binorum arcuum Chiliadis, inter quos arcus propositus intercidit, auferatur Logarithmus hujus à Logarithmo illius: Residuum immissum in Logarithmos, ostendit inter Absolutos Numerum, qui praecisis tribus ultimis locis ad dextram, fit augmentum scrupulosum exscripti Sinus Rotundi.¹

Exemplum

Propositus esto arcus	37. G. 49'. 53''.	
Proximè minor Chil.	37. 48. 26.	dat Rotund. 61300.00.
	Residui 0.	1'. 27''. Log. 372900. circ.
Differentiae inter duos Chil.	4. 21.	Log. 262400. circ. aufer.
		Residuum 110500.

Hoc quaesitum, ut Logarithmus, dat inter Absolutos Numerum 33190.00. circiter. Ergò praecisis 3. locis, acquirimus 33. 19. et fit Sinus scrupulosus arcui proposito conveniens 61333.19.

Cautio

In fine Quadrantis, ubi differentia in Chiliade superat 60'. uti liceret Columnâ Quadrivicenariâ, nisi tum simul etiam proportionalitas, quam hoc praeceptum praesupponit, insigniter turbaretur.

VIII. PRAECEPTUM

Vicissim cuilibet Sinui Scrupuloso suum assignare arcum.

Primùm cum Sinu rotundo, proximè minori, exscribe arcum et differentiam subjectam. Tunc ad 4. ultimas figuras Sinus scrupulosi (ad

excessum scilicet Sinus dati suprà rotundum Chiliadis proximè minorem) appone tres Cyphras, et quaesito Numero sic formato inter Absolutos, differentiâ verò in sexagenariâ, adde eorum Logarithmos; Summa ut Logarithmus, ostendet in sexagenaria scrupula prima et secunda, addenda arcui exscripto.

Exemplum

Vt si detur Sinus scrupulosus 61333.10. proximè minor rotundus
 203 61300.00. dat arcum 37. G. 48'. 26''. Et differentiam ¹ 4'. 21''. cujus
 Logarithmus 262400. circiter. Quatuor autem ultimae Sinus scrupulosi
 10 figurae hic sunt 3310. prolongatus hic numerus, ut sit 33100.00. dat
 Logarithmum 110500. qui additus ad priorem, facit summam 372900.
 circiter.

Haec ostendit partem proportionalem 1'. 27''. Ergò Arcus erit 37. G. 49'. 53''.

IX. PRAECEPTUM

Cuilibet arcui suum assignare Logarithmum sine magno labore.

Rursum hic subsidium paratur doctrinae Triangulorum Sphaericorum, Cap. VII. traditae, pro curiosis, qui dedignantur operari cum Logarithmis rudibus. Praeceptio erit verbosa quidem; at non valdè
 20 necessaria, ne metuas, calculator.

Cùm enim in hâc Chiliade tam arcus, quàm Logarithmi exhibeantur scrupulosi; et differentiae, inter arcus quidem interjectae, crescant continuo, inter Logarithmos verò decrescant; ut ita neutrobique maneat unus et idem numerus constans: laborem equidem haud levem sumpserit, qui, quotiescunque opus fuerit Logarithmo exacto, toties multiplicatione scrupulorum et secundorum Excessus arcus in differentiam Logarithmorum, ut in numerum apicibus carentem (diversi scilicet generis) et rursum, facti divisione in differentiam, ex Scrupulis et secundis constantem, venari velit partem proportionalem.

30 Hic igitur juvent Logarithmi seipsos, ut contribules. Cum arcu Chiliadis, qui proximè minor proposito arcu vel angulo fuerit, exscribe Logarithmum exactum, eumque arcum subtrahe à proposito: et quaesitis in sexagenariâ, tam excessu propositi, quàm differentia inter duos arcus Chiliadis, inter quos cadit propositus, Logarithmum hujus ruditer
 204 saltem excerptum, aufer à Logarithmo rudi illius: residuum junge Logarithmo rudi differentiae vicinorum duorum Logarithmorum pro-

longatae, secundum praecepta praecedentis Capitis, et quaesitae inter absolutos: Summa ut Logarithmus ostendit, rursum inter absolutos, numerum, qui decurtatus prodit partem proportionalem, auferendam à Logarithmo exacto arcus proximè minoris, primum exscripto, ut justus constituatur Logarithmus arcus propositi.

Exemplum

Cupio Logarithmum arcus	71. G. 40'. 10''.
In Chiliade invenio proximè minor. 71.	37. 21. Log. 5234.65.
Excessus dati	2'. 49''. Log. 305800.
Differentia duorum in Chiliade	10. 57. Log. 170000. rudis. 10
Residuum	135800.

Differentia duorum Logarithmorum 105.32. prolongata ut fiat 10532.00. inter absolutos quaesita dat Logarithmum 225000. rudem.

Adde resid. 135800.

Summa 360800. Haec ut Logarithmus ostendit inter absolutos 2725.00. Deletis verò iterum duobus ultimis, fit pars proportionalis 27.25. quibus ablatis ab exscripto 5234.65. restat 5207.40. Logarithmus, quantum proportionalitas locum habet, exactus. Nam Capite VIII. veriores, et plerunque exactissimos docuimus assignare Sinubus, qui per eos suis arcubus transcribi 20 possunt.

X. PRAECEPTUM

Vicissim Logarithmo scrupuloso arcum suum assignare.

Primùm cum Logarithmo Chiliadis, qui proximè major ¹ fuerit pro- 205
posito, exscribe arcum scrupulosum, cum differentia subjecta. Tunc subtrahe Logarithmum propositum ab exscripto proximè majore: Excessum illius, et simul differentiam duorum in Chiliade, prolonga aequali locorum numero, ut sint tamen minores maximo Chiliadis. Sic igitur formati iis, et inter absolutos quaesitis, Logarithmum hujus ab illius Logarithmo aufer, residuo adde Logarithmum differentiae arcuum 30
in sexagenariâ quaesitae; sic accumulatur Logarithmus partis proportionalis ex sexagenariâ itidem excerptae, et addendae arcui exscripto.

10) rudes.

Exemplum

Sit Logarithmus 5207.40.

Prox. major 5234.65. dat 71. G. 37'. 21''. et diff. 10'. 57'.

Excessus 27.25.

Diff. Logarithmorum 105.32.

Hi Num. prolongati 2725.00. dant rudes 360800.

10532.00. 225000.

Differentia 135800.

Differentiae arcuum Log. 170000.

Summa 305800. ostendit

partem proportionalem 2'. 49''.

Ergò Arcus 71. G. 40'. 10'.

Habent igitur curiosi quod agant, si rudibus Logarithmis, minimo cum damno, uti dedignantur. Veruntamen qui tales futuri sunt, iis consultum est, ut privatâ quilibet operâ, et in vestibulo Chiliadis columnam arcuum hîc vacantem impleat, et in fine Quadrantis decem ultimas arcuum differentias in denas subdividat, Sinuum quidem differentias statuens aequales, eis verò Sinubus ex Canone Sinuum exacto suos adscribens arcus, et Logarithmos Sinubus suos ex doctrina Capitis prioris accommodans.

Nam pars proportionalis usitato modo quaesita, locum non habet in fine Quadrantis: ut Capite secundo monui.

XI. PRAECEPTUM

Per solos Logarithmos Absolutorum et Arcuum seu Angulorum, omnia Triangula plana solvere: omnia scilicet quaesita ex tribus datis eruere.

Ad hoc caput propriè pertinet haec doctrina, quia jungi debet Columna Absolutorum (non ut ii sunt Sinus arcuum) et columna ipsorum arcuum. Sunt autem Casus sex.

I. Si datis angulis et uno latere, quaeritur latus.

Tunc prolongato vel decurtato latere, ut Capite VIII. doctus es, adde Logarithmos lateris dati et anguli quaesito lateri oppositi; à summâ aufer Logarithmum anguli dato lateri oppositi, restat Logarithmus lateris quaesiti, similiter prolongati.

Si subtractio fieri non potest, vicissim summam subtrahe, restabitque privativus Logarithmus, lateris excedentis maximum Chiliadis.

4) 27.15. 6) 2715.00. 14) decimo statt damno 26) doctrinae

Exemplum

Dentur Anguli 50. G. o'. et 60. G. o'. datur igitur etiam residuus, ut complementum illorum duorum ad Semicirculum scilicet 70. G. o'. detur et latus oppositum medio angulo 573. quaeritur latus oppositum maximo.¹

Lateris 57300.00. (prolongati) Log. 55687. 207

Anguli 70. G. o'. Log. 6220. circ. †

Summa 61907.

Anguli 60. G. o'. Log. 14380. circ.

Residuum 47527. dat 62175.00. 10

Latus ergò est 622. ferè.

Quod si Rectus fuerit angulorum unus, et detur ei subtensum latus, sufficiet sola Additio.

Sin autem quaeratur latus recto subtensum, sufficiet sola subtractio Log. anguli à Log. lateris oppositi. Restabit enim Log. lateris recto subtensi.

II. Si datis duobus lateribus, et angulo uni eorum opposito, quaeruntur anguli reliqui.

Tunc lateribus aequaliter prolongatis vel decurtatis, ut sint proximè minora maximo Chiliadis, adde Logarithmos Anguli et lateris unius adjacentis; à summâ aufer Logarithmum lateris dato angulo oppositi, restat Logarithmus anguli lateri alteri oppositi, qui angulus interdum tam potest esse minor quadrante, quàm major: et sic Complementum ad Semicirculum ejus, quem Logarithmus excerpit: quantisper non plura dantur. Tertius verò angulus est duorum junctorum complementum ad Semicirculum.¹ 20

Exemplum 208

Vt si dentur Latera 622. 507. Et huic oppositus 50. G. o'. quaerantur Anguli reliqui.

Anguli 50. G. o'. Log. 26650.

Adjac. lateris 62200.00. Log. 47527. 30

Summa 74177.

Oppositi lateris 50700.00. Log. 67957.

Residuum 6220. dat Ang. 70. G. o'.

alteri lateri oppositum.

Si ergò duo sunt 50. G. o'. 70. G. o'. Tertius erit eorum summae complementum ad duos rectos scilicet 60. G. o'.

Si verò angulus prodiens sumeretur non	70.	o.	sed
complementum ad semicirculum	110.	o.	Tertius
	fiet	20.	o.

Si datus angulus fuerit Rectus, sufficiet sola subtractio Logarithmi lateris recto oppositi, à Log. lateris reliqui dati: restabit enim Logarithmus anguli ei oppositi.

Si latus dato angulo oppositum Logarithmum habuerit aequalem summae priorum: rectangulum erit Triangulum.

III. Si datis duobus lateribus et angulo uni eorum opposito quaeratur latus tertium.

Tunc primùm, ut in secundo casu, quaeratur angulus reliquo lateri dato oppositus; additis Logarithmis, Anguli dati, et lateris ei adjacentis; à summâ verò dempto Logarithmo lateris dato angulo subtensi: cum residuo, ut Logarithmo, exscribatur angulus, et jam summâ duorum angulorum à duobus rectis ablatâ constituitur angulus tertius, cujus Logarithmus, ut in primo casu addendus est Logarithmo unius ex lateribus, à summâ auferendus ¹ Logarithmus Anguli oppositi, restabitque Logarithmus lateris tertii.

Vt in Exemplo priori, sumpto Angulo secundo 70. G. o'. et invento angulo tertio 60. G. o'. Ejus Logarithmo

	14380.		14380.
Addatur lat. 622. Log.	47527.	vel lateris 507. Log.	67957.
20 A summâ	61907.	vel	82337.
aufer anguli 70. G. Log.	6220.	vel ang. 50. G. Log.	26650.
Restat	55687.		55687.

Logarithmus lateris tertii quaesiti 57300.00. sed decurtati, ut priora, 573.

At si angulus in priori praecepto prodiens sumatur non 70. G. o'. sed 110. G. o'. et tertius ideò sit 20. G. o'. hujus igitur Logarithmus 107290. additus Logarithmis datorum laterum, et ablatis Logarithmis angulorum oppositorum, dat Logarithmum 148600. lateris tertii, angulo scilicet 20. G. o'. oppositi, scilicet 22630.00. decurtati igitur $226\frac{3}{10}$.

Si angulus datus fuerit Rectus, aufertur Logarithmus lateris recto oppositi à Logarithmo lateris reliqui, restat Logarithmus anguli: hujus complementi Logarithmus, vicissim additus Logarithmo primo, lateris recto oppositi, dat Logarithmum lateris reliqui.

IV. Si datis duobus lateribus, et angulo comprehenso, quaerantur anguli reliqui.

† Hic via directa solvendi hunc casum utitur Mesologarithmis, qui non aliter elici possunt ex Chiliade, quàm si Logarithmos arcus ejusque complementi ab invicem subtrahamus: ut sic datâ eorum differentiâ ipsi Logarithmi partium quadrantis non directè possint accipi, sed positione sit utendum. ¹

Dimisso igitur hoc modo, ne tamen manca hîc sit Chilias nostra: 210
utatur positionibus potius in aliâ viâ facili et indirectâ: etsi et haec
aptior sit Logarithmis Canonicis Quadrantis.

Est autem talis: Datis lateribus quaeratur eorum proportio: fit enim
facilimè, per Capitis VIII. Praeceptum XIII.

Haec verò proportio, cùm sit differentia inter Logarithmos angulo-
rum residuorum, quorum angulorum summa est in anguli dati Com-
plemento ad Semicirculum: Ponatur igitur angulus minor esse notus,
auferaturque à dati complemento ad Semicirculum, residui Logarithmo
adde proportionem laterum inventam; Summa ut Logarithmus, si 10
dat arcum eundem, quem posueras, felix fuit positio; sin discrepat, muta
positionem primam, sumens vel aliquid intermedium, si residuum ex
complemento ad Semicirculum fuerit Quadrante minus: vel aliquid
longius à primâ positione recedens, quàm quod prodierat; si residuum
ex complemento ad Semicirculum fuerit majus Quadrante, praesertim
si valdè magnum.

A tali nova positione incipiat nova operatio: Id fiat tantisper, donec
prodeat id, quod ultimò fuit positum. Ita habebis utrumque angulum
ex quaesitis.

Conducit autem primas positiones sic moderari, ut remaneat de 20
complemento ad Semicirculum aliquid quod exactè reperiatur in
Chiliade.

Exempla

Dentur latera 507. et $226\frac{3}{10}$. comprehensus esto 110. G. ut sit ejus
complementum ad Semicirculum 70. G. Quaeruntur duo anguli re-
sidui, quos junctos scio facere 70. G. ¹

Primùm quaero proportionem laterum	50700.	Log.	67957.	211
	22630.	Log.	148600.	
		Proportio	80643.	
Compl. ang. ad Semic.	70. G.	0'.		30
Positio arbitraria	10. G.	0'. 10''.		
	Residuum	59. 59. 50.	Log.	14387.
	Prodit	22. 45. circ.		95030.
Positio secunda	17. G.	3'. 37''.		
	Residuum	52. 56. 23.		22565.
	Prodit	20. 52. circ.		103208.

3) Logarithmus 36) 30. statt 20.

Positio tertia	19. G. 0'. 47''.	
Residuum	50. 59. 13.	25231.
Prodit	20. 17. circ.	105874.

Hoc modo cum medio Arithmetico inter positum et prodeuntem semper possemus propius ad consensum venire. At quia statim in secunda positione apparuit, veritatem esse ultra medium Arithmeticum: Sumemus etiam in quarta positione aliquid, quod propius sit prodeunti 20. G. 17'. quam posito 19. G. 1'. tentabimus scilicet 20. G. 0'.

Positio quarta	20. G. 0'.	Proportio	80643.
Residuum	50. 0.	Logarith.	26650.
Prodit	20. 0.		107293. ¹

²¹² Haec ergo tandem felix fuit positio, et Anguli quaesiti sunt 20. G. 0'. et 50. G. 0'.

Exemplum aliud

⁴ Dentur latera 507. 573. et comprehensus 70. G. ut residuum ad Semicirculum sit 110. G. 0'. Quaero proportionem laterum.

	50700.	67957.
	57300.	55687.
Compl. ang. ad Semic. 110. G.	Proportio	12270.
²⁰ Positio arbitraria	29. G. 56'. 14''.	
Residuum	80. 3. 46.	Log. 1511.
Prodit	60. 36. circiter.	13781.

Positio secunda	45. G. 58'. 22''.	
Residuum	64. 1. 38	Log. 10647.
Prodit	52. 40. circiter.	22917.

Positio tertia	49. G. 4'. 13''.	
Residuum	60. 55. 47.	Log. 13467.
Prodit	50. 38.	25737.

Apparet ponendum	50. G. 0'.	
³⁰ Residuum	60. 0.	Log. 14380.
Prodit	50. 0.	26650.

Ergo anguli quaesiti sunt 50. G. 0'. et 60. G. 0'.¹

Exemplum tertium

213

Dentur latera, ut prius 507. 573. sed comprehensus sit 20. G. Complementum ad Semicirculum 160. G. Manente igitur laterum proportionem

Log. 12270.

Compl. ad Semic. 160. G. 0'.

Sit positio arbitrar. 70. G.

Residuum 90.

Log. 0.

Prodit 62. G. 8'. circiter.

12270.

Positio secunda 54. G. 47'. 45".

Residuum 105. 12. 15.

74. 47. 45.

Log. 3563.

Prodit 58. 35.

15833.

10

Positio tertia 60. G. 0'.

Residuum 100. G. 0'.

80. 0'.

Log. 1530. circ.

Prodit 60. G. 35'. circiter.

13800.

Positio quarta 61. G. 0'.

Residuum 99. 0.

81. 0.

Log. 1240.

Prodit 60. 52.

13510.

20

Ergò positio felix erit 60. G. 47'. circiter.

Hic cum in primâ positione 70. G. Residuum fieret 90. G. prodiit aliquid minus ipsâ positione, scilicet 62. G. 8'. Residuum igitur apparuit futurum majus quadrante. In hoc ergò casu positionem secundam longius à primâ distare feci, quàm id quod per primam prodiit. 214

Sic in positione secundâ 54. G. 47'. prodiit 58. G. 35'.

Ergò positio tertia 60. G. 0'. longius distare jussa est à positione praecedenti 54. G. 47'. quàm id quod prodierat 58. G. 35'. minus tamen quàm quod primò prodiit, scilicet 62. G. 8'. Et in positione tertia 60. G. 0'. prodiit major 60. G. 35'. feci ergò quartam adhuc majorem, scilicet 61. G. 0'. Per hanc autem quartam 61. G. 0'. prodiit jam minus 60. G. 52'. 30

Ergò quinta positio adhuc minor est facta, major tamen quàm 60. G. 35'. quod prius prodierat, scilicet 60. G. 47'. Est igitur angulus minor 60. G. 47'. major 99. G. 13'. ferè.

Si datus fuerit Rectus: reliqui duo ex Canone Neperiano facilè habentur, quaesitâ proportionè laterum inter Mesologarithmos, inventa enim ea ostendit utrumque angulum.

V. Si datis duobus lateribus et angulo comprehenso quaeratur latus tertium.

Nulla est alia machina, quàm ut prius quaerantur anguli, per praecedens. Tunc iis inventis, cadit quaestio in casum primum.

Si tamen angulus datus sit Rectus, Logarithmos laterum duplica, duplicatorum Logarithmorum numeros absolutos adde, summae Logarithmum dimidia; Semissis iste, ut Logarithmus, dabit inter absolutos quaesitum latus.

VI. Si datis tribus lateribus quaeratur Angulus.

Tunc ante omnia ex majori angulo resecandum est Triangulum aequicrurum, cujus crura sint linea sectionis et latus minus; Basis verò segmentum lateris majoris. Id verò obtinetur in hunc modum.¹

²¹⁵ Adde Logarithmos et differentiae, et summae laterum minorum, à Logarithmorum summâ aufer Logarithmum majoris lateris, residuum ut Logarithmus ostendet inter absolutos, partem de latere majori subtrahendam, ut restet basis aequicruri supradicti.

Constitutâ hac Basi, Maximus angulorum habetur per sua Elementa, ²⁰ si exscripseris Logarithmos tam semissis de basi, quàm residui de latere majori, post ablatum basis semissem; et ab illo quidem minoris, ab isto verò medii lateris Logarithmos abstuleris, relinquuntur enim Logarithmi duarum partium anguli maximi. Duo verò minores anguli sunt horum majoris Elementorum Complementa.

Exemplum

†	Sint latera	507. 573. 622.	quaeruntur anguli.	
	Latus minus	507.		
	Medium	573.		
	Differentia	66.	Scribo 66000.	Log. 41552.
³⁰	Summa	1080.	Scribo 10800.	Log. 222562.
				264114.
	Lat. maxim.	622.	Scribo 62200.	Log. 47482.
	Prodit	11460.	Residuum	216632.

Ad primum tres cyphrae accesserunt, ad secundum una, quae sunt à prodeunte removendae: vicissim ad tertium duae appositae, sunt etiam ad

³²) 632.

Quotientem apponendae: duabus igitur apposis, et quatuor remotis
formatur pars lateris majoris $114\frac{6}{10}$.¹

Pars lateris majoris 114.60.

216

Latus majus 622.00.

Basis aequicruri 507.40.

Semissis 253.70. Log. 137160.

Residuum ablato basis semisse 368.30. Log. 99886.

Latus minus 507.00. Log. 67924.

Latus medium 573.00. Log. 55687.

Residui manent duo Logarithmi 69236. 44199. ¹⁰

Duorum Elementorum anguli 30. G. 1'. 40. G. 0'.

Ergo totus angulus iste est 70. G. 1'.

Duo verò minores sunt Complementa Elemen-

torum scilicet 59. G. 59'. et 50. G. 0'.

Haec igitur de usu Chiliadis nostrae hâc vice sufficiant.

FINIS

NACHBERICHT

In seiner „Weltharmonik“ geht Kepler von der Voraussetzung aus, daß letzte Einsichten in das Gefüge des Kosmos nicht den induktiven Wissenschaften vergönnt seien, sondern der Geometrie, einer Geometrie freilich, die in naher Beziehung zur Metaphysik steht. Von „Grenzgebiet zwischen Mathematik und Metaphysik“ spricht er in einem Brief an Philipp Müller (Bd. XVIII, S. 101) und bekennt von sich, daß er darin tiefere Befriedigung finde als in der „abstrakten Mathematik“, ja selbst als in der Astronomie. Dieselbe Unterscheidung macht er in der „Weltharmonik“ (Bd. VI, S. 279), wenn er von der „abstrakten Geometrie“ im Gegensatz zu der „in der physischen Welt ausgedrückten Geometrie“ spricht und seine Vorliebe für die letztere mit der Stellung des Planeten Jupiter in seiner Nativität begründet.

Da die Schriften dieses Bandes in ihrer Gesamtheit der „abstrakten Mathematik“ zuzurechnen sind, so wäre an sich keine Veranlassung gewesen, hier auf den Dualismus von Seinsmathematik und Zweckmathematik hinzuweisen, wenn nicht aus diesem Dualismus Keplers ablehnende Haltung der Algebra oder Coss, speziell der Gleichungslehre gegenüber, entspringen würde. Der wichtigste Fortschritt der Mathematik gelingt nämlich am Ende des 16. Jahrhunderts durch François Viète auf dem Gebiet der Algebra durch Einführung der Buchstabenrechnung und deren Anwendung auf geometrische Probleme. Kepler war durch Jost Bürgi und Adriaen van Roomen mit der Buchstabenalgebra von Viète bekannt geworden und konnte sie daher für seine stereometrischen Schriften nutzbar machen. Daß er es zum Schaden für diese nicht getan hat, liegt vor allem an seinen seinsmathematischen Bedenken gegen die neue Methode.

Existenz, potentielle und aktuelle, kommt in der Seinsgeometrie nur solchen Gebilden zu, die wirklich konstruierbar sind; was nicht konstruierbar ist, wie etwa das reguläre Siebeneck, das weder vom menschlichen noch von dem allwissenden Geist in einem einfachen, ewigen Akt gewußt werden kann (Bd. VI, S. 55), ist für Kepler ein „Nicht-Ding“. Im Widerspruch dazu stellen die Cossisten eine Gleichung für die Siebeneckseite auf, setzen sie dabei als existent voraus, obgleich sie keine allgemeine, streng gültige, sondern nur eine Näherungslösung der Gleichung zu haben vermögen, machen sich also einer *petitio principii* schuldig. Dieses Bedenken verbietet es Kepler, der selber die regulären Vielecke, entsprechend Euklid X, nach dem Grad der Irrationalität, d. h. doch: algebraisch klassifiziert (Th. Peters: *Jo. Kepleri Harmonices Mundi Liber I*. Berlin 1940, S. 22 f.), die Äquivalenz der algebraischen und der geometrischen Lösung anzuerkennen. Da die Algebra „die begrifflichen Unterschiede der geometrischen Dinge gänzlich außer acht läßt“ (Bd. VI, S. 15), kommt ihr lediglich der Rang einer Näherungsanalyse zu; sie eignet sich für „Warenrechnungen“, aber nicht für die Erklärung des Wesens der geometrischen Dinge. Man könnte seine Urteile häufen: Die Cossisten sind Leute, „die durch Zahlen, d. h. durch Aussprechen das Unaussprechbare quälen“ (Bd. VI,

S. 18f.); „die cossischen Dreiteilungen, Fünfteilungen u. s. f. eines Winkels sind nicht wissenschaftlich“ (Brief an Schickard, Bd. XVII, S. 258); in der „Messekunst Archimedis“ (S. 147) bringt er den Näherungscharakter cossischer Lösungen bildhaft zum Ausdruck: „Die Cossa, welche vns den weg weiset, wie einem blinden sein führer, oder zwo enge wände in der finstere: wann ich den Kopff zur lincken anstoße, so weiß ich, das ich mich zur rechten wenden soll, den weg aber sehe ich nicht, kan auch das rechte mittel von mir selber nicht treffen“.

Es ist danach nicht verwunderlich, wenn die Coss in den stereometrischen Schriften, die das fruchtbarste Feld dafür gewesen wären, nur gelegentlich und ganz am Rande zur Geltung kommen kann, so, wenn Kepler (S. 112) in Worten die Gleichung 3. Grades für die Höhe des Kegelstumpfes aufstellt, welcher bei gegebenem Verhältnis der Grundkreisdurchmesser mit einem gegebenen Zylinder gleicher Visierlänge inhaltsgleich werden soll, aber gleich die Bemerkung anfügt: „Nach solchen Gleichungen suchen die Cossisten immer noch in der Geometrie, werden sie aber, soweit ich urteilen kann, nie finden.“ Was den Vieta-Schüler Alexander Anderson veranlaßt zu zeigen, daß die Keplersche Gleichung 3. Grades einer einfachen geometrischen Deutung fähig ist (vgl. Anm. 111. 22). Selbst wenn dieser Nachweis Kepler zu Gesicht gekommen wäre und sein abschätziges Urteil über die Coss erschüttert hätte, so wäre dadurch nichts an der Tatsache geändert worden, daß die „Stereometria Doliorum“, sein mathematisches Hauptwerk, noch mit dem schwerfälligen Apparat der antiken Mathematik arbeitet, den er zwar virtuos handhabt, der ihm aber trotzdem oft vorzeitig Schranken setzt, wenn er ihn nicht gar vom rechten Weg abführt. Allerdings, das ist zuzugeben, liegt auch ein gewisser Reiz darin, zu sehen, wie Kepler mit archimedischen Hilfsmitteln über Archimedes hinausgreift.

A. DIE STEREOMETRISCHEN SCHRIFTEN

Kepler hat zwei Schriften zur Stereometrie im Druck ausgehen lassen: Die „Stereometria Doliorum“ und die „Messekunst Archimedis“. Der Original-Titel der lateinischen Schrift ist auf S. 7, der der deutschen auf S. 137 als Faksimile wiedergegeben. In dem sog. Grazer Katalog, einem von Kepler selbst (für Guldin) nach dem Gedächtnis geschriebenen Verzeichnis seiner Werke bis 1622, lauten die Titel „Stereometria seu supplementum Archimedis“ und „Messekunst auff Solida, vnd von Müntz“. Im Einklang damit werden wir die beiden Schriften im folgenden kurz als „Stereometria“ bzw. „Messekunst“ bezeichnen. Interessant ist aber, daß in Keplers Erinnerung die doliometrische Absicht hinter den Untersuchungen zur allgemeinen Stereometrie zurückgetreten zu sein scheint, weshalb auch wir lieber von Stereometrie als von Doliometrie reden. Weiter aber verraten alle Titel, die vollständigen und die gekürzten, daß Kepler seine Arbeit an den nahezu 2000 Jahre zurückliegenden Archimedes anknüpft, so als ob in der Zwischenzeit die Stereometrie völlig

brach gelegen wäre. Das stimmt objektiv nicht. Während nämlich Archimedes die Stereometrie um die Berechnung von Rotationskörpern 2. Grades (Kugel, Sphäroid, Konoid) bereicherte, steht in den dem Ende des 3. Jahrhunderts n. Chr. angehörenden „Collectiones“ von Pappus (im 7. Buch, ed. Hultsch pag. 682/83) ein Satz über die Inhaltsberechnung von Rotationskörpern beliebiger Gestalt, der in freier Übersetzung lautet: „Rotationskörper verhalten sich zueinander wie die jeweiligen Produkte der Flächen der rotierenden Figuren in die Abstände ihrer Schwerpunkte von der Rotationsaxe.“ Unschwer erkennt man darin die erst nach Kepler gefundene Guldinsche Regel, weshalb Hultsch zunächst die Echtheit des Pappus'schen Satzes anzweifelte. So wenig dieser Zweifel begründet war, als so sicher hat zu gelten, daß Guldin seine Regel selbständig fand; und ebenso sicher ist, daß Kepler, der die Pappusausgabe des Commandino von 1588 benützt hat, über die Stelle weggelesen hat, obgleich ihn der mehrfach vorkommende Ausdruck „Figurae rotatione genitae“ hätte aufmerksam machen können. In seinem Bewußtsein war daher Archimedes der letzte, der die Stereometrie um wesentliche Erkenntnisse und Methoden bereichert hatte, so daß für ihn der Stand dieser geometrischen Disziplin als archimedisch charakterisiert war.

Die Aufgabe jedoch, die er sich gestellt hatte, die Inhaltsberechnung von Fässern, drängte ihn über den griechischen Meister hinaus, wenn er weder bei den gröberen Annäherungen der Faßformen durch einen Zylinder oder einen gedoppelten Kegelstumpf, noch bei der feineren, von ihm aber als unzulässig erkannten, durch ein beiderseits gekapptes Sphäroid stehen bleiben wollte. Keplers erfolgreicher Angriff auf die bisher von Archimedes gehaltene Grenze wirkte irgendwie befreiend: Die Stereometrie wurde plötzlich wieder zu einem hoffnungsvollen und aktuellen Thema, das seinerseits starke Impulse an andere mathematische Disziplinen weitergab. Guldin, Cavalieri, Torricelli, Gregorius a St. Vincentio, Anderson u. a. greifen, direkt oder indirekt von Kepler angeregt, raumkörperliche Probleme auf.

Nach dem Wortlaut des Titels könnte es scheinen, als ob die „Messekunst“ lediglich ein Auszug aus der „Stereometria“ wäre, für Praktiker, denen mathematische Beweise nicht zugemutet werden durften, verständlich dargestellt, mit zahlreichen durchgerechneten Beispielen und durch einen Anhang über Maße und Münzen erweitert. Diese Auffassung ist so verbreitet, daß die „Messekunst“ allenfalls als Versuch zur Bildung einer deutschen mathematischen Fachsprache, kaum aber als eigener Beitrag zur Stereometrie gewürdigt wird; sie geht jedoch merklich an dem tatsächlichen Verhältnis der beiden Schriften zueinander vorbei. Vor allem ist zu bemerken, daß die „Messekunst“ an einer besonders wichtigen Stelle die Problemstellung der „Stereometria“ zu Ende führt. Davon wird jedoch an späterer Stelle zu reden sein. Trotzdem bleibt es aber richtig, daß der mathematische Inhalt der „Messekunst“ in der Hauptsache einen Teil der „Stereometria“ ausmacht und daher kürzer erledigt werden kann. Unlösbar ineinander verkoppelt sind aber die Entstehungsgeschichten der beiden Schriften.

ENTSTEHUNGSGESCHICHTE

Den Anstoß für Kepler, sich um die rechnerische Bestimmung von Faßinhalten zu kümmern und sich damit auf das Gebiet der ihm weniger gelegenen abstrakten Geometrie zu begeben, bildet ein zufälliges Ereignis, über das wir am besten mit seinen eigenen Worten in der „Epistola dedicatoria“ (S. 9) berichten. „Es war im vergangenen November [1613]. Ich hatte eben eine neue Gattin heimgeführt, Österreich schickte nach einem ebenso reichen wie guten Weinherbst eine Menge Lastschiffe die Donau herauf, um seinen Reichtum mit unserem Noricum zu teilen, und das ganze Linzer Ufer bot ein Bild, als wäre es zugebaut mit Weinfässern, die für einen annehmbaren Preis zu kaufen waren. Da fühlte ich mich als Gatte und guter Familienvater verpflichtet, für mein Haus nach dem nötigen Getränk Ausschau zu halten. Ich ließ mir daher etliche Fässer ins Haus bringen und einkellern. Vier Tage danach kam der Verkäufer mit einer Meßrute, einer einzigen nur, mit der er von allen Fässern samt und sonders der Reihe nach, ohne Unterschied, ohne Rücksicht auf die geometrische Gestalt, ohne weitere Überlegung oder Rechnung den Inhalt ermittelte. Er schob einfach die metallene Spitze der Rute durch das Spundloch des Fasses schräg hinein bis zur tiefsten Stelle des einen und dann des anderen kreisförmigen Holzdeckels, die in der Umgangssprache Böden heißen. Erwies sich die Länge vom höchsten Punkt des Bauches bis zum tiefsten der kreisrunden Bretter beiderseits als gleich, so gab er nach der Zahlenmarke, die der Rute am Ende der gemessenen Länge aufgeprägt war, die Zahl der Eimer an, die das Faß halten sollte. Nach dieser Zahl wurde die Höhe des Preises errechnet.“

Zum erstenmal begegnet hier Kepler der Meßrute und einem Meßverfahren, das als „Visierkunst“ mindestens schon seit dem 14. Jahrhundert in Übung und, der Zahl der „Visierbüchlein“ nach zu schließen, ziemlich verbreitet war.¹ Dem Staunen über die Einfachheit des Verfahrens folgt sofort der Zweifel an der Zuverlässigkeit; ganz unglaublich will es ihm vor allem scheinen, daß ein und dieselbe Rute mit einer einzigen Skala die Inhalte von Fässern verschiedener Bauart richtig angeben solle. Den Zweifel kann nur die Stereometrie beheben, die Lösung der Aufgabe, den Inhalt eines kreisrunden Fasses mit gegebenen Abmessungen rechnerisch zu ermitteln. Von dieser Seite her nimmt denn auch Kepler seine Arbeit in Angriff. Schon am 17. Dezember

¹ Zur Geschichte der Visierkunst vgl. man vor allem G. Sarton: Introduction to the history of science III, 2, pagg. 1112, 1318 u. 1518; ferner Thorndike: „Visierkunst, Ars visorandi, or Stereometry“ in Isis 40 (1949) pag. 106 f. Danach stammt die erste bekannte Beschreibung der Visierrute (in deutscher Sprache) von dem Nürnberger Patrizier Ulman Stromer (1329–1407). Ihr folgt eine Reihe lateinischer Traktate. Das erste gedruckte Schriftchen ist das „Fisierbüchlein auf allerhand Eich“, Regensburg 1485. Die im 16. Jahrhundert erschienenen Anleitungen zur Visierkunst haben zum Teil bekannte Verfasser wie Jakob Köbel, Heinrich Grammateus, Erhart Helm, Peter Apian. Bei allen diesen Schriften handelt es sich lediglich um kurze, praktische Anweisungen zu Herstellung und Gebrauch eines Visierstabes, von denen sich Keplers Behandlung des Problems grundlegend unterscheidet.

glaubt er damit am Ziel zu sein; an diesem Tag schreibt er nämlich die Widmung an Fürst Maximilian von Liechtenstein und Freiherr Helmhard Jörger, denen er das Manuskript von knappen 6 Seiten (Brief an Mästlin vom 5. Mai 1616; Bd. XVII, S. 170) mit etwa 10 Theoremen (S. 133) als Neujahrsgabe zueignet. Er denkt auch an den Druck des kleinen Schriftchens, das sich äußerlich im Rahmen der Visierbüchlein hält, und schickt es zu diesem Zweck um den 1. Februar nach Augsburg an Markus Welser, den Spiritus Rector der Verlagsgesellschaft „Ad insigne pinus“. Zum Glück für Kepler, dem das Büchlein wenig Ehre gemacht hätte, mißlingt jedoch der Plan. Am 11. Februar antwortet nämlich Welser (Bd. XVII, S. 103): „Eure Faßrechnung habe ich dieser Tage richtig erhalten und wegen der Herausgabe sofort mit unserem Buchhändler Krüger verhandelt. Auf keine Weise gelang es mir jedoch, ihn dazu zu bringen, den Verlag auf seine Kosten zu übernehmen. Obschon er zugeben mußte, daß der Name Kepler bei allen wissenschaftlich Gebildeten in Gunst und hohem Ansehen stehe, so behauptete er doch, der Gegenstand des Buches finde keinen Anklang und scheine ihm nicht verkäuflich, zumal in lateinischer Sprache.“ Auf den Vorschlag Welsers, das Werkchen auf Kosten des Autors zu drucken, geht Krüger jedoch ein und verspricht, sich mit einem Buchdrucker in Verbindung zu setzen. Ehe indes Kepler weiter von der Sache hört, stirbt Welser am 23. Juni 1614. Das Manuskript ruht nun an die 16 Monate bei Krüger und wäre wohl auch bei Kepler allmählich in Vergessenheit geraten, wenn er nicht plötzlich eine Arbeit für einen Drucker gebraucht hätte.

Von Erfurt her kommend war im Frühjahr 1615 der Buchdrucker Hans Blanck (Plank) nach dem bis dahin druckerlosen Linz gekommen und hatte seine Dienste angeboten (vgl. Gutenberg-Jahrbuch 1935, S. 243 f.). Am lebhaftesten befürwortete Kepler seine Aufnahme, an ihm blieb deshalb auch die Verpflichtung hängen, dem unbemittelten Drucker einen ersten Auftrag zu verschaffen. In dieser Situation erinnerte er sich seines immer noch in Augsburg liegenden Manuskriptes und forderte es zurück. Mit viel Mühe erhält er es Ende Mai (1615), ist nun aber selbst sehr enttäuscht davon. Abgesehen davon, daß es ihm zu kümmerlich erscheint, entdeckt er darin einen verhängnisvollen Fehler, der ihn, „obgleich in großer Arbeitsnot“, zu einer völligen Neufundierung seiner Arbeit zwingt. Dabei wächst allein die „Stereometria Archimedeae“ beträchtlich über den Umfang des ersten Entwurfs hinaus, das „Supplementum ad Archimedem“ kommt neu hinzu; ebenso der ganze 2. Teil mit den Maximumsbetrachtungen in konjugierten und assoziierten Kegelstumpfscharen, aus denen die Berechtigung des Meßbrutenverfahrens beim österreichischen Faß hervorgeht. Am Ende ist es gerade noch die Widmung an die Patrone, welche die neue Arbeit mit der alten gemeinsam hat, und das alles sei „der Bequemlichkeit einer am Ort ansässigen Druckerei“ zu danken, bemerkt Kepler mit Recht (S. 86). Die Kehrseite davon, allerdings bedingt durch die besonderen Umstände, ist die große Eile, mit der er zu arbeiten gezwungen war: Am 15. Juli, also in der unglaublich kurzen Zeit von 6 Wochen, ist die

Arbeit getan; zu diesem Zeitpunkt müssen bereits einige Bogen gedruckt gewesen sein, denn das fertige Buch, die „Stereometria Doliorum“, ist auf der Frankfurter Herbstmesse 1615 zu kaufen. Der Druck ist auffallend sorgfältig ausgeführt; die verhältnismäßig wenigen Fehler, die in dem schwierigen Satz stehengeblieben sind, sind auf einem besonderen Blatt „Errata“ korrigiert.

Die Stände von Oberösterreich, Keplers Brotgeber, sahen nicht gut zu seiner Beschäftigung mit der Doliometrie. Es wurde ihm bedeutet, daß die Löblichen Stände es viel lieber sehen würden, wenn er „dergleichen arbaitt einstellen, vnd die wüchtigere sachen, darauff er fürnemlich bestellt seye, als die Tabulas Rudolphinas vnd die Landmappam zu völligem werckh richten“ würde (Bd. XVII, S. 173). Trotzdem legt er sein Thema nach der Vollendung der „Stereometria“ nicht beiseite, sondern beginnt sofort mit einer Umarbeitung des Werkes für die Leute, die weder der lateinischen Sprache noch der subtilen mathematischen Überlegungen mächtig waren, aber beruflich, amtlich oder gelegentlich als Dilettanten mit dem Maßwesen zu tun hatten, denen es dabei aber nur auf Ergebnisse, nicht auf Beweise und Herleitungen ankam. Sicherlich klingt dabei der Einwand des Augsburger Buchhändlers nach, daß ein lateinischer Traktat nicht verkäuflich sei. Die Arbeit an diesem deutschen Werk, der „Messekunst Archimedis“, nimmt verhältnismäßig viel Zeit in Anspruch. Erst nach 5 Monaten, um Weihnachten 1615, ist sie fertig; die Widmung an die Stände trägt das Datum 1. Jan. 1616. Alles in allem, sagt Kepler in einem Brief an Mästlin (Bd. XVII, S. 170), habe er sich 9 Monate bei der Stereometrie aufgehalten. Zur Frühjahrsmesse ist die „Messekunst“ in Frankfurt. Der Drucker ist wieder Hans Blanck, der nach wie vor auf Beschäftigung durch Kepler angewiesen ist, was dieser nicht ungern den Ständen gegenüber zu seiner Entschuldigung ins Feld führt: „... dise arbaitt mit der Messekunst ... ist auch sonderlich vnder anderm dahin angesehen gewesen, das Ich dem druckher mit einer materia popularj auffhelffe, vnd Ine hernach zu anderen meinen werckhen zur hand haben möge“ (Bd. XVII, S. 173).

In beiden Fällen muß Kepler die Kosten des Druckes selbst tragen, sogar den zu mageren Typenapparat Blancks durch Zukauf ergänzen. Von der „Messekunst“ sagt er, daß ihm „Uncosten biß in 250 fl.“ entstanden seien, beim lateinischen Traktat dürften sie sich in derselben Höhe bewegen, obwohl er einen Bogen weniger hat; dafür müssen aber die Figuren in Rechnung gestellt werden. Über Auflage, Verkaufspreis und Vertrieb, der zweifellos einem Buchhändler übertragen war, ist nichts bekannt. Rasch werden die beiden Bücher keinesfalls abgegangen sein; ein Einzelfall aus dem deutschen Nordosten läßt eher das Gegenteil befürchten. Kepler hatte dem Danziger Mathematiker Crüger ein Exemplar der „Stereometria“ dediziert mit der Bitte, für sein Werk zu werben. Crüger antwortet (Brief vom 31. März 1616; Bd. XVII, S. 158 f.), daß außer ihm nur sein Königsberger Kollege, die Königsberger Bibliothek und ein preußischer Adeliger namens Niewieschinsky als Käufer in Betracht kommen. Trotzdem kommt Kepler durch Honorare anscheinend gut

auf seine Rechnung. Am 17. Juni 1616 schreibt er nämlich an Crüger zurück (Bd. XVII, S. 179): „Ihr gebt mir zu verstehen, daß keine Aussicht bestehe, Exemplare abzusetzen. Das schadet aber gar nicht, ich hatte diese Angelegenheit überhaupt schon vergessen. Für die Österreicher habe ich geschrieben; sie haben bereits bezahlt und werden noch etwas mehr bezahlen.“ Die Stände von Oberösterreich, denen die „Messekunst“ gewidmet ist, lassen Kepler allein schon eine „Verehrung“ von 150 fl. zukommen.

Obschon sich die Mathematiker des In- und Auslandes – Italien, Frankreich und England – durch die beiden stereometrischen Schriften, vorab natürlich die „Stereometria“, stark angesprochen fühlten, blieb es für jede bei der einen Linzer Erstausgabe. Schon im 18. Jahrhundert war es deshalb nicht ganz leicht, an die Bücher heranzukommen. A. G. Kästner konnte beispielsweise trotz aller Mühe kein Exemplar der „Stereometria“ für seine „Geschichte der Mathematik“ auffinden. Diese Schwierigkeit wurde erst durch die Gesamtausgabe der Werke Keplers von Chr. Frisch behoben („Stereometria“ Bd. IV, S. 551–665, „Messekunst“ Bd. V, S. 495–616). In der Sammlung „Oswalds Klassiker“ erschien danach als Nr. 165 (Leipzig 1908) eine deutsche Übersetzung der „Stereometria“ von R. Klug, jedoch ohne die „Archimedische Stereometrie“ und die vier ersten, kleineren Kapitel des dritten Teiles. Diese kommentierte Übersetzung hat zweifellos zur Beschäftigung mit der Doliometrie Keplers angeregt, um so bedenklicher sind die zahlreichen groben Übersetzungsfehler, die anscheinend noch kaum bemerkt wurden, denn selbst H. Wieleitner, dem wir die bisher ausführlichste Studie über die „Stereometria“ verdanken,¹ bezeichnet die Arbeit Klugs „im ganzen als gut“. Die Folge dieser allzu guten Meinung ist, daß er sich selbst wiederholt durch Falschübersetzungen irreführen ließ. In den Anmerkungen wird auf solche Stellen aufmerksam zu machen sein.

Dem Verständnis bot die „Stereometria“ mit ihren neuartigen Gedanken große Schwierigkeiten. Die Keplersche Methode der Integration eines Apfelförpers durch Umwandlung in einen Zylinderhuf ging weder Anderson ein, noch Guldin, welch letzterer meint, daß er sich nicht Kopf und Hirn habe zerbrechen wollen, um der Sache auf den Grund zu kommen; der zweite Teil mit den Überlegungen über die Maximaleigenschaft des österreichischen Fasses wird von keinem der beiden gewürdigt. Briggs entschuldigt das mangelnde Verständnis mit der zu großen Breite von Keplers Gedankengängen, die nachzudenken er keine Zeit habe (Brief vom 20. Febr. 1625; Bd. XVIII, S. 221). Aber auch Wieleitner, ein in der Geschichte der Mathematik erfahrener Mann, klagt am Ende der erwähnten Studie von 1930, daß er die Sache viel schwieriger gefunden habe, als er anfangs dachte. Natürlich liegt die Schwierigkeit für den modernen Mathematiker an anderer Stelle als für die Zeitgenossen

¹ In 2 Teilen erschienen, der erste unter dem Titel: „Keplers Archimedische Stereometrie“ in: *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaft* 36 (1930), S. 176–185; der zweite mit dem Titel: „Über Keplers Neue Stereometrie der Fässer“ in: „Kepler-Festschrift“, Regensburg 1930, S. 279–313.

Keplers. Dem Heutigen macht das vollständige Fehlen algebraischer Symbolik und das Ungewohnte der Wortgleichungen hauptsächlich zu schaffen. Es erfordert in der Tat erheblichen geistigen Aufwand, um sowohl die einzelnen Theoreme mit ihren Beweisen als auch den Gang der Untersuchung zu durchschauen.

Um solche Schwierigkeiten, entsprechend der Absicht der Nachberichte, dem Leser aus dem Weg zu räumen, und zugleich auch den des Latein nicht oder nicht genügend kundigen Lesern die Möglichkeit zu geben, sich kurz über die ganze Schrift zu orientieren, wird nachfolgend eine Inhaltsanalyse gegeben, die der Reihe der Theoreme folgt und sich zugleich vielfach moderner Symbolik bedient, um auf diese Weise den straffen Gang der Untersuchung mit möglichster Klarheit herauszuarbeiten. Dies ist beim 2. Teil unumgänglich, wenn endlich Keplers Absicht ganz verstanden werden soll. Einzelheiten, die einer Erklärung, Berichtigung oder Hervorhebung bedürfen, ferner historische und literarische Hinweise sind in den Anmerkungen zu finden; die betreffenden Stellen sind im Text durch ein Kreuz gekennzeichnet.

Keinem Werk Keplers begegnet man in der Literatur so oft wie der „Stereometria“. Es konnte deshalb nicht die Aufgabe des Herausgebers sein, allen diesen Fäden nachzugehen. Nur die früheste Literatur wurde in den Anmerkungen ausgiebig herangezogen, vielfach sogar wörtlich zitiert, um die unmittelbare Reaktion auf Keplers Gedanken sichtbar zu machen. Von der neuen Literatur wurde nur der ausführliche Kommentar Wieleitners kritisch gewürdigt, da er das Urteil über Keplers Arbeit in der jüngsten Zeit bestimmt hat.

AUFBAU UND INHALT

1. STEREOMETRIA DOLIORUM

Das Werk besteht aus 3 Teilen, denen eine Widmung und ein Vorwort vorausgeschickt sind. Teil I und II haben die bei mathematischen Werken übliche Form der Aufgliederung in Theoreme, die nach Bedarf durch Corollare (Folgesätze), Episagmen (Zusätze)¹ und Analogien erweitert werden; nur Teil III hat lediglich 5 Kapitel mit Einzelüberschriften. Innerhalb von Teil I bilden die durchlaufend numerierten Theoreme zwei getrennte Abschnitte, die durch die Verschiedenheit der Seitentitel schon äußerlich als solche gekennzeichnet sind. Danach ergibt sich folgendes Aufbauschema:

Widmungsschreiben (Epistola Dedicatoria) an Fürst Maximilian von Liechtenstein und Freiherr Helmhard Jörgen.

Vorwort (Praeambulum) „Über die zweckmäßige Gestalt eines Weinfasses“.

¹ Das Wort Episagma kommt bei Kepler sonst nicht vor. Archimedes hat in „De Conoidibus et Sphaeroidibus“ vereinzelt „Theoremata et Epitigmata“ (Heiberg, ed. altera I, 259). „Epitagma“ hat jedoch den Sinn von Nachdruck, Eindringlichkeit.

Teil I. „Stereometrie der regulären krummen Körper“.

[A]. „Archimedische Stereometrie“. Theorem 1–17.

„Apostrophe (Zwischenbemerkung) an die Patrone“ Liechtenstein und Jörger.

[B]. „Ergänzung zu Archimedes. Stereometrie der den Konoiden und Sphäroiden nächstfolgenden Körper“. Theorem 18–30. Eingeleitet wird dieser Abschnitt durch 3 Kapitel über Kegelschnitte, über die durch Rotation eines Kreises je nach der Lage der Rotationsachse zur Kreisfigur entstehenden Ringkörper, und über die Körper, die durch Rotation der übrigen Kegelschnitte entstehen. In Theorem 18–22 folgt die Berechnung der Ringe, des „Apfels“ und der „Zitrone“ bzw. der ihnen verwandten Körper, wenn der Kreis durch die Ellipse ersetzt wird. In Theorem 23–30 werden die parabolischen und hyperbolischen „Spindeln“ behandelt. Da die direkte Berechnung nicht gelingt, werden nur Größenbeziehungen hergestellt. Bei allen diesen Körpern werden auch die faßähnlichen Segmente der Betrachtung unterworfen.

Teil II. „Stereometrie des österreichischen Fasses im besonderen“.

Nach einem einleitenden Kapitel über die beste geometrische Annäherung an die Form des österreichischen Fasses wird weiterhin mit dem doppelten Kegelstumpf als Modell operiert. Unter Zugrundelegung dieser Form wird in 29 durchlaufenden Theoremen die Abhängigkeit des Faßinhaltes bei fester Visierlänge von zwei Verhältnissen, dem der Daubenlänge zum Durchmesser des Bodens und dem des größten Durchmessers am Bauch zum kleinsten am Boden, eingehend durchdiskutiert mit dem Ziel, die Maximaleigenschaft des österreichischen Fasses zu beweisen.

Teil III. „Anwendung des ganzen Buches auf die Fässer“.

Während in den 4 ersten Kapiteln die nun spruchreife Frage der Anwendbarkeit der Meßbrute und die Anwendung selbst besprochen wird, macht das 5. Kapitel den ersten, mißlungenen Versuch, bei einem nicht mehr vollen Faß das Verhältnis des Flüssigkeitsinhaltes zum leeren Raum rechnerisch zu ermitteln.

Nach dieser Übersicht wenden wir uns der Inhaltsanalyse im einzelnen zu. Das Widmungsschreiben für seine zwei Patrone, Maximilian von Liechtenstein und Helmhard Jörger, denen Kepler vor anderen seine Anstellung in Linz verdankte, trägt das Datum 17. Dez. 1613. Es ist danach das einzige Stück, das aus dem sonst völlig beiseite gelegten ersten Entwurf in die „Stereometria“ übernommen wurde. Es bedarf unter den veränderten Umständen einer Berichtigung und Ergänzung, die in der „Apostrophe ad Patronos“ (S. 36) gegeben wird. Darin erklärt Kepler die Verzögerung des Druckes, er begründet die Umarbeitung des ursprünglichen Manuskripts, das den Herren bereits vorgelegen hatte, und bittet, da die beiden auch Vorgesetzte von ihm sind, um Nachsicht dafür, daß er seine Zeit zu anderen Arbeiten als den ihm

aufgetragenen verwendet habe. „Ich bereue aber das Opfer nicht“, fügt er hinzu, „denn es ist ja ganz unmöglich, daß eine Arbeit, wenn sie sich keine Zeit kosten ließ, den Preis der Unsterblichkeit davonträgt“.

Im Vorwort begründet Kepler die Vorteile des kreisrunden, jedoch nicht zylinderförmigen Fasses, und schließt: „Da die Weinfässer an den regulären Figuren Kreis, Kegel und Zylinder Anteil haben, so sind sie schon bisher geometrischer Berechnung zugänglich nach den von Archimedes entwickelten Prinzipien, die deshalb wert sind, an den Anfang dieser Untersuchung gestellt zu werden; freilich nur in dem Umfang, wie es zur Erlustigung des Gemütes eines Liebhabers der Geometrie hinreicht. Die strengen und bis ins Kleinste durchgearbeiteten Beweise möge man nämlich in den Büchern von Archimedes selbst nachlesen, wenn man nicht vor der dornenvollen Lektüre zurückschreckt. Bei gewissen Partien, an die Archimedes nicht gerührt hat, sei mir jedoch ein längeres Verweilen gestattet, damit auch die gelehrteren Leute etwas finden, wovon sie Förderung und Ergötzung haben“ (S. 13).

So, wie hier angekündigt, wird die als 1. Abschnitt von Teil I folgende „Archimedische Stereometrie“ vorgetragen. Zwar werden in den Theoremen und Episagmen die Archimedischen Sätze über Kreis, Kegel, Kugel, Sphäroid, parabolisches und hyperbolisches Konoid ziemlich vollständig zusammengestellt, aber die Beweise zu den Theoremen – bei den Episagmen wird grundsätzlich darauf verzichtet und statt dessen auf Archimedes selbst verwiesen – sind nicht archimedisch. Ausdrücklich wird das nochmals bei Theorem XIV (S. 27) betont: „Ich habe nicht die Absicht, den ganzen Archimedes abzuschreiben“. Was dieser bewiesen hat, wird als unumstößlich richtig akzeptiert; Kepler sieht seine Aufgabe darin, die Wahrheit des Theorems, vielleicht auch die Beweismethode eingängiger zu machen.

Dieses Verfahren ist nicht mehr anwendbar bei den 3 letzten Theoremen XV–XVII dieses Abschnitts, „an die Archimedes nicht gerührt hat“, die Kepler also selbst gefunden hat und deshalb mit strengem Beweis einführen muß. In Theor. XV stellt er fest, daß die zwei Kugelsegmente, in die eine Kugel durch eine schneidende Ebene zerfällt, gewissen Rechtecken proportional sind, während Archimedes Proportionalität mit 2 Kegeln bewiesen hatte. Theor. XVI umfaßt einige Sätze über die durch Schnitt eines geraden Kreiskegels mit einer zur Achse senkrechten oder schrägen Ebene entstehenden Teilkörper. Im ersteren Fall des geraden Kegelstumpfs gelingt ihm dabei „ein sehr schönes Theorem“ über das Verhältnis des ganzen Stumpfs zu der über den inneren Zylinder hinausragenden „Tunica“ (S. 32), dessen noch schönerer Beweis erst im Anschluß an Theor. XXII gegeben werden kann. In Theor. XVII wird der Kegel durch einen Kreiszylinder ersetzt und, abgesehen von dem Verhältnis der „Tunica“ zu dem zwischen „Tunica“ und äußerem Zylinder des Kegelstumpfes liegenden „Restlimbus“, vor allem das Problem der Inhaltsberechnung eines Zylinderhufs in Angriff genommen, des für das Folgende wichtigen Körpers, der entsteht, wenn der gerade Kreiszylinder von einer Ebene so getroffen wird, daß

sie einen der beiden Grundkreise zerschneidet. Kepler konnte nicht wissen, daß Archimedes diese Aufgabe in der „Methodus“ („Εὑρηστικός“) genannten Schrift, die erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts von Heiberg in einem Palimpsest wiederentdeckt wurde (Opera, ed. Heiberg, Bd. II, S. 484–507), als Prop. 11 bereits in Angriff genommen und für den Fall, daß der Grundkreis vom Durchmesser d von der schneidenden Ebene halbiert wird und der Huf die Höhe d hat, seinen Inhalt zu $\frac{d^3}{6}$ bestimmt hatte. In Übereinstimmung damit findet Kepler das Verhältnis desselben Hufs beliebiger Höhe zu dem des gleichhohen Zylinders als $H : Z = 7 : 33 = 2 : 3\pi$, und entsprechend das Verhältnis von H zu dem Rest R des halben Zylinders $H : R = 14 : 19 = 4 : (3\pi - 4)$.

Nicht diese paar Eigentheoreme Keplers sind es aber, welche die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf die an sich gar nicht aufregende „Stereometria Archimedeae“ gezogen haben, sondern die am Beginn dieses Abschnittes stehenden uralten Sätze über die Kreismessung, genauer gesagt: Keplers Kommentar zu dem Satz von Archimedes (Prop. 1 der „Kreismessung“), daß die Fläche des Kreises gleich sei der Fläche des rechtwinkligen Dreiecks, dessen kleinere Kathete dem Halbmesser des Kreises, die größere dem Umfang des Kreises gleich ist. Denn ein Beweis will die unzulängliche Infinitesimalbetrachtung nicht sein, sie setzt vielmehr den Satz, der bezeichnenderweise gar nicht als eigenes Theorem erscheint, als bewiesen voraus. Aber die Art, wie Archimedes ihn beweist, indirekt, durch eine „deductio ad impossibile“, indem er nämlich zeigt, daß die Kreisfläche weder größer noch kleiner sein könne als die Fläche des besagten Dreiecks, scheint Kepler – und nicht nur Kepler – einer Erklärung zu bedürfen. Wie kommt Archimedes zu dem Dreieck als Vergleichsfläche? Und wenn diese Wahl, die sich zunächst als bloßer Kunstgriff ausnimmt, einsichtig gemacht ist, deutet sich dann nicht die Wendung vom indirekten zu einem direkten Beweis an?

Keplers Erklärung beginnt mit den Worten: „Archimedes benützt einen indirekten Beweis, der auf Unmögliches führt. Darüber haben viele vielerlei geäußert. Mir scheint der Sinn dieser zu sein.“ Wie schon im 40. Kapitel der „Astronomia Nova“ bei der Herleitung des Flächensatzes (Bd. III, S. 264) sieht er des Rätsels Lösung im Rückgang auf unendlich kleine Teile. Aus der beim Fehlen des begrifflichen Rüstzeugs ungenauen Beschreibung schält sich der Gedankengang so heraus: Die Kreislinie und die mit ihr gleichlange Kathete werden in gleich viele gleiche Teile geteilt, die Teilpunkte mit dem Kreismittelpunkt bzw. mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks verbunden (vgl. Figur II, S. 15). Da die Gleichheit von Kreisfläche und ganzer Dreiecksfläche nach Archimedes feststeht, so sind sich auch die Teile, Kreissektoren und Teildreiecke, gleich. Nun wäre es für Kepler ein leichtes, nach archimedischem Muster in jedem Sektor die Kreislinie einerseits durch die Sehne, andererseits durch die dazu parallele Tangente zu ersetzen, sowohl die kleineren wie die größeren Dreiecke zu je einem einzigen rechtwinkligen Dreieck zu summieren und zu zeigen, daß sich die beiden bei Vergrößerung der Zahl der Teile dem von Archimedes postulierten Dreieck von verschiedenen Seiten her

als gemeinsamer Grenze nähern. Statt dessen operiert er sofort mit unendlich kleinen Teilen, deren es ebensoviele gebe als der Kreis Punkte hat. Seine Sektoren schmelzen also zu Linien zusammen, die nach Belieben als Dreiecke oder Sektoren aufgefaßt werden können. Als Dreiecke haben sie alle gleiche Basis und gemeinsame Höhe, jedes einzelne ist daher gleich dem entsprechenden Teil des rechtwinkligen Dreiecks, schließlich also auch die Kreisfläche gleich dem rechtwinkligen Dreieck. Keplers Erklärung schließt mit den Worten: „Das bedeutet die archimedische Zurückführung auf Unmögliches“. Dieser Schluß ist nochmals die Bestätigung dafür, daß Kepler sein der nötigen Strenge entbehrendes Verfahren nicht als Beweis betrachtet hat, sondern nur als Versuch, den archimedischen Beweis durchsichtig zu machen.

Hält Kepler seine Infinitesimalmethode auch nicht für beweiskräftig, so hat er doch offensichtlich eine Freude an ihr. Noch zweimal verwendet er sie, beide Male wieder zur Bestätigung und Aufhellung feststehender Sätze von Archimedes. In Theor. IV (S. 19) wird der Satz über das Verhältnis des Zylinders zu dem Kegel gleicher Basis und Höhe aus dem entsprechenden Satz über Prisma und Pyramide hergeleitet, indem der gemeinsame Grundkreis von Zylinder und Kegel wie bei Theor. II vom Mittelpunkt aus in unendlich viele Sektoren bzw. Dreiecke aufgeteilt gedacht wird, die nun als Grundflächen von Elementarprismen bzw. -pyramiden dienen. In Theor. XI (S. 23 f.) bezieht sich Kepler zur Erläuterung des Satzes, daß sich das Volumen einer Kugel zu dem ihr umschriebenen Zylinder wie 2 zu 3 verhalte, direkt auf Theor. II: „Analog zu dem, was bei Theorem II gesagt wurde, enthält die Kugel potentiell unendlich viele Kegel, die mit ihren Spitzen im Mittelpunkt der Kugel zusammenstoßen, indes die Grundflächen, die durch Punkte repräsentiert werden, auf der Oberfläche aufliegen“, denn wie der Kreis hat auch die Kugeloberfläche „ebensoviele Teile wie Punkte, nämlich unendlich viele“. Da als Theor. X bereits bewiesen wurde, daß die Oberfläche der Kugel dem Mantel des umschriebenen Zylinders gleich sei, so wird nun ein Kegel gebildet, dessen Höhe der Radius, dessen Grundfläche ein Kreis von der Größe der Kugeloberfläche ist. Wie bei Theor. II wird sodann mit Hilfe der beiderseits gleichen Elementarkegel die Gleichheit der Inhalte von Kugel und Kegel demonstriert, woraus alles weitere leicht folgt.

Wie zur Probe versucht Kepler sein Theor. XI auf eine zweite Art zu erhellen, indem er Kugel und Zylinder in andere, direkt vergleichbare Formen transformiert. Bei der Kugel ist es die eben beschriebene Umwandlung in einen inhaltsgleichen Kegel; beim Zylinder ergibt sich die neue Form direkt aus Theor. II. So wie nach Archimedes der Kreis vom Halbmesser r dem rechtwinkligen Dreieck gleich ist, dessen Katheten r bzw. $2r\pi$ sind, so ist der Zylinder von der Höhe h inhaltsgleich dem über dem rechtwinkligen Dreieck stehenden dreiseitigen Prisma von der Höhe h , das auch als die Hälfte eines Quaders mit den Kanten r , $2r\pi$, h betrachtet werden kann, dessen Grundfläche mit den Seiten $2r\pi$ und h die Abwicklung des Zylindermantels ist. Dieser ist hinwiederum der Kugeloberfläche gleich. Es verhält sich daher

Zylinder zu Kugel wie $\frac{r}{2}$ zu $\frac{r}{3}$ oder wie 3 zu 2. Die Umwandlung des Zylinders in ein Prisma gleicher Höhe wird weiterhin eine wichtige Rolle spielen; auf ihr beruht nämlich Keplers Methode der Berechnung von Rotationskörpern, die das Hauptthema der nun folgenden „Ergänzung zu Archimedes“ bildet.

Die „Ergänzung zu Archimedes“ mit dem Untertitel „Stereometrie der den Konoiden und Sphäroiden nächstfolgenden Körper“ beginnt mit folgender Erklärung (S. 37): „Bis hierher kamen Archimedes und die alten Geometer bei ihren Studien über Wesen und Maße der geradlinigen und krummlinigen ordentlichen Figuren und über die Körper, welche von ihnen auf der nächstfolgenden Stufe erzeugt werden. Da sich indes die Faßfigur etwas weiter von den regulären Figuren entfernt, so glaubte ich lohnende Arbeit zu leisten, wenn ich, gleichsam auf einer einzigen Stammtafel zusammengefaßt, ihre und verwandter Figuren Entstehung sowie die Grade der Verwandtschaft mit den regulären Figuren vor Augen führe in der Absicht, einerseits die nachfolgenden Beweise durchsichtiger zu machen, andererseits aber auch den Arbeitseifer der Geometer unserer Zeit anzuspornen. Nachdem jetzt die Tore zu dem endlos weiten Feld der Geometrie aufgestoßen sind, möchte meine Arbeit Klarheit darüber schaffen, was darauf noch zu vervollkommen, was neu zu erforschen ist“.

Im Hintergrund der ganzen Untersuchung, die hier angekündigt wird, stehen immer die gebräuchlichen Formen der Weinfässer mit kreisrunden Böden. Das Ziel ist, diese Formen durch Rotationskörper von Kegelschnitten zu approximieren und dadurch der Berechnung zugänglich zu machen. Die Berechenbarkeit ist daher ein nicht minder wichtiger Gesichtspunkt als der Grad der Annäherung, den Kepler an sich durch hyperbolische Spindeln optimal verwirklicht sieht. Auf jeden Fall hat die Untersuchung mit den Kegelschnitten und den von ihnen erzeugten Rotationskörpern zu beginnen.

Der kurze Abschnitt über die Kegelschnitte (S. 37/38) ist im wesentlichen eine Wiederholung der schon im 4. Kap. der „Astronomiae pars Optica“ (Bd. II, S. 90 ff.) vorgetragenen Lehre. Auffallend ist, daß die Entartung in ein Geradenpaar hier nicht erwähnt wird und daß dementsprechend bei den Rotationskörpern der Doppelkegel fehlt. In einem vorausgehenden Entwurf (vgl. Anm. 46,34) hat aber der „Conus duplex“ noch seinen Platz.

Archimedes hatte nur Rotation um die Hauptachsen der Kegelschnitte in Betracht gezogen, Kepler aber macht sich frei von dieser Beschränkung. Für die geometrische Beschreibung der Faßformen muß er auch die Rotation um eine zur Hauptachse Parallele zulassen, und, obwohl er am Ende der Beschreibung der solcherweise zustande kommenden Rotationskörper erklärt (S. 43): „Für die Weinfässer hätte es genügt, die Körper soweit zu charakterisieren und zu unterscheiden“, so gibt er sich doch die Mühe, seine Betrachtung auf beliebige Lage und Richtung der Rotationsachse auszudehnen. Die Zahl der zu unterscheidenden Körper, die schon vorher bei 25 lag, schwillt jetzt bis gegen 100 an. War Archimedes mit den Bezeichnungen Zylinder, Kegel, Kugel,

Sphäroid und Konoid durchgekommen, so hat Kepler nun seine liebe Not mit den Namen, die er mit Vorliebe von Gebrauchsgegenständen und Früchten herholt.

Am einfachsten erledigt sich der Fall des um eine Achse rotierenden Kreises (S. 38 f.), da allein der Abstand der Drehachse vom Mittelpunkt zu berücksichtigen ist. Ist der Halbmesser r , der Abstand der Achse vom Mittelpunkt e , so ergibt $e > r$ den Kreisring (annulus), $e = r$ den geschlossenen Kreisring (annulus strictus), $e = 0$ die Kugel, während bei $e < r$ zwei Kreissegmente entstehen, von denen das größere den „Apfel“ (malum), das kleinere die „Zitrone“ (citrium) erzeugt. Für die übrigen Kegelschnitte: Ellipse, Parabel und Hyperbel, die in dem langen Kapitel „Von Zahl und Unterschieden der Körper“ (S. 39–47) abgehandelt werden, gibt das nachfolgende Schema eine Übersicht über die von Kepler verwendeten Merkmale und die zu jedem Merkmalspaar gehörige Zahl von Körpern, jedoch ohne die Namen, die der Leser selbst aus dem Text entnehmen kann:

Lage der Rotationsachse:	Richtung der Rotationsachse parallel zu:				Kreis
	Hauptachse	Nebenachse	Durchmesser	Tangente	
Durch den Mittelpunkt	3	1	6	—	1
Schneidet nicht	1	3	—	4	1
Berührt	1	3	—	4	1
Schneidet	6	6	16	33	2

Das sind also insgesamt 92 Arten von Rotationskörpern, die von den 4 Kegelschnitten Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel erzeugt werden. In den Pulk. Mss. (Bd. V, Bl. 44v) hat sich ein einfacheres, bereits erwähntes Schema der Klassifizierung der Rotationskörper von Kegelschnitten bzw. Kegelschnittsegmenten erhalten, in dem erst 31 Arten vorgesehen sind (Anm. 46.34). Kepler schließt das eigenartige Kapitel mit der Bemerkung: „Die Geometer mögen sich nun an den einzelnen Figuren versuchen nach dem Beispiel von Archimedes, der von ihnen nur 4 und als fünfte die Kugel der Betrachtung unterzogen hat. Nicht als ob sie die nützlichsten oder gemeinsten wären, denn was hat hier das parabolische Konoid voraus vor Ring, Apfel, Birne, Pflaume, Nuß, sondern weil sie sich als einfachste und der Kugel nächststehende dem denkenden Verstand anbieten. Ich werde für den Augenblick nur die Körper weiter betrachten, welche Zugang zu den hyperbolischen Spindeln eröffnen, deren Stümpfe die einheimischen Fässer bilden“. Es sei dazu vermerkt, daß die Spindeln in unserem Schema in die 2. Spalte der 4. Zeile gehören, da sie durch Rotation eines Parabel- oder Hyperbelsegments um eine zur Nebenachse parallele, die Kurve schneidende Gerade entstehen.

Die Erkenntnis, daß die hyperbolischen Spindeln das österreichische Faß bilden, ist für die Doliometrie nur dann belangvoll, wenn es auch gelingt, den Gedanken rechnerisch zu verfolgen. Dieses Ziel schwebt Kepler in dem mit

Hälfte des Quaders mit den Kanten $BC = r$, $CC' = h$, $AC = 2r\pi$. Seine Grundfläche $BCC'B'$ ist ein Meridianschnitt des Zylinders, die Neigung der diagonalen Schnittfläche $ABB'A'$ gegen die Grundfläche ist ausgedrückt durch $AC : BC = \tan \alpha = 2\pi$. Wird dem Zylinder ein zweiter, coaxialer von gleicher Höhe und dem Halbmesser $BE = r'$ einbeschrieben, so hat sein Quader die Kanten $BE = r'$, $EE' = h$, $DE = 2r'\pi$, die Schnittfläche $DBB'D'$ also dieselbe Neigung $\tan \alpha = 2\pi$. $ABB'A'$ und $DBB'D'$ liegen also in derselben Ebene. Will man nur die zwischen den beiden Zylindern liegende Röhre in Betracht ziehen, so ist ihr das Prisma $ADECC'A'D'E'$ inhaltsgleich, dessen schräge Seitenfläche $ADD'A'$ wieder dieselbe Neigung $\tan \alpha = 2\pi$ hat und durch BB' geht. Auch das ist zu bemerken, daß die Grundfläche $ECC'E'$ einen Meridianschnitt durch die Röhrenwand darstellt.

Die zylindrische Zerlegung des Rotationskörpers kann übrigens auf zweifache Art geschehen (Fig. 2). Entweder man zerschneidet ihn in zylindrische Scheiben von konstanter Dicke, aber variablem Halbmesser senkrecht zur Drehachse (Scheibenmodell), oder aber man legt um die Drehachse eine Folge coaxialer Zylinder, welche zwischen sich dünne Röhren von konstanter Dicke, aber variabler Höhe einschließen (Schalenmodell). Ob man vom einen oder

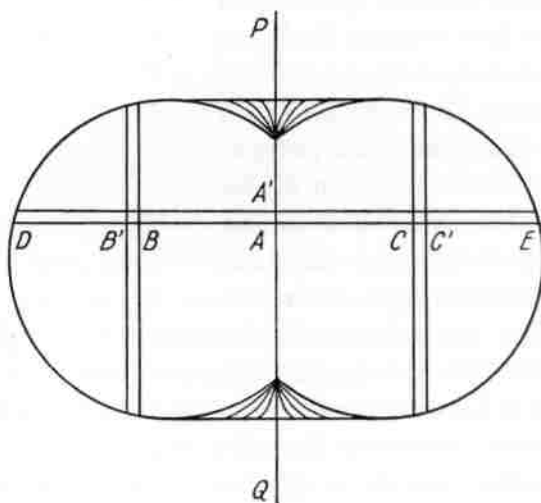


Fig. 2

andern Modell ausgeht: verwandelt man die Scheiben bzw. Röhren oder Schalen in die ihnen inhaltsgleichen Prismen, so bildet ihre Summe, je größer die Zahl der Teile genommen wird, um so genauer einen Zylinderhuf mit der rotierenden Figur als Grundfläche. Die Höhe einer im Abstand r von der Drehachse stehenden Mantellinie wird $2r\pi$, und die Neigung der den Huf vom Zylinder abschneidenden Ebene gegen die Grundfläche $\tan \alpha = 2\pi$ (vgl. Fig. XIV, S. 50). Kepler verwendet bei seinen Überlegungen das Schalenmodell.

Der Methode, einen beliebigen Rotationskörper in einen Zylinderhuf zu transformieren, ist die Eleganz nicht abzusprechen, nur endet sie meist vor

dem Huf, denn die Inhaltsberechnung dieser Körpergattung ist mit elementarstereometrischen Hilfsmitteln nicht allgemein, sondern nur kasuistisch, von Fall zu Fall, zu erledigen. Zu den wenigen lösbaren Fällen gehören Apfel und Zitrone. Der Apfel wird in Theor. XX erledigt. Sein Volumen setzt sich offenkundig (Fig. XIV, S. 50) zusammen aus dem bereits in Theor. XIX erledigten „corpus cylindraceum“, das durch Rotation des Kreisrestes MNKI um MN entsteht, und dem von dem Segment IKD erzeugten Gürtel, der „zona mali“. Das Theorem spricht deshalb nur von der Berechnung dieses Gürtels und behauptet: „Der Apfelgürtel setzt sich zusammen aus dem [entsprechenden] Kugelgürtel und dem geraden Zylindersegment [IKDTV], dessen Basis das Kreissegment ist, das an der den Apfel erzeugenden Figur fehlt, während seine Höhe [FG] gleich dem Umfang des Kreises ist, den der Mittelpunkt [F] des größeren Segmentes beschreibt.“ Insgesamt wird also der Huf in 3 Bestandteile zerlegt, deren jeder eine bestimmte geometrische Bedeutung hat, auf Grund deren er berechenbar wird. Wäre Kepler imstande, die Inhalte der einzelnen Teile nicht nur zahlenmäßig, sondern auch „cossisch“ auszudrücken, dann müßte ihm spätestens hier die Schwerpunktregel begegnen.

Ohne weiteres gelingt jetzt in Theor. XXI auch die Inhaltsberechnung der Zitrone aus denselben Bestandteilen, die in Theor. XX zur Berechnung des Apfel-Zylinderhufs führten. Schließlich wird in Theor. XXII der der Faßform sehr nahekommende Zitronenstumpf, das beiderseits symmetrisch zur Mittelebene gekappte Citrium eingeführt. Da bei ihm der zylindrische Innenteil bekannt ist, handelt es sich nur um die Berechnung des Gürtels, der sich nach dem Theorem zusammensetzt aus dem kleinen Citrium, das durch Rotation des Gürtelsegmentes entsteht, und aus einem über demselben Segment stehenden Zylindersegment. An der räumlichen Figur bei Anm. 52.22 wird das mit einem Blick klar. Alle drei Theoreme XX–XXII lassen sich auch auf die dem Apfel und der Zitrone entsprechenden elliptischen Rotationskörper ausdehnen, wie jeweils als Coroll. II festgestellt wird. Im Episagma zu Theor. XXII ist endlich auch die Stelle, wo der Beweis des „sehr schönen Satzes“ von Theor. XVI über das Verhältnis des mittleren Zylinders in einem Kegelstumpf zu dem aufgesetzten Gürtel nachgeholt wird. Als Anhang beschließt S. 57–60 das ausführlich durchgerechnete Beispiel eines Zitronenstumpfs und sein Vergleich mit dem doppelten Kegelstumpf den ersten Teil des „Supplements“.

Da Kepler die Form der Faßdauben näher bei der flach auslaufenden Hyperbel sucht als beim Kreis und deshalb das österreichische Faß besser in dem Stumpf einer hyperbolischen Spindel realisiert sieht als in dem Zitronenstumpf, so ist er jetzt genötigt, sein Augenmerk auf die Spindeln zu richten. Das Ziel ist von vornherein wenig aussichtsvoll. In der einleitenden Bemerkung „Über die Spindeln“ (S. 60 f.) gesteht er, daß seine bisherige Methode hier versage, weil die jetzt entstehenden Zylinderteile in keiner Weise mehr berechenbar seien. Es bliebe nur die Zuflucht zu den Konoiden, und er schließt: „Sollte mir der Versuch nicht ganz gelingen, so werde ich wegen des Restes die Geometer zu Hilfe rufen.“

Die nun folgenden, mehr tastenden als zielsicheren Überlegungen beginnen mit zwei richtigen Sätzen über das Verhältnis der Kegel, die aus einem rechtwinkligen Dreieck entstehen, wenn man dieses einmal um die kürzere, sodann um die längere Kathete rotieren läßt (Theor. XXIII) und über das Verhältnis der Ellipsoide (Sphäroide), die in ähnlicher Weise durch Rotation einer Ellipse um die kleine und die große Achse entstehen (Theor. XXIV). Dann läßt er sich aber auf falsche Fährte führen. In Theor. XXV stellt er die unrichtige Vermutung auf („den regelrechten Beweis mögen andere suchen; was ich nicht unumstößlich sicher beweisen kann, werde ich wenigstens als plausibel erweisen“), das Kugelsegment und die halbe Zitrone, die aus einem und demselben Kreissegment entstehen, wenn es einmal um die Sagitta, ein zweites Mal um die Sehne rotiert, stehen zueinander im Verhältnis der halben Sehne zur Höhe des Segments. Im Wortlaut des Theorems steckt sogar noch ein weiterer Fehler, indem die Behauptung für die ganze Zitrone ausgesprochen wird. Von den Argumenten, welche die Vermutung stützen sollen, beweist die Rechnung das Gegenteil; die Richtigkeit des Satzes in dem Fall, wo das Segment zum Halbkreis wird, nichts; die Analogie mit den ähnlich ineinander liegenden Ellipsoiden des Theor. XXIV ebenfalls nichts. Falsch, weil auf dem unrichtigen Theor. XXV basierend, ist sodann auch das folgende Theorem.

Darin wird das Kreissegment ersetzt durch ein zur Achse ED symmetrisches Ellipsen-, Parabel- oder Hyperbelsegment ACB (Fig. 3). Läßt man ein solches Segment mitsamt der Tangente AD zuerst um die Sehne AB, sodann um ED rotieren, so erzeugt im ersten Fall der Ellipsenbogen eine Pflaume oder Olive,

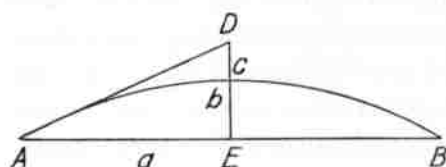


Fig. 3

der Parabel- oder Hyperbelbogen eine Spindel, im zweiten Fall dagegen kommt ein Sphäroid- bzw. Konoidsegment zustande, indes die Tangente zwei Kegel mit den Achsen AE bzw. DE beschreibt, deren Verhältnis (Theor. XXIII) $ED : AE = b : a$ ist.

Das Theor. XXVI stellt nun die Behauptung auf, daß auch das Verhältnis entsprechender Rotationskörper, d. h. halbe Pflaume (Olive) zu Sphäroidsegment bzw. halbe Spindel zu Konoidsegment, sehr nahe gleich $b : a$ sei. Der Satz trifft erheblich neben die Wahrheit, wie in Anm. 64.3 näher dargelegt wird, und zwar aus doppeltem Grund: der eine ist, wie schon gesagt, das falsche Theor. XXV, auf dem der im wesentlichen korrekte Beweis aufbaut, der andere, schwerer wiegende, der unvermutete Sprung von der Sehne AC zur Tangente AD, der bei Kepler besonders auffallen muß, da er in seiner Kegelschnittlehre die Stetigkeit der Übergänge zum Prinzip erhebt.

Die „Analogia“ (S. 66) ist danach aber recht aufschlußreich. Zweifelnd fragt Kepler nämlich, ob das in Theor. XXV angegebene Verhältnis der eingeschriebenen Kegel immer gelte. Dabei besinnt er sich auf die Stetigkeit der Übergänge. Wenn nun im Fall der Parabel die Tangente AD gelte, ob dann nicht bei der Ellipse b zwischen EC und ED liegen, bei der Hyperbel aber größer

als ED sein müßte. Er mißtraut also selbst den Theoremen XXV und XXVI, obwohl „die Kraft dieser Analogie groß ist und einem Beweis nahekommt“. Doch betont er, daß es mit qualitativen Überlegungen nicht getan sei, in jedem einzelnen Fall müsse vielmehr die genaue Größe von b errechnet werden. Der S. 61 angedeutete Versuch, mit Hilfe eines gleichartigen Konoids zur Berechnung der Spindel zu gelangen, ist damit erledigt.

Kepler schlägt deshalb jetzt einen ganz anderen Weg ein: Er fragt nach den Möglichkeiten, die Faßlinie durch Kegelschnitte zu approximieren, und untersucht die Größenordnung der solcherweise entstehenden Rotationskörper. Die neue Problemstellung führt auf die Betrachtung zweier Kegelschnittscharen. In Theor. XXVII hat er die Kegelschnitte im Auge, welche die Faßlinie in ihren Endpunkten, d. h. im Schnittpunkt mit dem Faßboden berühren, in Theor. XXVIII dagegen die Schar derer, welche die Faßlinie im Scheitelpunkt berühren und durch ihre Endpunkte gehen. Die Formulierung der Theoreme ist rein geometrisch: Im ersten Fall ist die Ausgangsfigur ein rechtwinkliges Dreieck ABC (Fig. XVII, S. 67) mit ungleichen Katheten AB und AC, $AB < AC$. Betrachtet wird die Schar der Kegelschnitte, welche die Hypotenuse BC in B berühren und ihren Scheitel auf AC haben. Wird der bewegliche Scheitel mit X bezeichnet, so findet Kepler, daß der Kegelschnitt eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse ist, je nachdem $CX < AX$, $CX = AX$ oder $CX > AX$ wird. Innerhalb der Ellipsen ist sodann der Fall $CX : AX = CB : AB$ dadurch ausgezeichnet, daß er den Kreis ergibt, während $CX : AX \leq CB : AB$ steile oder flache Ellipsen zur Folge hat. Im ersten Corollar wird die Stetigkeit der Übergänge ausdrücklich festgestellt, wobei das Geradenpaar CB, CB' (B' der zu B symmetrische Punkt in bezug auf AC) als Grenzfall der Hyperbel, BB' als die Grenze der Flachellipsen genannt werden. Insofern bedeutet dieses Corollar eine Ergänzung zu der in der „Optik“ wie auch zu der an früherer Stelle dieses Werkes vorgetragenen Kegelschnittlehre. Im zweiten Corollar zeigt Kepler, wie die gewonnenen Kriterien an der Faßfigur (Fig. XVIII) zu verwerten seien.

Im zweiten Fall (Theor. XXVIII), der durch Fig. 4 verdeutlicht wird, stehen $S_1 R_1$, $S_2 R_2$ und VR senkrecht auf $R_1 R_2$, ferner ist $S_1 R_1 = S_2 R_2$, $R_1 R = R_2 R$, $VR > S_1 R_1$; zu betrachten ist die Schar der Kegelschnitte, welche durch S_1 , S_2 und V gehen und in V die Parallele zu $R_1 R_2$ berühren. Stillschweigend kommt dazu die Einschränkung, daß der Kegelschnitt eine vernünftige Faßlinie bilden soll. Im Wortlaut des Theorems wird daher der Kreis durch die 3 Punkte S_1 , V, S_2 als äußere Grenze, das Geradenpaar $S_1 V$, $S_2 V$ als innere Grenze festgesetzt. Die so beschränkte Kegelschnittschar enthält, wie Kepler zeigt, eine einzige Parabel. Der Übergang vom Kreis zur Parabel wird durch

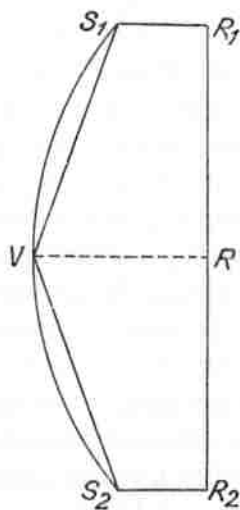


Fig. 4

Ellipsen, der von der Parabel zu dem Geradenpaar durch Hyperbeln vermittelt. Bei Rotation um $R_1 R_2$ ergeben sich also außer Zitrone, parabolischer Spindel und Doppelkegel eine Schar von Pflaumen (Quitten fallen weg) und hyperbolischen Spindeln, die schalenförmig ineinander liegen und daher, wie Theor. XXIX zum Ausdruck bringt, von dem Zitronenstumpf als größtem angefangen bis zum doppelten Kegelstumpf als kleinstem, stetig abnehmende Inhalte ergeben.

Theor. XXX bringt keine Weiterführung des Gedankenganges, sondern stellt ein neues Problem: Segmente der eben genannten Rotationskörper, die durch eine zur Achse parallele Ebene abgeschnitten werden, in ihrem Verhältnis zueinander zu berechnen. Der Zweck dieser Aufgabe könne nicht unbekannt sein, bemerkt Kepler gleich zu Beginn; es handelt sich natürlich darum, die einem Faß entnommene Flüssigkeitsmenge zu ermitteln. Seiner Ankündigung entsprechend ruft er „die Zierde der Geometer unseres Jahrhunderts“, Willibrord Snell, den er als jungen Mann von kaum 20 Jahren in Prag kennengelernt hatte (Cantor II², 654), zur Lösung auf. Vergeblich jedoch, denn weder Snell noch ein anderer Geometer antwortet auf die Herausforderung.

Damit ist die „Ergänzung zu Archimedes“ abgeschlossen. Als wichtigstes Ergebnis ist festzuhalten, daß Kepler jetzt den Zitronenstumpf als Annäherung an die Form des österreichischen Fasses rechnerisch beherrscht. Praktisch ist also sein Ziel, das Fassungsvermögen eines durch seine linearen Abmessungen gegebenen Fasses zu berechnen, erreicht, denn die Approximation der Faßlinie durch einen geeigneten Kreisbogen ist in jedem Falle ausreichend, wie J. H. Lambert (vgl. Anm. 238. 26), dem die Hilfsmittel der Analysis zur Verfügung stehen, noch 1765 feststellt.

Beim Übergang zum zweiten Teil, der als „Stereometrie des österreichischen Fasses im besonderen“ betitelt ist, wechselt mit dem Gegenstand auch der ganze Tenor der Untersuchung. Stand bisher das einzelne Faß mit mehr oder weniger zufälligen Abmessungen und seine Inhaltsberechnung zur Debatte, so sind es jetzt Faßtypen, die durch feste Werkstattregeln der Faßbinder gekennzeichnet sind, und die Abhängigkeit des Faßinhaltes vom Typus, innerhalb des Typus von gewissen variablen Faktoren, alles mit dem Endziel, die Zuverlässigkeit der österreichischen Meßbrute zu begründen. War ferner im ersten Teil das Bestreben, die bestmögliche Approximation eines gegebenen Fasses durch den beiderseits gekappten Rotationskörper eines Kegelschnittes zu finden, wobei sich allerdings der Zitronenstumpf als Grenze des Berechenbaren erwies, so wird jetzt im Interesse der neuartigen, funktionellen Untersuchungsmethode, die der analytischen Hilfsmittel entbehrt, mit einer viel gröberen Approximation gearbeitet, indem das Faß als doppelter Kegelstumpf, bisweilen sogar als Zylinder vorgestellt wird.

Gleichwohl wird in dem einleitenden Abschnitt „Welcher Gattung der vorausgehend behandelten Körper der des Fasses zugehöre“ (S. 72–74) die hyperbolische Spindel erneut als die ideale Verkörperung eines Fasses an-

gesprochen. Einige andere Formen werden als erträgliche Näherung zugelassen, ganz abgelehnt wird dagegen das beiderseits abgeschnittene archimedische Sphäroid. Das ist deshalb zu erwähnen, weil Briggs der Berechnung des englischen Fasses eben dieses Sphäroidmodell zugrunde legt und von seiner Eignung so überzeugt ist, daß er in dem Brief vom 9. Febr. 1625 (Bd. XVIII, S. 221) Kepler sein Befremden über dessen viel umständlichere Behandlung der Doliometrie zum Ausdruck bringt. An einen dem Faß inhaltsgleichen Zylinder, zwar gleicher Länge mit dem Faß, aber mit einem Durchmesser, der zwischen Boden und Bauch liegt, wie Lambert 150 Jahre später das Problem löst, denkt Kepler anscheinend nicht.

Seiner Untersuchungsmethode ist eine kurze Erläuterung vor auszuschicken. In Betracht gezogen werden nur kreisrunde Fässer, die durch Angabe des rotierenden Kurvensegmentes und der Rotationsachse völlig bestimmt sind. Es genügt also, mit dem Achsenschnitt anstelle der räumlichen Figur zu operieren. Da außerdem das Faß im Bauch eine Symmetrieebene besitzt, so kann sich die Untersuchung auf die Hälfte beschränken, der in jedem Fall eine Kugel so umschrieben werden kann, daß Boden und Bauch parallele Kugelschnitte werden. Ersetzt man das Faß durch den Zylinder zwischen den Böden oder durch den doppelten Kegelstumpf mit dem Bauch als gemeinsamer größerer, dem Boden als kleinerer Grundfläche, so wird die Hälfte wieder ein Zylinder oder ein einfacher Kegelstumpf, der Achsenschnitt ein Rechteck oder gleichschenkliges Trapez mit der Visierlinie als Diagonale. Die zwei Dreiecke, in die das Trapez durch die Diagonale zerschnitten wird, sind zwar ungleich, aber doch ist das eine durch das andere mitbestimmt. Eine letzte Vereinfachung ergibt sich daher, wenn der Faßkörper durch ein Dreieck repräsentiert wird, dessen Seiten Visierlänge, Bodendurchmesser und halbe Daubenlänge darstellen.

In diesem Dreieck, das mit PAC bezeichnet werde, wobei AC die Visierlänge darstellt, PA die Daubenlänge, PC den Durchmesser des Bodens, kann der Winkel bei P nicht kleiner werden als ein Rechter. Die Spitzen P aller möglichen Dreiecke liegen also in dem Halbkreis über AC mit Einschluß der Kreislinie selbst. Jede Lage von P bestimmt eindeutig eine Faßfigur und einen Faßinhalt J, einen Zylinder, wenn P auf dem Halbkreis, einen doppelten Kegelstumpf, wenn P im Inneren des Halbkreises liegt. Es handelt sich für Kepler nun darum, die Änderung von J bei bestimmten Lageänderungen von P zu studieren.

In dem ersten, beiseite gelegten Entwurf, war er, wie er S. 75 gesteht, zunächst dem Trugschluß zum Opfer gefallen, daß dem größten Dreieck auch der größte Faßinhalt entsprechen müsse. Er hatte deshalb unter den Dreiecken mit gegebenem Winkel an der Spitze das größte ausgesucht und den zugehörigen Kegelstumpf als den relativ größten erklärt. Obwohl er seinen Irrtum rasch einsah, handeln trotzdem Theor. I und II von diesem Problem, um, wie er es auch sonst in der Gewohnheit hat, andere nachdrücklich vor seinem Irrtum zu warnen. Schon in Theor. III folgt der Hinweis auf die richtige

Lösung: „Die Inhalte der geraden Zylinder, deren Achsenschnitte dieselbe Diagonale haben, stehen zueinander nicht im gleichen Verhältnis wie die Flächen der Schnittfiguren, und nicht der Achsenschnitt, der die größte Fläche besitzt, gehört zum größten Körper.“ Der Weg, der ihn zu dieser Erkenntnis führt, ist der der Rechnung, indem er einer Kugel vom festen Durchmesser $d = 20$ Zylinder von variabler Höhe einbeschreibt und feststellt, daß der Zylinder größten Inhalt hat, bei dem sich der Durchmesser des Grundkreises zur Höhe verhält wie $\sqrt{2}:1$. Der geometrische Beweis dafür folgt in den Theoremen IV und V. Erst zeigt Kepler in eleganter Argumentation, daß unter allen einer Kugel einbeschriebenen Quadern mit quadratischer Grundfläche der Würfel den größten Inhalt hat. Daraus folgert er sodann, daß von den der Kugel einbeschriebenen Zylindern der das größte Volumen besitze, bei dem zwischen Grundkreisdurchmesser und Höhe das obengenannte Verhältnis besteht.

Das Corollar II zu Theor. V ist nun ein Lob auf die österreichischen Faßbinder und ihre Werkstattregel zur Herstellung neuer Fässer. Diese wird in Nr. 75 der „Messekunst“ anscheinend wörtlich so wiedergegeben, wie sie die Meister ihren Lehrlingen vermittelten. Der Sinn ist: Von der Länge der Dauben wird ein Drittel genommen als Halbmesser für den Faßboden. Das Verhältnis des Bodendurchmessers zur halben Daubenlänge wird danach 2 Teile zu $1\frac{1}{2}$ Teilen. Da von der Daubenlänge beiderseits etwas für den Faßrand abgeht, so kommt man sehr nahe auf das Verhältnis 2 zu $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{2}$ zu 1. Hätte das österreichische Faß Zylinderform, dann hätte es also bei gegebener Visierlänge den größten Inhalt. Die Krümmung der Dauben verschiebt zwar die Verhältnisse, bei den engen Grenzen jedoch, die ihr aus technischen Gründen gesetzt sind, nur wenig. Man kann jedenfalls jetzt schon sagen, daß ein guter Instinkt die österreichischen Faßbinder auf eine besonders günstige Faßform geführt hat. In anderen Gegenden werden die Fässer nach anderen Regeln gebaut. Kepler zieht vor allem das längere rheinische Faß zum Vergleich heran, bei dem der Bodendurchmesser der halben Daubenlänge gleich gemacht wurde. Der naheliegende Schluß, daß dieses generell kleineres Fassungsvermögen habe als das österreichische Faß gleicher Visierlänge, stimmt indes nicht. Darauf macht Kepler in der unmittelbar folgenden „Mahnung“ (S. 86) den Leser aufmerksam, indem er die Geschichte eines zweiten Irrtums erzählt. Das Zylindermodell mit den Böden als Grundkreisen ist eine viel zu rohe Näherungskonstruktion. Schon im ersten Entwurf, der nach Augsburg geschickt worden war, hatte Kepler zwar mit dem doppelten Kegelstumpf operiert, in falscher Weise jedoch, indem er analog zum Zylinder denjenigen Stumpf für den größten hielt, bei dem das Verhältnis des kleineren Bodendurchmessers zur Mantellinie $\sqrt{2}$ zu 1 betrug. Auf diesen Fehler war er erst bei der Rückkehr des Manuskripts aufmerksam geworden. Aus dem Zwang, seine falsche Argumentation zu korrigieren, erwuchs sodann in kürzester Zeit die folgende schöne Theorie, das eigentliche Glanzstück der ganzen „Stereometria“.

Im Achsenschnitt, mit dem Kepler arbeitet, und in die geometrische Sprache übersetzt, lassen sich die Werkstattregeln der österreichischen und rheinischen Faßbinder so ausdrücken: Ist AC die als gegeben betrachtete Visierlänge, PA die Mantellinie oder halbe Daubenlänge, PC der Durchmesser des Faßbodens, dann gilt die Beziehung $PC:PA = \sqrt{2}:1$ beim österreichischen, $PC:PA = 1:1$ beim rheinischen Faß, $PC:PA = \kappa$ bei einem Faß irgendwelcher Bauart. Zu jedem Wert von κ gehört eine Schar von Kegelstümpfen, die Kepler als konjugiert bezeichnet, ohne jedoch zu sagen oder davon Gebrauch zu machen, daß der geometrische Ort für die Punkte P der sog. Kreis des Apollonius sei.

Außer dem eben genannten Verhältnis tritt im Gang der Untersuchung vielfach auch das der Durchmesser der beiden Grundkreise des Kegelstumpfes auf. Obwohl Kepler dafür keine eigene Bezeichnung einführt, sollen doch im Interesse einer möglichst klaren Darstellung seines Gedankenganges Kegelstümpfe, die bei gleichem Visier CA dasselbe Verhältnis der Grundkreisdurchmesser aufweisen, assoziiert heißen. Das Verhältnis selbst, näherhin das des kleineren zum größeren Durchmesser, wird im folgenden mit λ bezeichnet; es ist also $0 \leq \lambda \leq 1$, wobei $\lambda = 0$ einem Kegel, $\lambda = 1$ einem Zylinder entspricht. Wie für die konjugierten Kegelstümpfe gilt auch für die assoziierten, daß jede Linie $\lambda = \text{const}$ bei fester Visierlänge CA (vgl. Anm. 99. 23) ein Kreis ist, näherhin der Halbkreis über dem Teil CK von CA, welcher der Gleichung $CK:CA = 2\lambda:(1+\lambda)$ genügt; dabei ist $\lambda = 1$ der Halbkreis über CA selbst.

Jedem Punkt im Halbkreis über CA entspricht nun ein bestimmtes Wertepaar (κ, λ) . Soll umgekehrt dem Wertepaar (κ_0, λ_0) ein bestimmter Punkt des Halbkreises entsprechen, dann muß der Kreis λ_0 den Kreis κ_0 treffen. Das ist aber dann der Fall, wenn $\lambda_0 > \frac{\kappa_0}{\kappa_0 + 2}$ ist, beim rheinischen Faß also $\lambda_0 > \frac{1}{3}$, beim österreichischen $\lambda_0 > (\sqrt{2} - 1)$. Da λ im wesentlichen die Krümmung der Dauben bestimmt, so kann es sich praktisch nicht allzuweit vom Wert 1 entfernen.

Bei einem Teil der nun folgenden Theoreme handelt es sich nur um Hilfsätze, auf deren Wiedergabe wir hier verzichten müssen, da es nur auf einen klaren Überblick über die Hauptpunkte der Untersuchung ankommt. Um diesen zu erreichen, müssen wir uns entschließen, Keplers Ergebnisse aus seiner umständlichen Beschreibung in die uns geläufige Zeichensprache zu übertragen. Es seien also (wie in Fig. XXI von Kepler) CA = c die feste Visierlänge, T der im Innern des Halbkreises über CA veränderliche Punkt, ATCV der Achsenschnitt des Kegelstumpfes, CT = a und VA = b seine Grundkreisdurchmesser, AE = h seine Höhe, TA = s die Mantellinie (halbe Daubenlänge). Nach den vorausgeschickten Definitionen ist $a:s = \kappa$, $a:b = \lambda$ zu setzen. Verwendet man im Halbkreis CEA die Größen κ und λ als Koordinaten, dann erhält man $a = \frac{c \cdot \kappa \cdot \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda + \kappa^2}}$, $h = c \cdot \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{\lambda + \kappa^2} \cdot \frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda}}$ und für das Volumen des zum Punkt T (κ, λ) gehörigen Kegelstumpfes

$$V(\kappa, \lambda) = \frac{c^3 \pi}{3} \cdot \frac{\kappa^2}{\lambda + \kappa^2} \cdot \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{4\lambda} \cdot \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{\lambda + \kappa^2} \cdot \frac{(1 + \lambda)^2}{4\lambda}}.$$

Da $\lambda = 1$ der Halbkreis CEA ist, so wird $V(x, 1)$ das Volumen des Zylinders x . Wird speziell $x_m = \sqrt{2}$ gesetzt, so ist der Inhalt von Theor. V kurz $V(x_m, 1) \geq V(x, 1)$. Betrachtet man ferner den Stumpf (x_0, λ) mit den Grundkreisdurchmessern a und b und den ihm konjugierten Zylinder $(x_0, 1)$ mit Grundkreisdurchmesser CG und Höhe $AL = h'$, so erhält man durch Einsetzen $h'^2 = c^2 \left(1 - \frac{x_0^2}{1 + x_0^2}\right)$, also $CG^2 = \frac{c^2 x_0^2}{1 + x_0^2}$. Da andererseits das Produkt $a \cdot b = \frac{a^2}{\lambda} = \frac{c^2 x_0^2}{\lambda + x_0^2}$ wird, während $a^2 = \frac{c^2 x_0^2 \lambda}{\lambda + x_0^2}$ ist, so ist wegen $0 < \lambda < 1$, $a^2 < (CG)^2 < a \cdot b$. Setzt man daher $CG^2 = a \cdot u$, wobei $a < u < b$, so wird

$$\begin{aligned} u - a &= \frac{CG^2 - a^2}{a} & \frac{u - a}{b - u} &= x_0^2 = \frac{CT^2}{AT^2} = \frac{CG^2}{AG^2}, \\ b - u &= \frac{a^2 - \lambda \cdot CG^2}{a \cdot \lambda} \end{aligned}$$

wie Theor. VII behauptet. Man bestätigt auch sofort das Theor. VIII, wonach für das Verhältnis der Höhe $EA = h_{st}$ des Stumpfs und $GA = h_z$ des mit dem Stumpf konjugierten Zylinders die Gleichung gilt

$$h_z : h_{st} = (CG : CT) : (TR : AT).$$

Nach dieser Vorbereitung sollen die Keplers Theorie tragenden Sätze der Reihe nach aufgeführt werden:

Theor. IX. Gegeben sei der Kegelstumpf (x_0, λ) vom Volumen $V = V(x_0, \lambda)$ und der Höhe h_{st} , ferner der zu dem Stumpf konjugierte Zylinder $(x_0, 1)$ mit dem Volumen $V_z = V(x_0, 1)$ und der Höhe h_z . Mit den eingeführten Bezeichnungen erhält man die vielbenützte Beziehung

$$\frac{V_{st}}{V_z} = \frac{(1 + \lambda + \lambda^2)(1 + x_0^2)}{3 \lambda (\lambda + x_0^2)} \cdot \frac{h_{st}}{h_z} = \frac{a^2 + a b + b^2}{3 (CG)^2} \cdot \frac{h_{st}}{h_z} = \frac{a \cdot b + \frac{(b-a)^2}{3}}{a \cdot u} \cdot \frac{h_{st}}{h_z}.$$

Theor. X. Zu jeder Konjugation x_0 gibt es λ -Kreise, welche den x_0 -Kreis schneiden, und solche, die ihn nicht schneiden. Die Grenze liegt bei $\lambda_0 = \frac{x_0}{x_0 + 2}$. Dieser Kreis berührt den Kreis x_0 in einem Punkt von CA, der zugehörige Stumpf (x_0, λ_0) hat daher verschwindendes Volumen.

Theor. XI. Gegeben ist ein Kegelstumpf mit den Grundkreisdurchmessern a und b . Ein ihm inhaltsgleicher Zylinder von gleicher Höhe (aber verschiedener Diagonale) genügt nach Theor. IX der Gleichung $\pi \left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{a b}{3} \right) = \pi x^2$, unter x der Durchmesser des Zylinders verstanden, d. h. die Grundfläche des Zylinders setzt sich zusammen aus je einem Drittel der Grundkreise des Stumpfs und deren mittlerer Proportionale.

Theor. XII. Der Zylinder mit dem Grundkreisdurchmesser CE und der Höhe AE, der also mit dem Kegelstumpf CTAV gleiche Höhe und Diagonale hat, hat $CE = \frac{a + b}{2}$.

Theor. XIII. Der Stumpf (κ, λ) und der Zylinder $(\kappa', 1)$ von gleicher Diagonale sollen gleiche Höhe haben. Es ist also $\frac{\kappa^2}{\lambda + \kappa^2} \cdot \frac{(1 + \lambda)^2}{4\lambda} = \frac{\kappa'^2}{1 + \kappa'^2}$ und daher

$$\frac{V_{st}}{V_Z} = \frac{V(\kappa, \lambda)}{V(\kappa', 1)} = \frac{4(1 + \lambda + \lambda^2)}{3(1 + \lambda)^2}, \text{ also } \frac{V_{st} - V_Z}{V_Z} = \frac{(1 - \lambda)^2}{3(1 + \lambda)^2} = \frac{\frac{1}{19}(b - a)^2}{\left(\frac{b + a}{2}\right)^2}.$$

Läßt man T auf dem Strahl CE von E nach C wandern, wobei der Stumpf die Höhe EA behält, so wächst V_{st} von V_Z bis zum Wert $\frac{4}{3} V_Z$, wobei der Zylinder den Durchmesser CE und die Höhe EA hat. Im Punkt C ist also die Funktion $V(\kappa, \lambda)$ unendlich vieldeutig.

Theor. XV ist Ausdruck der bereits erwähnten Ungleichung $\lambda > \frac{\kappa}{\kappa + 2}$, oder umgekehrt $\kappa < \frac{2\lambda}{1 - \lambda}$. Schneidet der Kreis $\lambda = \lambda_0$ den Kreis $\kappa = \kappa_0$, so schneidet er auch alle Kreise $\kappa < \kappa_0$. (Es ist zu bedenken, daß Kepler das Konjugationsverhältnis als reziproken Wert von κ versteht und deshalb vom größeren Verhältnis κ spricht).

Theor. XVI. Da die stetige Funktion $V(\kappa, 1) = \frac{\pi c^3}{4} \cdot \frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2} \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2}}$ sowohl mit $\kappa = 0$ als auch mit $\kappa = \infty$ verschwindet, bei $\kappa = \kappa_m$ aber ihr Maximum $\frac{\pi c^3}{18} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$ erreicht, so gibt es zu jedem $\kappa_1 < \kappa_m$ ein $\kappa_2 > \kappa_m$ so, daß $V(\kappa_1, 1) = V(\kappa_2, 1)$ wird. Der Zylinder $(\kappa_2, 1)$ heißt der „Subcontrarius“ zu $(\kappa_1, 1)$.

Theor. XVII. Es sei $\kappa_1 < \kappa_m$, dann ist $V(\kappa_1, \lambda) > V(\kappa_1, 1)$, wenigstens so lange, als die Höhe $h(\kappa_1, \lambda)$ nicht kleiner ist als die des Subcontrarius $h(\kappa_2, 1)$. Die Richtigkeit folgt aus Theor. XIII.

Theor. XVIII. Es sei wieder $\kappa_1 < \kappa_m$ und $(\kappa_2, 1)$ der Subcontrarius zu $(\kappa_1, 1)$, ferner $V(\kappa_1, \lambda_1) = V(\kappa_1, 1)$. Dann muß die Höhe $h(\kappa_1, \lambda_1) < h(\kappa_2, 1)$ sein. Die Begründung folgt wieder aus Theor. XIII.

Theor. XIX. Wieder sei $\kappa_1 < \kappa_m$, dann gibt es zwei Werte λ_1 und λ_2 von der Art, daß $V(\kappa_1, \lambda_1) = V(\kappa_1, \lambda_2) = V(\kappa_m, 1)$ wird.

Theor. XX. κ sei veränderlich, $\lambda = \lambda_0$ fest, dann hat $V(\kappa, \lambda_0)$ seinen größten Wert, wenn die Höhe $h(\kappa, \lambda_0) = h(\kappa_m, 1)$ ist. (Nach Theor. XIII besteht zwischen den Werten von V in den Schnittpunkten irgendeines Strahls durch C mit den Halbkreisen $\lambda = \lambda_0$ und $\lambda = 1$ das feste Verhältnis $\frac{4}{3} \cdot \frac{1 + \lambda_0 + \lambda_0^2}{(1 + \lambda_0)^2}$. Der Strahl von C nach dem Punkt $(\kappa_m, 1)$ schneidet also den Halbkreis $\lambda = \lambda_0$ in dem Punkt, wo $V(\kappa, \lambda_0)$ sein Maximum erreicht.)

Theor. XXI. κ_0 sei fest, λ veränderlich; dann vermutet Kepler (den strengen Beweis oder die Widerlegung überläßt er den „Apollonii Belgae“ Snell und van Roomen), daß, dem Theorem XX entsprechend, $V(\kappa_0, \lambda)$ seinen größten

Wert dann erreiche, wenn $h(x_0, \lambda) = h(x_m, 1)$ ist. Der Satz ist unrichtig, wie sich leicht an Beispiel $x_0 = 1$ (Mittelsenkrechte auf CA) zeigen läßt. Damit die Höhe des Stumpfes (x_0, λ) der des größten Zylinders $h(x_m, 1) = \frac{c}{3} \sqrt{3}$ gleich wird, ist $\lambda_1 = \frac{3}{5}$ zu setzen. Es sei sodann $\lambda_2 = 0,59$. Dann wird $V(1, \lambda_1) = 1,178 \cdot \frac{c^3 \pi}{3}$, $V(1, \lambda_2) = 1,181 \cdot \frac{c^3 \pi}{3}$, entgegen dem Wortlaut des Theorems.

Theor. XXII lautet wieder richtig: Ist $x_2 \geq x_m$, dann wird $V(x_2, \lambda) < V(x_2, 1)$.

So weit kommt Kepler auf seinem schwierigen, ohne Zweifel aber auch bewundernswerten Weg, ehe er sich an die Cossisten wendet. Was ihm zur Beurteilung seiner Fässer noch fehlt, ist die Kenntnis der Linien im Innern des Halbkreises über CA, längs denen $V(x, \lambda) = V(x_m, 1) = \frac{c^3 \pi}{18} \sqrt{3}$ wird. Auf Grund von Theor. XIX weiß er, daß die Niveaulinie, die von dem Punkt G $(x_m, 1)$ ausgeht, im Bereich $x < x_m$ zwei Äste hat, die in C wieder zusammenlaufen, nach Theor. XXII dagegen hat sie keinen Punkt im Bereich $x > x_m$ und außer C und G auch keinen Schnittpunkt mit CG. Die Punkte des Innern dieser blattförmigen Kurve (vgl. Anm. 111.22) repräsentieren die Kegelstümpfe, deren Volumen größer ist als das des größten Zylinders. Sie ist deshalb für die Theorie der Fässer von grundlegender Bedeutung. Anschaulich zeigt sie, wie die kurzen Fässer ($x \geq x_m$) mit wachsendem λ , d. h. mit flacher werdender Krümmung, an Fassungskraft gewinnen, die beim österreichischen Faß in $V(x_m, 1) = \frac{c^3 \pi}{18} \sqrt{3}$ ihr Maximum erreicht, während die langen Fässer ($x < x_m$), wozu das rheinische mit $x = 1$ gehört, mit abnehmendem λ , d. h. zunehmender Krümmung der Dauben, an Inhalt gewinnen und dem österreichischen nahekommen, wie Kepler in den Corollarien zu Theor. XVIII und XXII vermerkt.

Das sind jedoch nur Vorüberlegungen, die zu einer numerisch exakten Lösung drängen. Hier liegt aber, wie in der Einleitung zum Nachbericht ausgeführt wurde, eine ausgesprochene Schwäche des Mathematikers Kepler. Er wendet sich deshalb an die „Geometer“. In Theor. XXIII legt er ihnen die Aufgabe vor, bei fester Assoziation $\lambda = \lambda_0$ die Konjugation x (so sagt er nicht ganz korrekt) zu berechnen, welche $V(x, \lambda_0) = V(x_m, 1) = \frac{c^3 \pi}{18} \sqrt{3}$ macht, und anschließend als Theor. XXIV die umgekehrte Aufgabe, zu gegebener Konjugation $x = x_0$ die zwei Assoziationen (so heißt es hier richtig) λ_1 und λ_2 zu bestimmen, welche $V(x_0, \lambda) = \frac{c^3 \pi}{18} \sqrt{3}$ machen. „Problema Geometricum propositum“ heißt es beide Male, trotzdem stellt er im ersten Fall die kubische Gleichung auf, im zweiten, schwierigeren, versucht er wenigstens die Gleichung, die er für eine des 5. Grades hält, während sie in Wirklichkeit vom 6. Grad ist, allgemein zu charakterisieren; die Auflösung jedoch überläßt er in seiner Scheu vor cossischen Rechnungen ganz den aufgerufenen Cossisten. Es meldet sich indes, wie schon S. 430 gesagt wurde, nur der Vieta-Schüler

Alexander Anderson mit der Lösung der ersten Aufgabe, und zwar nicht mit der algebraischen, sondern einer geometrischen.

In einem letzten Theorem XXV wird als Abschluß der Untersuchung die Formel für das Verhältnis zweier Kegelstümpfe verschiedener Konjugation, aber gleicher Assoziation mit Worten beschrieben. Die Anwendung davon, der Vergleich des österreichischen Fasses mit dem rheinischen, wird in Coroll. II tabellenmäßig vorgeführt, während die Folgerung daraus in Coroll. III gezogen wird, die nämlich, daß das rheinische Faß das österreichische mit gleichem Visier und gleichem Verhältnis der Durchmesser nicht erreicht, weil das Verhältnis 4 zu 3 von Bauch zu Boden, bei dem Gleichheit des Inhaltes eintreten würde, praktisch schon nicht mehr vorkommt.

Ganz von selbst kommt so die Untersuchung an ihren Ausgangspunkt zurück, zur kubischen Meßrute und der Frage ihrer Verwendbarkeit. Nach der sehr gründlichen Vorbereitung ist dieses Thema in den 4 kurzen Theoremen XXVI–XXIX zu erledigen. Unter der nur näherungsweise gültigen Voraussetzung, daß die nach einer bestimmten Werkstattregel angefertigten Fässer unter sich geometrisch ähnliche Körper seien – die Krümmung der Dauben bleibt ja in engen Grenzen frei –, wächst ihr Volumen mit den Kuben entsprechender Linearabmessungen, deren wichtigste die Visierlänge ist. In Coroll. II von Theor. XXVI wird aber auch von der Summe des Bodendurchmessers und der halben Daubenlänge als gebräuchlichem Maß gesprochen. Die Eichung der Meßrute geschieht an einem Faß bekannten Inhalts. In Theor. XXVII wird festgestellt, daß beim österreichischen Faß kleine Ungleichheiten der beiden Faßhälften nicht merklich stören, wenn nur die Rute beiderseits gleich anzeigt. Ist aber darin ein Unterschied festzustellen, dann wird das arithmetische Mittel genommen (Theor. XXVIII). Zum Schluß wird in Theor. XXIX die Krümmung der Dauben berücksichtigt und gesagt, daß das österreichische Faß innerhalb gewisser Grenzen auch gegen Änderungen der Krümmung unempfindlich sei, während bei längeren Fässern wachsende Krümmung den Inhalt vergrößere, die Rute dementsprechend zu wenig anzeige, bei kurzen Fässern aber der umgekehrte Effekt eintrete. (Diese Verhältnisse sind an der Tabelle S. 114 oder an der Figur zu Anm. 111. 22 abzulesen.) Dabei ist immer vorausgesetzt, daß jede Faßart mit der ihr angepaßten Rute gemessen wird. Die zuverlässigste Bestimmung mit der Meßrute ist also die beim österreichischen Faß.

Die zwei ersten Teile der „Stereometria“ hat Kepler ohne Zweifel im Auge, wenn er in Nr. 86 der „Messekunst“ (S. 235) mit unverhohlenem Stolz bemerkt: „Andere Geometrae mögen auch suchen, ich hab im Lateinischen Werck mit erfindung viler newer demonstrationum meinen ehren gnug gethan“. Denn neue Demonstrationen enthält der 3. Teil, „die Anwendung des ganzen Buches auf die Fässer“, nicht mehr, obwohl sie dringend nötig wären, weniger in den vier ersten Kapiteln als im letzten.

Es geht in den ersten Kapiteln um die praktische Frage, ob die österreichische Meßrute, deren kubische Teilung auf das österreichische Faß zuge richtet ist, ohne Schaden für Käufer und Verkäufer auch bei nicht österreichischen Fässern verwendet werden könne, in welchen Fällen sie tolerabel sei und in welchen nicht. Selbst die Frage, ob Fässer österreichischer Bauart von ungewöhnlicher Größe mit der Rute ausgemessen werden dürfen, ist zu stellen und zu verneinen. Da man also nicht ganz ohne Rechnung auskommen kann, ist auch zu fragen, wie gegebenenfalls die dafür nötigen Abmessungen am Faß (Durchmesser von Boden und Bauch, Visier, Länge des Fasses) zu gewinnen, wie auch die Krümmung der Dauben und ihr Charakter (kreisförmig, elliptisch, parabolisch, hyperbolisch) mit Hilfe einer Art Punktiergerät zu ermitteln, wie selbst die Böden auf richtige Kreisform zu prüfen seien.

Im 5. und letzten Kapitel kommt Kepler schließlich auf das Problem zurück, dessen exakt geometrische Behandlung er am Ende des 1. Teiles Snell als Aufgabe gestellt hatte: „Eine Methode zu finden, nach der man das Verhältnis des geleerten Teils zum Rest der Flüssigkeit messen kann, wenn das Faß liegt und die Durchmesser von Bauch und Böden senkrecht stehen.“ Eine gute Näherungslösung dieser Aufgabe ist ohne Zweifel nicht weniger wichtig als die für den Inhalt eines vollen Fasses, wenn auch die Begründung Keplers, sie sei „nützlich für Familienväter zum Erweis und zur Entdeckung von Diebstählen“ nicht besonders stichhaltig erscheinen mag. Über seinen Versuch urteilt er selbst in Nr. 88 der „Messekunst“ (S. 237): „Zwar hab ich im lateinischen werck auch einen process gezeigt / der fundiert sich aber auff No. 18. vnd 55. welche noch nicht erleutert / hat auch sonst seine rechtmäßige demonstration nicht / sonderlich der mit eingeführte Circulus Metator.“ Dieses Urteil enthebt uns der Verpflichtung, ausführlich auf den Gedanken gang einzugehen. In aller Kürze sei nur der Sinn des „Circulus Metator“ erklärt.

Geht man von der Vorstellung des Fasses als doppeltem Kegelstumpf aus mit den Grundkreisdurchmessern a und b , $a < b$, denkt man ferner den Doppelstumpf durch eine Ebene parallel zur Achse im Abstand d von ihr, $\frac{a}{2} < d < \frac{b}{2}$, geschnitten, so ähnelt das abgeschnittene Stück einem doppelten Kegel über dem Segment S des gemeinsamen Grundkreises, wobei die Kegelhöhe h gleich ist dem Abstand des Scheitels der Schnitthyperbel von der Sehne des Segments S . Würde man danach den Inhalt des abgeschnittenen Stückes mit $J = 2 \cdot \frac{S \cdot h}{3}$ rechnen, dann käme es zu klein heraus. Um zu einem besseren Resultat zu gelangen, will Kepler die Höhe des Kegels vergrößern; das Maß der Vergrößerung soll aber durch den ad hoc eingeführten „Metator“ gefunden werden, für den es keine sachliche Begründung gibt, sondern nur ein ungefähres Ziel, das erreicht werden soll („wir werden die Wahl so treffen, daß sie der Wahrheit nahekommt“). Man kann sich denken, daß die Eile, mit der Kepler des Druckes wegen zum Ende seiner Arbeit kommen mußte, einen derartigen Kurzschluß begünstigt hat; in der „Messekunst“

greift er das Problem sachgemäß wieder auf und erreicht eine für die Praxis befriedigende Lösung.

In einer ganz kurzen „Conclusio libri“ erinnert Kepler daran, daß seine Absicht gewesen sei, die Irrtümer anderer aufzudecken und für eine wirkliche Faßrechnung die Grundlagen zu schaffen. Dabei sei sein Buch von ursprünglich kaum 10 Theoremen zu dem großen Umfang angewachsen, vor dem Briggs so erschrak, daß er es ungelesen beiseite legte. Anscheinend übersah auch Briggs, daß es die geometrische Grundlegung ist, welche die Vermehrung des Umfanges verursachte; in ihr liegt das Neue, das Kepler in die Stereometrie hineingebracht hat, vergleichbar den neuen Ideen, mit denen er Astronomie und Optik bereichert hat. In einem einzigen Satz und einem Dichterzitat klingt das Thema „Weinflaß“ aus: „Mögen die bei ihren Irrtümern bleiben, die ihre Freude daran haben; wir wollen uns unseren Vorsprung zunutze machen, und beten werden wir, es möge uns bei guter Gesundheit von Körper und Geist der Stoff zum Genießen in genügender Menge zur Verfügung stehen“. Das nun folgende Zitat

„Et cum pocula mille mensi erimus,
Conturbabimus illa, ne sciamus“

ist die Variation eines bekannten Catull-Verses aus Carmina 5, 7–11:

„Da mihi basia mille, deinde centum,
Dein mille altera, dein secunda centum,
Dein usque altera mille, dein centum,
Dein, cum milia multa fecerimus
Conturbabimus illa, ne sciamus.“

2. MESSEKUNST ARCHIMEDIS

Der Aufbau der „Messekunst“ verläuft zu dem der „Stereometria“ merklich parallel. Wie diese hat sie 3 Teile: der erste (Nr. 4–67) enthält die wichtigsten Lehrsätze aus der „Archimedischen Stereometrie“ und dem „Supplement“ Keplers; der zweite, wesentlich kürzere Teil (Nr. 69–79), behandelt fast ausschließlich Themen aus dem zweiten Teil der „Stereometria“ (Problem des größten Quaders bzw. Zylinders in einer gegebenen Kugel; österreichische Visierrute; österreichisches Faß und seine Vergleichung mit Fässern anderer Bauart, vornehmlich der rheinischen). Nur das Kapitelchen über die Berechnung von Faßlänge und Visierlinie greift bereits in den dritten Teil der „Stereometria“ hinüber, an den sich im übrigen Teil 3 der „Messekunst“ „Von zubereitung vnnd gebrauch der Oesterr. Weinvisierruthen“ als Ganzes anlehnt. Neu kommt in der „Messekunst“ der metrische Anhang „Von dem Oesterr. Gewicht u. s. w.“ (Nr. 91–100) hinzu.

Die von Kepler selbst durch Marginalien hervorgehobene Parallelität ist lediglich Ausdruck für die inhaltliche Entsprechung der beiden Schriften, für die Tatsache, daß „dem Teutschen Leser zum besten . . . in disem Teutschen

Büchlein“ aus dem lateinischen Traktat „die summen eines jeden postens vnd was sonsten nutzliches oder notwendiges darbey zu mercken... für Augen gestellt“ (S. 143) wird; wer unter den Begriff „Teutscher Leser“ fallen soll, ist im Titel (S. 137) erläutert. Durch die Erklärung Keplers sind wir der Notwendigkeit enthoben, die „Messekunst“ inhaltlich eingehend zu analysieren. Notwendig ist es aber, deutlich auf die Unterschiede der beiden Schriften in Materie und Form, Inhalt und Darstellung aufmerksam zu machen.

Beginnen wir mit dem soeben erwähnten Anhang! Er ist keineswegs, wie fast immer geglaubt wird, eine bloße Sammlung und Anhäufung von Daten aus dem komplizierten Maß- und Münzwesen der Zeit, sondern zielt nach Keplers eigener Erklärung (S. 143) auf eine Systematisierung der Maßeinheiten hin: „Demnach aber von der alten Römischen Republica bekandt, das sie ihre gewichte, Elen vnnd Maaß also an ainander gehengt vnnd verknüpfft, das eines ohne das ander nicht hat können verlohren oder verendert werden. Als haben jetzvermelte Kunstverständige... für gut angesehen, das ich dergleichen auch an den Oesterreichischen viererley Meßsorten... versuchen solle“. Deshalb habe er die viererlei Maße „also zusammen gebracht, das eines auß dem andern hergenommen, erkundigt, bewäret vnd verbessert werden, vnnd also alle mit einander zu mehrer bestendigkeit reichen können“.

Das ist bei Kepler kein neuer Gedanke. Er hatte ihn schon 1605 in einem Gutachten für den Kölner Erzbischof Ernst von Wittelsbach über die Reform des gesamten Maßwesens als das am ehesten zu verwirklichende Nahziel ausgesprochen.¹ Ausgeführt hat er ihn 1627 in dem Maßkessel, den er im Auftrag des Ulmer Magistrats neben Druck und Herausgabe der Rudolphinischen Tafeln entwarf und in den letzten Tagen seines Ulmer Aufenthaltes noch prüfte und korrigierte. In diesem Modellgefäß sind die Ulmer Längenmaße als Durchmesser und Höhe, Eimer und Imi durch das Volumen, der Zentner durch das Wassergewicht des Inhaltes festgelegt, natürlich nicht ohne vorausgehende Änderungen, vor allem bei den Längenmaßen, indes das Gewicht als Bezugsmaß absolut unverändert übernommen wird. Die Bindung an die geometrische Figur des Kessels sichert die einzelnen Maße vor den willkürlichen, besonders bei Hohlmaßen häufigen Änderungen, solange nicht das geometrisch festgelegte Verhältnis und das Modellgefäß selbst aufgegeben werden. Dieselbe Arbeit, nur auf dem Papier statt an dem massiven Metallkessel, leistet Kepler in dem Anhang, indem er die Relationen zwischen den einzelnen Maßen erarbeitet. Das ist wirklich eine Aufgabe der praktischen Stereometrie, eine bloße Sammlung von Daten wäre es nicht gewesen.

Die zweite, wesentlich wichtigere Stelle, an der die „Messekunst“ über die Erkenntnisse der „Stereometria“ hinausgreift, ist die Nr. 88 mit der Überschrift: „Zurechnen wie viel Weins auß einem Faß kommen oder noch drinnen seye, wann es gerade auffligt vnd nicht gehebt ist“. Es handelt sich also um das Problem des unvollständig gefüllten, bzw. geleerten Fasses, praktisch von

¹ Dieses in Mss. Pulk. V, 189 ff. im Entwurf erhaltene Gutachten kommt erst in einem späteren Band zur Veröffentlichung. Bei Frisch ist es abgedruckt in Vol. V, pag. 616–627.

gleicher Bedeutung wie die Inhaltsberechnung des ganzen Fasses, aber ungleich schwieriger und vor allem nicht graphisch mit der Visierrute zu bewältigen. Es sei „ein rechtes Creutz für die Künstler, vnd gar nicht jedermans ding“ (S. 237). Seiner Wichtigkeit wegen hatte Kepler es noch im letzten Kapitel des dritten Teiles der „Stereometria“ auf Anhieb zu lösen gesucht, mit wenig Glück allerdings (vgl. S. 456).

Jetzt unterscheidet er die zwei Fälle $h \leq b - a$ und $h > b - a$, wenn h die Höhe des leeren Segmentes, b und a die Halbmesser von Bauch und Boden bedeuten. Wird die Krümmung der Faßdauben als kreisförmig betrachtet, was auf alle Fälle eine gute Näherung bedeutet, so ist das Faß eine beiderseits gekappte Zitrone und das bei $h \leq b - a$ entstehende Segment in Keplers Sprache ein Zitronenschnitt. Für diesen hat er schon in Nr. 67 (S. 202) eine genäherte Berechnung angegeben. Ist aber $h > b - a$, dann sucht er seine Aufgabe richtig darin, eine solche Zerlegung des leeren oder vollen Faßteiles zu finden, daß die einzelnen Bestandteile möglichst exakt berechenbar werden oder daß wenigstens die nur näherungsweise berechenbaren keinen wesentlichen Einfluß mehr auf das Resultat haben können. Es gelingt ihm, eine solche Zergliederung zu finden, nebenbei erwähnt dieselbe, zu der 150 Jahre später J. H. Lambert seine Zuflucht nimmt, weil man „noch gar keine genaue Methode sie zu visieren“ habe finden können. Keplers Zerlegung ist in Anm. 238.26 genau erläutert.

Mit dieser Berechnung – die Visierrute scheidet hier völlig aus – setzt er seiner Doliometrie die Krone auf. Ihr eigentlicher Platz wäre am Schluß der „Stereometria“ gewesen, da Kepler aber die Lösung der Aufgabe erst nach dem Abschluß des lateinischen Werkes gelingt, muß sie sich mit einem bescheideneren Platz begnügen und in den Rahmen der „Messekunst“ drängen lassen. Dabei hat diese Berechnung sogar den Vorzug, „daß im Lateinischen auß einem doppelten Kegelstock gerechnet worden, hie aber auß der Citronenrundung“. Wenn hier vom Rahmen der „Messekunst“ die Rede ist, so ist damit die formale Seite des Werkes gemeint: die Art der Darstellung nach Sprache und Methode.

In der „Dissertatio cum Nuncio Sidereo“ hatte Kepler (Bd. IV, S. 286) einige Jahre früher geschrieben: „Es gibt Leute, die ihre Wissenschaft mit gestrenger Miene vortragen, um dadurch ihren Behauptungen Gewicht zu verleihen; dabei machen sie sich aber oft genug nur lächerlich, ohne es zu wollen. Mir scheint, daß ich von Natur dafür geschaffen bin, die schwere Mühe wissenschaftlicher Arbeit durch aufgelockerte Darstellung zu mildern“. Dieses Satzes muß man sich erinnern, wenn man den „Bericht über das Geburtsjahr Christi“ (1613) und die „Messekunst“, die beide den Stoff eines lateinischen Werkes deutschen Lesern erschließen, richtig beurteilen will. Beide sind sie geradezu Musterbeispiele einer guten Popularisierung. Bei der „Messekunst“ handelt es sich darum, Leuten, die nicht über die Anfangsstufe geometrischen und arithmetischen Wissens hinausgekommen sind, schwierige Begriffe und Rechnungen der Stereometrie beizubringen. Bei noch so guter schulmeisterlicher

Unterweisung, die natürlich nicht fehlen darf, würden sie erliegen; es bedarf immer wieder der Aufmunterung durch ein gut gewähltes Bild, eine freundliche Zwischenbemerkung oder ein paradoxes Beispiel. So entsteht im ganzen ein Buch, das heute noch eine genußreiche Lektüre bietet. Eine Schwierigkeit aber bereiten Kepler die Fachausdrücke, für die er gute deutsche Wörter braucht, wenn er verständlich werden will, die es aber in der Stereometrie noch gar nicht gibt. Erst für die Euklid-Übersetzung liegen einige Versuche vor. Seine Meinung über die Verdeutschung der Fachterminologie spricht er in einem Brief an Nikolaus Vike in Wolfenbüttel vom Juli 1611 aus (Bd. XVI, S. 388 f.): „Marius [= Simon Maier] lehrt den Euklid deutsch zu sprechen . . . ich möchte gerne Einblick in das Buch bekommen, ob etwas gegenüber der Übersetzung von Xylander geändert ist . . . Aus Liebhaberei schlage ich mich mit derselben Arbeit herum, als vornehmstes Ziel schwebt mir aber vor, daß auch die Fachausdrücke deutsch sein sollen. Es ist doch eine Schande, Parallelen im Deutschen nicht anders nennen zu können als Parallelen. Hier bräuchte es aber gemeinsame Bemühung, damit die Fachausdrücke in allgemeinen Gebrauch übergehen und nicht der eine so, der andere anders redet. Und ich meine, im 10. Buch [Euklids] darin etwas weiter gekommen zu sein. Mit demselben Recht, mit dem Euklid in griechischer Sprache neue Namen bildete, habe ich es in unserer eigenen Sprache getan“.

Die von ihm verwendeten oder gebildeten deutschen Fachwörter stellt Kepler in einem besonderen, nicht ganz vollständigen Verzeichnis (S. 270/71) zusammen. Manche seiner Bildungen gehört heute zum festen Bestand der mathematischen Fachsprache, der größere Teil hat sich jedoch nicht durchgesetzt. Trotzdem bleibt die „Messekunst“ ein bedeutsames Glied in der Geschichte der deutschen mathematischen Fachsprache (vgl. A. Götze: Anfänge einer mathematischen Fachsprache in Keplers Deutsch [= Germanische Studien Heft 1], Berlin 1919).

Die Übermittlung des stereometrischen Lehrstoffes an seine „teutschen Leser“, von den Obrigkeiten über die Handelsleute und Eichmeister bis hinunter zu den Antiquitätenliebhabern, muß natürlich andere Wege gehen, als sie in der „Stereometria“ möglich waren. Zunächst wird alles weggestrichen, was nicht unmittelbaren Bezug auf die praktische Doliometrie hat. So scheidet von vornherein die ganze Theorie der konjugierten und assoziierten Kegelschäfte aus. Ferner wird auf geometrische Beweise grundsätzlich verzichtet, nur Ergebnisse und Rechenvorschriften werden mitgeteilt und durch zahlreiche, schulmäßig durchgerechnete Beispiele erläutert. Für oft wiederkehrende Rechnungen, wie die der Kreisbogen, Kreissektoren, Kreissegmente, Kugelsegmente, werden Tabellen aufgestellt. Als wesentliche Erleichterung für die ungewandten Rechner, die weder mit den damals üblichen großen Zahlen noch mit Brüchen sicher operieren, führt er in Nr. 60 die Dezimalbrüche nach Bürgi'scher Symbolik ein („Ein behende Bruchrechnung“) und verwendet sie von da ab konsequent, während in der ganzen „Stereometria“ nur ein einziger Dezimalbruch zu finden ist. Zu allem hin unterscheidet Kepler zwischen „teut-

schen kunstliebenden Lesern“ und „mehr einfältigen Lesern“ (S. 145), bezüglich derer er „guter Hoffnung“ ist, daß sie „sich solche außschweiffe“ (gemeint ist die Grundlegung der Stereometrie nach dem ersten Teil der lateinischen Schrift) „nicht irren lassen, sondern die vberhupffen, biß sie im andern Theil zu der Visierruthen selber kommen“. In Wirklichkeit ist es erst der dritte Teil, bei dem die „Messekunst“ für die einfachste Kategorie von Lesern beginnen soll. So bietet also das Werk ein völlig anderes Gesicht als seine lateinische Schwester bzw. Mutter. Stoffmäßig ist sie einerseits gegenüber der „Stereometria“ wesentlich reduziert zugunsten einer meisterhaften Didaktik, auf der anderen Seite aber ragt sie mit zwei wichtigen Spitzen über sie hinaus.

Ohne genaue Kenntnis der lateinischen Schrift ist es natürlich nicht möglich, die eine dieser Spitzen, die Inhaltsberechnung des nur teilweise gefüllten Fasses, zu sehen; und selbst dann übersieht man sie nur zu leicht, da sie als Bestandteil der „Messekunst“ ohne Figur und ohne die nötige geometrische Einkleidung lediglich als Rechnungsvorschrift vorgetragen wird. Und ohne Kenntnis der Zusammenhänge ist es auch schwer, den Sinn des metrischen Anhangs zu durchschauen. Diese beiden Umstände haben sehr zu der unrichtigen Beurteilung der „Messekunst“ beigetragen.

Daß die Manuskriptvorlagen zu den beiden stereometrischen Schriften fehlen, dieses Schicksal teilen sie mit allen anderen gedruckten Arbeiten Keplers. Zu bedauern ist jedoch, daß auch der erste Entwurf fehlt, der nach Augsburg geschickt wurde und von dort wieder zurückkam. Erhalten sind in Band V des Pulkowoer Nachlasses lediglich 25 unter sich zusammenhangslose Blätter zur zweiten Bearbeitung der „Stereometria“ (Bl. 33–37, 39–58), außerdem 17 Blätter mit Materialien zum metrischen Anhang der „Messekunst“ (Bl. 139–156). Von den letzteren trägt eines das Datum 9. Dezember [1615].

B. DIE LOGARITHMISCHEN SCHRIFTEN

ENTSTEHUNGSGESCHICHTE

Bibliographisch bilden die logarithmischen Schriften Keplers zwei Einheiten, die „Chilias Logarithmorum“ und das „Supplementum Chiliadis Logarithmorum“, im Folgenden kurz als „Chilias“ und „Supplementum“ bezeichnet; inhaltlich sind sie jedoch als ein Ganzes zu betrachten. Ihre Vorgeschichte beginnt im Frühjahr 1617, wo der Kaiser seinen Mathematiker auf etwa zwei Monate nach Prag beorderte. In dieser Zeit wurde ihm von einem Bekannten die 1614 in Edinburgh erschienene „Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio“ John Nepers gezeigt. Mehrfach – so in dem Brief an Mästlin vom 3. Dez. 1618 (Bd. XVII, S. 297) – vermerkt Kepler, daß ihm nur ein flüchtiger Einblick in das Buch vergönnt gewesen sei. Der Eindruck, der ihm davon blieb, wird in einem Brief an W. Schickard am 11. März 1618 (Bd. XVII,

S. 258) so zusammengefaßt: „Ein schottischer Baron, dessen Namen ich nicht behalten habe, ist mit einer glänzenden Leistung hervorgetreten, indem er jede Multiplikations- und Divisionsaufgabe in reine Additionen und Subtraktionen umwandelt, ohne daß er die Sinus verwendet [wie die Prosthaphäretiker]. Dagegen braucht er den Kanon der Tangenten, und die Mannigfaltigkeit, Vielzahl und Schwierigkeit der Additionen und Subtraktionen übersteigt irgendwo die Mühe der Multiplikationen und Divisionen.“

Mit einem so groben Mißverständnis beginnt also die Bekanntschaft Keplers mit den Logarithmen, mit der irrigen Auffassung nämlich, daß die mittlere, mit „Differentia“ überschriebene Spalte in Nepers Tafel, die tatsächlich die Logarithmen der Funktion Tangens enthält, nur den Sinn habe, die Funktion Sinus zu ersetzen. In anderer Wendung ist dieses Mißverständnis aus einer Stelle der „Weltharmonik“ (4. Buch, 7. Kap., Bd. VI, S. 277) herauszuhören: „Von den mathematischen Arten wohnt jene, die Kreis genannt wird, in ganz anderer Weise dem Geist inne, nicht nur als Idee äußerer Dinge, sondern auch als gewisse Form des Geistes selbst, schließlich als einzigartige Vorratskammer alles geometrischen und arithmetischen Wissens. Davon wird jenes in der Lehre von den Sinus, dieses in dem wunderbaren Arbeiten mit den Logarithmen ganz deutlich: Aus dem Kreis entstanden, stellen sie eine Art fertiger Zahlentafel dar für alle Multiplikationen und Divisionen, die je vorkommen können.“ Noch 7 Jahre später, in der Einleitung zum „Supplementum“ (S. 356), glaubt er den Leser eigens darauf aufmerksam machen zu müssen, daß „die Logarithmen nicht primär mit den Sinus bzw. den Geraden im Kreis entstehen, wie die Nepersche „Descriptio“, wenn sie zu unvorsichtig gelesen wird, es auszusprechen scheint, sondern ganz außerhalb der Geometrie des Kreises begründet werden, gleichsam im Gebiet des 5. Buches Euklids [Lehre von den Proportionen].“

Wir haben kein Recht, Kepler seinen anfänglichen Irrtum vorzuwerfen, und doch bedarf etwas daran der Aufklärung. Es ist nämlich zu fragen, ob ihm die Idee des logarithmischen Rechnens so völlig neu war, daß ihm die Möglichkeit der richtigen Eingliederung fehlte. Wir wissen heute, daß Neper seinen Ruhm mit Jost Bürgi teilen muß, der zwar seine „Arithmetische vnd Geometrische Progreß-Tabulen“ erst 1620 und dazu ohne den angekündigten „Unterricht“ in Prag drucken ließ, aber nicht nach Neper und unabhängig von ihm ein logarithmisches Rechnen entwickelt hatte. Nur wenige wußten davon, zu diesen wenigen gehört aber Kepler, der mit Bürgi in der Zeit des gemeinsamen Prager Aufenthaltes (1605–1612) in ständigem Gedankenaustausch stand. Das geht aus der oft zitierten Bemerkung pag. 11 der Rudolphinischen Tafeln hervor: „Diese logistischen Apices waren es auch, die Jost Bürgi viele Jahre vor der Neperschen Publikation den Weg zu genau diesen Logarithmen gewiesen haben.“ Er fährt dann aber fort: „Allerdings hat der Zauderer und Geheimtuer das neugeborene Kind verkommen lassen, statt es zum allgemeinen Nutzen groß zu ziehen“. In diesem Nachsatz, aus dem man unschwer einen Ärger heraushört, steckt wohl des Rätsels Lösung. Kepler konnte

von sich bekennen (Bd. IV, S. 286 f.): „Ich habe mich immer an die Regel gehalten, zu loben, was andere meiner Meinung nach gut gemacht haben. . . . Niemals habe ich fremdes Wissen verachtet oder verhehlt, wo mir eigenes fehlte“. Man darf es ihm deshalb glauben, daß er auch Bürgis Leistung voll gewürdigt hätte, wenn er etwas darüber zu sagen gewußt hätte. Da er es nicht getan hat, muß man den Schluß ziehen, daß Bürgis Mitteilungen nicht über vage Andeutungen hinausgingen. Mit Recht sah also Kepler in Nepers Logarithmentafel etwas ganz Neues, und Bürgi war im Unrecht, wenn er, wie es den Anschein hat, Kepler seinen Enthusiasmus übelnahm.

Erst im Juli 1619 kommt endlich ein Exemplar der „Descriptio“ nach Linz; seine irrtümliche Auffassung vom Wesen der Logarithmen hatte Kepler inzwischen bereits korrigiert. Sein ehemaliger Gehilfe in Prag und Linz, Benjamin Ursinus, hatte nämlich im Lauf des Jahres 1618 eine „Trigonometria Logarithmica Joh. Neperi“ herausgebracht, um die deutschen Leser mit Nepers Logarithmen und ihren Anwendungen bekannt zu machen, jedoch mit fünf- statt siebenstelligen Logarithmen. Jetzt ist sich Kepler nicht nur über das Wesen der Logarithmen klar, sondern auch über die Notwendigkeit, die Rudolphinischen Tafeln im letzten Moment von Prosthaphärese auf logarithmische Rechnung umzustellen. So kommt es in den zwei fast gleichzeitig, Anfang Dezember 1618 geschriebenen Briefen an Joh. Remus und Mästlin zum Ausdruck (Bd. XVII, S. 293 und S. 297 ff.). In heller Begeisterung widmet er die Ephemeride auf das Jahr 1620, deren Vorwort das Datum 28. Juli 1619 trägt, „dem Erlauchten und Edlen Herrn, Herrn Joh. Neper, Baron von Merchiston in Schottland“.

Die Nepersche Tafel ist vorzugsweise für trigonometrische Rechnung gedacht und eingerichtet, Kepler dagegen hat vor allem logistische Rechnungen im Auge. Sofort spricht er deshalb von einer Umarbeitung der Neperschen Tafel für seine Zwecke. Das bezieht sich jedoch nur auf Form und Einrichtung der Tafel, nicht auf die Logarithmen selbst. Die Kritik an ihnen kommt erst mit einer eigenen Theorie des Neperschen Logarithmus. Zu dieser wird er von seinem alten Lehrer Mästlin veranlaßt. Auf den erwähnten Brief Keplers vom 3. Dez. 1618 hatte dieser nämlich in einer späten Antwort am 2. März 1620 (Bd. XVII, S. 423) eine ganz negative Haltung zum Rechnen mit Neperschen Logarithmen eingenommen. Er stößt sich an ihrer Einführung durch das Bild zweier gegenläufig bewegter Punkte, unterstellt ihrem Urheber sogar, daß er wohl mit Absicht eine nicht runde Zahl als Basis gewählt habe, um die Sache zu verschleiern, und schließt wörtlich: „Ich halte es für unwürdig eines Mathematikers, mit fremden Augen sehen zu wollen und sich auf Beweise zu stützen oder als solche auszugeben, die er nicht verstehen kann. . . . Deshalb mache ich mir einen Kalkül nicht zu eigen, von dem ich glaube oder annehme, daß er bewiesen sei, sondern nur einen, von dem ich das weiß.“

Sofort bemüht sich nun Kepler um einen arithmetischen, auf euklidischer Grundlage ruhenden Beweis. Er teilt ihn Mästlin zu Beginn des langen Briefes mit, der am 12. April 1620 angefangen, besonderer Umstände halber jedoch

erst am 19. Juni abgeschlossen wurde (Bd. XVIII, S. 7 ff.), und schließt ihn mit der Aufforderung: „Nach diesem Beweis dürft Ihr nicht länger an den Logarithmen herumzweifeln“. Wichtiger ist für uns aber die Konsequenz aus der neuen Theorie für Kepler selber, die in einer Randnote zu dem Brief angedeutet ist: „Die Logarithmen sind freilich jetzt noch genauer. Man muß nämlich von einer noch viel kleineren Proportion ausgehen, so daß das Verhältnis von 100000.00 zu 99999.99 eine Benennung [statt „nomen“ sagt er später „mensura“] erhält, die etwas größer als die Einheit ist. Da Neper nicht mit einer hinreichend kleinen Proportion beginnt, so gibt er als Logarithmus der Verdopplung, des Verhältnisses 100000.00 zu 50000.00, die Zahl 69314.69 an. Ich jedoch . . . fand für den Logarithmus dieses Verhältnisses 69314.72, drei Einheiten mehr als Neper. Wenn es auch nicht so wichtig ist, mit welcher Zahl die als kleinste angenommene Proportion benannt wird, so zieht sich diese Benennung eben doch durch die ganze Tafel hindurch.“ Kepler wird danach die Logarithmen für die Rudolphinischen Tafeln umberechnen müssen. Daß er auf seine Verbesserung stolz ist, beweist die Tatsache, daß er sie auf dem Titelbild der Tafeln verewigen ließ: Die auf dem Dach des Tempels stehende „Arithmetica“ trägt nämlich um den Kopf eine Gloriele mit der Zahl 69314 72, während sie in den Händen zwei Stäbe trägt, deren einer genau halb so lang ist wie der andere, das Verhältnis 2 : 1 andeutend. Von der Absicht, die neue Theorie des Logarithmus zu publizieren, ist vorerst aber nicht die Rede; dieser Entschluß reift vielmehr erst im folgenden Jahr 1621 in Tübingen, als sich Kepler des Hexenprozesses seiner Mutter wegen über ein Jahr, von Sept. 1620 bis Nov. 1621, in Württemberg aufzuhalten genötigt sah. „Da und dort“ kam er in dieser Zeit in Diskussion über die Nepersche Erfindung, vor allem in Tübingen mit Mästlin und Schickard, letzterer aufgeschlossen für das neue Rechnen, Mästlin dagegen immer noch auf seiner ablehnenden Haltung beharrend. Ganz eindeutig ist dieser gemeint, wenn Kepler in der Einleitung zum „Supplement“ (S. 355) von Leuten spricht, denen das Alter wohl die Klugheit vermehrte, dafür aber die Auffassung verlangsamte und die deshalb dem neuen Rechnen, das anstelle der Prosthaphärese in Aufnahme kommen soll, abwartend gegenüberstehen. Und man glaubt Mästlin selbst zu hören bei dem Gegenargument, es stehe einem Mathematiker schlecht an, sich kindlich über einen Kalkül zu freuen, der noch kein solides Fundament besitze und deshalb unvermutet in die Fallgrube des Irrtums führen könne. Denn Nepers Begründung durch fiktive Bewegungen könne nicht als vollgültiger Beweis gelten. Dann fährt Kepler wörtlich fort: „Das war für mich der Anlaß, auf der Stelle probeweise einen regelrechten Beweis zu entwerfen, den ich nachher, sobald ich nach Linz zurückgekehrt war, sorgfältiger ausarbeitete.“

Die Erfahrungen in Tübingen und anderwärts führen ihn also zu dem Entschluß, eine für die Publikation gedachte, auf Proportionen aufgebaute Theorie des Neperschen Logarithmus zu schaffen und dadurch die zögernden Mathematiker der strengen euklidischen Observanz von der Gültigkeit des logarithmischen Rechnens zu überzeugen. Mit der Theorie allein ist es jedoch nicht

getan, solange die Logarithmen selbst noch nicht Gemeingut der Rechner sind. Er muß der Theorie eine Logarithmentafel begeben, die selbstverständlich die verbesserten Zahlen enthalten und die für die Rudolphinischen Tafeln zweckmäßige Form bekommen wird. Während nämlich Neper im Titel der „Descriptio“ die „Anwendungen in beiderlei Geometrie“ an erster Stelle nennt, fordert Kepler (Rudolphinische Tafeln pag. 10): „Weil die alten logistischen Additionen [müßte heißen: Multiplikationen] und Divisionen auch den Geübten sehr viel Arbeit und Mühe bereiten, weil es aber doch ein Hauptzweck der Tafeln sein soll, die Rechenarbeit zu verringern, die Kräfte des angestrengten Geistes zu schonen und Zeit zu gewinnen, so faßte ich in den vergangenen 6 Jahren den Entschluß, die Neperschen Logarithmen, eine hervorragende Erfindung, auch in die Logistik einzuführen.“ Der Gedanke, die beiden Tafelarten nebeneinanderzustellen, ist zu dieser Zeit noch nicht reif. Schließlich bedürfen die beiden Teile, Theorie und Tafel, dringend einer ausführlichen Anleitung zum Rechnen mit Logarithmen. Aus dem einen Entschluß entwickelt sich also zwangsläufig ein größeres Programm, das in der Folge durchgeführt wird.

Die innere Vorgeschichte der logarithmischen Schriften ist damit aber nicht zu Ende, es folgt vielmehr ein heikles Nachspiel um die Frage: Nepersche oder Briggs'sche Logarithmen. Kaum daß nämlich die Neperschen Logarithmen geboren sind, werden sie durch die dekadischen schon wieder verdrängt. Die erste Ankündigung dieser letzteren steht im Appendix von Nepers „Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio“ (1619) mitsamt einer Anweisung zu ihrer Berechnung mit Hilfe fortgesetzter Mittelbildung, derselben, die Kepler unabhängig davon in dem Brief an Mästlin für seine eigenen Logarithmen entwickelt hatte. Da Kepler dieses Büchlein in Tübingen im Sommer 1621 vorfand, müßte man auch ohne seine ausdrückliche Bestätigung annehmen, daß er seit dieser Zeit von der Möglichkeit dekadischer Logarithmen wußte. Seine Stellungnahme dazu erfahren wir aber erst, nachdem ihm Edmund Gunter, ein Freund von Briggs, seinen „Canon triangulorum“, eine siebenstellige Tafel mit den dekadischen Logarithmen der trigonometrischen Funktionen (vgl. Tropfke II², 183), mit einem leider nicht erhaltenen Begleitbrief zugesandt hatte – nebenbei gesagt: eine vornehme englische Geste, denn die Sendung war ohne Zweifel die Antwort auf Keplers Bitte an den bereits toten Neper in der Ephemeride auf das Jahr 1620, ihn über alle Fortschritte auf dem laufenden zu halten.

Gunter hatte sein Paket im Febr. 1622 abgeschickt, am 1. Nov. 1623 kam es in Linz an; gerade in die Zwischenzeit fällt aber Keplers „Chilias“, und jedenfalls vor dem 4. Dez. 1623, an dem der Dankbrief an Gunter geschrieben wird (Bd. XVIII, S. 144 f.), trifft auch die „Chilias“ von Briggs bei Kepler ein. Nach kurzer Einleitung schreibt er nun an Gunter: „Sehr erfreut bin ich über diese Form [der Logarithmen], von der ich kurz zuvor in Tübingen in Württemberg aus dem posthumen Büchlein Merchistons (oder ist es vielleicht sein Sohn?) Kunde bekommen hatte. Ich habe auch einige Mühe auf diese

Art verwandt, sobald ich im November 1621 nach Linz zurückgekehrt war.“ Er begründet nun eingehend seinen Verdacht, daß in der Briggs’schen „Chilias“ ein Fehler stecke, der aber in Wirklichkeit auf seinen eigenen, nicht hinreichend genauen Wert für den Logarithmus der Verzehnfachung zurückfällt. Dann fährt er fort: „Ich sehe, daß Eure Logarithmen um die lästigen cossischen Sicherungen [des Vorzeichens wegen] herumkommen; ich sehe sie wachsen mit wachsendem Wert des Verhältnisses und in der Toga der Sinus prächtig geschmückt einherschreiten. Da sie sich aber zu weit von ihrem Ursprung entfernen und doch, meiner festen Meinung nach, auf keine andere Weise als durch Ableitung aus der ersten Neperschen Form herzustellen sind, wie ich es vorhin getan habe, so bin ich sehr in Zweifel, welchen Weg ich in den Rudolphinischen Tafeln wählen soll. Fast will es mir scheinen, daß ich bei der bereits fertig gerechneten Tafel bleiben solle. Denn in den Anleitungen zu den Rudolphinen brauche ich ja nicht die ganze Lehre von den Logarithmen . . . und der Verdruß mit den cossischen Vorsichtsmaßnahmen wird so weit wie möglich behoben. Wenn es mir möglich ist, will ich jedoch versuchen, die Heptacosias, die ein Bestandteil der Rudolphinen werden soll, mit geringstem Arbeitsaufwand nach Euren Logarithmen umzugestalten.“ Man spürt es deutlich, daß Kepler nur mit halbem Herzen bei den neuen Logarithmen ist, obwohl er zu dieser Zeit seine einzige Dreiecksberechnung in dekadischen Logarithmen durchführt (Brief an Landgraf Philipp von Hessen, Bd. XVIII, S. 150), daß vielmehr die Neperschen bei ihm „Erstlingsrecht“ genießen, wie er sich Guldin gegenüber ausdrückt (Bd. XVIII, S. 253). Nachdem vollends seine „Chilias“ im Herbst 1624 gedruckt vorlag, war praktisch keine Möglichkeit mehr, in den Rudolphinen auf dekadische Logarithmen überzugehen. Dieses Gefühl hat auch Briggs, der für Gunter im März 1625 antwortet (Bd. XVIII, S. 221): „In Eurem soeben erschienenen Buch über die Logarithmen anerkenne ich den Scharfsinn und lobe ich den Fleiß. Hättet Ihr jedoch auf den Erfinder Merchiston gehört und wäret Ihr mir gefolgt, dann hättet Ihr meiner Meinung nach denen, die am Gebrauch der Logarithmen ihre Freude haben, einen besseren Dienst erwiesen.“ Keplers Antwort an Briggs, die wohl gegeben werden mußte, da dieser ihm mit dem Brief seine „Arithmetica logarithmica“ geschickt hatte, ist verlorengegangen, sie dürfte aber, was die Logarithmen betrifft, etwa mit dem übereingestimmt haben, was er in den Rudolphinischen Tafeln (Praecepta, pag. 18) zu dem Thema sagt: „Gleichwohl, um beiläufig daran zu erinnern, ist zum Rechnen mit Absolutzahlen weder meine Chilias recht geeignet (da sie nicht für diesen Zweck geschaffen wurde), noch die Nepersche Form der abnehmenden Logarithmen überhaupt, die ich in dieser Heptacosias trotzdem als besonders geeignet für die Logistik beibehalten habe. Die andere Form der wachsenden Logarithmen, welche der Engländer Edmund [sic!] Briggs in einem großen Folioband [der „Arithmetica logarithmica“, vgl. Tropfke II², 183] ausgearbeitet hat, ist für Multiplikation und Division von Absolutzahlen mit jeder wünschenswerten Genauigkeit weitaus am befriedigendsten und bequemsten. Es ist gut, mit einem Wort daran

zu erinnern, damit die Arithmetiker wissen, wo sie sich Hilfe holen sollen, um die Schwierigkeiten zu beheben, die im 8. Kapitel meines Supplements [S. 389 ff., speziell S. 401 ff.] und auch sonst mit Absolutzahlen begegnen.“

Subjektiv ist Kepler mit dieser Erklärung gerechtfertigt; objektiv ist dagegen zu sagen, daß die Entscheidung falsch war, der Winkel- und Zeitberechnung mit ihren 60- bzw. 24-teiligen Einheiten wegen die dekadischen Logarithmen zu opfern. Wäre das Gewicht der Rudolphinischen Tafeln nicht so ungeheuer groß gewesen, dann hätte es geschehen können, daß sie mit den rasch veralteten Neperschen Logarithmen beiseite gelegt worden wären. So aber, da man ihrer in den nächsten hundert Jahren nicht entraten konnte, haben sie den Neperschen Logarithmen zu einer unverdient langen Weiterexistenz verholfen. Es passiert dabei das Kuriose, daß die „*Tabulae manuales logarithmicae*“ von Keplers Schwiegersohn Jakob Bartsch, ein von Fehlern strotzendes Tabellenwerk, nach fast 70 Jahren, i. J. 1700, von Joh. Casp. Eisenschmid neu herausgegeben werden müssen, nur mit Rücksicht auf die Benützung der Rudolphinischen Tafeln.¹

Die Bedeutung von Keplers neuer Begründung der Neperschen Logarithmen wird durch deren kurze Lebensdauer nicht berührt, da sie weniger in sachlicher als methodischer Richtung zu suchen ist. Man kann sogar die Vermutung aussprechen, daß uns diese Arbeit, die wir heute zu den frühesten Vorläufern der Infinitesimalrechnung zählen müssen, nicht geschenkt worden wäre, wenn sich Kepler die Briggs'schen Logarithmen zu eigen gemacht hätte.

DRUCKGESCHICHTE

Ganz durchsichtig ist die Druckgeschichte der „*Chilias*“ nicht. Das Manuskript wird jedenfalls im Winter 1621/22 fertig. Gewidmet ist es dem Landgrafen Philipp von Hessen-Butzbach, den Kepler 1621 von Württemberg aus besuchte und mit dem er sich ebenfalls über die Logarithmen unterhielt, wie aus dem Brief des Landgrafen vom Juni 1623 (Bd. XVIII, S. 131) zu entnehmen ist. Als Druckort hat Kepler zunächst Tübingen im Auge; er schickt daher die „*Demonstrationem Logarithmorum*“ „*sampt der Chiliade Logarithmorum*“ an Mästlin, „ob etwa solliche unter seiner correction alda gedruckt werden möchten“ (Bd. XVIII, S. 151). Bei diesem bleibt nun aber das Manuskript liegen, so lange, daß Keplers „Interesse an dem Büchlein erkaltete“ (S. 356). Erst nach der Mitte des Jahres 1623 wird Schickard beauftragt, Mästlin zur Herausgabe der Arbeit zu bewegen, vermutlich, weil sich der Landgraf inzwischen angeboten hatte, den Druck der Arbeit zu besorgen. Der Gang der Dinge läßt sich nun so rekonstruieren: Am 20. Sept. 1623 berichtet Schickard (Bd. XVIII, S. 142): „Bis zu diesem Zeitpunkt hat mich Mästlin

¹ Joh. Kepleri et Jacobi Bartschii *Tabulae manuales logarithmicae ad calculum Astronomicum, in specie Tabb. Rudolphinarum compendiose tractandum mire utiles*. . . Curante Joh. Casp. Eisenschmid. Argentorati 1700.

vertröstet, obwohl ich ihn die ganze Woche her täglich wegen Rückgabe Deiner Logarithmen gemahnt habe. Ich verstehe gar nicht recht, warum er sich so schwierig anstellt.“ In der Nachschrift zu diesem Brief kann er aber melden: „Inzwischen habe ich nach langer Weigerung die Logarithmen endlich von Mästlin zurückbekommen.“ Im Dezember teilt Kepler dem Landgrafen mit, er habe „diß wercklin zuruckh abfordern lassen, wölches anjetzo bey Schickharden . . . behaltsweis hinterlegt ist. Weil dan E. F. Gn. diß wercklin dedicirt ist, also stelle E. F. Gn. Ich es haim, ob sie solches zu Tübingen vnter Schickards Correctur wollen zudruckhen befehlen, oder ob sie zu Franckfort Jemand Tauglichen haben, der vleissig corrigire, weil alda schöne Typi seind, auff wöllichen fall E. F. Gn. solches wercklin bey Schickarden zuerheben haben werden“ (Bd. XVIII, S. 151).

Nun hört Kepler lange nichts von seinem Manuskript. Erst am 6./16. Juni 1624 schreibt Schickard, wohl auf eine verlorene Anfrage hin: „Deine Logarithmen habe ich im vergangenen Herbst [müßte wohl heißen: Frühjahr] richtig und sorgfältig besorgt. Ich zweifle nicht, daß der Landgraf sie bekommen hat, obwohl niemand zurückgeschrieben hat“ (Bd. XVIII, S. 185 f.). Am 7./17. Sept. teilt sodann der Landgraf selbst Kepler mit (Bd. XVIII, S. 214): „Mögen darauff in gnaden Euch vnverhalten, daß vns in nechst verschieener Fastenmeß die Logarithmi gleichfalß zugeschickt worden, welche wir zwar dem bono publico nicht verhalten, sondern gern zu Franckfurtt getruckt sehen mögen. Weil aber daselbsten Niemandt sich dessen vnterfangen wöllen, haben wir das werck einem Buchtrucker zu Gießen, Caspar Chemlin genandt, zu trucken vntergeben, welcher es auch also außgefertiget, wie Ihr selbst auß beygefügtten exemplarien (deren wir Euch hiermit zehen vberschicken) zusehen“. Zugleich läßt er Kepler „hinwider“ 50 Reichstaler als Remuneration zugehen „beneben fernerm gnädigen gesinnen, Ihr den usum gedachter Logarithmorum Vns zu communiciren“. Über ein Jahr dauert es aber, bis Kepler diesen Brief mit dem Geld, was beides bei dem Buchhändler Tampach in Frankfurt zur Weitergabe hinterlegt war, erhält. Die „Chilias“ war inzwischen auf der Frankfurter Herbstmesse 1624 zu kaufen und im Meßkatalog angezeigt. Auf diesem Weg mußte also Kepler erfahren, was geschehen war. Zum Überdruß schreibt Schickard unterm 30. Sept./10. Okt.: „Deine Logarithmen sind in Marburg gedruckt worden, ein Exemplar hat mir der Landgraf geschickt, Dir ohne Zweifel schon längst mehr auf anderem Weg, sonst würde ich Dir meines inzwischen zur Verfügung stellen“ (Bd. XVIII, S. 214).

Obwohl der Brief Philipps ihn noch längst nicht erreicht hat, fühlt sich Kepler jetzt doch veranlaßt, die fehlende Anleitung zum Gebrauch der Logarithmen schleunigst in Angriff zu nehmen. Sinngemäß gibt er ihr die Bezeichnung „Supplementum Chiliadis“. Am 23. April bestätigt der Landgraf den Empfang des Manuskripts und teilt mit: „Eben derselbige Buchtrucker, welcher nunmehr zu Marburg sein haußliche wohnung helt, der will auch itzige vberschickte praecepta zutrucken sich vnterfangen, vnd vff kunfftige Herbstmeß

außfertigen, auch die *typos numericos apicatos* sonderlich darzu gießen lassen, wofern er nur in zeitten den *Titulum, dedicationem, appendicem vnd indicem* . . . bekommen kan“ (Bd. XVIII, S. 233 f.). Tatsächlich lag das „*Supplementum*“ zur Herbstmesse 1625 fertig vor.

Aus dem heutigen Bestand der erhaltenen Exemplare läßt sich der Schluß ziehen, daß die zwei Teile, „*Chilias*“ und „*Supplementum*“, in den meisten Fällen zusammen verkauft wurden. Kepler kam, wie aus dem Brief an Guldin vom 10. Dez. 1625 (Bd. XVIII, S. 252) hervorgeht, am 4. Dezember endlich in den Besitz seiner 10 Exemplare der „*Chilias*“ und der 50 Reichstaler, vom „*Supplementum*“ erhielt er mit derselben Sendung nur 2 Exemplare.

DIE NEPERSCHEN UND DIE KEPLERSCHEN LOGARITHMEN

Keplersche Logarithmen im eigentlichen Sinn gibt es zwar nicht; aus der Entstehungsgeschichte geht deutlich genug hervor, daß Kepler nichts anderes will als eine strengere Begründung und genauere Berechnung der Neperschen Logarithmen. Der Kürze halber mag es aber trotzdem gestattet sein, vom Keplerschen Logarithmus zu sprechen und ihn durch das Symbol *Log* zu bezeichnen, während der Nepersche durch *log* angedeutet werden soll.

Beide, Neper und Kepler, gehen in gleicher Weise aus von der Zuordnung einer geometrischen zu einer arithmetischen Reihe, welch letztere von 0 bis ∞ wächst, während die erste von einer angenommenen größten Zahl *z* bis 0 abnimmt. Die Verschiedenheit beginnt bei der Herstellung der Zuordnung und wirkt sich aus bis zur Berechnung des Logarithmus, der nichts anderes ist als die zu einer gegebenen Zahl der geometrischen Reihe zugeordnete Zahl der arithmetischen Reihe.

Neper läßt die beiden Zahlenreihen durch die Bewegung zweier Punkte *P* und *Q* auf den parallelen, gleichsinnig orientierten Zahlengeraden *g* und *h* entstehen. Zur Zeit $t = t_0$ befinde sich *P* in $P_0 = z$, der entsprechende Punkt *Q* in $Q_0 = 0$, zu den Zeitpunkten $t_1 = a$, $t_2 = 2a$, $t_3 = 3a$. . . $t_i = i \cdot a$ sollen für die zugehörigen Punkte $P_1, P_2, P_3, \dots, P_i$ bzw. $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_i$ die Beziehungen gelten $P_0P_1 : P_1P_2 : P_2P_3 : \dots : P_{i-1}P_i = \frac{1}{q} > 1$ und $Q_0Q_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = \dots = Q_{i-1}Q_i$. Der Punkt *Q* bewegt sich also mit konstanter Geschwindigkeit v' in einer Richtung auf *h*, indes *P* sich auf *g* gegenläufig und mit einer in geometrischer Progression abnehmenden Geschwindigkeit v bewegt. Über das Verhältnis dieser Geschwindigkeiten verfügt Neper in der Weise, daß er die Anfangsgeschwindigkeiten v_0 von *P* und v'_0 von *Q* einander gleichsetzt. Die strenge Durchführung dieser Vorschrift ist eine Aufgabe der Infinitesimalrechnung. Neper nimmt in erster Näherung v_0 als die gleichförmige Geschwindigkeit, die $P_0 = z$ in der Zeiteinheit nach $P_1 = z \left(1 - \frac{1}{z}\right)$ bringt. Da also $P_0P_1 = 1$ wird, so ist $v_0 = 1$ und $P_i = z \left(1 - \frac{1}{z}\right)^i$.

Größere Annäherung an den wahren Wert der Anfangsgeschwindigkeit v_0 erreicht Neper durch folgende Überlegung: Die Bewegung des Punktes P von P_0 nach P_1 ist ungleichförmig und abnehmend. Also ist $v_0 > 1$, $v_1 < 1$ und

$1 < v_0 < \left(1 + \frac{1}{z}\right)$. * Neper setzt daher $v_0 = \frac{1 + \left(1 + \frac{1}{z}\right)}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z}$ mit $z = 10^7$, also $P_i = 10^7 (1 - 10^{-7})^i$, $Q_i = i \cdot v_0 = i \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 10^{-7}\right)$. Q_i ist der Nepersche Logarithmus zum Numerus P_i . Da der Quotient $q = (1 - 10^{-7})$ nur sehr wenig von 1 verschieden ist, so rechnet Neper mit ihm direkt nur bis P_{100} , geht von da ab zum Quotienten $q' = (1 - 10^{-7})^{100}$ über und schließlich, nach weiteren 50 Schritten mit q' , zum Quotienten $q'' = (1 - 10^{-7})^{5000}$. (Dies ist das Schema, das jedoch mit Rücksicht auf runde Tafelwerte leicht modifiziert wird.) Um zum Logarithmus der Zahl $P_n = \frac{1}{z} = 5 \cdot 10^6$ zu gelangen, wären mit dem Quotienten q mehr als $5 \cdot 10^6$ Schritte erforderlich gewesen, die sich jetzt auf $(100 + 50 + 21 \cdot 69)$ reduzieren. Für die Genauigkeit bleibt aber die Zahl n bestimmend. Ist nämlich v_0 mit dem Fehler ε behaftet, so wird $Q_n = \log P_n$ um $n \cdot \varepsilon$ falsch. Der Fehler der Neperschen Logarithmen wächst mit wachsendem n oder abnehmendem Numerus.

Es ist also

$$\log 10^7 (1 - 10^{-7})^n = n \left(1 + \frac{1}{2} 10^{-7}\right) = n \cdot \alpha \quad \alpha = 1 + \frac{1}{2} 10^{-7}.$$

Ist nun $x = 10^7 (1 - 10^{-7})^y = z \left(1 - \frac{1}{z}\right)^y$, so wird $\log x = y \cdot \alpha$ und

$$\log x = \log z + y [\log(z-1) - \log z]$$

$$y = \frac{\log z - \log x}{\log z - \log(z-1)} = \frac{\log \frac{z}{x}}{\log \frac{z}{z-1}} = \frac{\ln \frac{z}{x}}{\ln \frac{z}{z-1}} = \frac{\log x}{\alpha}$$

$$\log x = \frac{\alpha}{\ln \frac{z}{z-1}} \cdot \ln \frac{z}{x} = \beta \cdot \ln \frac{z}{x}$$

wenn $\beta = \alpha : \ln \frac{z}{z-1}$ gesetzt wird.

Diese Beziehung gilt zwischen dem Neperschen und dem natürlichen Logarithmus einer Zahl x .

Dieser anschaulich geometrischen Begründung der Neperschen Logarithmen stellt Kepler eine rein begriffliche, arithmetische gegenüber, die, den Zahlencharakter des Logarithmus wahrend, zugleich zu einer genaueren Berechnung führen soll. Die Grundlage seiner Theorie ist die Unterscheidung eines Verhältnisses $a : b$ von seiner Maßzahl („mensura“), die hier durch $\left\{\frac{a}{b}\right\}$ bezeichnet werden soll. Er nimmt also den Begriff Logarithmus ganz wörtlich als „Zahl eines Verhältnisses“; es wird sich nämlich zeigen, daß $\left\{\frac{a}{b}\right\}$ bei

* Es ist $v_0 : v_1 = 1 : \left(1 - \frac{1}{z}\right)$, also $v_0 \approx v_1 \left(1 + \frac{1}{z}\right)$ und $v_0 < \left(1 + \frac{1}{z}\right)$.

bestimmter Wahl von a der Keplersche Logarithmus von b wird. Für Kepler fallen die Logarithmen „nicht eigentlich unter die Gattung der Linien bzw. der Bewegung und des Fließens, oder unter die einer anderen sinnlichen Quantität, sondern (wenn man so sagen darf) unter die Gattung der Relationen und der geistigen Quantität“ (S. 355). Geistige Quantitäten sind wie die sinnlichen beliebig unterteilbar. Bei Proportionen geschieht diese Teilung wieder durch Proportionen, deren Produkt dem Ausgangsverhältnis gleich ist. $\frac{a}{b}$ (wobei $a > b$ vorausgesetzt sei) wird durch ein Zwischenglied x , $a > x > b$, in die zwei Teilverhältnisse $\frac{a}{x}$ und $\frac{x}{b}$ geteilt, deren jedes kleiner ist als $\frac{a}{b}$. Von den Maßzahlen $\left\{\frac{a}{x}\right\}$ und $\left\{\frac{x}{b}\right\}$ wird verlangt, daß $\left\{\frac{a}{x}\right\} + \left\{\frac{x}{b}\right\} = \left\{\frac{a}{b}\right\}$ werde, außerdem sollen gleichen Verhältnissen gleiche Maßzahlen entsprechen, woraus sofort $\left\{\frac{1}{1}\right\} = 0$ folgt.

Zur Berechnung der Maßzahl $\left\{\frac{a}{b}\right\}$ bildet Kepler der Reihe nach die mittleren Proportionalen $x_1 = \sqrt{ab}$, $x_2 = \sqrt{ax_1}$, $x_3 = \sqrt{ax_2}$, $\dots$, $x_n = \sqrt{ax_{n-1}}$ wobei also $x_n = \sqrt[n]{a^{2^n-1} \cdot b}$ und $\left(\frac{a}{x_n}\right)^{2^n} = \frac{a}{b}$. Für die Maßzahlen gilt $\left\{\frac{a}{x_1}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{a}{b}\right\}$, $\left\{\frac{a}{x_2}\right\} = \frac{1}{4}\left\{\frac{a}{b}\right\}$, allgemein $\left\{\frac{a}{x_n}\right\} = \frac{1}{2^n}\left\{\frac{a}{b}\right\}$. Da sich $\left\{\frac{a}{x_n}\right\}$ mit $(a-x_n)$ bei wachsendem n dem Wert 0 nähert, so setzt Kepler bei hinreichend großem n $a-x_n = \left\{\frac{a}{x_n}\right\}$, also $\left\{\frac{a}{b}\right\} = 2^n \left\{\frac{a}{x_n}\right\} = 2^n (a-x_n)$.

Bei Kepler entsprechen sich also die geometrische Reihe $1, \frac{a}{x_n}, \left(\frac{a}{x_n}\right)^2, \dots, \left(\frac{a}{x_n}\right)^{2^n} = \frac{a}{b}$ und die arithmetische Reihe $0, \left\{\frac{a}{x_n}\right\}, 2\left\{\frac{a}{x_n}\right\}, \dots, \left\{\frac{a}{b}\right\}$. Der Übergang von der Maßzahl zum Logarithmus wird durch die Definition $\left\{\frac{z}{x}\right\} = \text{Log } x$ vollzogen, wobei z der Sinus totus ist, dessen Logarithmus 0 werden soll. Wie Neper wählt Kepler $z = 10^7$, nur schreibt er es 100000.00, so daß es auch als 10^5 verstanden werden kann. Als Beispiel berechnet er (S. 281) $\text{Log } 70000$ mit Hilfe der 30. mittleren Proportionale auf 20 Stellen genau. Diese Methode, die er schon 1618 in dem Brief an Mästlin entwickelt hatte, ehe er sie im Anhang zur „Constructio“ Nepers angedeutet fand, hat den Vorzug, daß die Zahl n der mittleren Proportionalen an den Numerus x angepaßt werden kann, sie macht aber auch den Grenzwertcharakter und die Irrationalität der Logarithmen deutlich. Natürlich kann Kepler den Grenzübergang noch nicht vollziehen, klar genug hat er ihn aber im Sinn und vor allem stimmen seine Zahlen innerhalb der berücksichtigten Stellenzahl mit dem strengen Grenzwert überein. Praktisch gilt daher, wenn in den vorausgehenden Gleichungen $a = z$, $b = x$ und daher $z - x_n = z \left[1 - \left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{2^n}}\right]$ gesetzt wird,

$$\text{Log } x = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot z \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{2^n}}\right] = z \ln \frac{z}{x}.$$

Der Unterschied zwischen dem Keplerschen $\text{Log } x$ und dem Neperschen $\log x$ ist daher $\text{Log } x - \log x = (z - \beta) \ln \frac{z}{x}$.

Zur Bestimmung des konstanten Faktors $(z - \beta)$ ziehen wir die von Kepler wie von Neper mit großer Stellenzahl berechneten Vervielfachungslogarithmen heran. So ist der Logarithmus der Verhundertfachung ($z : x = 100$, $z = 10^7$, $x = 10^5$) bei Kepler 460 517 02. 82, bei Neper 460 516 84.68. Daher wird $\text{Log } 10^5 - \log 10^5 = 18,14 = (z - \beta) \ln 100 = (z - \beta) \cdot 4,60517$ und $z - \beta = 3,94$ oder hinlänglich genau $z - \beta = 3,9$, also

$$\Delta = \text{Log } x - \log x = 3,9 \cdot \ln \frac{z}{x}.$$

Der Unterschied Δ , der bei $x = z$ natürlich 0 ist, wächst also mit abnehmendem Numerus x . Bei $x = 50000,00$, $z : x = 2$, beträgt er theoretisch $\Delta = 2,7$, nach den 9stelligen Verdoppelungslogarithmen $6931471.92 - 6931469.22 = 2,7$, während die Logarithmentafeln die Differenz $6931472 - 6931469 = 3$ ausweisen. Die immer wieder zu hörende Meinung, die Unterschiede in den beiden Tafeln seien zufälliger Natur, ist danach zu korrigieren.*

NEPERS „CANON“ UND KEPLERS „CHILIAS“

Die uns heute geläufige Zweiteilung einer Logarithmentafel in einen numerischen und einen trigonometrischen Teil wird erstmals in den Rudolphinischen Tafeln durchgeführt; bis dahin sucht Kepler wie Neper mit einer einzigen Tafel auszukommen. Bestimmend für deren Gestalt ist der hauptsächlichste Zweck, den der Autor im Auge hat. Da Neper die „Anwendungen in beiderlei Trigonometrie“ voransetzt, so ist sein „Canon“ im wesentlichen eine logarithmisch-trigonometrische Tafel mit dem von Minute zu Minute fortschreitenden Winkel als Argument. Auf die Argumentspalte folgt die Spalte der Sinus und die der Logarithmen der Sinus. Da der „Canon“ als Halbtafel angelegt ist, so wiederholen sich diese 3 Spalten von rechts nach links mit den Komplementen des Winkels. Schließlich hat Neper noch eine mit „Differentia“ überschriebene Mittelspalte, in der die Differenzen der links und rechts davon stehenden $\log \sin \alpha$ und $\log \sin (90^\circ - \alpha)$, also die Werte von $\log \tg \alpha$ stehen. Um diese Tafel auch für arithmetische Rechnungen nutzbar zu machen, verwendet Neper die natürlichen Sinuswerte als Numeri mit der Wirkung, daß die Logarithmen der natürlichen Zahlen erst durch eine Interpolationsrechnung gefunden werden müssen.

Im Gegensatz zu Neper hat Kepler vor allem Rechnungen mit benannten und unbenannten Zahlen im Auge, speziell Rechnungen mit Zeit- und Winkel-

* Paul Epstein kommt in seiner Arbeit „Die Logarithmenberechnung bei Kepler“ in: Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterricht 55 (1924) S. 148 zu dem falschen Ergebnis: „Die Keplerschen Logarithmen stimmen mit den Neperschen überein.“ Der Fehler liegt bei ihm im Ansatz der Neperschen Logarithmen $y_n = M \left(1 - \frac{1}{v}\right)^n$, $x_n = M \frac{n}{v}$, aus dem, $M = z$ gesetzt, $\log x = z \cdot \ln \frac{z}{x}$ folgt, also genau der Keplersche Logarithmus.

größen, seine Tafel hat daher die natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 zum Argument, wenn der Sinus totus z als 10^3 gelesen wird, andernfalls, wenn $z = 10^5$, alle vollen Hunderter. Jedenfalls enthält sie 1000 Zeilen (daher der Name „Chilias“) im Vergleich zu den 45 mal 60 Zeilen bei Neper. Die Spalte der Numeri wird ergänzt durch zwei weitere, die mit „Partes vicesimae quartae“ und „Partes sexagenariae“ überschrieben sind und der einfacheren Berechnung der Zeit nach Stunden, Minuten und Sekunden bzw. eines Winkels dienen. Beim Numerus N steht in der Zeitspalte die Zahl $\frac{N}{z} \cdot 24.0.0$, in der Winkelspalte $\frac{N}{z} \cdot 60.0$ (im Fall $\frac{N}{z} = \frac{7}{10}$ also 16.48.0 bzw. 42.0). Über den damit verbundenen Rechenvorteil wird in den Anmerkungen zu sprechen sein. Um die Tafel auch für trigonometrische Rechnungen verwendbar zu machen, gibt Kepler seinen ganzzahligen Numeri zugleich die Bedeutung von Sinuswerten, $N = \sin \alpha$. Er braucht also noch eine Spalte der zugehörigen Winkel α , die er als „Arcus circuli“ überschreibt. Da die Sinus konstante Differenz besitzen, wächst die Spalte der α ungleichmäßig von 0° bis 90° . In der zum Numerus N gehörigen Zeile stehen demnach in der Keplerschen „Chilias“ folgende 5 Werte: 1. α ; 2. $N = \sin \alpha$; 3. $\frac{N}{z} \cdot 24.0.0$; 4. $\text{Log } N$; 5. $\frac{N}{z} \cdot 60.0$. Zur Erleichterung der Interpolation sind in der ersten und vierten Spalte die Differenzen eingetragen.

Diese Tafel Keplers hat nun aber einen schwerwiegenden Nachteil. Sie läßt sich nämlich nicht als Halbtabel anlegen, und dadurch entfällt die mittlere Spalte der Mesologarithmi, wie der Log tg bei Kepler heißt. Er sieht sich deshalb genötigt, bei der Berechnung ebener und sphärischer Dreiecke auf die Tangensfunktion zu verzichten. Diesen Mangel gesteht er offen ein (S. 377), indem er zugleich die bessere Eignung des Neperschen „Canons“ für trigonometrische Rechnungen anerkennt. Auch Schickard kritisiert diesen Punkt in dem Brief vom 30. Sept. 1624 (Bd. XVIII, S. 215): „Ich freue mich, daß sie [die Logarithmen] nun allgemein zugänglich gemacht sind und beglückwünsche mich selbst zu einem so feinen Rechenhilfsmittel. Sie werden mir auch zu anderen Berechnungen nützlich sein, weil sie nach den Zahlen 1 bis 1000 angeordnet sind; um dessentwillen ziehe ich sie den Neperschen Logarithmen vor. Um aber die Wahrheit nicht zu verschleiern: in der Trigonometrie gebrauche ich lieber diese, die für die Sinus voller Minuten berechnet sind, als Deine, bei denen eine Reduktion nötig ist und das Aufsuchen des Proportionalteiles, was ziemlich aufhält, wenn man es eilig hat.“

Die Differenzen der Logarithmen, die als Rechenhilfsmittel gedacht sind, ermöglichen auch eine bequeme Kontrolle von Keplers Zahlen. Sind nämlich a_1 und a_2 benachbarte Argumente, $a_1 < a_2$, dann gilt

$$\text{Log } a_1 - \text{Log } a_2 = z \cdot \ln \frac{a_2}{a_1} = z \cdot (\ln a_2 - \ln a_1).$$

Dabei dürfen in der letzten Differenz a_1 und a_2 mit derselben Potenz von 10 dividiert oder multipliziert werden. Beispielsweise wird $\text{Log } 26\,600 - \text{Log } 26\,700 = 10^5 (\ln 267 - \ln 266) = 375.235$. Kepler gibt als Differenz 375.23 an.

„DER ZAHLEN INVENTARIUM“

In Bd. V der Pulkowoeer Kepler-Mss. befindet sich eine druckfertige Abhandlung von 13 Seiten (Bl. 157–163) mit dem sehr langen Titel: „Der Zahlen Inventarium oder Schottische Practica, das ist: Ein wunderbarliche neue ganz behende Art, die Regl Detri ohne Multiplizieren vnd Dividiern (welche species in großen Zahlen sehr beschwärllich seind) nur allain durch die aller ainfeltigste addition oder subtraction der Zahlen haab zuverrichten, beyleiffig zu quadriren, cubieren, sursolidieren etc. vnd allerhands Wurzel zu suechen, baides in der gemeinen Arithmetica vnd in der Logistica . . . alles durch hilff einer kurzen Tafel Logarithmorum (teütsch der Zahlen haab) welche ain tausent linien hat.“

Das Ms. stammt nicht von Keplers Hand, trotzdem kann an seiner Autorschaft nicht gezweifelt werden. Die wenigen Korrekturen in der Reinschrift sind von ihm eingetragen, im Titel ist ferner auf die „Chilias“ Bezug genommen und die Beispiele sind mit Keplerschen Logarithmen gerechnet (mit auffallenden kleinen Abweichungen von der „Chilias“ allerdings), ausschlaggebend ist jedoch der Umstand, daß ein weiteres Manuskript von 3 Blatt (ebenda XVIII, 103–105), das von Kepler selbst geschrieben ist, sich bei näherem Zusehen als Entwurf zu „Der Zahlen Inventarium“ erweist.

Die beiden Stücke sind deshalb interessant, weil sie zeigen, daß Kepler seine verbesserte Logarithmentafel sofort mit einer deutschen Unterweisung einem möglichst breiten Kreis von Rechnern zugänglich machen wollte. Das muß etwa 1620 gewesen sein. Die Logarithmentafel, die er der Unterweisung beigeben will, ist nur für gewöhnliche Zahlenrechnungen gedacht. Sie hat deshalb nicht 5, sondern „4 Columnas; in der ersten stehen die gemainen Zahlen nach einander von 100 000.00 bis 100.00. In der andern vnd vierten stehen eben diese aintausend Zahlen, doch in die Logistische Form verkhlaidet. Die dritte Columna mit rother Dinten hält die Logarithmos oder haaben selbst.“ Zur Erleichterung der Rechnung durch Wegfall der lästigen Proportionalteile hat Kepler aber zunächst im Sinn, die Tafel wesentlich zu erweitern. Der Entwurf beginnt mit dem Satz: „Nachfolgende praecepta seind fürnemlich auff ein solche Tafel gerichtet, in wölcher halbem Thail [Numeri > 50000.00] die Zahlen mit 10.00 springen.“ Da in der Reinschrift davon nicht mehr, sondern nur noch von der Tafel mit 1000 Linien die Rede ist, so kann man schließen, daß der Plan gleich wieder fallen gelassen wurde.

Die roten Logarithmen könnten an Bürgis rote Zahlen erinnern. Die Verwendung des deutschen Wortes „Haab“ für Logarithmus mit dem Plural „Haaben“ gleich Logarithmi und „der Zahlen Haab“ für Logarithmentafel wird wohl als Verdeutschung von „mensura“ zu verstehen sein.

DER INHALT DER SCHRIFTEN

Die Entstehungs- und Druckgeschichte erklärt, warum das, was ein einziges Buch sein sollte, als zwei getrennte Stücke erschien. Die Originaltitel sind S. 277 und S. 353 abgebildet. Das Mittelstück bildet die Tafel, die 1000 Numeri umfassende „Chilias“, ihr voraus geht die Demonstratio, die kunstgerechte Herleitung der Logarithmen, das Prinzip ihrer Verwendung und ihre praktische Berechnung; es folgt ihr das „Supplementum“, die ins einzelne gehende, an zahlreichen Beispielen illustrierte Anwendung der Tafel in Arithmetik, Logistik und Trigonometrie. Ein Sonderstück ist die Einleitung zum „Supplement“, die ihrem Charakter nach zum Ganzen gehört und von Frisch deshalb an die Spitze der Demonstratio gestellt wurde.

I. „CHILIAS LOGARITHMORVM“

1. Demonstratio Structurae Logarithmorum.

Man muß sich der Veranlassung zu dieser Schrift erinnern, des Anstoßes, den Nepers anschaulich-kinematische Begründung der Logarithmen bei dem strengen Mästlin erregte, um sich klar zu sein, daß Kepler more geometrico, d. h. deduktiv vorgehen wird. Seine Demonstratio ist schulgerecht aus 30 Propositionen aufgebaut, denen 3 Postulate und 2 Axiome vorangehen. Die Eigenart seines Beweisganges besteht darin, daß er nicht direkt auf den Logarithmus ausgeht, sondern zunächst von einer allgemeinen Theorie des Maßes von Proportionen handelt und erst von Prop. 20 ab den Logarithmus der Zahl a als Maß der Proportion $\frac{z}{a}$ einführt, wobei z die als *sin tot* fungierende größte Zahl ist. Es bleiben also auch die zwei Reihen, von denen Neper ausgeht, ganz im Hintergrund.

Hinter Prop. 20 ist also der Haupteinschnitt. Der vorausgehende Teil hat theoretischen Charakter, in seinem Mittelpunkt steht die independente Berechnung einer Maßzahl $\left[\frac{a}{b}\right]$; der nachfolgende Teil hat die praktische Aufstellung einer Logarithmentafel zum Gegenstand, in dem Methoden der näherungsweisen Berechnung neuer Logarithmen aus bereits bekannten entwickelt werden. Der Aufbau der Demonstratio ist also straff und – gelegentlich geäußerten Zweifeln zum Trotz – ganz klar. Er wird vielleicht dadurch etwas verschleiert, daß Kepler mit Worten umständlich beschreibt, was mit mathematischer Symbolik viel einfacher auszudrücken wäre. Um so mehr fühlen wir uns berechtigt, die Wiedergabe seines Gedankenganges in moderner Zeichensprache zu verdeutlichen.

Der erste Teil bis Prop. 20 läßt 3 Abschnitte erkennen. Der erste umfaßt neben den 3 Postulaten und 2 Axiomen die Propositionen 1–7, der zweite Prop. 8–11, der dritte schließlich Prop. 12–20.

Im ersten Abschnitt können wir die Axiome außer Betracht lassen. Wichtig sind dagegen die Postulate für die Grundlegung des Maßes einer Proportion („mensura proportionis“). Gleich im ersten Postulat wird verlangt, daß alle unter sich gleichen Proportionen durch dieselbe Quantität zu messen seien. Im zweiten Postulat ist von der Teilung eines gegebenen Verhältnisses die Rede. Speziell soll ein Verhältnis $a : b$ durch die mittlere Proportionale x in zwei gleiche Teilverhältnisse $a : x = x : b$ geteilt werden, jedes dieser beiden durch die mittleren Proportionalen y_1 und y_2 wieder in die gleichen Teilverhältnisse $a : y_1 = y_1 : x$ und $x : y_2 = y_2 : b$, woraus $a : y_1 = y_1 : x = x : y_2 = y_2 : b$ folgt. Nach der n ten Wiederholung desselben Verfahrens hat man $2^{n-1} = m$ Zwischenglieder $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_m$, welche die fortlaufende Proportion $a : u_1 = u_1 : u_2 = \dots = u_m : b$ bilden (Prop. 7). Verlangt wird in dem Postulat 2, daß die Teilung bis zu einer solchen Zahl m weitergetrieben werde, bis die Differenzen zwischen den Gliedern der Teilverhältnisse alle kleiner werden als irgendeine vorgegebene Größe. Diese größte Zahl m , bei der also der Teilungsprozeß beendet wird, bestimmt das „kleinste Proportionselement“. Das Maß für dieses Element, das an sich willkürlich gewählt werden kann, soll nach Postulat 3 die Differenz der beiden Glieder des Verhältnisses sein. Stillschweigend steckt in den Postulaten auch die Forderung $\left\{ \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{b} \right\} = \left\{ \frac{a}{x} \right\} + \left\{ \frac{x}{b} \right\}$.

Im ersten Abschnitt ist weiterhin nur von fortlaufenden Proportionen zwischen den Endgliedern a und b ($a > b$) die Rede. Für sie folgt aus $\frac{a}{u_1} = \frac{u_1}{u_2} = \dots = \frac{u_n}{b}$ die Proportion $\frac{a - u_1}{u_1 - u_2} = \frac{u_1 - u_2}{u_2 - u_3} = \dots = \frac{u_{n-1} - u_n}{u_n - b} = \frac{a}{u_1}$ (Prop. 2). Es ist daher $a - u_1 > u_1 - u_2 > u_2 - u_3 > \dots > u_n - b$, wie Prop. 3 behauptet. Wird nun $\left\{ \frac{a}{u_1} \right\} = a - u_1$ angenommen, dann wird $\left\{ \frac{u_i}{u_{i+1}} \right\} > u_i - u_{i+1}$ (Prop. 4) und $\left\{ \frac{a}{u_i} \right\} = \left\{ \frac{a}{u_1} \cdot \frac{u_1}{u_2} \cdot \dots \cdot \frac{u_{i-1}}{u_i} \right\} = i \cdot (a - u_1) > a - u_i$ (Prop. 5). Wird dagegen die Wahl des Maßes so getroffen, daß $\left\{ \frac{a}{u_i} \right\} = a - u_i$, dann folgt wegen $\left\{ \frac{u_k}{u_{k+1}} \right\} = \frac{a - u_i}{i}$ die Gleichung $\left\{ \frac{a}{u_k} \right\} = k \cdot \frac{a - u_i}{i}$ und $\frac{a - u_i}{i} \geq \frac{a - u_k}{k}$ für $k \geq i$; also $\left\{ \frac{a}{u_k} \right\} \geq (a - u_k)$, je nachdem $k \geq i$ ist. (Prop. 6).

Die 4 Lehrsätze des zweiten Abschnitts handeln im Gegensatz dazu von Zahlenfolgen, die keine fortlaufende Proportion bilden. Sofort treten jetzt inkommensurable Verhältnisse auf, für die in Prop. 8 die Erklärung gegeben wird. Es ist da die Rede von Quantitäten, die in der Reihenfolge ihrer Größe angeordnet sind, den Endgliedern a und b der Reihe und von den Zwischengliedern. Inkommensurabel werden die Teilverhältnisse $a : x$ und $x : b$ im Vergleich mit $a : b$ genannt, wenn x bei keiner wirklichen oder möglichen Wahl der kontinuierlichen Reihe $a : u_1 = u_1 : u_2 = u_2 : u_3 = \dots = u_n : b$ einem Zwischenglied u_k gleich wird.

In den folgenden Propositionen 9–11 werden a und b als aussprechbare, d. h. hier als rationale Größen vorausgesetzt. Abgesehen von dem Fall, daß

a und b sich zueinander verhalten wie Potenzen von ganzen Zahlen, behauptet Prop. 9, daß eine fortlaufende Proportion zwischen a und b kein aussprechbares Zwischenglied enthalten könne; während Prop. 10 umgekehrt aussagt, daß in der Reihe aussprechbarer Größen $a > u_1 > u_2 > \dots > b$, sofern sich a und b wieder nicht wie Potenzen ganzer Zahlen verhalten, keines der Zwischenglieder u_k das Verhältnis $a : b$ in kommensurable Teile teilt. Prop. 11 hat den speziellen Fall im Auge, daß die Glieder eine arithmetische Reihe bilden, und sagt aus, daß dann die Verhältnisse konsekutiver Glieder ohne Einschränkung unter sich inkommensurabel seien. Den Beweis dafür bleibt Kepler schuldig; er verifiziert ihn nur am Beispiel $a : b = 18 : 8 = 3^2 : 2^2$.

Der dritte, von Prop. 12 bis 20 reichende Abschnitt dient der Maßberechnung im allgemeinen Fall. Zur Vorbereitung werden einige Ungleichungen entwickelt. Ist $a > u_1 > u_2 > \dots > u_n > b$, dann ist nach Prop. 12 $\left\{ \frac{u_1}{u_k} \right\} > u_1 - u_k$, wenn $\left\{ \frac{a}{u_1} \right\} = a - u_1$, $\left\{ \frac{u_1}{u_k} \right\} < u_1 - u_k$, wenn $\left\{ \frac{u_n}{b} \right\} = u_n - b$ gewählt wurde. Diese Aussage ist nach Prop. 6 und 3 richtig, wenn die u_i eine fortlaufende Proportion bilden. Andernfalls kann man – eine typische Infinitesimalbetrachtung – die Voraussetzung durch ein genügend dichtes Netz von mittleren Proportionalen mit jeder beliebigen Annäherung erzwingen. Nach Lehrsatz 13 bestehen zwischen den drei Größen $a > u > b$ die Ungleichungen $\left\{ \frac{a}{b} \right\} : \left\{ \frac{u}{b} \right\} < \frac{a-b}{u-b}$ und $\left\{ \frac{a}{b} \right\} : \left\{ \frac{a}{u} \right\} > \frac{a-b}{a-u}$, woraus Kepler irrtümlich schließt, daß dieselben Ungleichungen auch für die Verhältnisse $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{u}$ und $\frac{u}{b}$ gelten. Richtig ist dagegen für den Sonderfall $a - u = u - b$, daß aus $\left\{ \frac{a}{u} \right\} < \left\{ \frac{u}{b} \right\}$ auch $\frac{a}{u} < \frac{u}{b}$ folgt. Für eben diesen Fall gilt auch Lehrsatz 14 des Inhalts, daß $\frac{a}{b} > \left(\frac{a}{u} \right)^2$ sei, was man durch $\frac{a}{b} < \left(\frac{u}{b} \right)^2$, also $\frac{a}{u} < \sqrt{\frac{a}{b}} < \frac{u}{b}$ ergänzen könnte. Die Voraussetzung $a - u = u - b$ wird insbesondere durch die drei Größen a , b , $(2b-a)$ erfüllt, wenn $a > b > \frac{a}{2}$. Daher wird $\frac{a}{2b-a} > \left(\frac{a}{b} \right)^2$, wie Lehrsatz 15 behauptet. Die Vorbereitung schließt mit dem allgemeinen Lehrsatz 16, nach dem aliquote Teile inkommensurabler Verhältnisse wieder inkommensurabel sind.

Mit der umfangreichen Prop. 17, die übrigens deutlich macht, daß sich Kepler an die aus der Antike stammende Übung hielt, eine noch so lange Sentenz als einzigen Satz zu formulieren, beginnt die eigentliche Berechnungslehre von Maßzahlen $\left\{ \frac{z}{a} \right\}$, wobei z bereits den Sinus totus, a eine Zahl kleiner als z bedeutet, im Hinblick auf die „Chilias“ also $z = 1000$. Das Grundverfahren zur Berechnung von $\left\{ \frac{1000}{a} \right\}$ durch fortgesetzte Bisektion des Verhältnisses $\frac{1000}{a}$ und Rückführung auf das Elementarmaß $e = 1000 - x_n$ wurde bereits erläutert. Die Frage ist jetzt die nach der Größe von n in Abhängigkeit von a .

Ausgangspunkt ist das Verhältnis $\frac{1000}{999}$ und der „Exzess“ von $\frac{999}{998}$ über $\frac{1000}{999}$, als welcher der Quotient oder $\delta = 998001 : 998000$ verstanden wird.

Die Reihe der mittleren Proportionalen $x_1 = \sqrt{1000 \cdot 999}$, $x_2 = \sqrt{1000 \cdot x_1}$ usw. bis $x_n = \sqrt{1000 \cdot x_{n-1}}$ soll nämlich so weit fortgeführt werden, bis $\frac{1000}{x_n} < \delta$ geworden ist. Setzt man dann $1000 - x_n = \varepsilon$, $\delta = 1 + \frac{1}{998000}$, so muß also $\frac{1000}{x_n} = \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{1000}} = 1 + \frac{\varepsilon}{1000} < 1 + \frac{1}{998000}$ oder $\varepsilon < \frac{1}{998}$ werden.

Da aber $x_n = 1000 \cdot \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{\frac{1}{2^n}} = 1000 - \frac{1}{2^n} = 1000 - \varepsilon$ ist, so muß $2^n = 998$ werden. Um das zu erreichen, genügt es, $n = 10$ zu wählen. Die so erreichte Genauigkeit, d. h. $1000 - x_n = \varepsilon$, soll nun auch für jeden anderen Wert von a als Maßstab gelten; näherhin soll n bei beliebigem a so gewählt werden, daß $\frac{3}{4} \varepsilon < 1000 - x_n < \frac{5}{2} \varepsilon$ wird. Soll beispielsweise $\left\{\frac{1000}{998}\right\}$ berechnet werden, so ist $\frac{1000}{998} > \left(\frac{1000}{999}\right)^2$, genauer $\frac{1000}{998} = \left(\frac{1000}{999}\right)^2 + \frac{1}{998 \cdot 998,001}$ und $\left\{\frac{1000}{998}\right\} \approx 2 \cdot \left\{\frac{1000}{999}\right\}$, weshalb hier $n = 11$ genommen werden muß.

Die direkte Berechnung von $\left\{\frac{1000}{a}\right\}$ hat auf alle Fälle mit $a = 500$ ihr Ende. Wird nämlich $a < 500$, so ist

$$\frac{1000}{a} = \frac{1000}{500} \cdot \frac{500}{a} = \frac{1000}{500} \cdot \frac{1000}{2a}.$$

Sind also die Maßzahlen für alle $a \geq 500$ bekannt, so hat man sie auch für $500 > a \geq 250$, ferner wegen $\frac{1000}{a} = \frac{1000}{250} \cdot \frac{1000}{4a}$ für $250 > a \geq 125$ u. s. f.

Es bestehen aber noch andere Beziehungen, die zur Berechnung unbekannter Maßzahlen aus bekannten führen. Sie sind Gegenstand der Prop. 18–20. Ist $a_1 : a_2 = a_2 : a_3 = a_3 : a_4 = \dots$ eine fortlaufende Proportion, so wird

(Prop. 18) $\left\{\frac{a_1}{a_3}\right\} = 2 \left\{\frac{a_1}{a_2}\right\}$, $\left\{\frac{a_1}{a_4}\right\} = 3 \left\{\frac{a_1}{a_2}\right\}$ u. s. w., aber auch, da $\frac{a_1}{a_3} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2$, $\frac{a_1}{a_4} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$, $\left\{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\right\} = 2 \left\{\frac{a_1}{a_2}\right\}$, $\left\{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right\} = 3 \left\{\frac{a_1}{a_2}\right\}$ u. s. f. und umgekehrt $\left\{\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\right\} = \frac{1}{2} \left\{\frac{a_1}{a_2}\right\}$ u. s. w. Kennt man ferner $\left\{\frac{1000}{b}\right\}$ und $\left\{\frac{1000}{c}\right\}$ und ist $\frac{1000}{b} = \frac{c}{x}$, so ist auch $\left\{\frac{1000}{x}\right\}$ bekannt als $\left\{\frac{1000}{b}\right\} + \left\{\frac{1000}{c}\right\}$ (Prop. 19).

In dieser Regel steckt zugleich die Vorschrift zur Berechnung von Aufgaben nach der Regel de tri. Prop. 20 erweitert schließlich die vorhergehende, indem aus 3 bekannten Maßzahlen eine vierte gewonnen wird.

Ist nämlich $\frac{b}{c} = \frac{d}{x}$ und $\left\{\frac{1000}{b}\right\}$, $\left\{\frac{1000}{c}\right\}$, $\left\{\frac{1000}{d}\right\}$ bekannt, so wird

$$\left\{\frac{1000}{x}\right\} = \left\{\frac{1000}{c}\right\} + \left\{\frac{1000}{d}\right\} - \left\{\frac{1000}{b}\right\}.$$

An dieser Stelle tritt endlich der Logarithmus in Erscheinung durch die Definition, daß $\left\{\frac{1000}{a}\right\} = \text{Log } a$ sein soll. Zwar wird auch in der Folge noch mit Maßzahlen operiert, sie lassen sich aber nach der Beziehung $\left\{\frac{a}{b}\right\} = \left\{\frac{1000}{b} : \frac{1000}{a}\right\} = \text{Log } b - \text{Log } a$ leicht in Logarithmen verwandeln.

Der mit Lehrsatz 21 beginnende 2. Teil der Demonstratio entwickelt vor allem Ungleichungen zur näherungsweisen Berechnung von Logarithmen aus bereits bekannten. Das Ziel ist eine vereinfachte Berechnung größerer Reihen von Logarithmen, wie sie eine Tafel verlangt. Da Kepler seine Chilias im Auge hat, in der sowohl der Arcus wie der Sinus bzw. Numerus absolutus als Argument fungieren können, so braucht er Näherungsformeln für beide Zwecke. Wird der Arcus mit α bezeichnet, der Sinus totus, der zugleich „Numerus primus“ der Tabelle ist, mit z , dann besagt

$$\text{Prop. 21: } z - \cos \alpha < \text{Log} \cos \alpha < \sec \alpha - z,$$

$$\text{Prop. 22: } \text{Log} \cos \alpha < \frac{\sec \alpha - \cos \alpha}{2} \text{ und } \text{Log} \sin \alpha < \frac{\text{cosec} \alpha - \sin \alpha}{2}.$$

Die Sätze 23 und 24 sind geometrisch eingekleidet. Arithmetisch laufen sie

$$\text{auf die Ungleichungen } \frac{a+1}{a} < \left\{ \frac{a}{a-1} \right\} : \left\{ \frac{a+1}{a} \right\} < \frac{a}{a-1}$$

$$\text{und } \left\{ \frac{a}{a-1} \right\} : \left\{ \frac{a+1}{a} \right\} < \frac{a+1}{\sqrt{(a+1)(a-1)}} = \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \text{ hinaus.}$$

Aus ihnen folgert Kepler den wichtigen Satz 25:

$$\frac{1000}{a+1} < \left\{ \frac{a+1}{a} \right\} : \left\{ \frac{1000}{999} \right\} < \frac{1000}{a}$$

$$\text{und } \left\{ \frac{a+1}{a} \right\} : \left\{ \frac{1000}{999} \right\} < \frac{1000}{\sqrt{a(a+1)}}.$$

Der Satz wird wieder nicht allgemein bewiesen, sondern nur anhand des Zahlenpaares $a+1 = 501$, $a = 500$ bestätigt und danach stillschweigend als gültig angenommen. Die Differenz $\text{Log} a - \text{Log} (a+1) = \left\{ \frac{a+1}{a} \right\}$ wird durch diesen Satz in direkte Relation zu $\text{Log} 999$ gesetzt. Die Lücken der Chilias schließen sich mit seiner Hilfe, wie Kepler in Coroll. 2 ausdrücklich bemerkt.

Sind allgemeiner a und b konsekutive Numeri, dann wird als Satz 26 be-

$$\text{wiesen } \frac{1000}{b} < \frac{\text{Log} a - \text{Log} b}{b-a} < \frac{1000}{a}.$$

In Prop. 27 werden schließlich noch die Sätze 25 und 26 in trigonometrische Form übertragen, indem $a = \sin (90^\circ - \alpha)$, $b = \sin (90^\circ - \beta)$ und $\sin \text{tot} = 1000$ gesetzt wird: $\sec \beta < \frac{\text{Log} a - \text{Log} b}{b-a} < \sec \alpha$

$$\frac{\text{Log} a - \text{Log} b}{b-a} < \sqrt{\sec \alpha \cdot \sec \beta}.$$

Mit den Anwendungen dieser Ungleichung schließt dieser Abschnitt, der durch die große Zahl von Näherungsformeln bemerkenswert ist, während Neper mit der einzigen $\log a - \log b \approx \frac{(b-a)z}{b}$ oder $\log a \approx \log b + \frac{(b-a)z}{b}$ arbeitet.

Es folgen zum Schluß noch 3 Sätze. In Prop. 28 und 29 beweist Kepler ausdrücklich die Irrationalität des Logarithmus, wenn der Numerus eine von z verschiedene Rationalzahl ist. Lehrsatz 30 hat endlich die Berechnung eines Logarithmus zum Gegenstand, wenn der Numerus größer als z ist.

Ist $b : z = z : a$, $a < z$, so wird $\text{Log } z - \text{Log } b = \text{Log } a - \text{Log } z$, d. h. $\text{Log } b = -\text{Log } a$. Die Logarithmen der Zahlen $b > z$ sind also negativ.

2. Chilias Logarithmorum.

Formell gehört zwar „Die vorteilhafteste Methode der Herstellung einer Chilias Logarithmorum“ noch zur Demonstratio, sachlich ist sie aber die Überleitung zur Tafel selbst und enger zur ihr gehörig. Die Skizze des Gedankengangs dieses Abschnitts führt zugleich in die Praxis des Rechnens mit Keplerschen Logarithmen ein.

Es sei jetzt $z = 1000.00$, die Differenz der Numeri 1. Gegeben ist also $\text{Log } 1000 = 0$, durch direkte Berechnung wird ferner $\text{Log } 1024 = -\text{Log } 976,5625$ und $\text{Log } 500$ gefunden. Danach ergibt sich aus

$$\left\{ \frac{1024}{1} \right\} = \left\{ \frac{1024}{512} \cdot \frac{512}{256} \cdot \dots \cdot \frac{2}{1} \right\} \text{Log } 1 = \text{Log } 1024 + 10 \cdot \text{Log } 500, \text{ und}$$

nach der Proportion $1000 : 100 = 100 : 10 = 10 : 1$ auch $\text{Log } 100 = \frac{1}{3} \text{Log } 1$ und $\text{Log } 10 = \frac{2}{3} \cdot \text{Log } 1$.

Da $31^2 < 1000$, $37^2 > 1000$, so enthält jeder Numerus der Chilias, der nicht selbst Primzahl ist, einen Primfaktor ≤ 31 . Für den weiteren Aufbau sind daher die Logarithmen der Primfaktoren ≤ 31 grundlegend. Der Logarithmus des Multiplikators p ist nichts anderes als die Maßzahl $\left\{ \frac{p}{1} \right\}$ oder $\text{Log } 1 - \text{Log } p$; er ist also mit $\text{Log } p$ bekannt. Mit seiner Hilfe gewinnt man aus $\text{Log } a$ sofort $\text{Log } (p \cdot a) = \text{Log } a + \text{Log } p - \text{Log } 1$ und $\text{Log } \frac{a}{p} = \text{Log } a - \text{Log } p + \text{Log } 1$. Der Aufbau der Tafel geht nun so vor sich: Zuerst werden die Logarithmen der Zahlen $1000 > a \geq 900$ direkt und nach Näherungsverfahren berechnet. Aus ihnen und den bereits bekannten Logarithmen der Zahlen 1, 10, 100, 500 und 1024 werden der Reihe nach die Logarithmen der Primzahlen $p \leq 31$, der ihnen entsprechenden Multiplikatoren und aller der Zahlen a gebildet, von denen ein Vielfaches der Form $P \cdot a$, wobei P die Primfaktoren $p \leq 31$ enthält, zwischen die Zahlen 900 und 1000 fällt. Durch Abzählen findet man, daß auf diese Weise insgesamt 162 Logarithmen von Zahlen < 900 nicht erreicht werden. Diese Lücken müssen zuletzt noch nach einem der entwickelten Interpolationsverfahren ausgefüllt werden.

Die Tafel mit ihren 1000 Numeri ist von Kepler vollständig neu berechnet. Als Gehilfen hat er zu dieser Zeit (Sommer 1620) den Genfer Jean Gringallet zur Verfügung. Wesentliche Fehler enthält die Tafel nicht, und selbst Druckfehler, die in unserer Ausgabe stillschweigend korrigiert sind, sind es nur

wenige. Von den 5 Spalten haben 3, nämlich die zweite mit den Numeri absoluti = Sinus, die dritte mit den Partes vicesimae quartae und die fünfte mit den Partes sexagenariae, über deren Bedeutung S. 473 gesprochen wurde, konstante Differenzenreihe. In den restlichen Spalten, bei den Arcus der ersten und den Logarithmen der vierten Spalte, sind sie variabel und werden von Kepler (im Gegensatz zu Neper) interlinear angegeben. Wie Neper hat Kepler den Sinus totus $z = 10^7$. Da der Logarithmus von a die Maßzahl $\left\{\frac{z}{a}\right\}$ ist, so können z und a nach Belieben um die gleiche Zahl von Stellen gekürzt werden. Den (irrationalen) Logarithmus gibt Kepler mit der gleichen Stellenzahl wie Neper, nur daß er die letzten zwei durchgehend durch einen Punkt abtrennt, um das Rechnen mit weniger Stellen zu erleichtern. Dementsprechend ist bei ihm $\text{Log } 50000.00 = 69314.72$ (Neper: 6931469) und $\text{Log } 10000.00 = 230258.52$ (Neper: 23025842).

Zu beachten ist vor allem das „Vestibulum Chiliadis“, die Vortabelle, die im Marburger Druck nicht nach Keplers Wunsch gesetzt war, in unserer Wiedergabe jedoch seiner Intention entspricht. Sie hat nur 2 Spalten: In der ersten die 36 Numeri bzw. $\text{Sinus } \frac{k \cdot z}{10^n}$, $k = 1, 2, 3, \dots, 9$, $n = 7, 6, 5, 4$. Sie beginnt also mit 1, wenn $z = 10^7$, mit 0,01, wenn $z = 10^5$ gelesen wird. Selbstverständlich gilt in jedem Fall $\text{Log } 10^{n-1} - \text{Log } 10^n = 230258.52$ für jedes ganzzahlige n . Da sowohl bei der Multiplikation wie bei der Division der Log 1 auftritt, so ist die Frage nach der Einheit jeweils zu prüfen.

Für die Differenz benachbarter Logarithmen der Chilias wurde schon früher (S. 473)

$$\text{Log } a_1 - \text{Log } a_2 = z \cdot \ln \frac{a_2}{a_1} = z (\ln a_2 - \ln a_1) \text{ ermittelt.}$$

Die Differenz aufeinander folgender Werte α_1 und α_2 der Arcus-Spalte ist

$$0,001 = \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 = 2 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \approx (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \alpha_1,$$

umgerechnet auf Gradmaß also

$$\alpha_2 - \alpha_1 \approx \frac{0,001 \cdot 180}{\pi \cdot \cos \alpha_1} = \frac{3,438}{\cos \alpha_1}.$$

Sie wächst daher mit wachsendem α_1 ; für $\alpha_1 = 0$ wird $\alpha_2 - \alpha_1 = 3,438' = 3'26,4''$. Bei größerer Differenz kommt man mit Wiederholung zum Ziel, etwa

$$\text{so: Erste Näherung } \alpha_2^* - \alpha_1 = \frac{3,438}{\cos \alpha_1}, \text{ zweite Näherung } \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{3,438}{\cos \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2^* - \alpha_1}{2} \right)}$$

$$(\text{Beispiel: } 93000 = \sin 68^\circ 26'6'', \alpha_2^* - \alpha_1 = 9'21'', \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{3,438}{\cos 68^\circ 30'46''} = 9'23'').$$

II. „SVPPLEMENTVM“

Daß bei Kepler die zeitliche Folge der Schriften die umgekehrte ist gegenüber Neper, kann geradezu als symbolhaft bezeichnet werden. Hatte der letztere den Canon mit der Descriptio vorausgeschickt und erst hintennach die Constructio folgen lassen, so geht bei Kepler die Demonstratio mit der Chilias voran, ein Jahr später erst folgt das „Supplementum“. Tatsächlich liegt bei ihm der Schwerpunkt in der Demonstratio.

Das „Supplementum“ beginnt mit der zum ganzen Werk gehörigen Einleitung, in der er ausführlich Rechenschaft ablegt über seine Beschäftigung mit den Neperschen Logarithmen, dem Leser die Geschichte seiner Theorie erzählt (wobei hier dem Baron von Strahlendorf ein besonderes Verdienst eingeräumt wird, weil er ihn durch seine Fragen mehr gefördert habe, als ein dickes Buch es vermocht hätte) und den Kern seiner Problemstellung erläutert. Nicht zur Gattung der Linien und Bewegungen, also realer Quantitäten, gehören für ihn die Logarithmen, sondern zu der der Relationen, d. h. abgeleiteter, nur geistig faßbarer Quantitäten. Genauso wie die realen Quantitäten sind auch diese unbegrenzt teilbar, denn eine Proportion $a : b$, $a > b$, wird durch eine Zahl c , $a > c > b$ in zwei Teilproportionen $a : c$, $c : b$ geteilt, deren jede $< a : b$ ist. Mit dieser Grunderkenntnis hatte sein neuer Beweis die Richtung bekommen; das wahre und gemeinsame Maß aller gleichen Proportionen ist selbst von der Gattung der Proportion. Die Wahl des Proportions-elementes, das als kleinste Maßeinheit dienen soll, ist dem freien Ermessen anheimgestellt. Nun sind aber die Proportionen in der Regel unter sich „inkommunikabel“; das gewählte Proportionselement kann deshalb nicht auch das wirkliche Maß einer anderen Proportion bilden. Man steht deshalb vor der zweiten Wahl, welcher Fehler als erträglich gelten soll. Als Ergebnis kommt schließlich etwas heraus, „was dem Mathematiker absurd klingt, dem Rechner aber von größtem Nutzen ist“: der Logarithmus als gemeinsames Maß inkommunikabler Proportionen.

Kepler schildert sodann die Geschichte des Druckes durch den Landgrafen Philipp von Hessen-Butzbach und die Entstehung des Supplements. Schon der erste Titel hatte die Instruktion über die Anwendung der Logarithmen in Aussicht gestellt. Damit seien aber nur die Grundregeln gemeint gewesen; für die „pulli Arithmeti corum implumes“ („die ungefederten arithmetischen Kücken“) habe jedoch mehr geschehen müssen. Wenn auf dem Titel von einer neuen Arithmetik die Rede gewesen sei, so habe er damit nicht sich und seine Arbeit rühmen wollen, sondern die Erfindung Nepers. Nur das eine sei sein Ziel, den Käufer die Verwendungsmöglichkeiten der einzelnen Spalten der Chilias zu lehren.

Die Schrift selbst ist durch ihre Einteilung in 9 Kapitel so klar aufgegliedert, daß eine kurze Übersicht genügt:

Kap. 1. Generelle Erläuterung der Chilias und der darin verwendeten Zeichen. Begründung der Wahl von $z = 10^7$ und der Schreibung 100000.00.

Kap. 2–6. Rechnungen mit je zwei Spalten der Chilias, insbesondere die logistischen Rechnungen mit Spalte 3 und 4 bzw. 5 und 4.

Kap. 7. Rechnungen mit den Spalten 1, 2 und 4, d. h. trigonometrische Rechnungen. Zuerst werden die ebenen, sofort anschließend die sphärischen Dreiecke behandelt, wobei sich das Fehlen des Mesolog = Log tg nachteilig bemerkbar macht.

Kap. 8. Rechnungen mit Spalte 2 und 4. Aufsuchen des Logarithmus zu einem gegebenen Numerus und umgekehrt. Gebrauch der Interlineardifferenzen bei den Logarithmen; hier finden auch alle gewöhnlichen Zahlenrechnungen ihren Platz. Besonders zu erwähnen ist die in Praeceptum XIV (S. 411/12) gegebene Herleitung des dritten Keplerschen Gesetzes als Teilung einer gegebenen Proportion in zwei Teilverhältnisse, die selbst in gegebenem Verhältnis zueinander stehen.

Kap. 9. Verknüpfung von je zwei der Spalten 1, 2, 3, 5 mit Spalte 4. Das ergibt wieder mannigfaltige Aufgaben, vor allem „allein mit den Logarithmen der Numeri und Arcus oder Winkel alle ebenen Dreiecke aufzulösen“ auf anderem Wege als in Kap. 7. Einen breiten Raum nimmt dabei ein Probiervverfahren ein, das zu zwei gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel direkt die beiden andern Winkel liefern soll.

Die schon beim Erscheinen der logarithmischen Schriften Keplers wirksame Konkurrenz der dekadischen Logarithmen von Briggs mußte sich zum Schaden des Marburger Druckers und Verlegers bemerkbar machen. Diese Vermutung wird gestützt durch die Tatsache, daß Chemlin den offenbar noch großen Rest der 1. Auflage 1639 mit neuem Titel als Editio 2. auf den Markt zu bringen suchte. Zu dieser Zeit hatten sich aber die Briggs'schen Logarithmen so ziemlich durchgesetzt; nur die Benützer der Rudolphinischen Tafeln waren weiterhin auf Neper-Keplersche Logarithmen angewiesen, für ihre Bedürfnisse war aber in den Tafeln selbst vorgesorgt.

Bei Frisch sind „Chilias“ und „Supplementum“ in Vol. VII, pag. 317–408 neu gedruckt mit dem üblichen „Prooemium Editoris“, jedoch ohne „Notae Editoris“. Der handschriftliche Nachlaß Keplers enthält, von den Briefen abgesehen, nichts, was auf die Vorarbeiten zu den Logarithmen Bezug hätte.

ANMERKUNGEN

9. 3. Über Maximilian von Liechtenstein (1578–1645) siehe *Wurzbach*: Biographisches Lexikon des Kaiserthums Österreich XV, 132 f.; über Helmhard Jörger († 1623) ebenda X, 230. Von dem engen Verhältnis zwischen Kepler und Jörger zeugt folgende Stelle eines Briefes von Kepler an eine unbekannte Frau (Bd. XVII, S. 40): „Der Herr Helmhard Jörger würt schon allberaitt zu Wien der Junge Keppler genennet, villeicht auch der Junge sternseher“.

10.26. *J. Wodderborn*, der hier als Leibarzt Liechtensteins erscheint, war 1610 mit einer Verteidigungsschrift für Galilei gegen Horky (vgl. Bd. IV, S. 448) hervorgetreten („Quatuor Problematum, quae M. Horky contra Nuncium Sidereum de quatuor Planetis novis proposuit, confutatio“. Padua 1610). Er gehörte also damals zum Freundeskreis von Galilei. Im „Dictionary of National Biography“ fehlt sein Name.

13.19. *Dimensio Circuli*, Prop. 3. Ed. Heiberg I, 237–243. Kepler stellt diesen Satz richtig an die Spitze.

14.7. *Paul Guldin S. J.* (1577–1643), der Entdecker der Guldinschen Regel, die er in dem umfänglichen Werk „De Centro Gravitatis lib. I–IV“, Wien 1635–41, sehr breit behandelt, ein wegen seines Einflusses am Kaiserhof geschätzter und respektvoll behandelter Bekannter Keplers, übt in dem genannten Werk, das seine Abhängigkeit von der „Stereometria“ weder verleugnen kann noch will, vielfach Kritik an Keplers Methoden und Ergebnissen, wobei ausdrücklich gesagt werden muß, daß diese Kritik durchaus sachlich und maßvoll im Ton gehalten ist. Zu den Stellen 14.4–6 („Licet autem . . .“) und 14.7–12 („Quanquam inter ea . . .“) meldet Guldin (lib. IV, pag. 323) seine ersten Bedenken an. Zur ersten Stelle bemerkt er, aus keinem geometrischen Beweis könne man den Sinn herauslesen, daß ein noch so kleiner Kreisbogen einer geraden Linie gleichgesetzt werden dürfe. An der anderen Stelle kritisiert er: „Wäre das evident, dann hätte Archimedes nicht nötig gehabt, den ersten Lehrsatz in „De Sphaera et Cylindro“ zu beweisen“ (daß nämlich der Umfang eines dem Kreis umbeschriebenen Polygons größer sei als der des Kreises). Und er schließt: „In der Geometrie ist also auf die Evidenz nicht allzuviel Verlaß.“

15.9. Setzt man die große Achse der Ellipse gleich $2a$, die kleine gleich $2b$, dann wäre nach Kepler der Umfang $U \approx (a + b)\pi$. Auf das Ungenügende dieser Näherungsformel macht *Guldin*, l.c. lib. II, pag. 39 und lib. IV, pag. 323 aufmerksam. Er versucht selbst (lib. II, pag. 83–85) den Umfang der Ellipse $a = 10^5$, $b = 5 \cdot 10^4$ mit Hilfe einbeschriebener Polygone zu berechnen und findet $U > 481\,304$, während bei Kepler $U \approx 471\,238$ herauskommen würde.

Die exakte Berechnung von U führt bekanntlich auf ein elliptisches Integral, das sich in die Reihe

$$U = 2a\pi \left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{16}e^4 - \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{5}{36}e^6 - \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{25}{36} \cdot \frac{7}{64}e^8 - \dots \right)$$

mit $ae = \sqrt{a^2 - b^2}$ entwickeln läßt. Bei den Ellipsenbahnen der Planeten mit $e < \frac{1}{230}$ war Keplers grobe Näherungsformel ausreichend. Die Stelle der „Astronomia Nova“, auf die Z. 6/7 verwiesen wird, ist Cap. 59, Protheorema 5 (Bd. III, S. 368).

15. 13. Der Wortlaut des Theorems ist der zweite Satz der „Kreismessung“ von *Archimedes* (Heiberg I, 235). Der erste Satz tritt bei Kepler nicht selbstständig in Erscheinung, sondern nur als Hilfssatz zum Beweis von Theor. II. Keplers Interpretation des ersten Satzes von Archimedes und vor allem die Anwendung auf Zylinder und allgemeine Rotationskörper wird von *Alexander Anderson* schon 1616 in dem kleinen Schriftchen „*Vindiciae Archimedis sive Elenchus Cyclometriae Novae a Philippo Lansbergio nuper editae*“ (Paris 1616) heftig kritisiert. Obwohl es dem Titel nach gegen Lansberge gerichtet ist, beschäftigt sich der größere Teil des Textes mit Kepler, „dem kaiserlichen Mathematiker und dem Ersten unter den deutschen Mathematikern“. Sein Urteil gipfelt in der Feststellung, daß das, was Kepler mache, gegen den archimedischen Geist verstoße. *Guldin* gibt Keplers Erklärung zu Theor. II von „*Archimedes utitur . . .*“ bis zum Schluß im vollen Wortlaut wieder, weil er dieses Beweisverfahren öfters anwende (l. c. lib. IV, pag. 324). Er zitiert auch (pag. 330/31) ausgiebig die „*Vindiciae*“ von Anderson, den er zu den „einer reineren Geometrie verschworenen Leuten“ zählt, aber sein Urteil ist umsichtiger: „Zwar will der archimedische Beweis auf dasselbe hinaus, aber nicht mit den Mitteln, derer sich Kepler zur Herleitung bedient. Es handelt sich da um eine neue Beweismethode, freilich weder archimedisch noch euklidisch, jedoch, um der Wahrheit die Ehre zu geben, durchaus nicht zu verschmähen. Hier hat nämlich Bonaventura Cavalieri die Handhabe und Anregung gefunden, seine «Methode der Indivisibeln», durch welche nach seinem Urteil die Geometrie gefördert wurde, zu schaffen, wie er im Vorwort dieses Buches selbst andeutet.“

17. 5. *Archimedes*: De Conoidibus et Sphaeroidibus, Prop. 3 (Heiberg I, 271 f.).

17. 9. Heiberg II, 299 und 313.

17. 13. De Conoid. et Sphaeroid. Prop. 4–6 (Heiberg I, 276 ff.). Die notwendige Voraussetzung, daß der Durchmesser des Kreises der großen Achse der Ellipse gleich sei, ist bei Archimedes im Wortlaut des Satzes enthalten.

17. 22. Zu diesem Archimedes-Zitat von Kepler bemerkt *Guldin* (lib. IV, pag. 325): „Kepler zitiert zwar Archimedes, man kann aber beide Bücher von „*De Sphaera et Cylindro*“ durchlesen, man wird nichts davon finden.“ Er weist auf seinen eigenen Beweis hin und kritisiert, daß die Auffassung Keplers, Zylinder und Prisma seien „so etwas wie körperlich gewordene ebene Figuren“ („*veluti quaedam plana corporata*“) für Leute vom Geiste Archimeds und Euklids zu knapp formuliert sei, daß aber trotzdem Cavalieri sich hier sein Prinzip geholt habe.

19. 16. *Guldin* fragt (lib. IV, pag. 325/26), was wohl Cavalieri zu dieser Stelle sagte. Er würde ausweichen, meint er, und zur Antwort geben, daß

Kepler hier nicht mit unendlich vielen Ebenen, sondern mit körperlichen Teilen arbeite, und auf diese Weise bei seiner Meinung beharren. Die Bemerkung hat also eher eine Spitze gegen Cavalieri als gegen Kepler.

19.22. Den fehlerhaften Wortlaut des Theorems beanstandet *Guldin* (lib. IV, pag. 326) und korrigiert „dimidia Baseos Coni“ in „dimidia superficiei Coni“, was *Frisch* (IV, 647) zu „dimidia curvae superficiei“ verdeutlicht. Diese Korrektur ist zwar richtig, mit Rücksicht auf den Beweis scheint jedoch die von uns vorgenommene näher zu liegen, bei der an Keplers Worten nichts geändert, sondern ein dem Setzer entfallener Satzteil ergänzt wird.

20.9. Zu der Stelle „Eodem vero modo . . .“ bemerkt *Guldin* (lib. IV, pag. 326), daß zwar die Behauptung richtig sei, es wolle ihm aber nicht einleuchten, wie das „aus dem Sinn des Beweises“ von Theor. II hervorgehen solle. Keplers Coroll. I zu Theor. II ist ihm also offenbar entgangen.

20.24. De Sphaera et Cyl. I, Prop. 33 (Heiberg I, 120–125). Keplers Beweis wird von *Guldin* (lib. IV, pag. 327) mit Recht angezweifelt. Er hat jedoch sofort für ihn die Entschuldigung, daß er ja kein strenges Lehrbuch der Geometrie habe schreiben wollen, sondern sein Augenmerk auf die Faßrechnung, wenn auch in geometrischer Begründung, gerichtet habe. Dagegen kann man *Wieleitner* nicht beipflichten, wenn er zu dem bewußt abkürzenden Schlußverfahren Keplers sagt (Unterrichtsbll. f. Math. u. Naturw. 36 (1930) S. 179): „Siehe da, es ist richtig! Aber Kepler bedachte nicht, daß derselbe ‚Wahrscheinlichkeits‘ schluß ja auch für den Rauminhalt der Halbkugel gelten müßte, und da ist das Resultat falsch.“ Kepler ist mit Analogieschlüssen vorsichtig; er verwendet sie vor allem zum Projektieren neuer Sätze; ihre Gültigkeit wird am Exempel entschieden. Wäre der Inhalt der Halbkugel das geometrische Mittel aus den beiden Kegeln K_1 und K_2 (tatsächlich ist er aber gleich $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \sqrt{K_1 \cdot K_2}}$), dann hätte er es mit Genugtuung registriert.

21.25. De Sphaera et Cyl. I, Prop. 42.43 (Heiberg I, 156 ff.). Zu der Analogie bemerkt *Guldin* (lib. IV, pag. 327): „Um die Wahrheit zu sagen: diese Analogie mißfällt mir keineswegs, sie ist vielmehr schön und eines Kepler würdig. Jedoch, meine ich, dienen solche Analogien mehr der Erfindung als dem Beweis, was Kepler ebenfalls anerkennt und deshalb hinzufügt: Den Beweis lies bei Archimedes nach!“ Im übrigen handelt es sich hier überhaupt um keinen eigentlichen Analogieschluß, sondern um Stichproben mit Spezialfällen und eine daran geknüpfte Vermutung. Der Verdacht *Wieleitners*, daß es sich um einen „scholastischen“ Analogieschluß handle, ist gegenstandslos.

23.1. Kepler hat bei dem Theorem nur den Mantel des Zylinders im Auge, während *Archimedes* bei dem entsprechenden Satz (De Sphaera et Cyl. I, Prop. 34, Coroll.) die Grundfläche einbezieht. Die kleine Rechnung soll ledig-

lich die triviale Tatsache illustrieren, daß das Rechteck mit den Seiten 2a und 2b gegenüber dem mit den Seiten a und b vierfachen Inhalt besitzt.

23.28. Die Glosse *Guldins* zu diesem Theorem ist sehr aufschlußreich. Nachdem er zuerst Keplers Verfahren erläutert hat, die Kugel als Bündel von unendlich vielen Kegeln aufzufassen und danach einen der Kugel inhaltsgleichen Kegel zu formieren, fährt er fort (lib. IV, pag. 328): „Endlich schließt er, daß sich der (umbeschriebene) Zylinder zum Volumen der Kugel verhalte wie 3 zu 2. Wie seinerzeit der König Agrippa, als Paulus vor ihm disputierte, diesem zurief ‚beinahe überredest du mich, ein Christ zu werden‘, so bringt auch mich Kepler mit seinen Argumenten beinahe soweit, ein Keplerianer zu werden, aber mich schreckt der Gebrauch unendlich vieler Teile ebenso ab, wie die Meister, Vertreter und Anhänger einer reineren Geometrie.“ Zum zweiten Beweis Keplers, bei dem er sich den Zylinder in ein Bündel von unendlich vielen Prismen mit der Achse des Zylinders als gemeinsamer Kante zerlegt denkt, „vielleicht deshalb, weil er gesehen hat, daß die Kegel ihren Zweck nicht ganz erfüllen“, bemerkt Guldin: „Ohne besondere Figur, die Kepler weggelassen hat, ist dieser Modus für die Phantasie schwer vorzustellen.“

26.26. De Conoid. et Sphaeroid. Prop. 28 (Heiberg I, 405), nicht 29 und 30, wie Kepler angibt.

26.30. De Conoid. et Sphaeroid. Prop. 21.22 (Heiberg I, 345.355). Die folgende Aussage, daß beim hyperbolischen Konoid das Verhältnis von Segment zu Kegel zwischen 3 zu 2 und 1 zu 1 liege, ist bei *Archimedes* der Inhalt der Propositionen 25 und 26.

27.13. De Sphaera et Cyl. II, Prop. 2 (Heiberg I, 174–183). Der im folgenden Abschnitt angezogene Satz, wonach für die Oberflächen und Volumina der beiden Segmente, in die eine Kugel durch eine schneidende Ebene zerfällt, die Ungleichung $O_1^{1/2} : O_2^{1/2} < V_1 : V_2 < O_1^2 : O_2^2$ gilt, ist die 8. Propositio von De Sphaera et Cyl. II (Heiberg I, 210–223).

28.10. De Conoid. et Sphaeroid. Prop. 11.12.13.14 (Heiberg I, 306–319).

29.39. Die Ausstellung *Wieleitners* (UMN 36 (1930) S. 181 f.), daß der Kugelsektor HDKA von Kepler nicht abgeleitet sei, trifft nicht zu. Ausdrücklich stellt er nämlich (Z. 19 ff.) fest:

$$\text{HDKA} = \frac{1}{3} \cdot \text{AD} \cdot (\text{KD})^2 \pi \left[= \frac{2}{3} r^2 \pi h, \text{AD} = r, \text{DI} = h \right].$$

30.3. De Conoid. et Sphaeroid. Prop. 24 (Heiberg I, 366–371).

30.23. De Sphaera et Cyl. I, Prop. 16, Lemma 1 (Heiberg I, 72 f.).

31.19. Die Vermutung Keplers, über die er selbst noch im unklaren ist, besagt nach der nebenstehenden Figur, daß der durch die Ebene NA von dem geraden Kegel GNY schräg abgeschnittene Kegel GNR von der Höhe GZ, dessen Grundfläche NR eine Ellipse mit dem Mittelpunkt M ist, inhaltsgleich

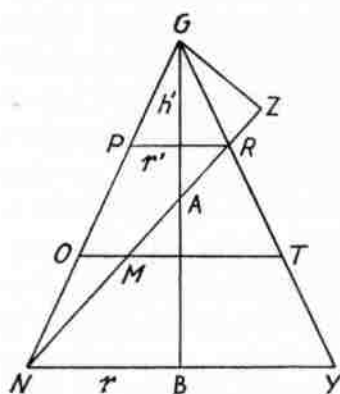


Fig. 5

sei dem geraden Kegel GOT, dessen Grundfläche durch M geht. Daß diese Vermutung nicht zutreffen kann, ist ziemlich evident. Die geometrisch strenge Inhaltsberechnung der beiden zu vergleichenden Kegel ergibt, wenn die Durchmesser der Grundkreise NY, PR, mit $2r$ bzw. $2r'$, die zugehörigen Höhen der Kegel GNY, GPR mit h und h' , bezeichnet werden

$$\text{Kegel GOT} = \frac{\pi}{3} \frac{(r + r')^2 (h + h')}{8}$$

$$\text{Kegel GNR} = \frac{\pi}{3} h' r \sqrt{2 r r'},$$

also keinesfalls Gleichheit.

Mit der Vermutung wird auch der zweite Teil von Coroll. II zu Theor. XVII hinfällig, weil er die Gültigkeit der Vermutung voraussetzt.

31.29. Diese Rechenvorschrift widerspricht der vorausgehenden, richtigen Begründung. Das Verhältnis des Segmentes GNR zum Kegel GNY ist dasselbe wie das des Produktes der Ellipse NR in die Höhe GZ zu dem Produkt der Kreisfläche NY in die Höhe GB. Nur so ergibt sich die Richtigkeit des folgenden Satzes:

$$\text{Kegel GPR} : \text{Kegel GNY} = r'^3 : r^3 = h'^3 : h^3 = F'^{2/3} : F^{2/3}.$$

32.15. In den zwei vorhergehenden Abschnitten hat Kepler für das Verhältnis eines Kegels vom Grundkreishalbmesser R zu dem von ihm abgeschnittenen geraden Kegelstumpf mit dem kleineren Grundkreishalbmesser r die Beziehung $R^3 : (R^3 - r^3)$ aufgestellt. Clavius hat dagegen in „Geometria Practica“ V, 3, 3 die Gleichung

$$\text{Gerader Kegelstumpf} = \frac{h}{3} (G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2) = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2).$$

Die Clavius'sche Lösung sei „geistreicher“, rechnerisch jedoch komplizierter als seine eigene, bemerkt Kepler. Der vielfachen Anwendung des Kegelstumpfs in der Faßrechnung wegen gibt er noch eine dritte Form, „ein prachtvolles Theorem und eine höchst erwünschte Arbeitersparnis“. Er denkt sich den Kegelstumpf aufgeteilt in den Zylinder über dem kleineren Grundkreis und die darumliegende Tunica und findet für deren Verhältnis

$$\text{Tunica} : \text{Zylinder} = [(R + 2r) \cdot (R - r)] : 3r^2.$$

33.35. Strictum = annulus strictus ist der geschlossene Ring, der durch Rotation des Kreises um eine seiner Tangenten entsteht. Er ist, wie sich im „Supplementum“ zeigen wird, inhaltsgleich mit dem Zylinderhuf, der von dem Zylinder über dem rotierenden Kreis mit der Höhe $2d\pi$ (d der Durchmesser des Kreises) durch eine Ebene abgeschnitten wird, welche beide Grundkreise berührt. Dagegen ist das Kugelvolumen nicht dem halben Zylinder gleichzusetzen, sondern dem Huf über dem Halbkreis von der Höhe $2r\pi$, der sich zum Halbzylinder verhält wie 4 zu 3π .

Archimedes hatte, wie schon im Nachbericht gesagt wurde, in umständlicher, indirekter Weise das Volumen des über dem Halbkreis vom Durchmesser d stehenden Hufs von der Höhe d zu $\frac{d^3}{6} = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{d^3\pi}{8}$ berechnet, wo $\frac{d^3\pi}{8}$ der halbe Zylinder von der Höhe d und dem Halbmesser $\frac{d}{2}$ ist. Die Entdeckung Keplers, daß ein Zylinderhuf von bestimmter Höhe als Volumen eines Rotationskörpers aufgefaßt werden kann, gibt der Berechnung von Zylinderhufen eine neue Grundlage. Ohne weiteres ist danach klar: Wenn der volle Rotationskörper zu dem Huf von der Höhe h gehört, so entspricht der Huf von der Höhe $h' < h$ einem Sektor des Rotationskörpers von solchem Öffnungswinkel α , daß $h' : h = \alpha : 2\pi$ wird. Es folgt daraus die Proportionalität der Hufe über derselben Grundfläche mit ihren Höhen. Besonders fruchtbar wird aber die Beziehung, wenn für das Volumen des Rotationskörpers die Guldinsche Regel herangezogen wird. Läßt man die zu DB symmetrische Figur ABC um AC rotieren, ist Σ der Schwerpunkt ihrer Fläche, $D\Sigma = \eta$, $DB = s$, die Fläche f , V das Volumen des Rotationskörpers, Z das des Zylinders, der mit dem Huf H gleiche Grundfläche und Höhe hat, so wird $V = 2\pi\eta \cdot f = H$, $Z = 2\pi s \cdot f$, $H : Z = \eta : s$. Diese Beziehung gilt für jeden Zylinder und den Huf gleicher Grundfläche und Höhe. Ist also ABC ein Halbkreis vom Halbmesser r , $\eta = \frac{4r}{3\pi}$, $s = r$, so ist $H : Z = 4 : 3\pi$, also $H : 2Z = 2 : 3\pi (= 14 : 66)$.

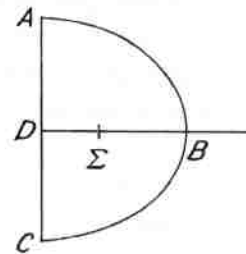


Fig. 6

34.23. Von den zwei „medietates arithmeticae“ $\frac{a+2b}{3}$ und $\frac{2a+b}{3}$ ist mehrfach die Rede, so Theor. VII, Coroll. III in Teil 2. Der Zweifel *Wieleitners* an dieser Erklärung (Kepler-Festschrift S. 303, Anm. 42) ist unbegründet und führt ihn selbst in die Irre.

35.7. Errichtet man über jeder der beiden Grundflächen des Kegelstumpfs den Zylinder bis zur andern, so wird der Limbus zwischen den Mantelflächen der Zylinder durch den Mantel des Stumpfs in zwei ringförmige Teile zerlegt, deren innerer „Tunica“ genannt wurde (Theor. XVI), während der äußere „Restlimbus“ („Residuum Limbi“) heißt. Von ihnen beweist Kepler S. 34/35, wenn man die Durchmesser der Grundkreise mit D bzw. d bezeichnet:

$$\text{Tunica : Restlimbus} = \frac{D+2d}{3} : \frac{2D+d}{3}.$$

Nach Theor. XVI ist aber

$$\text{Tunica: kleinerem Zylinder} = \frac{(D + 2d)(D - d)}{3} : d^2, \text{ also}$$

kleinerer Zylinder : Tunica : Restlimbus : größerem Zylinder =

$$d^2 : \frac{(D + 2d)(D - d)}{3} : \frac{(2D + d)(D - d)}{3} : D^2.$$

Nach dieser Proportion geht die erste Rechnung vor sich; lediglich, um ganze Zahlen zu bekommen, werden D und d durch $D' = 3D$, $d' = 3d$ ersetzt. In der zweiten Rechnung wird mit der Beziehung

$$Dd + \frac{(D - d)^2}{3} = \frac{1}{3}(D^2 + Dd + d^2)$$

gearbeitet. Damit wird

$$\text{Stumpf: kleinerem Zylinder} = \left[Dd + \frac{(D - d)^2}{3} \right] : d^2.$$

37.16. Ausführlicher hat Kepler seine Kegelschnittlehre anhand derselben Figur in der „Astronomiae Pars Optica“ (Bd. II, S. 90–93) dargelegt.

46.34. Die Klassifizierung der Rotationskörper von Kegelschnitten nach Lage und Richtung der Rotationsachse zeitigt erst allmählich die große Zahl von 92 Körpern. Bei den Pulkowoe Mss. (V, 44v) hat sich der Entwurf eines Schemas erhalten, das außer mit den 5 verschiedenen Lagen der Rotationsachse entsprechend den 5 Fällen beim Kreis (vgl. Fig. XI, S. 39) nur mit den Richtungen „parallel zur Hauptachse“, „parallel zur Nebenachse“, „schief gegen beide“ als Merkmalen arbeitet und mit Hinzunahme des doppelten Kegels auf insgesamt 31 Körper kommt:

„Figurae“

1. Annulus	2. Annulus arduus	3. Annulus pressus	4. Annulus connivens	
5. Strictus	6. Strictus arduus	7. Strictus pressus	8. Strictus connivens	
9. Malum	10. Sydonium 11. Aetna parabolica 12. Aetna hyperbolica	13. Malum pressum	14. Pyrum cavum	
15. Globus	16. Sphaeroides longum 19. Conoides parabolicum rectum 20. Conoides hyperbolicum rectum	17. Sphaeroides latum	18. Pyrum plenum	
21. Nux	22. Prunum longum 25. Cornu rectum parabolicum 26. Cornu rectum hyperbolicum	23. Prunum pressum 27. Conoides parabolicum circulare 28. Conoides hyperbolicum circulare	24. Pyrum acutum 29. Fusum parabolicum 30. Fusum hyperbolicum	27. Conus duplex
5	11	7	7	1

Eine sofort daran anschließende Notiz, die leider nicht mehr vollständig ist, kommt schon mindestens auf die Zahl 37.

Die Nummer 27 tritt in dem wiedergegebenen Schema versehentlich doppelt auf. Bei der Benennung fällt vor allem auf, daß das Citrium als Nux erscheint, während es noch kurz vorher Pepo (Melone) heißt.

Die Klassifizierung nach der Lage der Rotationsachse übernimmt *Guldin* (lib. II, Cap. 8, Prop. 1) von Kepler, ohne seinen Namen zu nennen. Später (lib. IV, pag. 328) bemerkt er, die Typenlehre Keplers sei es „wirklich wert, von jedem der Geometrie Beflissenen gelesen und wohl beachtet zu werden“. Ihm selbst, meint er, habe bei seinem Alter Vorstellungskraft und Gedächtnis nicht mehr ausgereicht für so viele Unterscheidungen und Namen. Er habe deshalb das Kapitel nur oberflächlich durchgelesen.

47.13. Da Kepler die Gültigkeit des Theorems ausdrücklich auf alle Mittelpunktsfiguren ausdehnt, so fordert er *Guldin* geradezu zu einem Vergleich heraus. Dieser benützt denn auch die Gelegenheit, auf die klare Lösung in seiner Theorie aufmerksam zu machen. Ganz sachlich stellt er fest: „Nichts fehlte Kepler wahrlich zu meiner Art der Berechnung als der Begriff des Rotationsweges“. Zum Widerspruch fordert ihn die Bemerkung Keplers heraus (S. 47, Z. 18/19), der Beweis könne aus den Archimedischen Prinzipien der Stereometrie als Elementen geführt werden, indem er meint: „Die Überlegung mit den Kreisscheibchen riecht nicht nach Archimedischen Prinzipien“.

Dieses und die nachfolgenden Theoreme XIX bis XXI sind Gegenstand der Dissertation „*Kepleri Methodus solida quaedam sua dimetiendi illustrata et cum Methodis Geometrarum posteriorum comparata*“ von *Cbr. Pfeiderer*, Tübingen 1795. Der vollständige Text Keplers wird darin analytisch kommentiert.

49.15. Die überraschende Zerlegungsgleichheit des Apfels und des Zylinderhufs läßt sich unter Zuhilfenahme der Guldinschen Regel analytisch leicht bestätigen. Sei in der Figur 7 r der Halbmesser, $F = r^2\pi$ die Fläche des Kreises, $p < r$ die Höhe, s die halbe Sehne des wegfallenden Segmentes, f seine Fläche und η der um $2(r - p)$ vergrößerte Abstand seines Schwerpunktes von der Rotationsachse AB, dann wird das Volumen V_A des Apfels $V_A = 2(r - p)\pi \cdot (F - 2f) + 2\eta\pi \cdot f$. Da aber (nach Anm. 62.11) $\eta = (r - p) + \frac{2}{3}\frac{s^3}{f}$, so kommt

$$V_A = 2(r - p)\pi(F - 2f) + \frac{4}{3}s^3\pi + 2(r - p)\pi \cdot f.$$

Das ist aber genau die Zerlegung des Hufs in die drei Keplerschen Bestandteile, denn $\frac{4}{3}s^3\pi = 2[\eta - (r - p)]\pi \cdot f$ ist der Inhalt der Kugelzone, die bei Umdrehung des Segmentes f um den zur Sehne s parallelen Durchmesser entsteht. Jeder der drei Teile ist elementar berechenbar.

Den Umweg über den Zylinderhuf wählt Kepler nur deshalb, weil ihm die analytischen Hilfsmittel fehlen, um sein Schalenmodell (vgl. S. 444) direkt

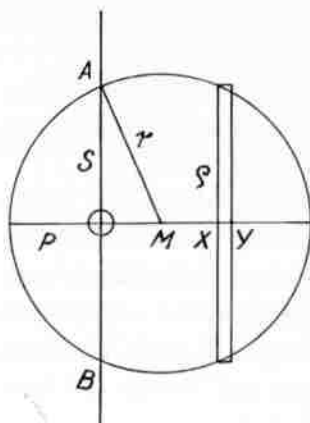


Fig. 7

auszuwerten. In Wirklichkeit schwebt ihm aber ein echter Integrationsprozeß vor, der für uns leicht vollziehbar ist.

AB und der dazu senkrechte Durchmesser OM sollen nun als Koordinatenachsen dienen. Grundsätzlich wird jetzt das rechts von AB liegende Kreissegment als rotierend gedacht; es ist also $p = 0$ der geschlossene Kreisring, $0 < p < r$ ein Apfel, $p = r$ die Kugel, $r < p < 2r$ eine Zitrone. Die im Meridianschnitt durch den Streifen XY senkrecht zu OM angedeutete Zylinderschale, deren Wände die Halbmesser $OX = x$, $OY = x + dx$ haben sollen, während ihre Höhe 2ρ ist, $\rho^2 = (p + x)(2r - p - x)$, hat das Volumen $[(x + dx)^2 - x^2] \cdot 2\rho\pi = 4\rho x\pi \cdot dx$. Das Volumen des Umdrehungskörpers wird daher

$$V = 4\pi \cdot \int_0^{2r-p} \rho x \, dx.$$

Nach geeigneten Umformungen wird daraus

$$V = \frac{2\pi}{3} \left[p(r + p)s + 3r(r - p) \left(s + 2r \arctg \frac{s}{p} \right) \right],$$

oder, wenn p und s durch r ausgedrückt werden, in der Form $p = mr$, $s = nr$,

$$V = \frac{2r^3\pi}{3} \left[m(1 + m) \cdot n + 3(1 - m) \left(n + 2 \arctg \frac{n}{m} \right) \right].$$

Diese Formeln gelten für Apfel und Zitrone mit Einschluß des geschlossenen Ringes, nichts scheint jedoch darin auf die Zerlegungsgleichheit mit einem Zylinderhuf, der die rotierende Figur zur Grundfläche, den größten Kreis des Rotationskörpers zur Höhe hat, hinzudeuten. Da indes diese Gleichheit aus Theor. XX hervorgeht, so sind die beiden Formeln zugleich Ausdruck für den Inhalt des besagten Zylinderhufs von der Höhe $h = 2(2r - p)\pi = \frac{2s}{p}\pi$. Das Volumen V' des Hufs von der Höhe h' über derselben Grundfläche wird dann nach Theor. XVII

$$V' = \frac{h'}{h} \cdot V = \frac{h'p}{2s\pi} \cdot V.$$

Nehmen wir als Zahlenbeispiel mit Kepler (S. 57 ff.) $s = 13,5$, $p = 121,5$, woraus $r = 61,5$, so ergibt sich als Inhalt der Zitrone $V = \frac{2r^3\pi}{3} \cdot 0,000242$, also mit $r = 61,5$ $V = 118$.

Mit seiner Integration durch Transformation fand Kepler keinen Anklang bei seinen Zeitgenossen. Jedenfalls erheben sich Stimmen dagegen, keine dafür. Der Wortführer der Opposition ist *Alexander Anderson*, der bedeutende Schüler von François Viète und Herausgeber von dessen Werken. In der klei-

nen Schrift „*Vindiciae Archimedis*“ (vgl. Anm. 15.13) wendet er sich wie folgt an Kepler: „Es steht Dir nicht zu, Kepler, die erhabenen Manen des verehrungswürdigen Alten zu beleidigen, und unter Berufung auf Namen und Autorität des Archimedes im 20. Theorem Deines Supplements zur Archimedischen Stereometrie etwas, was noch gar nicht bewiesen ist, zum Beweis heranzuziehen. Als ob Archimedes jemals verlangt hätte, daß ein Kreis in ein Dreieck ausgewickelt werde, wozu Du Dich für berechtigt hältst, wenn Du Deine Äpfel in Zylindersegmente auswickelst. Welcher Verstand könnte derartige Metamorphosen fassen? Wohl hat Archimedes eine gerade Linie postuliert, die dem Umfang des Kreises gleich sein sollte (Eutokius sagt [„In dimensionem circuli“, ed. Heiberg III, 230/31], niemand sei es zweifelhaft, daß es diese wirklich gebe), um schließlich zu beweisen, daß das aus dieser Strecke und dem Halbmesser als Katheten gebildete rechtwinklige Dreieck dem Kreis gleich sei. Mit demselben Recht soll Dir daher gestattet sein zu verlangen: Gegeben sei ein Zylindersegment, dessen Grundfläche gleich dem Kreisabschnitt ist, der durch seine Rotation den Apfel erzeugt und dessen größte Höhe der Umfang des größten Kreises auf der Oberfläche des Apfels ist, um endlich das Segment auf Grund des zugestandenen Postulates nach Archimedischer Methode als inhaltsgleich mit Deinem Apfel zu erweisen. Daß aber Archimedes nie etwas Ähnliches [wie Du] gedacht hat, das beweist das mühsame Ein- und Umbeschreiben von Polygonen dem Kreis, von Polyedern der Kugel. . . . Wenn (nach Deiner Vorstellung) die Kugel in ein Zylindersegment ausgebreitet wird, dessen Basis gleich ist dem Halbkreis, aus dem die Kugel durch Rotation entsteht, die Höhe aber an der höchsten Stelle gleich dem Umfang des größten Kugelkreises, dann wird in ähnlicher Weise auch die Kugeloberfläche auf die Zylinderfläche ausgebreitet, von der [Archimedes] vorher gezeigt hatte, daß sie das Vierfache des größten Kugelkreises sei. Wenn dann ein derartiges Zylindersegment in Pyramiden aufgelöst wird, deren gemeinsame Spitze der Mittelpunkt des besagten Halbkreises sein soll, die Höhe sein Halbmesser, die Grundfläche aber die zylindrische Oberfläche des Segmentes selbst, dann wird folgen, daß dieses gleich wird dem Kegel, dessen Basis gleich ist der zylindrischen Oberfläche, d. h. dem Vierfachen des größten Kugelkreises, die Höhe aber gleich dem Halbmesser ebendesselben größten Kreises. Aber dasselbe hat Archimedes auf weit mühevollerem Weg und mit wissenschaftlicheren Prinzipien verfolgt, als Deine Verwandlung von Figuren ineinander eines ist. Deshalb ist die von Dir verwendete Transformation Archimedischem Geist fremd.“

Diese scharfe Kritik Andersons, die sich gegen die Theoreme II, XI und XX wendet, als ob Kepler dem der Kreisfläche gleichen rechtwinkligen Dreieck wirkliche und nicht nur gedankliche Existenz zubilligen würde, die auch von einer irrigen Vorstellung über die Oberfläche des Zylinderhufs ausgeht, wiederholt *Guldin* (lib. IV, pag. 330/31) im vollen Wortlaut, jedoch mit dem Vorbehalt: „Wenn auch Kepler von Anderson mit Recht getadelt wird im Sinn von Archimedes, der seine Beweise keineswegs auf solche Art und mit

solchen Mitteln angestellt hat, sondern nach unverfälschten geometrischen Gesetzen vorgeht, direkt oder indirekt, um auch Kepler etwas zuzugestehen, so ist diese neue Erfindung Keplers deshalb doch nicht ganz zu verachten oder seine Umwandlung der Körper gering zu schätzen. Denn, um bei diesem Theorem und seinem Beweis zu bleiben: man darf Kepler seinen Ruhm nicht nehmen; durch diese seine Metamorphose bestätigt er nicht nur, daß ein bestimmter Zylinderhuf dem Apfel bzw. einem apfelähnlichen Körper gleich sein könne, sondern macht auch nähere Angaben, wie dieser Huf beschaffen sei. Freilich führt er den Beweis nicht so, daß er sofort von allen angenommen werden könnte. Es tauchen da nämlich mehrere Schwierigkeiten auf, die ich hier nicht erörtern will. Er ermittelt jedoch für den Apfel ein praktisches Verfahren der Berechnung, das der Wahrheit nicht im geringsten abträglich zu sein, den richtigen Zahlen vielmehr so gut als möglich zu entsprechen scheint.“ Etwas später fügt er hinzu: „Wieviele werden es wohl sein, die, völlig an die üblichen Archimedischen und Euklidischen Beweise gewöhnt, beim Lesen des 20. Theorems von Kepler die Methode dieser Transformation begreifen, besonders, da der Gegenstand zu dunkel vorgetragen wird? Ich jedenfalls wollte mir nicht, wie man zu sagen pflegt, Kopf oder Hirn zerbrechen, um tiefer darin einzudringen.“ Guldin billigt nämlich Keplers Methode, genau so wie dem Cavalierischen Prinzip, nur heuristischen Wert, aber keine Beweiskraft zu.

Hier ist schließlich zu bemerken, daß die Erklärung *Wieleitners* zu Theor. XX (Kepler-Festschrift S. 290–292) zu Mißverständnissen Anlaß geben könnte. Zunächst ist von der Vorstellung der Verzerrung der Apfelsektoren in die Huf-form bei Kepler nicht die Rede; der Aufbau des Hufs geschieht vielmehr aus dem Schalenmodell heraus. Sodann muß *Wieleitners* „wörtliche“ Übersetzung des Textes des Theorems korrigiert werden. „Zona mali“ und „Zona globi“, „Apfelgürtel“ und „Kugelgürtel“ sind in Keplers Figur XIV (S. 50) die Bestandteile von Apfel und Kugel, die von dem Segment IKD herrühren, im ersten Fall durch Rotation um MN, im zweiten Fall um den dazu parallelen Kreisdurchmesser. Im Zylinderhuf erscheint der Apfelgürtel als der rechts von der Ebene IKL gelegene Huf IKDSL, der Kugelgürtel als Huf VTSL. Der transformierte Apfelgürtel setzt sich also zusammen aus dem reinen Zylinder IKDTV und dem Huf VTSL, welcher letzterer mit dem Kugelgürtel inhaltsgleich ist; die Höhe $OV = FG$ des Zylinders ist $2\pi \cdot (AF)$, der Rotationsweg des Mittelpunktes F. Das Theorem lautet nun wörtlich und richtig so: „Der Apfelgürtel setzt sich zusammen aus dem Kugelgürtel und dem geraden Segment des Zylinders, dessen Grundfläche das [Kreis]segment ist, das an der den Apfel erzeugenden Figur fehlt, während seine Höhe gleich ist dem Kreis, den der Mittelpunkt des größeren [Kreis]segmentes beschreibt.“ *Wieleitner* dagegen übersetzt: „Die Zone des Apfelwulstes setzt sich zusammen aus einer Zona globi und dem Segment eines geraden Zylinders, dessen Basis das Segment ist, welches in der Figur, die den Apfelwulst erzeugt, fehlt, dessen Höhe gleich ist dem Kreis, den das Zentrum des größeren Segmentes beschreibt.“

51.21. Für die Inhalte von Quitte (cotoneum) und Kürbis (cucurbita) gibt Pfeleiderer l. c. pag. 16 die Formeln:

$$\text{Quitte} = 2(b-h)\pi \cdot (E-S) + \frac{4}{3} \frac{b^2}{a^2} \rho^3 \pi,$$

$$\text{Kürbis} = 2\rho\pi(E-S') + \frac{4}{3} \frac{a^2(b-h)^3}{b^2} \pi.$$

Darin bedeuten a und b die halben Achsen der Ellipse, E deren Fläche, ρ die halbe Sehne, h die Höhe des Ellipsensegmentes von der Fläche S ; $(b-h)$ die halbe Sehne und $(a-\rho)$ die Höhe des anderen Segmentes vom Flächeninhalt S' .

51.29. Das Theorem liest man unmittelbar an Fig. XIV ab. Analytisch wird (in Übereinstimmung mit Pfeleiderer l. c. pag. 18)

$$V_e = \frac{4}{3} s^3 \pi - 2(r-p)\pi \cdot f,$$

wobei die Buchstaben dieselbe Bedeutung haben wie in Anm. 49.15. Verwendet man die daselbst durch Integration gewonnene Inhaltsformel, dann ist zu beachten, daß wegen $p > r$ das zweite Glied in der eckigen Klammer negatives Vorzeichen erhält.

52.18. Die Berechnung dieser beiden Körper hat Pfeleiderer l. c. pag. 18/19.

52.22. Inhalt und Beweis dieses Theorems werden deutlicher, wenn die Nebenfigur Keplers zu Fig. XIV räumlich herausgezeichnet wird. An dem der Zitrone inhaltsgleichen Zylinderhuf $SY'Y'R$ entsprechen $ZYBC$ und $XHY'Q$ den abgeschnittenen Spitzen; $BCZXHQ$ dem Zylinder in der Zitrone, der die Schnittflächen der Spitzen zu Grundflächen hat; $SRCQXZ$ der Zone (Gürtel) der Zitrone, die durch Rotation von CQR um BH erzeugt wird; $SZXR'$ schließlich der „kleinen Zitrone“. Den geometrischen Beweis von Theorem XXII liest man nun unmittelbar von der Figur ab.

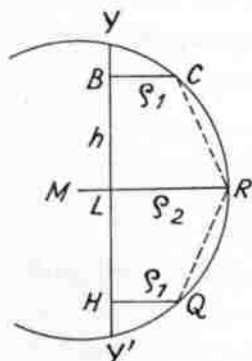


Fig. 9

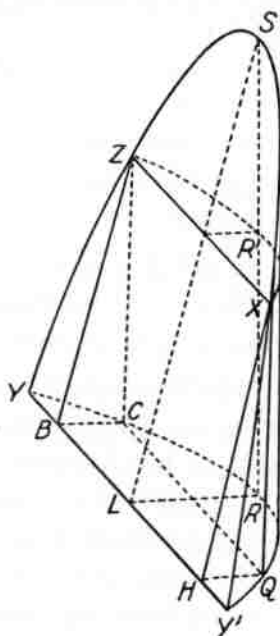


Fig. 8

54.32. In der nebenstehenden Figur sei der Halbmesser des Kreises r , $BC = HQ = \rho_1$, $LR = \rho_2$, $BL = h$. Das gekappte Citrium entsteht durch Rotation von $BCRQHL$ um die Gerade YY' . Es ist nun $(CR)^2 = 2r(\rho_2 - \rho_1) = h^2 + (\rho_2 - \rho_1)^2$, also

$$2r = \frac{h^2}{\rho_2 - \rho_1} + (\rho_2 - \rho_1)$$

und

$$\frac{2r}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{h^2 + (\rho_2 - \rho_1)^2}{(\rho_2 - \rho_1)^2}.$$

Bezeichnet man den Winkel CMR mit α , so wird

$$\cos \alpha = \frac{r - (\rho_2 - \rho_1)}{r} \quad 1 - \cos \alpha = \frac{\rho_2 - \rho_1}{r} = \frac{2(\rho_2 - \rho_1)^2}{h^2 + (\rho_2 - \rho_1)^2},$$

daher

$$\frac{2r}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{2r}{r(1 - \cos \alpha)} = \frac{2r}{r - \sqrt{r^2 - h^2}}.$$

Die letzte Beziehung kann es nur sein, die Kepler mit dem Ausdruck „numerus 200000 ad diametros intervallumque Truncantium“ meint, wenn darin auch ρ_1 fehlt.

Die nachfolgende Angabe über den Gang der Rechnung ist klar, nur bedarf die Bemerkung, daß die „kleine Zitrone“ mit Hilfe von Kugelzone und Apfelzone gefunden werde, der Korrektur dahin, daß

„kleine Zitrone“ = Zone der „großen Zitrone“ — gerades Zylindersegment

wird, wobei letzteres freilich die Differenz von Apfelzone und Kugelzone ist.

Für die drei beiderseits gekappten Körper Zitrone, Olive und „Prunum crassum“ gibt *Pfleiderer* die Volumenberechnung S. 21/22. Bei der Zitrone ist sein Ergebnis $V = 2\rho_1^2 h \pi + \frac{4}{3} h^3 \pi - 2(r - \rho_2) \pi \cdot \sigma$, wobei σ die Fläche des Kreissegmentes bedeutet, über dem die „kleine Zitrone“ steht. Darin ist der erste Term der Zylinder, der durch Umdrehung von BCQH um BH entsteht. Der zweite ist nach Anm. 49.15 das Volumen der Kugelzone, entstanden durch Rotation von σ um den zur Sehne parallelen Kreisdurchmesser. Diese Zone ist um das Zylindersegment von der Höhe $2(r - \rho_2) \pi$ zu groß; dieses wird deshalb durch den dritten Term wieder abgezogen. Diese Zerlegung des Zylinderhufs stimmt mit der Keplerschen nicht überein.

56.21. Setzt man links in die 3 Produkte

$$V_1 = (KPO) \cdot \left(\frac{PA}{3} + \frac{2}{3} CO \right) \quad V'_1 = \frac{PO}{2} \left(\frac{PM}{3} + \frac{2}{3} ON \right) \\ V''_1 = PO \cdot (PM + 2 ON)$$

und ebenso rechts in

$$V_2 = (KOXV) \cdot \frac{OC}{2} \quad V'_2 = OX \cdot \frac{ON}{2} \quad V''_2 = ON \cdot (ON + NX)$$

ihre Werte ein, so ergibt sich

$$V_1 : V'_1 : V''_1 = V_2 : V'_2 : V''_2 = \pi h : 1 : 6.$$

Das Verhältnis von Tunica zu Zylinder ist also

$$V_T : V_Z = V'_1 : V'_2 = (D - d) \cdot (D + 2d) : 3d^2 = (D^2 + Dd - 2d^2) : 3d^2,$$

also das von Kegelstumpf zu Zylinder

$$(V_T + V_Z) : V_Z = (D^2 + Dd + d^2) : 3d^2.$$

57.2. Als Beispiel rechnet Kepler den Inhalt eines Fasses, dessen Durchmesser am Boden 19, am Bauch 22 mißt und das die Länge 27 hat, und zwar zunächst als Zitronenstumpf nach Theor. XXII, sodann zum Vergleich als doppelten Kegelstumpf. Zur Vermeidung von Dezimalbrüchen verdoppelt er von Anfang an die Abmessungen des Fasses und geht in der Folge sofort, mit Rücksicht auf die ihm zur Verfügung stehenden Tafeln, zum Halbmesser $r = 10^5$ über, indem er das gegebene Faß im Verhältnis $r':r = 10^5:61,5$ bzw. $10^5:123$ vergrößert. Die großen Zahlen, die dieser Übergang zur Folge hat, sind indes eine Quelle von Rechenfehlern, die sich zu einem wesentlich falschen Resultat summieren. Für die „kleine Zitrone“ errechnet Kepler (S. 58, Z. 39) die Zahl 36 492 77 549 45, während die Inhaltsformel von Anm. 49.15 mit $r = 10^5$ $V = \frac{2\pi}{3} \cdot 10^{15} \cdot 0,000242 = 506844000000$ ergibt.

Bemerkenswert ist in der Schreibung der großen Zahlen die Bildung von Gruppen zu je 5 Ziffern. Das ganze Rechenexempel zeigt eindringlich die Schwierigkeiten, mit denen Kepler zu ringen hat, da ihm weder die Zeichensprache der Algebra noch das Hilfsmittel der Logarithmen zur Verfügung steht.

61.31. An diesem Theorem bemängelt *Guldin* (lib. IV, pag. 333) Keplers Terminologie. Nach seiner Meinung müßten an Stelle des Ausdrucks „Sphaeroides longum inscriptum lato“ die Begriffe „Figura contenta“ und „Figura continens“ verwendet werden. Er gibt auch den Beweis des Theorems nach seiner eigenen Theorie. Ist S_b der Inhalt des durch Rotation um die kurze Achse der Ellipse entstehenden breiten Sphäroids, S_a der des langen, so wird $S_b:S_a = \frac{4}{3}a^2b\pi:\frac{4}{3}ab^2\pi = a:b$. Keplers Beweis benützt die einbeschriebenen Kegel.

62.6. *Archimedes*, De Conoid. et Sphaeroid. Prop. 27.28 (Heiberg I, 392–409).

62.11. Wäre dieses Theorem richtig, dann müßte es auf alle Fälle lauten: „Segmentum globi ad dimidium Citrium“, wie es S. 63 bei dem Beispiel auch heißt. Aber auch so stimmt Keplers Vermutung – als das stellt er den Satz hin – nicht, daß sich das bei Rotation eines Kreissegmentes um seine Höhe h entstehende Kugelsegment S zu der durch Umdrehung um die Sehne von der Länge 2ρ entstehenden halben Zitrone $\frac{1}{2}C$ verhalte wie $\rho:h$. Beide Fehler bemerkt *Guldin*, dem die Richtigstellung geradezu ein Vergnügen bereitet, da der Satz für seine Schwerpunktmethode wie geschaffen erscheint. Als letztes seiner Argumente hatte Kepler „die Rechnung und das Zeugnis der Zahlen“ angeführt. An dieser Stelle hakt *Guldin* ein (lib. IV, pag. 333–336): „Kepler sagt, ‚den schulgerechten Beweis sollen andere suchen‘. Aber wer wird suchen, was man nicht finden kann? Da also Kepler an die Zahlen appelliert, so darf auch ich sie zu Hilfe rufen.“ Das Beispiel, das er nun im einzelnen mit $r = 10^7$ durchrechnet, ist nicht das Keplersche, hat vielmehr Zahlen, die für

die Schwerpunktsberechnung bequemer sind, er schließt seine Rechnung aber mit den Worten: „... Keplers Entdeckung fällt also mitsamt seinen 4 Argumenten in sich zusammen. Das bedaure ich, denn auch mir hätte dieser Kep-

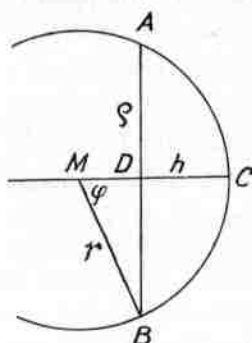


Fig. 10

lersche Satz viel zu meinem Ziel geholfen, wenn er richtig gewesen wäre; denn mit seiner Hilfe hätte ich die Rotationsradien [Abstände der Schwerpunkte von der Rotationsachse], die, wie wir gesehen haben, mühsam in Zahlen zu ermitteln sind, sehr leicht angeben können.“ In einem eigenen Scholion nimmt Guldin die 4 Argumente Keplers nochmals vor, um sie einzeln zu entkräften, und schließt (pag. 338): „Ich komme also zu dem Schluß, daß dieses Theorem Keplers keinen Bestand hat, daß also sein ‚Supplement zur Stereometrie des Archimedes‘ nicht alle Lücken füllt und daß seiner Transformation der Körper, die bislang

noch recht wenige verstehen, mein Verfahren der Schwerpunktsrotation, das mit einer reineren Geometrie nicht in Konflikt gerät, vorzuziehen sei.“

Zum analytischen Nachweis der Ungültigkeit des Theor. XXV sei in der Figur ABC das Kreissegment, seine Fläche $\sigma = r^2 \varphi - \rho(r-h)$, dann ist der Abstand η seines Schwerpunktes von D

$$\eta = \frac{2}{3} \frac{\rho^3}{r^2 \varphi - \rho(r-h)} - (r-h) = \frac{2}{3} \frac{\rho^3}{\sigma} - (r-h),$$

der Abstand ξ des Schwerpunktes des halben Segmentes DCB von DC

$$\xi = \frac{1}{3} \cdot \frac{h^2(3r-h)}{r^2 \varphi - \rho(r-h)} = \frac{1}{3} \frac{h^2(3r-h)}{\sigma}.$$

Da nun der Inhalt des Kugelsegmentes S

$$S = 2\pi \xi \cdot \frac{\sigma}{2} = \pi \xi \sigma = \frac{\pi h^2}{3} (3r-h),$$

der der Zitrone C

$$C = 2\pi \eta \cdot \sigma = \frac{4\rho^3\pi}{3} - 2(r-h)\pi\sigma$$

wird, so ist

$$S : \frac{1}{2} C = \xi : \eta = \frac{h^2(3r-h)}{2\rho^3 - 3(r-h)\sigma}.$$

Nach Keplers Vermutung wäre $S : \frac{1}{2} C = \rho : h$, also $\xi : \eta = \rho : h$, was ganz offenkundig unrichtig ist, wenn nicht $h = \rho = r$.

63.12. In dem Zahlenbeispiel $h = 3$, $\rho = 27$, $r = 123$, $\varphi = 0,2213056$ wird

$$\xi : \eta = 203 : 27, \rho : h = 9 : 1, \text{ also } \frac{\rho}{h} - \frac{\xi}{\eta} = \frac{40}{27},$$

$$\text{d. h. } S : \frac{1}{2} C = \xi : \eta < \rho : h.$$

Auf Grund der S. 57–59 durchgeführten Rechnung findet Kepler $S : \frac{1}{2} C \approx 185 : 18$ und glaubt, was völlig unmöglich ist, die Abweichung von dem Verhältnis $\rho : h = 9 : 1$ darin suchen zu sollen, daß er $\sin \varphi$ um weniger als eine Einheit der letzten Stelle zu klein angenommen habe. In Wirklichkeit spielen hier die wesentlich falschen Zahlen aus dem „Exemplum“ eine verhängnisvolle Rolle. Mit den richtigen Zahlen hätte er die Unhaltbarkeit seiner These erkennen müssen. (Durch direkte Berechnung erhält man $S = \frac{\pi h^2}{3} (3r - h) = \frac{r^3 \pi}{3} \cdot 0,00177$, $C = \frac{2r^3 \pi}{3} \cdot 0,000242$, also $S : \frac{1}{2} C = 1770 : 242 = 7,3$.)

64.3. Läßt man die Figur, in der FCG ein Ellipsen-, Parabel- oder Hyperbelbogen mit dem Scheitel C sein kann, einmal um $FG = 2a$, sodann um $OY = b$ rotieren, so müßte nach dem Wortlaut des Theorems, da das Verhältnis der entstehenden Kegel nach Satz XXIII gleich $b : a$ ist,

halbe Pflaume (Olive): Sphäroidsegment $\approx b : a$, und

halbe Spindel: Konoidsegment $\approx b : a$ sein.

Für Ellipse, Parabel und Hyperbel wird also eine ähnliche Behauptung aufgestellt wie in Theor. XXV für den Kreis, nur daß jetzt plötzlich die Höhe des Segmentes durch die Subtangente OY ersetzt wird. Das überrascht bei Kepler um so mehr, als gerade er die kontinuierlichen Zusammenhänge zwischen den Kegelschnittarten in den Vordergrund stellt. Der Satz ist tatsächlich unrichtig, wie sich am Beispiel der parabolischen Spindel am einfachsten zeigen läßt.

In der Figur sollen $a = \rho$, h , ξ , η die Bedeutung von Anm. 62.11 behalten. Die Gleichung der Parabel, bezogen auf das von Sehne und Höhe gebildete Achsenkreuz, lautet

$$x^2 = \frac{\rho^2}{h} (h - y).$$

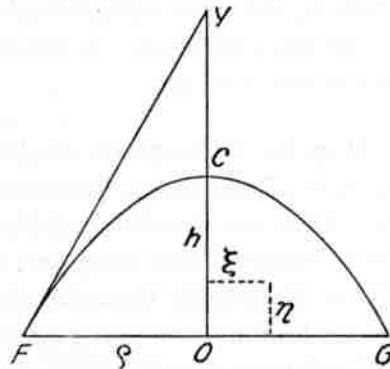


Fig. 11

Für die Achsenabstände (ξ , η) der Schwerpunkte des ganzen und des halben Segments erhält man dann

$$\xi = \int_0^\rho xy dx : \int_0^\rho y dx = \frac{3}{8} \rho,$$

$$\eta = \int_0^h xy dy : \int_0^h y dx = \frac{2}{5} h,$$

$$f = \int_0^\rho y dx = \frac{2}{3} \rho h.$$

2. $(FA \times CA) : (AB)^2 = \text{latus transversum} : \text{latus rectum}$, in heutiger Bezeichnung $(FA \times CA) : (AB)^2 = a : p = a^2 : b^2$, wobei p den Parameter, a und b die halben Achsen bedeuten.

Bezeichnet man $FS = x$, $CS = y$, $CA = t$, wobei $0 \leq y \leq t$, so findet die erste Aussage des Satzes ihren analytischen Ausdruck in der Gleichung

$$x = \frac{y \cdot (t - y)}{2y - t}.$$

Darin gehören die negativen Werte von x für $y < \frac{t}{2}$ den Hyperbeln, die positiven für $y > \frac{t}{2}$ den Ellipsen zu, während $y = \frac{t}{2}$, $x = \infty$ die Parabel anzeigt.

Den Apollonischen Satz kehrt Kepler um, indem er aus dem Bestehen der Proportionen unter 1. schließt, daß der Kegelschnitt eine Hyperbel oder Ellipse sei. Dabei fügt er zwischen Hyperbeln und Ellipsen die Parabel und zwischen die Ellipsen den Kreis ein, der CA in dem Punkt S schneidet und für den die Beziehung

$CS : AS = BC : BA = m : n$ gilt, woraus

$$y = \frac{m}{m+n} t \quad x = \frac{m \cdot n}{m^2 - n^2} t.$$

In der Figur XVII (S. 67) sind die Mittelpunkte der Hyperbel mit F , die der Ellipse mit D bezeichnet; speziell ist in der Figur D als Mittelpunkt des Kreises eingezeichnet.

68.13. Die vollständige Diskussion der bei festem Dreieck ABC mit BC als Tangente, B als Berührungspunkt und CA als Hauptachse, aber variablem y und x auftretenden Kegelschnitte würde beide Teile des Satzes I, 37 von *Apollonius* erfordern. Kepler begnügt sich indes mit dem ersten Teil, der zu einer qualitativen Beschreibung ausreicht. Er erhält in Übereinstimmung mit der Gleichung $x = \frac{y(t-y)}{2y-t}$

für $y = 0$	$x = 0$	das Geradenpaar durch $S = F$
$0 < y < \frac{t}{2}$	$x < 0$	Hyperbeln
$y = \frac{t}{2}$	$x = \infty$	Parabel
$\frac{t}{2} < y < \frac{m}{m+n} t$	$x > \frac{m \cdot n}{m^2 - n^2} t$	Steilellipsen
$y = \frac{m}{m+n} t$	$x = \frac{m \cdot n}{m^2 - n^2} t$	Kreis
$\frac{m}{m+n} t < y < t$	$x < \frac{m \cdot n}{m^2 - n^2} t$	Flachellipsen
$y = t$	$x = 0$	die Doppelgerade AB .

Hervorgehoben sind in der Diskussion außerdem die Wertepaare $y = \frac{t}{3}$, $x = -\frac{2t}{3}$ und $y = \frac{2t}{3}$, $x = \frac{2t}{3}$, die $CS = CF$ bzw. $SA = AF$ bedeuten.

Die Gleichung des Systems der Kegelschnitte, die CA zur Symmetrieachse haben und BC in B berühren, stellt *Wieleitner* (Kepler-Festschrift S. 295 f.) auf.

69.10. Die hier gestellte Aufgabe, das Kegelschnittbüschel zu charakterisieren, das eine gegebene Gerade im Punkt V berührt und außerdem durch zwei bezüglich der Senkrechten in V symmetrisch gelegene Punkte S_1 und S_2

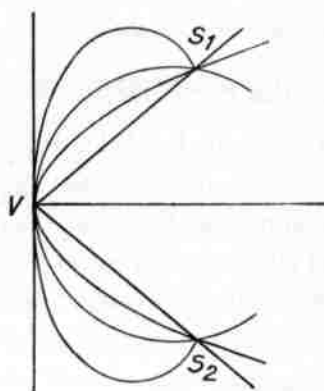


Fig. 13

geht, zielt direkt auf die Faßformen ab, wobei der Bogen S_1VS_2 Länge und Krümmung der Dauben wiedergibt. Es stehen deshalb nur solche Kegelschnitte zur Diskussion, bei denen die Berührung in V auf der Seite von S_1 und S_2 geschieht; die Hyperbeln, welche die Gerade in V auf der anderen Seite berühren, während der zweite Ast durch S_1 und S_2 geht, entfallen daher von vornherein, ebenso die Steilellipsen, die zwischen S_1 und V wie auch zwischen S_2 und V je noch einen Scheitel aufweisen. Beide Arten enthält aber die analytisch-geometrische Lösung, die diese Einschränkungen nicht berücksichtigt. Es

ist deshalb nicht verwunderlich, wenn *Wieleitner* (Festschrift S. 296 f.) auch auf solche Lösungen aufmerksam macht, ungerecht aber das Urteil, daß Kepler diese Dinge nicht gesehen habe. In Nr. 66 der „Messekunst“, wo dasselbe Thema behandelt wird, werden die Steilellipsen ausdrücklich erwähnt. Unverständlich ist auch die Bemerkung über das Geradenpaar VS_1, VS_2 , von dem *Wieleitner* wörtlich meint: „Er [Kepler] hat nicht bemerkt, daß die Grenze seiner Hyperbeln hier das Geradenpaar VS_1, VS_2 ist. Gesehen hat er das aber doch, da er es in der nächsten Nummer erwähnt.“

69.15. *Apollonius* IV, 24 spricht aus, daß zwei Kegelschnitte identisch sein müssen, wenn sie ein endliches Bogenstück gemeinsam haben. IV, 26 besagt, daß zwei Kegelschnitte, die sich berühren, außerdem höchstens zwei Schnittpunkte haben können. IV, 27 schließlich, daß die Existenz zweier verschiedener Berührungspunkte die eines weiteren Schnittpunktes ausschließt.

70.20. In der nebenstehenden Figur, in der nur der Kreisbogen S_1VS_2 und das Geradenpaar VS_1, VS_2 eingetragen sind, ist die Figur $R_1S_1VS_2R_2$ um R_1R_2 rotiert zu denken. Wird zwischen Kreis und Geradenpaar nach Theor. XXVIII die Folge der Ellipsen, Parabel, Hyperbeln gelegt, die sich in V berühren, in S_1 und S_2 schneiden, zwischen V und S_1 bzw. S_2 aber keinen Punkt gemeinsam haben, so liegen die bei der Rotation entstehenden Körper schalenförmig ineinan-

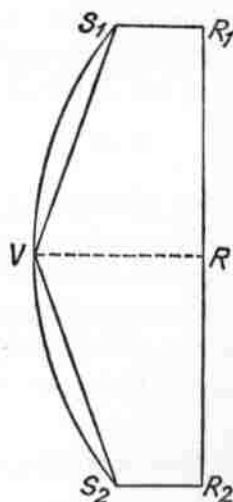


Fig. 14

der, und der umfassende Körper ist inhaltlich größer als der umfaßte. So gibt die Kegelschnittfolge zugleich die Größenfolge der Körper; der größte ist der Zitronenstumpf, der kleinste der doppelte Kegelstumpf. Es wird hier deutlich, daß der Kreis von Kepler mit Rücksicht auf das Faß als Grenze gewählt ist.

71.2. Die exakt-geometrische Lösung der Aufgabe, den Inhalt des durch eine Ebene parallel der Achse abgeschnittenen Segmentes einer beiderseits gekappten Zitrone usw., doliometrisch ausgedrückt: eines Fasses mit kreisförmiger, elliptischer, parabolischer oder hyperbolischer Wölbung der Dauben zu berechnen, kann weder Kepler noch dem dazu herausgeforderten Snellius gelingen. Eine praktisch ausreichende Näherungslösung aus dem Zitronenstumpf findet Kepler jedoch in Nr. 88 der „Messekunst“, nachdem er im dritten Teil der „Stereometria“ an einem doppelten Kegelstumpf das Ziel verfehlt hatte.

Mit diesem Theorem, dem Abschluß des 1. Teiles, schließt auch der kritische Kommentar *Guldins* zur „Stereometria“ im 4. Buch von „De Centro Gravitatis“. Nochmals versichert er die Sachlichkeit seiner Kritik: „In den weiteren Teilen, die auf das Supplement zur Stereometrie folgen, hat Kepler noch ausgezeichnete Partien, die ich hier nicht berührt habe, die aber der geometrischen Wissenschaft zu Ansehen verhelfen können. Sie möchte ich durch meine Äußerungen in keiner Weise herabgesetzt haben, und sie werden auch zu ihrer Zeit die Anerkennung finden. Das, was ich angeführt habe, da es direkt oder indirekt gegen meine Prinzipien verstößt, habe ich mit dem Recht gerügt oder gelobt, von dem andere gegen mich Gebrauch machen können.“

73.22. In der „Geometria practica“, lib. V, cap. 10 (Opera II, 1611, pag. 145) zieht *Clavius* zwei Arten von Fässern in Betracht: 1. Die Dauben in der Mitte kreisförmig gekrümmt, gegen die Enden aber gestreckt, so daß das halbe Faß als Kegelstumpf (*conus decurtatus*) verstanden werden kann. 2. Die Dauben „einigermaßen (*aliquo modo*) kreisförmig“, sodaß das Faß „*tanquam frustum quoddam Sphaeroidis*“ zu betrachten sei. Denn die Krümmung der Dauben werde nicht merklich von der eines Sphäroids abweichen. Danach behandelt er das Faß als beiderseits abgeschnittenes Sphäroid. Beide Berechnungsarten würden der Wahrheit nahekommen, meint er zum Schluß, fügt aber vorsichtig an: „*Paratus tamen interim sum, si quis accuratorem invenerit, eam libenti animo et grato acceptare.*“ Kepler vertritt dagegen die Meinung, „daß nie ein Faß aus dem Bauch eines Archimedischen Sphäroids gebildet worden sei“, und schlägt deshalb den langen Umweg ein, den *Henry Briggs* in seinem einzigen Brief an Kepler vom 20. Febr. 1625 (Bd. XVIII, S. 221) unverständlich findet: „Unter anderem habe ich im 26. Kap. [der „*Arithmetica logarithmica*“, London 1624] eine neue Methode der Ausmessung unseres Fasses vorgetragen, die ich ohne Scheu der Archimedischen vorziehe, nicht weil ich sie für richtiger hielte, sondern weil ich dadurch mit weniger Umstand

dasselbe genaue Ergebnis erzielen kann. Sieh, bitte, wenn Dir neben Deinen anderen größeren Arbeiten die Muße dazu bleibt, den Schluß von S. 74 bis zum Schluß des Kapitels an. Als ich mit der Veröffentlichung dieser Sache umging, nahm ich begierig Einblick in Dein Buch über das österreichische Faß und hatte so recht den Wunsch, Deine Art der Faßrechnung kennen zu lernen und mit meiner zu vergleichen. Was aber andere Bücher, die ich sehen konnte, beinahe in einem einzigen Kapitel abgemacht haben, das hast Du so breit ausgeführt und mit soviel neuen Wörtern und Definitionen belastet dargestellt, daß ich genötigt war, in der Eile nur einige andere Namen zu erwähnen, Deinen dagegen ganz zu unterdrücken. Das sage ich nicht, um zu tadeln, daß Du in dieser Sache so wortreich bist; alles ist nämlich meiner Meinung nach gut zu wissen und wohl wert, von den Geometern sorgfältiger studiert zu werden, sondern um mich bei Dir zu entschuldigen, daß ich Deines sorgfältig und genau geschriebenen Buches über denselben Gegenstand nicht böswillig, sondern aus Not keine Erwähnung getan habe.“

Die Leistung, auf die Briggs stolz ist, ist die logarithmische Berechnung des Sphäroidstumpfes, den er unter ausdrücklicher Berufung auf Clavius als Faßmodell annimmt. Es darf hier wohl bemerkt werden, daß dieses Modell durch Kepler erledigt war; in der späteren Literatur spielt es keine Rolle mehr.

76.31. Es ist nicht ganz klar, was die Wendung: „Bei Kegelstümpfen bleibt alles übrige, nur daß . . .“ eigentlich meinen soll. Wenn damit gesagt sein soll,

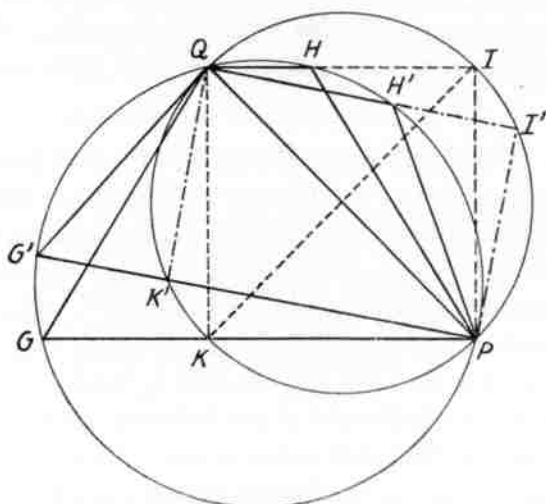


Fig. 15

daß in der Fig. XIX das Dreieck QIP unter allen Dreiecken mit der Basis QP und der Spitze auf dem Kreisbogen QIP den größten Inhalt habe, dann ist das richtig. Sollte aber stillschweigend mitbehauptet werden, daß auch das zugehörige gleichschenklige Trapez maximalen Inhalt habe, dann wäre die Aussage, wie Wieleitner richtig bemerkt, falsch. Geometrisch ergibt sich das sehr leicht mit Hilfe eines von Herrn *Jos. E. Hofmann* stammenden Beweises

Nun ist aber $AG : GB = 1 : \sqrt{2}$ und $KG : KD > AG : GB$, da $DK \cdot KF = GK \cdot KB$ und $AG < KF$, $GB > BK$, also $DK \cdot AG < GK \cdot GB$. So wird $p : d = KX : KD > 1 : 2$ oder $2p > d$, $4p > 2d$. Es ist also

$$Q_1 = W - 4e - 8s - (4p - 2d) < W.$$

In Keplers Beweis steckt ein Fehler, indem er (Z. 24) $AG : GB > GK : KD$ und entsprechend $GK : KD < 1 : \sqrt{2}$, $p : d < 1 : 2$ behauptet. Da er jedoch mit $d < 2p$ weiteroperiert, wird der Fehler wieder aufgehoben.

81.22. Im zweiten Fall entsteht der Quader MLN aus dem Würfel BGA, indem zuerst den 4 Seitenflächen quadratische Platten (p) von der Dicke OX aufgesetzt werden, wobei $OX : OL = AG : GB = 1 : \sqrt{2}$. Von dem so entstande-

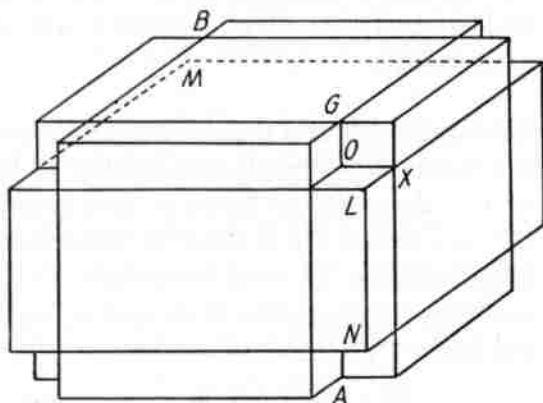


Fig. 18

nen Körper werden weggenommen: 8 waagrecht liegende Säulen (s) von der Länge GA und der Grundfläche GOX, ferner die nun vom Würfel BGA herausragenden 2 Deckplatten (d) von der Dicke OG. Schließlich werden die einspringenden Ecken durch die 4 Ecksäulen (e) von der Höhe LN und dem Querschnitt OLX ausgefüllt. Auf diese Weise wird

$$Q_2 = W + 4p - 8s - 2d + 4e = W - (8s - 4e) - (2d - 4p).$$

Kepler zeigt nun, daß sowohl $8s > 4e$ als auch $2d > 4p$ ist. Infolgedessen wird auch $Q_2 < W$, wie zu beweisen war.

In seinem Brief an Kepler (vgl. Anm. 73.22) kommt Briggs auch auf den Beweis der Maximaleigenschaft des Würfels zu sprechen. In einfacherer Weise als Kepler verifiziert er zunächst mit Hilfe seiner Logarithmen, daß die dem Würfel benachbarten, der Kugel einbeschriebenen Quader kleineren Inhalt haben. Dabei geht er von der Inhaltsformel

$$J = 4r^3 \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

aus, wenn α der Winkel ist, zu dem die Höhe des Quaders als Sehne gehört, beim Würfel $\alpha = 70^\circ 31' 40''$. Der direkte Beweis, daß der Würfel maximalen Inhalt hat, wird bei Briggs nicht einfacher als bei Kepler.

89.5. Die Aufgabe, den großen Grundkreisdurchmesser AV des Kegelstumpfes zu berechnen, wenn der kleinere CT gegeben ist und dazu Höhe AG und Durchmesser CG des Zylinders, führt auf die Rechnung

$$\begin{aligned} AV &= CT + AB & AB &= AD + BD \\ \frac{AD}{BD} &= \frac{AG^2}{CG^2} & \frac{AB}{BD} &= \frac{AG^2 + CG^2}{CG^2} \\ BD &= \frac{CG^2 - CT^2}{CT} = \frac{CG^2}{CT} - CT, \end{aligned}$$

also

$$AB = \left(\frac{CG^2}{CT} - CT \right) \cdot \frac{AG^2 + CG^2}{CG^2},$$

während Kepler

$$AB = \left(\frac{CG^2}{CT} - CT \right) \cdot \frac{AG^2 + CG^2}{AG^2}$$

angibt.

Der Fehler wirkt sich in dem Beispiel nur deshalb nicht aus, weil $AG^2 = CG^2$ angenommen ist.

89.19. Gegeben sind hier $CG^2 : AG^2$, CT und AV, gesucht wird CG. Daß Keplers Rechenvorschrift nicht stimmen kann, zeigt sein Ergebnis in Zahlen, da er $CG^2 = 2340$ errechnet, während $CT = 130$ angenommen wurde und $CT < CG$ sein sollte. Tatsächlich wird $DB : AB = CG^2 : (AG^2 + CG^2)$,

$$\text{also } DB \cdot CT = CG^2 - CT^2 = \frac{AB \cdot CG^2}{AG^2 + CG^2} \cdot CT,$$

während Kepler dieses Produkt $= CG^2$ setzt. Richtig wäre also $CG^2 - CT^2 = 2340$, $CG^2 = 2340 + 16900 = 19240$, $CG = 138,7$.

90.2. Mit $AG^2 : CG^2 = AD : BD = 1 : 2$ wird

$$\begin{aligned} BD &= 2 \cdot AD & DV &= \frac{BV + 2AV}{3} = \frac{CT + 2AV}{3} \\ CG^2 &= BV \cdot DV = CT \cdot \frac{CT + 2AV}{3}. \end{aligned}$$

Mit $CT = 19$, $AV = 22$ kommt also $CG^2 = 399$. Der Zweifel *Wieleitners* an den zwei „medietates arithmeticae“ (a.a.O. S. 303, Anm. 42) ist daher unbegründet; er rührt daher, daß *Wieleitner* den Fehler AC statt GC, der auch bei Frisch stehengeblieben ist, nicht bemerkt hat.

92.6. In beiden Tabellen ist das Verhältnis $GA^2 : TR^2$ umzukehren. In der „conjugatio aequalitatis“ mit $AG : CG = AT : CT = 1 : 1$ ist in Fig. XXI (S. 87) D die Mitte von AB und zugleich der Fußpunkt R des Lotes von T auf AV. Wird nun $TC : AV = a : b$, $TC : AB = a : (b - a)$ gesetzt, so wird $\frac{AG^2}{TR^2} = \frac{AG^2}{TD^2} = \frac{2a(a+b)}{(a+b)(3a-b)} = \frac{2a}{3a-b}$, wobei wegen $b > a$, $2a > 3a-b$ wird. Setzt man für $a : b$ der Reihe nach die Werte $1 : 2$, $2 : 3$, $3 : 4$ usw. ein, so ergibt sich für $AG^2 : TD^2$ sukzessive $2 : 1$, $4 : 3$, $6 : 5$ usw.

Durch entsprechende Rechnung für die „conjugatio dupla“, die dem Verhältnis $AG^2 : CG^2 = AT^2 : CT^2 = 1 : 2$ entspricht, erhält man, wenn wieder $CT : AV = a : b$ gesetzt wird,

$$\frac{AG^2}{TR^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a(a+2b)}{a(a+2b)-b^2},$$

was für $AG^2 : TR^2$ die sukzessiven Werte $10 : 3$, $32 : 21$, $66 : 51$ usw. ergibt, wenn $a : b$ dieselbe Wertereihe wie oben durchläuft. Wachsen die Zahlen a und b je um eine Einheit, so bilden sowohl die Verhältniszahlen für AG^2 und TR^2 wie auch deren Differenzen arithmetische Reihen 2. Ordnung.

92.30. In Keplers konsequent eingehaltener Bezeichnung der Hauptpunkte der Figur lautet das Theorem, wenn die Volumina von Kegelstumpf und Zylinder mit V_{st} bzw. V_z bezeichnet werden:

$$\frac{V_{st}}{V_z} = \frac{CT \cdot AV + \frac{1}{3}(AB)^2}{CT \cdot DV} \cdot \frac{AG}{TR};$$

wie in den vorausgehenden Tabellen ist jedoch das Verhältnis $AG : TR$ umzukehren. Das kann man kurz so zeigen:

Sei $CT = a$, $AV = b$, $CG = d$, $AG = h$, $TR = h'$, dann ist

$$CT \cdot AV + \frac{1}{3} AB^2 = ab + \frac{1}{3}(b-a)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

$$CT \cdot DV = CG^2 = d^2, \text{ also } \frac{CT \cdot AV + \frac{1}{3}(AB)^2}{CT \cdot DV} = \frac{1}{3} \frac{a^2 + ab + b^2}{d^2} = \frac{V_{st}}{V_{z'}},$$

wenn mit Z' der Zylinder vom Durchmesser d und der Höhe h' gemeint ist. Nun ist aber $V_z : V_{z'} = h : h'$, also

$$\frac{V_{st}}{V_z} = \frac{V_{st}}{V_{z'}} \cdot \frac{h'}{h} = \frac{CT \cdot AV + \frac{1}{3}(AB)^2}{CT \cdot DV} \cdot \frac{TR}{AG}.$$

94.8. In Keplers Beispiel für die Konjugation $AT^2 : CT^2 = 1 : 2$ steckt ein kleiner Fehler. Setzt man nämlich wieder $CT = a$, $AV = b$, so rechnet er

$$\frac{V_{st}^2}{V_z^2} = \left(\frac{a^2 + (b-a) \frac{2a+b}{3}}{a \frac{a+2b}{3}} \right)^2 \cdot \frac{4a^2 - (b-a)^2}{4a \frac{a+2b}{3}} = \left(\frac{ab + \frac{1}{3}(b-a)^2}{a \frac{a+2b}{3}} \right)^2 \cdot \frac{a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{a \frac{a+2b}{3}},$$

während nach Theor. IX kommen müßte

$$\left(\frac{V_{st}}{V_z} \right)^2 = \left(\frac{ab + \frac{1}{3}(b-a)^2}{a \cdot \frac{a+2b}{3}} \right)^2 \cdot \frac{a^2 - \frac{(b-a)^2}{2}}{a \cdot \frac{a+2b}{3}}.$$

In der Tabelle macht sich dieser Fehler nur bei den kleinsten Werten von a und b bemerkbar; mit wachsendem a und b , während $b - a = 1$ bleibt, nähert sich das Verhältnis $V_z : V_{st}$ nach beiden Formeln rasch dem Wert $1 : 1$.

Die Berechnung des folgenden Beispiels in Coroll. III hat Kepler zwar richtig in der Form

$$\frac{V_{st}^2}{V_z^2} = \left(\frac{ab + \frac{1}{3}(b-a)^2}{a \frac{a+b}{2}} \right)^2 \cdot \frac{a^2 - \left(\frac{b-a}{2} \right)^2}{a \frac{a+b}{2}},$$

mit $a = 1$, $b = 2$ erhält er jedoch $V_z : V_{st} = 10 : 9$ statt $11 : 10$.

95.9. Die Bemerkung in Coroll. II, daß die Stumpfinhalte bei konstantem Zylinder abnehmen, in Coroll. III dagegen, daß sie unter gleicher Bedingung wachsen, ist zu vertauschen. Tatsächlich nimmt das Verhältnis Zylinder zu Stumpf im ersten Fall von $15 : 11$ bis $3363 : 3362$ ab, was bedeutet, daß der Stumpf bei konstantem Zylinder zunimmt; im zweiten Fall tritt das Umgekehrte ein, da das Verhältnis von $54 : 60$ bis $13328 : 13468$ wächst.

97.21. Bei der Bedeutung des Theorems für die folgenden Entwicklungen soll es kurz bewiesen werden. a , b seien die Grundkreisdurchmesser des Kegelstumpfs, $b - a = AB$. Der Durchmesser CE (Fig. XXI) des mit dem Stumpf gleich hohen Zylinders ist dann $CE = \frac{a+b}{2}$ (Theor. XII), sein Inhalt

$$V_z = \left(\frac{CE}{2} \right)^2 \pi h = \left(\frac{a+b}{4} \right)^2 \pi h.$$

Mit

$$V_{st} = \frac{\pi h}{12} (a^2 + ab + b^2) = \frac{\pi h}{12} [(a+b)^2 - ab]$$

wird also

$$V_{st} - V_z = \frac{\pi h}{48} [4(a+b)^2 - 4ab - 3(a+b)^2] = \frac{\pi h}{48} (b-a)^2$$

$$\frac{V_{st} - V_z}{V_z} = \frac{\frac{1}{12}(b-a)^2}{\left(\frac{a+b}{2} \right)^2} = \frac{\frac{1}{12}(AB)^2}{(CE)^2}.$$

In der letzten Form spricht Kepler den Satz aus; die Form der Differenz $V_{st} - V_z$ ist jedoch oft von Nutzen.

98.17. Wird $CE = \frac{a+b}{2} = e$ gesetzt, dann ist $a+b = 2e$, $b = 2e - a$, $AB = b - a = 2(e - a)$. Das Maximum für AB bei konstantem e ist also $AB = 2e$. Keplers Aussage, die Differenz AB könne bis zum arithmetischen Mittel von a und b vergrößert werden, bedarf danach der Korrektur.

99.23. Im Gegensatz zu der Meinung *Wieleitners* (a.a.O. S. 304) über das Theor. XV, daß es für uns ohne Bedeutung sei, muß festgestellt werden, daß es für die folgenden Entwicklungen grundlegend ist. In deutscher Übersetzung lautet der Satz: „Alle Verhältnisse der Durchmesser am Stumpf, welche bei einer bestimmten Konjugation statthaben, treten auch bei einer Konjugation größeren Verhältnisses auf.“ In dem Theorem tritt also neben

dem bereits eingeführten Konjugationsverhältnis $\kappa = CT:AT$ auch das Verhältnis $\lambda = CT:AV = a:b$ der Grundkreisdurchmesser auf, das von Kepler keinen eigenen Namen erhält und deshalb als Assoziationsverhältnis bezeichnet werden soll.

Wie die Linien $\kappa = \text{const.}$, sind auch die $\lambda = \text{const.}$ Kreise. Seien nämlich in der Figur CTAV und CT'AV', beides gleichschenklige Trapeze mit $CT:AV = CT':AV' = \lambda < 1$, die Meridianschnitte zweier Kegelstümpfe, dann

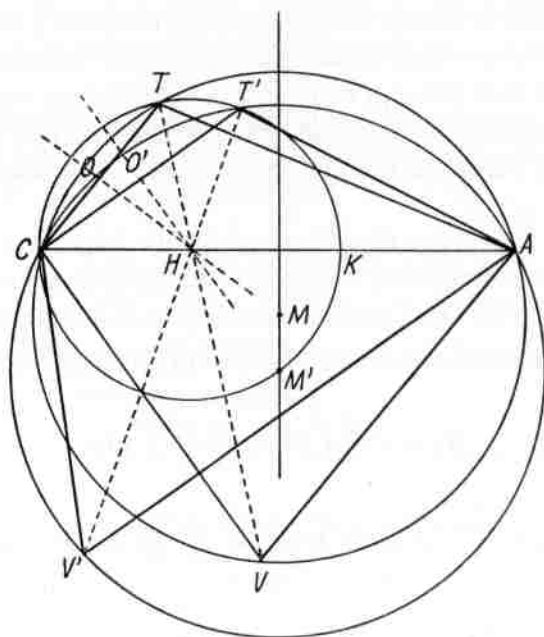


Fig. 20

schnitten sich CA, TV, T'V' sowie die Mittelsenkrechten von CT und CT' alle in dem einen Punkt H auf CA, sodaß $CH:AH = a:b = \lambda$ wird. Die Mittelpunkte O von CT und O' von CT' liegen daher auf dem Halbkreis über CH, die Punkte T, T' auf dem Halbkreis über CK = 2 CH.

In dem Halbkreis über CA haben wir daher jetzt zwei Systeme von Kreisen, die κ -Kreise, $0 < \kappa < \infty$, zu denen die Mittelsenkrechte auf CA als $\kappa = 1$ gehört, und die λ -Kreise, $0 \leq \lambda \leq 1$, deren äußerster $\lambda = 1$ der Halbkreis über CA ist, während $\lambda = 0$ sich auf den Punkt C zusammenzieht. $\lambda = 1$ bedeutet daher bei beliebigem κ einen Zylinder, $\lambda = 0$ einen Kegel.

Die Voraussetzung des Theorems, daß in einer gegebenen Konjugation ein bestimmtes Verhältnis λ statthat, ist also gleichbedeutend damit, daß der κ -Kreis den λ -Kreis schneidet. Dann ist aber sofort klar, daß der λ -Kreis auch von jedem Kreis $\kappa' < \kappa$ getroffen wird (kleiner ist das Verhältnis deshalb, weil $\kappa = CT:AT$ definiert ist, während Kepler hier offenkundig mit dem Verhältnis $AT:CT = 1:\kappa$ operiert). Mit wachsendem κ wird der Wert κ_0 erreicht, bei dem sich die beiden Kreise auf CA berühren, um sich bei

noch größerem κ nicht mehr zu treffen. Ist der Berührungspunkt K, so ist $\kappa_0 = \frac{CK}{AK} = \frac{2\lambda}{1-\lambda}$. Die Bedingung für das Schneiden der beiden Kreise lautet also

$$\kappa < \frac{2\lambda}{1-\lambda} \quad \lambda > \frac{\kappa}{\kappa+2}.$$

Beim rheinischen Faß mit $\kappa = 1$ sind also nur Durchmesserhältnisse $\lambda = a:b > 1:3$ möglich, beim österreichischen Faß mit $\kappa = \sqrt{2}$ muß $\lambda > \sqrt{2}-1$ sein. Keplers Erklärung zu dem Theorem ist sehr allgemein gehalten und daher schwer verständlich. Sie beginnt mit der keinesfalls richtigen Aussage, daß CT und TA in jeder Konjugation von der Gleichheit an soweit verkleinert werden können, bis ihre Summe gleich CA werde. Als die obere Grenze, von der ab CT und CA verkleinert werden, schwebt ihm ohne Zweifel der Fall CT senkrecht zu TA, der Zylinder vor, bei dem Gleichheit der Grundkreisdurchmesser eintritt. Es liegt also wohl eine Verwechslung vor. Die Erklärung von *Klug* (Ostwalds Klassiker 165, S. 124) zu dem Theorem ist ganz irreführend.

100.23. Keplers Gedankengang ist völlig einwandfrei. Der Punkt Z sei auf dem Halbkreis beweglich, CZ = y, AZ = x, G die Ecke des Zylinders maximalen Inhaltes, CG:AG = $\sqrt{2}$, H ein weiterer fester Punkt des Halbkreises zwischen C und G, also $(CH)^2 \cdot \pi \cdot AH < (CG)^2 \cdot \pi \cdot AG$. Kepler betrachtet nun die Verhältnisse $V_1 = \frac{AH}{x}$, $V_2 = \frac{y^2}{CH^2}$. Läßt man Z auf dem Kreis von C nach A wandern, so wächst sowohl V_1 wie V_2 kontinuierlich. Ihre Werte sind

$$\begin{array}{ll} \text{in C: } V_1 = \frac{AH}{CA} < 1 & V_2 = 0 \\ \text{in H: } V_1 = 1 & V_2 = 1 \\ \text{in G: } V_1 = \frac{AH}{AG} > 1 & V_2 = \frac{CG^2}{CH^2} > 1 \\ \text{in A: } V_1 = \infty & V_2 = \frac{CA^2}{CH^2} \end{array}$$

Wegen $CG^2 \cdot AG > CH^2 \cdot AH$ wird in G $\frac{AH}{AG} < \frac{CG^2}{CH^2}$, $V_1 < V_2$, in A dagegen ist $V_1 > V_2$. Zwischen G und A liegt also ein Punkt B, in dem $V_1 = V_2$ oder $\frac{AH}{AB} = \frac{CB^2}{CH^2}$, also $(CH)^2 \pi \cdot AH = (CB)^2 \pi \cdot AB$ wird.

Was an diesem Beweis so „sehr altmodisch“ sein soll, wie *Wieleitner* (S. 305) meint, ist nicht einzusehen. Er selbst stellt das Zylindervolumen $V_z = \frac{1}{4} x y^2 \pi = \frac{1}{4} x (d^2 - x^2) \pi$ als Kurve 3. Ordnung dar und beweist die Existenz zweier positiver Lösungen x_1, x_2 , wenn $0 < V_z < \frac{1}{4} CG^2 \cdot AG \cdot \pi$.

101.14. In Fig. 21 sei HS der Konjugationskreis $\kappa < \sqrt{2}$, CG:AG = $\sqrt{2}$, der Zylinder CEA der „subcontrarius“ zu CHA. B sei ein Punkt zwischen G und H; für die Zylinder gilt dann $V_z(H) < V_z(B) < V_z(G)$ in leicht verständ-

licher Symbolik. Es seien nun T' , T'' , T''' der Reihe nach die Schnittpunkte des Kreises HS mit CB , CG , CE , d. h. der Zylinder CBA habe gleiche Höhe mit dem Kegelstumpf $CT'A$ u. s. f. Da nun nach Theor. XIII $V_{st}(T') - V_z(B) = \frac{\pi h}{48} (b - a)^2$, so ist $0 < V_{st}(T') - V_z(B) < V_{st}(T'') - V_z(G)$, also wegen $V_z(G) > V_z(B)$ $V_{st}(T'') > V_{st}(T') > V_z(B) > V_z(H)$.

Dies ist der erste Teil des Theorems.

Der zweite Teil ergibt sich aus

$$V_{st}(T''') > V_z(E) = V_z(H).$$

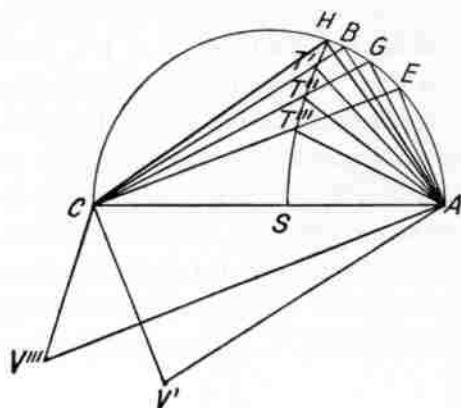


Fig. 21

102.3. Der Satz wird an Figur 21 der vorhergehenden Anmerkung wieder leicht verständlich. Es sei $\kappa = CH : AH < CG : AG = \sqrt{2}$. Der Konjugationskreis κ schneidet CG in T'' . Es ist also $V_{st}(T'') > V_z(G)$. Da andererseits $V_z(H) < V_z(G)$ und $V_{st}(S) = 0$, so gibt es sowohl zwischen T'' und H wie zwischen T''

und S je einen Punkt, in dem der Stumpf gleiches Volumen annimmt wie der Zylinder CGA .

Die algebraische Behandlung des Satzes gibt *Wieleitner* S. 307/08.

103.5. Keplers Beweis ist kurz folgender: Da Stümpfe miteinander verglichen werden, für die $\lambda = a : b$ konstant ist, so ist auch $\frac{b-a}{\left(\frac{a+b}{2}\right)}$ und das Verhältnis $\frac{V_{st} - V_z}{V_z} = \frac{1}{12} \frac{(b-a)^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$ konstant. Die Differenz $V_{st} - V_z = m \cdot V_z$ erreicht also mit V_z ihr Maximum. Schneidet der λ -Kreis CG in R , so hat der Stumpf CRA die Höhe GA und $V_{st}(R)$ ist das Maximum auf dem Kreis.

Die analytische Behandlung des Satzes geht am besten von der Figur Anm. 99.23 aus. Setzt man dort $CT = a = b \cdot \lambda$, $AV = b = \frac{2c}{1+\lambda} \cos \alpha$, $CA = c$, $\angle TCA = \alpha$, also die Höhe des Stumpfes $h = c \sin \alpha$, dann erhält man V_{st} in der Form $V_{st} = B \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$, wobei $B = \frac{c^3 \pi}{3} \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2} = \text{const.}$ Der Maximalwert von V_{st} ergibt sich daraus für $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{AG}{CG}$.

104.29. Der Satz XXI, der das Ergebnis von XX auf konjugierte Stümpfe übertragen möchte, ist wieder nur eine Vermutung Keplers, deren Beweis er den „belgischen Apollonii“ Snell und Adriaen van Roomen als Aufgabe stellt. Snell (1581–1626) war zu dieser Zeit, da Kepler ihn bereits als „Zierde der Geometer unseres Jahrhunderts“ bezeichnet (S. 71), literarisch noch kaum hervorgetreten. Die große Achtung vor ihm kann deshalb nur aus der persönlichen Bekanntschaft mit ihm stammen. Snell war nämlich (Cantor II², 654) auf seinen ausgedehnten Reisen (ca. 1600–1613) auch nach Prag gekommen

und hatte Kepler dort kennengelernt. Auch mit van Roomen (1561–1615) verbindet Kepler persönliche Bekanntschaft. Sie waren sich in Prag und Frankfurt begegnet, woran Roomen in einem Brief an Kepler (Bd. XVI, S. 244) erinnert, und umgekehrt hatte dieser Roomen um die algebraische Auflösung des 7-, 9-, 11- und 13-Ecks angegangen, wie aus dem unveröffentlichten Antwortbrief (Mss. Pulk. V, 60) hervorgeht. Der Ausdruck „belgischer Apollonius“ stammt aus dem bekannten Wettstreit Roomens mit Viète; wenn nämlich kein solcher sich zeige, spottet Viète, dann werde ein gallischer auf den Plan treten. Der „Apollonius Gallus“ kam tatsächlich 1600.

Von Keplers Argumenten für seine Vermutung ist die Rechnung das stärkste. Am Beispiel der Konjugation $\kappa = 1$ zeigt er, daß der Stumpf CFA

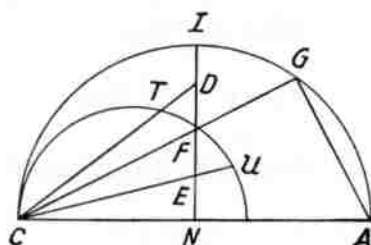


Fig. 22

(in Fig. XXI, S. 103) mit der Höhe AG größeren Inhalt hat als jeder andere zwischen F und I. Er schließt daraus, daß CFA in dieser Konjugation überhaupt den maximalen Stumpf darstelle, und weiter: „Was in einer Konjugation gilt, ... gilt selbstverständlich in allen.“

Der Satz ist aber falsch. Bezeichnet man das Volumen des eindeutig zu irgendeinem Punkt P im Innern des Halbkreises über CA gehörigen Kegelstumpfs mit $V(P)$, ist ferner IN die Mittelsenkrechte auf CA ($\kappa = 1$), F ihr Schnitt mit CG, D und E je ein Punkt auf ihr zwischen I und F bzw. zwischen F und N, sind schließlich T und U die Schnittpunkte des λ -Kreises durch F mit CD und CE, dann haben wir:

$$V(T) < V(F) \text{ nach Theor. XX,}$$

$$V(D) < V(T) \text{ nach Theor. XIII, also}$$

$$V(D) < V(F). \text{ Dagegen ist}$$

$$V(E) > V(U) \text{ nach XIII,}$$

$$V(U) < V(F) \text{ nach XX.}$$

Man kann also nicht mehr schließen $V(E) < V(F)$. Die Entscheidung kann nur die explizite Rechnung bringen.

Es sei also P ein Punkt im Innern des Halbkreises über CA, $CP = a$, $AQ = b$, $\angle PCA = \varphi$, $CA = c$, die Höhe des Stumpfes $BA = s \cdot c$ ($0 < s < 1$). Dann wird $\sin \varphi = s$, $\cos \varphi = \sqrt{1-s^2}$, $b = 2c \cdot \cos \varphi - a$, $b - a = 2(c \cdot \cos \varphi - a) = 2(c \sqrt{1-s^2} - a)$.

Für das Zylindervolumen $V_Z(B)$ und $V(P)$ erhält man daher

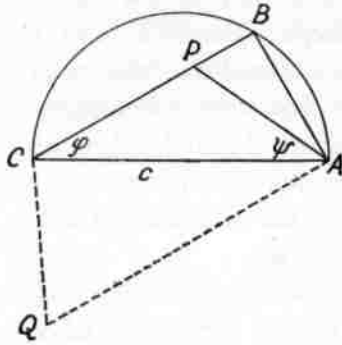


Fig. 23

$$V_Z(B) = \frac{c^3 s \pi}{4} (1 - s^2)$$

$$\begin{aligned} V(P) &= V_Z(B) + \frac{c s \pi}{48} (b - a)^2 \\ &= \frac{c s \pi}{12} [4c^2(1 - s^2) + a(a - 2c\sqrt{1 - s^2})] \\ &= \frac{DA \cdot \pi}{12} [(2 \cdot CB)^2 + CP(CP - 2 \cdot CB)] \end{aligned}$$

in Keplerscher Ausdrucksweise.

Es handelt sich nun darum, a als Funktion von s so einzurichten, daß der Punkt P einen Kreis $\kappa = \text{const}$ beschreibt. Bezeichnet man $\angle PAC = \psi$, so wird

$$\frac{CP}{AP} = \kappa = \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} \quad \text{und} \quad CP \cdot \cos \varphi + AP \cdot \cos \psi = a \cos \varphi + \frac{a}{\kappa} \cos \psi = c.$$

Da ferner $\cos \varphi = \sqrt{1 - s^2}$, $\cos \psi = \sqrt{1 - \kappa^2 s^2}$, also

$$a = \frac{c}{\sqrt{1 - s^2} + \frac{1}{\kappa} \sqrt{1 - \kappa^2 s^2}},$$

so erhält man schließlich die gesuchte Inhaltsfunktion durch Einsetzen von a in $V(P)$. Hier interessiert lediglich der Fall $\kappa = 1$ mit $s < \frac{1}{3} \sqrt{3}$. Es wird also

$$\begin{aligned} a &= \frac{c}{2\sqrt{1 - s^2}} = \frac{c}{2w}, \quad w^2 = 1 - s^2 \\ V(s) &= \frac{c^3 \pi}{12} \cdot s \left(4w^2 + \frac{1 - 4w^2}{4w^2} \right). \end{aligned}$$

Setzt man darin $s_m = \frac{1}{3} \sqrt{3}$, $w^2 = \frac{2}{3}$, so erhält man $V(s_m) = \frac{c^3 \pi}{12} \cdot 1,1788$. Nimmt man dagegen $s' = 0,55$ etwas kleiner, den zugehörigen Punkt P' also näher bei CA , so ergibt die Rechnung $V(s') = \frac{c^3 \pi}{12} \cdot 1,18167$. Es ist daher $V(s') > V(s_m)$, $V(s_m)$ also kein Maximum, wie Kepler in Theor. XXI vermutet.

105.18. Diese Stelle ist so zu verstehen:

Da $CL : CG = CN : CF$ und $CL^2 = \frac{4}{9} CA^2$, $CN^2 = \frac{1}{4} CA^2$, $CG^2 = \frac{3}{2} CA^2$, so wird

$$CF^2 = \frac{CN^2 \cdot CG^2}{CL^2} = \frac{3}{8} CA^2.$$

106.20. Da das Theorem sowohl von Klug wie von Wieleitner falsch verstanden wurde, ist es notwendig, seinen Wortlaut in Übersetzung und etwas verdeutlichend wiederzugeben: „In jeder Konjugation, in der das Quadrat des Zylinderdurchmessers das Doppelte des Quadrats der Höhe oder mehr ist, sind alle Stümpfe kleiner als der zur Konjugation gehörige Zylinder, der das

größte Volumen hat: und das umso mehr, je weiter wir uns vom Verhältnis 2:1 entfernen.“ Mit besonderer Betonung sagt Kepler: „cylindro maximo, conjugato scilicet suo“, und im Text werden die Zylinder „conjugationum capita“ genannt. Da Wieleitner das übersieht, vergleicht er alles mit dem größten der Zylinder CGA und hat deshalb kein Verständnis für Keplers Sorgfalt im Beweis.

E und D seien zwei Punkte des Halbkreises über CA, $CE^2 > 2 \cdot AE^2$ und $AD < AE$. CD soll den Konjugationskreis durch E, der CA in P trifft, in dem

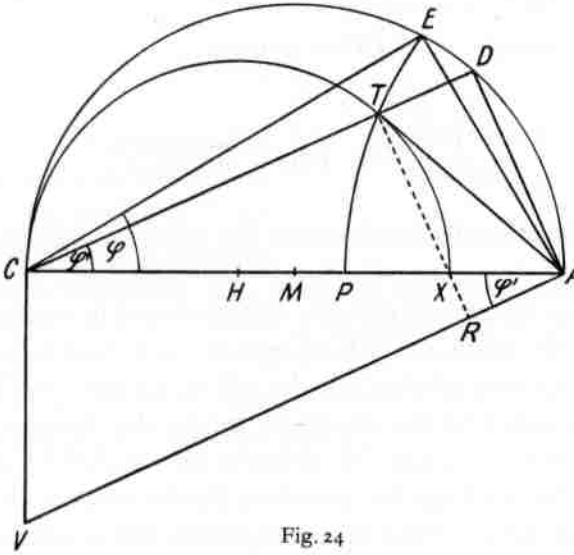


Fig. 24

Punkt T schneiden, schließlich soll auch noch der λ -Kreis durch T eingezeichnet werden als Halbkreis über CX. Der Zylinder CEA ist nun konjugiert mit dem Stumpf CTAV, während der Zylinder CDA gleiche Höhe DA mit ihm hat. Das Lot TR von T auf AV geht durch X und ist parallel zu DA.

Kepler vergleicht in seinem Beweis die Zylindervolumina $V_Z(E)$ und $V_Z(D)$ mit dem Stumpfvolume $V_{st}(T)$. Setzt man $CA = c$, $AX = x$, $\angle ECA = \varphi$, $\angle DCA = \varphi'$, so wird

$$V_Z(E) - V_Z(D) = \frac{c^3 \pi}{4} (\cos^2 \varphi \sin \varphi - \cos^2 \varphi' \sin \varphi')$$

$$V_{st}(T) - V_Z(D) = \frac{c \pi \sin \varphi'}{48} \cdot (2 \cdot TD)^2 = \frac{c \pi \sin \varphi'}{12} \cdot x^2 \cos^2 \varphi',$$

also

$$V_Z(E) - V_{st}(T) = \frac{c \pi}{4} \left[c^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \left(c^2 + \frac{x^2}{3} \right) \cos^2 \varphi' \sin \varphi' \right].$$

Damit diese Differenz > 0 werde, wie der Satz es verlangt, muß also

$$c^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi > \left(c^2 + \frac{x^2}{3} \right) \cos^2 \varphi' \sin \varphi'$$

sein, oder

$$\frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{\cos^2 \varphi' \sin \varphi'} > 1 + \frac{x^2}{3 c^2}.$$

Das Bestehen dieser Ungleichung, wenn $CE^2 > 2 \cdot AE^2$, ist aber der genaue Sinn des von *Wieleitner* (S. 168–170) zu Unrecht als „sehr undurchsichtig“ getadelten Beweises. Kepler zeigt nämlich, daß

$$\frac{AE}{AD} > \frac{CD^2 + \frac{1}{3} AR^2}{CE^2}.$$

Mit den von uns eingeführten Bezeichnungen ist aber

$$AD = c \cdot \sin \varphi' \quad AE = c \cdot \sin \varphi \quad AR = x \cdot \cos \varphi'$$

$$CD = c \cdot \cos \varphi' \quad CE = c \cdot \cos \varphi$$

also

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} > \frac{\cos^2 \varphi' \cdot \left(c^2 + \frac{x^2}{3}\right)}{\cos^2 \varphi \cdot c^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{\sin \varphi' \cdot \cos^2 \varphi'} > 1 + \frac{x^2}{3 c^2}.$$

In jeder Konjugation der bezeichneten Art ist also $V_z(E) > V_{st}(T)$.

111.22. Die den Geometern gestellte Aufgabe lautet in unserer Sprache: Zu einer gegebenen Assoziation λ die Konjugation x so zu finden, daß die Stümpfe (λ, x) gleiches Volumen erhalten wie der größte Zylinder CGA.

Über eine geometrische Konstruktion, welche die Aufgabe lösen würde, verfügt Kepler nicht, er erklärt sie vielmehr für unmöglich; nur allgemeine Überlegungen über die Lage der gesuchten Punkte stellt er an. Zu der rechnerischen Lösung, die als letzter Weg übrigbleibt, ruft er wieder die Cossisten auf, vorab Adriaen van Roomen. Dieser ist aber bereits tot. An seiner Stelle antwortet Alexander Anderson, dessen Lösung Kepler jedoch offenbar nie zu Gesicht bekam.

Die algebraische Lösung ist leicht zu skizzieren. T sei einer der gesuchten Punkte, in denen $V_{st}(T) = V_z(G)$ wird, CDA der mit dem Stumpf CTA gleich hohe Zylinder, $\sphericalangle DCA = \varphi$. Dann ist (vgl. Anm. 103.5) in den Variablen λ und φ

$$V_{st}(T) = \frac{c^3 \pi}{3} \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2} \sin \varphi \cos^2 \varphi$$

$$V_z(G) = \frac{c^3 \pi}{18} \sqrt{3},$$

also $\frac{1 + \lambda + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2} \sin \varphi \cos^2 \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$ oder, wenn $\sin \varphi = x$, $\cos^2 \varphi = 1 - x^2$ ge-

setzt wird, $x(1 - x^2) = x(1 - x)(1 + x) = \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{(1 + \lambda)^2}{1 + \lambda + \lambda^2} = t(\lambda)$.

Wegen $0 \leq \lambda \leq 1$ ist $\frac{\sqrt{3}}{6} \leq t(\lambda) \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Die Funktion $y = x(1 - x)(1 + x)$, deren Verlauf Figur 25 schematisch zeigt, hat die Nullstellen $-1, 0, +1$. Da in dem Halbkreis über CA für φ nur Werte zwischen 0° und 90° in Betracht kommen, x also auf den

Bereich $0 \leq x \leq 1$ beschränkt ist und $y = t(\lambda)$ ebenfalls nur positive Werte annimmt, so ist lediglich das Kurvenstück $0 \leq x \leq 1$ zu betrachten, das bei $x_m = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $y_m = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ sein Maximum erreicht. $y = t(\lambda)$ schneidet daher die Kurve in zwei Punkten x_1 , x_2 , wenn $\lambda < 1$, $y = t(1)$ berührt dagegen in dem Scheitelpunkt.

Die im Halbkreis über CA definierte Kurve

$$f(\varphi, \lambda) = \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2} \sin \cos^2 \varphi - \frac{\sqrt{3}}{6} = 0,$$

die mit $c = 10$ cm dargestellt ist, hat nach dem Vorausgehenden zwei Äste, die sich in C und G treffen, in G mit gemeinsamer Tangente, in C dagegen mit verschiedenen Tangenten. Das Aussehen der Kurve, deren nähere Diskussion hier unterbleiben muß, ist das eines Blattes. Im Innern des Blattes ist $V_{st}(T) > V_z(G)$, außerhalb $V_{st}(T) < V_z(G)$.

Der Aufruf an die Cossisten hindert Kepler indes nicht, wenigstens die Gleichung aufzustellen, auf deren Auflösung das gestellte Problem hinausläuft.

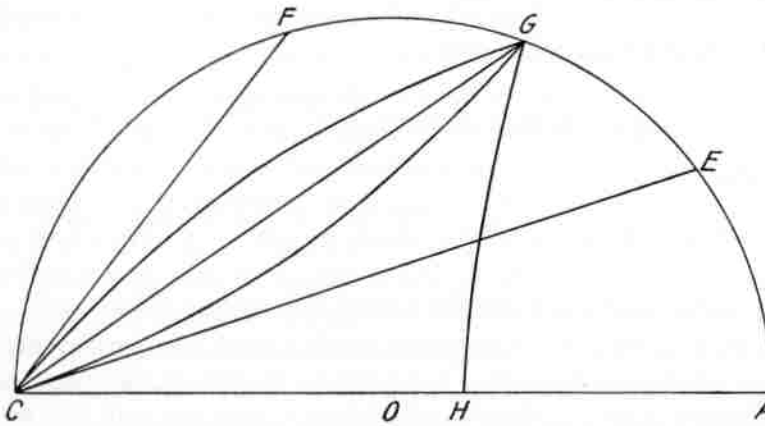
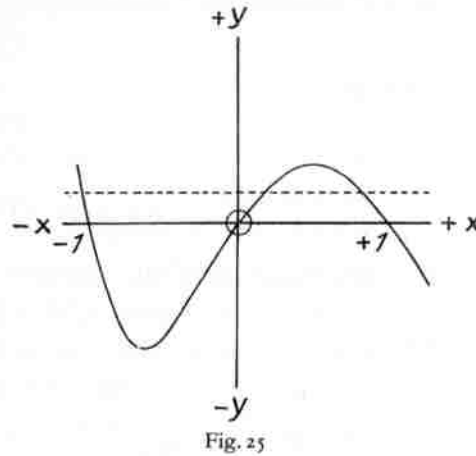


Fig. 26

Das Volumen des mit dem Stumpf CTA gleichhohen Zylinders CDA werde mit $V_z(D)$, die Durchmesser des Stumpfs mit a und b , $b > a$, bezeichnet. Dann wird

$$V_{st}(T) = V_z(G), \quad V_z(G) > V_z(D), \quad \text{also} \quad V_z(G) = V_z(D) + g,$$

ferner

$$\frac{V_{st}(T) - V_z(D)}{V_z(D)} = \frac{\frac{1}{12} (b - a)^2}{\left(\frac{(a + b)}{2}\right)^2} = q,$$

infolgedessen

$$\frac{V_Z(G) - V_Z(D)}{V_Z(D)} = \frac{g}{V_Z(D)} = q$$

$$\frac{V_Z(G)}{V_Z(D)} = 1 + q.$$

Daher wird

$$\frac{V_Z(G)}{V_Z(D)} = \frac{CG^2 \cdot GA}{CD^2 \cdot DA} = 1 + q$$

$$[(1 + q) \cdot CD^2] \cdot DA = CG^2 \cdot GA.$$

Diese Gleichung ist es, die Kepler S. 112, Z. 11 ff. beschreibt: Das Quadrat CA^2 soll so in eine Summe $CD^2 + DA^2$ zerlegt werden, daß der eine Teil CD^2 , vergrößert um $q \cdot CD^2$, und multipliziert in die erste Potenz des anderen Teiles DA , dem Produkt von CG^2 in GA gleich werde. Im Sinne der Coss setzt nun Kepler $x = \frac{DA}{CA}$, $DA = cx$, $CD^2 = c^2(1 - x^2)$, also

$$(1 + q) \cdot c^3 \cdot x(1 - x^2) = CG^2 \cdot GA \text{ oder}$$

$$(1 + q) \cdot c^3 \cdot x = CG^2 \cdot GA + (1 + q) \cdot c^3 \cdot x^3.$$

Diese Gleichung wird Z. 14 ff. beschrieben; die „*aliqua certa multitudo*“ meint dabei den Faktor $(1 + q)c^3$, während der „*datus numerus absolutus*“ die Zahl $CG^2 \cdot GA = \frac{2c^3\sqrt{3}}{9}$ ist.

Rechnet man weiter, so erhält man

$$x - x^3 = x(1 - x)(1 + x) = \frac{1}{1 + q} \frac{CG^2 \cdot GA}{c^3} = \frac{1}{1 + q} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Nun ist aber

$$1 \leq 1 + q \leq \frac{4}{3}, \text{ also } \frac{\sqrt{3}}{6} \leq \frac{1}{1 + q} \cdot \frac{CG^2 \cdot GA}{c^3} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

in voller Übereinstimmung mit der vorher aufgestellten Gleichung.

Es ist wohl richtig, daß es uns kaum möglich wäre, die Beschreibung Keplers ohne weiteres in die heutige Symbolik zu übertragen, daß sie aber „nur dunkle Angaben über die Natur der Gleichung“ enthalten soll, wie *Wieleitner* S. 312 behauptet, ist nicht richtig. Wären sie den Lesern von damals unverständlich gewesen, dann hätte *Alexander Anderson*, der sich zu diesem Theorem äußert, sicher das bemängelt. Tatsächlich aber stößt er sich nur an der Äußerung am Schluß: „Derartige Gleichungen suchen die Cossisten immer noch in der Geometrie, werden sie aber nach meinem Urteil nie finden.“

Schon in den „*Vindiciae Archimedis*“, Paris 1616, kommt er, obwohl das Schriftchen nach dem Titel gegen *Lansberghe* und nicht gegen Kepler gerichtet ist, auf dessen Urteil über die Gleichungen 3. und höheren Grades und „die armen Cossisten“ zu sprechen. Er erinnert ihn daran, daß schon *Archimedes* in der 1. Prop. des 2. Buches von „*De Sphaera et Cyliandro*“ bei der Aufgabe,

eine Kugel einem gegebenen Zylinder gleich zu machen, das Problem zweier mittlerer Proportionalen zwischen zwei gegebenen Strecken gelöst habe. Vor allem aber macht er ihn auf die von ihm 1615 herausgegebene Schrift von Vieta „De recognitione et emendatione Aequationum“ aufmerksam, von der noch „sehr viele Exemplare“ bei ihm liegen.

Erst in der 1619 in Paris erschienenen Schrift „Exercitationum mathematicarum decas prima, continens quaestionum aliquot, quae nobilissimorum tum hujus tum veteris aevi Mathematicorum ingenia exercuere, enodationem“ gibt er als Exercitatio 6 und 7 unter der Überschrift „Ad Problema Kepleri in sua Stereometria Doliari Mathematicis hujus aevi propositum“ die ihm vorschwebende geometrische Lösung. Die alten Geometer, meint er, hätten eine geometrische Interpretation der von Kepler aufgestellten Gleichung und den Versuch, mit einer geometrischen Konstruktion zum Ziel zu kommen, nie von vornherein für unmöglich erklärt, sondern auf irgendeine Weise, über Kegelschnitte oder andere, gemischte Linien, einen Lösungsweg gesucht. Interessant ist sodann die Bemerkung, seine mathematischen Ausführungen seien seinem eigenen Traktat über die Stereometrie entnommen, der fix und fertig vorliege und von Parallelepiped, Zylindern, Kegelstümpfen, regulären Körpern, einer neuen Stereometrie der sphärischen Dreiecke, im Anhang auch von einer verbesserten Form der Prosthaphärese handle. Danach muß sich dieser leider verschollene Traktat ziemlich eng an Keplers „Stereometria“ angelehnt haben.

In Exercitatio 7 zeigt Anderson, daß die Aufgabe: „Gegeben sei das Verhältnis der parallelen Durchmesser in den Grundflächen eines Kegelstumpfs und ein Körper kleiner als der größte Stumpf in der gegebenen Konjugation [nach unserer Terminologie: Assoziation]; die paarweisen (alternos) Stümpfe zu finden, die dem gegebenen Körper gleich sind und deren Grundkreisdurchmesser das gegebene Verhältnis zueinander haben“, daß also diese Aufgabe, die dem Theor. XXIII von Kepler entspricht, wenn der gegebene Körper der größte Zylinder ist, sich zurückführen läßt auf die andere: „Gegeben sei ein Körper, der nicht größer ist als der einer gegebenen Kugel einbeschriebene Würfel; ein ihm gleiches räumliches Parallelepiped zu finden, das der gegebenen Kugel einbeschrieben werden kann.“ Die Lösung dieser Aufgabe wird aber in Exercitatio 6 vorweggenommen: a sei der Durchmesser der Kugel, der einbeschriebene Würfel hat dann den Inhalt $W = \frac{a^3}{3\sqrt{3}}$. Ist daher $V = a^2 \cdot e$ der Inhalt des gegebenen Körpers, $V < W$, so muß $e < \frac{a}{3\sqrt{3}}$ sein, und wenn $e = \frac{b-d}{2}$ gesetzt wird, $\frac{b-d}{2} < \frac{a}{3\sqrt{3}}$. Bildet man nun die Reihe a, b, c, d so, daß $a : b = b : c = c : d$, und wird $f^2 = a^2 - b^2$ gesetzt, so ist $a^2 e = \frac{f^2}{2} b$. Denn wenn $b = s \cdot a$, $c = s \cdot b = s^2 \cdot a$, $d = s^3 \cdot a$ ist, dann wird $a^2 e = a^3 \cdot \frac{s(1-s^2)}{2} = \frac{f^2 b}{2}$.

In dem Quader mit den Kanten x, x, b, der nach Voraussetzung den Inhalt $x^2 b = a^2 e = \frac{f^2 b}{2}$ hat, wird demnach die Diagonale der Grundfläche $2x^2 = f^2$,

und die Körperdiagonale $d^2 = f^2 + b^2 = a^2$. Der Quader ist also der Kugel einbeschrieben. Führt man $s = \frac{b}{a}$ als Unbekannte ein, so kommt man direkt auf die Gleichung Keplers $s(1 - s^2) = \frac{2V}{a^3}$, $\frac{2V}{a^3} < \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

113.12. Die Aufgabe, die in Theor. XXIV gestellt wird, ist in gewissem Sinn die Umkehrung der vorhergehenden. Bei fest gegebenem λ sollten dort die Werte von κ gefunden werden, die $V_{st}(\kappa, \lambda) = V_Z(G)$ machen. Jetzt sind bei gegebenem κ die Werte von λ gesucht, welche dieselbe Gleichung erfüllen. Daß diese Aufgabe nur sinnvoll ist, wenn $\kappa^2 < 2 : 1$ ist, zeigt ein Blick auf die Figur des „Keplerschen Blattes“ (Fig. 26).

An der Konjugation $\kappa = 1$ führt Kepler den Beweis, daß die mit den beiden gesuchten Stümpfen gleichhohen Zylinder nicht „subcontrarii“ sein können. Fast ärgerlich über die Schwierigkeit des Problems heißt es dann: „Soweit mein Beweis; mit dem Rest mögen die Cossisten fertig werden.“ Das heißt indes nur: mit der Auflösung der Gleichung, denn diese selbst stellt er wieder auf seine beschreibende Art auf, indem er das Verhältnis $V_{st}(T) : V_Z(G)$, das $= 1 : 1$ werden muß, berechnet. Hat der Stumpf CTA die Durchmesser a, b und die Höhe $h = DA$, ist also der Zylinder CDA gleichhoch mit dem Stumpf CTA, dann gelten die Gleichungen

$$\frac{V_{st}(T)}{V_Z(D)} = \frac{\frac{1}{12}(b-a)^2 + \frac{1}{4}(a+b)^2}{\frac{(a+b)^2}{4}},$$

also

$$\frac{V_{st}(T)}{V_Z(G)} = \frac{\frac{1}{12}(b-a)^2 + \frac{1}{4}(a+b)^2}{\frac{(a+b)^2}{4}} \cdot \frac{V_Z(D)}{V_Z(G)} = \frac{\frac{1}{12}(b-a)^2 + \frac{1}{4}(a+b)^2}{\frac{(a+b)^2}{4}} \cdot \frac{CD^2 \cdot AD}{CG^2 \cdot AG}.$$

Wegen $CD^2 = \frac{(a+b)^2}{4}$, wird daraus

$$\frac{V_{st}(T)}{V_Z(G)} = \frac{\frac{1}{12}(b-a)^2 + \frac{1}{4}(a+b)^2}{CG^2} \cdot \frac{AD}{AG} = 1.$$

Das ist die Gleichung, die Kepler beschreibt, mit dem Fehler allerdings, daß er statt des Verhältnisses $(AD) : (AG)$ dessen Quadrat als den einen Teil des Verhältnisses der Körper $V_{st}(T)$ und $V_Z(G)$ angibt, während der andere mit dem obigen übereinstimmt. Daran mag es liegen, daß er im letzten Abschnitt von einer Gleichung 5. Grades spricht, während sie in Wirklichkeit vom 6. Grad ist. Setzt man nämlich

$$\frac{1}{12}(b-a)^2 + \frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{(a+b)^2 - ab}{3}, \quad CG^2 = \frac{2c^2}{3}, \quad AG = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

in die Gleichung ein, so kommt

$$\frac{(a+b)^2 - ab}{2c^2} = \frac{c\sqrt{3}}{3 \cdot AD}.$$

Setzt man ferner mit Kepler $a = x = CT$, $\frac{CT}{AT} = x$, also $AT = \frac{x}{x}$, so wird wegen

$$\begin{aligned} bx + \frac{x^2}{x^2} &= c^2 & b &= \frac{c^2}{x} - \frac{x}{x^2} = \frac{x^2 c^2 - x^2}{x \cdot x^2} \\ a + b &= \frac{x^2 c^2 - x^2 (1 - x^2)}{x \cdot x^2} \\ a \cdot b &= \frac{x^2 c^2 - x^2}{x^2} \\ (AD)^2 &= \frac{x^2}{x^2} - \frac{(b-a)^2}{4} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{x^2 c^2 - x^2 (1 + x^2)}{x x^2} \right)^2 \\ &= \frac{[4x^2 - (1 + x^2)^2] x^4 + 2x^2 c^2 (1 + x^2) x^2 - x^4 c^4}{4 x^2 x^4}. \end{aligned}$$

Werden diese Werte in die obige Gleichung eingesetzt und beide Seiten quadriert, so treten darin nur gerade Potenzen von x bis zur 12. auf. Setzt man also $y = x^2$, so ergibt sich eine Gleichung 6. Grades in y .

Auf eine Gleichung 6. Grades kommt man auch, wenn die Bedingung

$$V_{st}(T) = V_z(G) = \frac{\sqrt{3}}{18} c^3 \pi$$

in der Form

$$V_{st}(x, \lambda) = \frac{c^3 \pi}{3} \cdot \frac{x^2}{\lambda + x^2} \cdot \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{4 \lambda} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\lambda + x^2} \cdot \frac{(1 + \lambda)^2}{4 \lambda}} = \frac{\sqrt{3}}{18} c^3 \pi$$

angesetzt wird.

Von seiner Gleichung 5. Grades – „nisi me aversa respexit Minerva“ – sagt Kepler, daß sie geometrisch sei, vielmehr stochastisch im Sinne von Raimar Ursus oder mechanisch nach Jost Bürgi. Ursus († 1600) hatte eine von Junge eingeführte Methode des Probierens ($\sigma\tau\omicron\chi\acute{\alpha}\zeta\omicron\mu\alpha\iota$ = probieren, erraten) ein wenig verbessert (vgl. Cantor II², 648; Tropfke III², 81), während Jost Bürgi eine wirkliche Näherungsmethode gefunden hatte (Cantor II², 645 ff.; Tropfke III, 81 f.).

114.21. Die der Tabelle zugrunde liegende Formel lautet, wenn die zu $x = 1$, $x' = \sqrt{2}$ bei gleichem λ gehörigen Stumpfvolumina kurz durch V_{st} und V'_{st} bezeichnet werden,

$$\frac{V_{st}}{V'_{st}} = \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{\sin \varphi' \cos^2 \varphi'} = \frac{\lambda + 2}{2(\lambda + 1)} \cdot \sqrt{\frac{(3\lambda - 1)(\lambda + 2)}{2(\lambda^2 + 2\lambda - 1)}}$$

oder, wenn $\lambda = \frac{n}{n+1}$ gesetzt wird,

$$\frac{V_{st}}{V'_{st}} = \frac{3n+2}{2(2n+1)} \cdot \sqrt{\frac{(2n-1)(3n+2)}{2(2n^2-1)}},$$

wobei φ , φ' wie bisher die Winkel TCA bzw. T'CA bedeuten. Die wirklichen Werte sind deshalb

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ	1:2	2:3	3:4	4:5	5:6	6:7	7:8	8:9	9:10
$V_{st} : V'_{st}$	1,32	1,05	0,9993	0,978	0,968	0,959	0,952	0,948	0,944

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{st} : V'_{st} = \frac{3}{8} \sqrt{6} = 0,918$$

in Übereinstimmung mit dem Wert für $\lambda = 1$.

117.26. Kepler unterscheidet deutlich zwischen Länge l der Meßrute und Maßzahl m , wobei $m = l^3 : e^3$, oder, wenn $e = 1$ gesetzt wird, $m = l^3$. Wurde nun $l_1 \neq l_2$ gefunden, dann wird $m_1 = l_1^3$ das doppelte Volumen $2V_1$ der einen Faßhälfte, entsprechend $m_2 = l_2^3$ das doppelte der anderen Hälfte $2V_2$, das Volumen des ganzen Fasses

$$V = V_1 + V_2 = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{l_1^3 + l_2^3}{2}.$$

Legt man also die Maßzahlen zugrunde, so kommt man auf das arithmetische Mittel, geht man dagegen von den gemessenen Längen aus, dann darf nicht das arithmetische Mittel angewandt werden, denn $l_a = \frac{l_1 + l_2}{2}$ würde $l_a^3 = \frac{1}{8} (l_1^3 + 3 l_1^2 l_2 + 3 l_1 l_2^2 + l_2^3)$ ergeben. Aber auch das geometrische Mittel, das Kepler vorschlägt, geht nicht an, da $l_g^3 = \sqrt{l_1 l_2^3} \neq \frac{l_1^3 + l_2^3}{2}$ wegen

$$\frac{l_1^3 + l_2^3}{2} - l_g^3 = \frac{1}{2} (l_2^{3/2} - l_1^{3/2})^2.$$

Bildet man die Differenzen

$$\Delta_1 = \frac{l_1^3 + l_2^3}{2} - l_a^3 = \frac{3}{4} \frac{l_1 + l_2}{2} (l_1 - l_2)^3$$

und

$$\Delta_2 = \frac{l_1^3 + l_2^3}{2} - l_g^3 = \frac{1}{2} (l_1 \sqrt{l_1} - l_2 \sqrt{l_2})^2$$

und wird $l_1 > l_2$, also $l_1 = l_2 + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ angenommen, dann wird

$$\Delta_1 = \frac{3}{4} l_2 \varepsilon^2 + \frac{3}{8} \varepsilon^3$$

$$\Delta_2 = \frac{9}{8} l_2 \varepsilon^2 + \frac{9}{16} \varepsilon^3.$$

Wenn die Glieder mit ε^3 vernachlässigt werden dürfen, dann wird also $\Delta_1 = \frac{2}{3} \Delta_2$, was bedeutet, daß das arithmetische Mittel $l_a = \frac{l_1 + l_2}{2}$ eine bessere Annäherung ergibt als das geometrische $l_g = \sqrt{l_1 l_2}$.

120.8. Der Frankfurter Arzt *Johann Hartmann Beyer* war neben seinem Beruf lebhaft an Mathematik interessiert. Das von Kepler zitierte Werk ist: „Stereometriae Inanium nova et facilis ratio“, Frankfurt 1603. Im selben Jahr erschien von ihm ebenda „Ein neue schöne Art der vollkommenen Visierkunst“. Beide Schriften gehören zur älteren Gattung stereometrischer und doliometrischer Traktate, die lediglich Rechenvorschriften geben. Das Faß betrachtet Beyer grundsätzlich als doppelten Kegelstumpf, dessen Berechnung durch Ausgleich der Grundkreise mit Hilfe des „Medium Conicum“ auf den Zylinder zurückgeführt wird.

120.23. Siehe Anm. 73.22.

123.9. Wird dem Kreis ein reguläres n -Eck umbeschrieben, dann ist dessen Umfang $U = 2nr \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$, seine Fläche $F = nr^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$. Mit $r = 1$ wird also $U = 2F$. Diese Beziehung gilt auch für den Kreis vom Halbmesser 1.

127.21. Die Quadratur der Hyperbel, zu deren Lösung die „Apollonii“ aufgerufen werden, gelingt erst in der 2. Hälfte des 17. Jahrhunderts. Sie ist vor allem an die Namen Wallis und Huygens geknüpft.

127.26. Vgl. Anm. 17.13. Die Ergänzung dazu im 47. Kapitel der „Astronomia Nova“ (Bd. III, S. 297 ff.).

128.8. Über die Berechnungsmethode des *Michel Coignet* (1549–1623), eines belgischen Jesuiten in Antwerpen, wird in der „Messekunst“ S. 237 (Erster Weg) Näheres gesagt. Die „Biographie Nationale de la Belgique“ weist keine gedruckte mathematische Schrift von ihm nach. Dagegen findet sich in Mss. Pulk. V, 143 v ein Auszug Keplers „Ex Michaelis Coigneti opusculo Gallico“.

129.28. Für den zweiteiligen Körper, der übrigbleibt, wenn von dem durch einen Achsenschnitt halbierten Zylinder ein halber Kegel mit derselben Achse, Grundfläche und Höhe, und ein Zylinderhuf gleicher Grundfläche und Höhe weggenommen wird, rechnet Kepler als Volumen $33 - (11 + 14) = 8$. Diese Rechnung stimmt deshalb nicht, weil sich halber Kegel und Zylinderhuf überschneiden; der ihnen gemeinsame Teil dürfte nur einfach abgezogen werden.

131.22. Über die Berechnung dieser Tabelle werden in Nr. 17 der „Messekunst“ nähere Angaben gemacht; dort (Anm. 158.23) wird deshalb auch die nötige Erklärung gegeben. Zur Tabelle selbst sei nur bemerkt, daß die Pfeilhöhen als Dezimalbrüche mit einer Dezimalen ausgedrückt sind, wovon die Ganzen horizontal, die Zehntel vertikal abzulesen sind.

Wegen des Verses, mit dem Kepler schließt, vgl. S. 457.

143.19. In der um 1600 auflebenden Diskussion über die Reform des völlig unübersichtlich gewordenen Maß- und Münzwesens steht die Vereinheit-

lichung der Maße an erster Stelle; Kepler dagegen gibt ihrer Sicherung gegen willkürliche Veränderungen durch geometrische Verknüpfung in einem Modellgefäß nach Art des römischen Quadrantal den zeitlichen Vorrang vor der Vereinheitlichung. Vgl. hierüber die Ausführungen S. 458.

144.5. „Lägel“ ist vom lateinischen Wort *lagena*, *lagella* herzuleiten, das ein bauchiges Weingefäß mit engem Hals bezeichnet.

146.10. Der Satz ist unrichtig. Vgl. dazu Anm. 15.9.

147.19. *Adrianus Romanus*: *Canon triangulorum*, Mainz 1609. *Bartholomaeus Pitiscus*: *Trigonometria*, Frankfurt 1612. Zur Geschichte der trigonometrischen Tafeln von Regiomontan bis zum „*Thesaurus mathematicus*“ von Pitiscus vgl. Tropfke, *Gesch. d. Elem.-Math.*, 2. Aufl., Bd. V, S. 178 bis 183. Die dort (S. 182) vertretene Meinung, Jost Bürgi sei wohl durch das Erscheinen von Othos „*Opus Palatinum*“ im Jahre 1596 veranlaßt worden, von der Veröffentlichung seiner eigenen Sinustafeln abzusehen, ist mit Keplers Bemerkung Z. 25/26 kaum vereinbar, wenn man bedenkt, daß dieser erst nach 1600 mit Bürgi persönlich in Beziehung kommt. Solange Bürgi in Prag war (bis etwa 1611), hat er offenbar an die Veröffentlichung seines „*Canon Sinuum*“ gedacht; Kepler hat ihm sogar eine Einführung dazu geschrieben (Pulk. Mss. Bd. V, S. 93–138). – Philipp van Lansberghe: *Triangulorum Geometria*, Leyden 1591.

148.15. Richtiger wäre $\sqrt{5376} = 73\frac{1}{3}$, DB = $146\frac{2}{3}$.

153.6. Feuchten = fichten, Flötz = Boden, Botung = Bottich.

155.42. Eine Ergänzung zu dieser Nummer in Nr. 89, S. 241.

158.14. Das Handexemplar Keplers der „*Messekunst*“, das in der Bibliothek des Deutschen Museums in München erhalten ist, enthält an dieser Stelle eine Randbemerkung, die überschrieben ist: „*Ein andere Rechnung*“. Da jedoch die ganze Randbemerkung nachträglich wieder durchgestrichen ist, kann auf ihre Wiedergabe verzichtet werden.

Die Zahl 21416 82393 ist fehlerhaft; richtig wäre 21415 61511.

158.23. Dieselbe Tabelle, jedoch mit halben Tafelwerten und daher für halbe Kreissegmente geltend, befindet sich beim letzten Kapitel der „*Stereometria*“ S. 131.

Die Andeutung, die Kepler (Z. 35 ff.) über die Entstehung der Tabelle macht, schließt eine direkte Berechnung der Segmente als Differenz von Kreissektor und Dreieck, wie *Frisch* (V, 614) annimmt, aus. Es handelt sich vielmehr um ein Summationsverfahren, das so zu denken ist: Im Halbkreis

ABC mit Mittelpunkt M wird der Halbmesser $BM = 100$ in hundert gleiche Teile und die Fläche durch Parallelen zu AC durch die Teilpunkte in hundert gleichbreite Streifen geteilt. P_i, P_{i+1} seien benachbarte Teilpunkte, $P_i Q_i Q_{i+1} P_{i+1}$ der zugehörige halbe Streifen, $P_i Q_i = y_i$, $P_{i+1} Q_{i+1} = y_{i+1}$. Wird der Inhalt des ganzen Streifens von der Breite 1 als arithmetisches Mittel der Rechtecke $2y_i$ und $2y_{i+1}$ genommen und ist S_i die Summe der ersten i -Sreifen, dann wird $S_{i+1} = S_i + (y_i + y_{i+1})$.

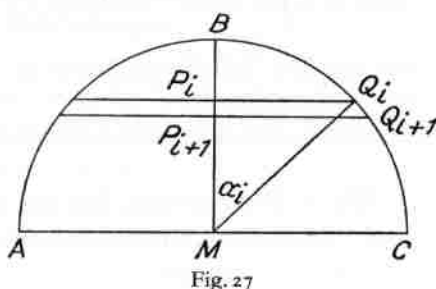


Fig. 27

Für den Streifen S_1 , der vom Kreis und der Sehne $2y_1$ begrenzt ist, wird der Kreis

durch die Parabel ersetzt und dementsprechend $S_1 = \frac{4}{3} y_1$ gesetzt. Damit ist die Tabelle zu berechnen. Praktisch geht das so vor sich: Wird der Winkel $P_i M Q_i$ mit α_i bezeichnet, so hat man

$$\cos \alpha_i = \frac{100 - i}{100} = 1 - \frac{i}{100}, \quad y_i = 100 \cdot \sin \alpha_i,$$

wobei

$$\sin \alpha_i = \frac{i}{100} \sqrt{\frac{200}{i} - 1} = \frac{1}{100} \sqrt{200i - i^2},$$

also

$$y_i = \sqrt{200i - i^2}$$

$\cos \alpha_i$	y_i	$y_i + y_{i+1}$	S_i
0,99	14,1		19
0,98	19,9	34,0	53,0
0,97	24,3	44,2	97,2
0,96	28,0	52,3	149,5
0,95	31,2	59,2	208,7
0,94	34,1	65,3	274,0
0,93	36,8	70,9	344,9
0,92	39,2	76,0	420,9
0,91	41,5	80,7	501,6
0,90	43,6	85,1	586,7
0,89	45,6	89,2	675,9
usw.			

in vollständiger Übereinstimmung mit den Tabellenwerten Keplers.

Daß die Anleitung Keplers zur Berechnung der halben Segmente dasselbe meint, ist danach nicht zu bezweifeln, seine Beschreibung ist jedoch nicht korrekt, insofern nach ihr alle Zahlen $\frac{S_i}{2}$ ($i > 1$) um $\frac{y_i - y_1}{2}$ zu klein wären.

Der Vollständigkeit halber sei vermerkt, daß die Integralformel für das Segment von der Höhe x

$$S(x) = 2 \int_0^x \sqrt{x(2r-x)} \, dx = \frac{r^2 \pi}{2} - (r-x) \sqrt{x(2r-x)} - r^2 \cdot \arcsin \frac{r-x}{r}$$

mit Keplers Tabelle vollkommen übereinstimmende Werte ergibt.

160.20. Ein hier einzuschiebender Zusatz in Nr. 89, S. 241.

160.31. Die Aussage, daß das halbe Hyperbelsegment VAB größer sei als drei Viertel eines ihm einbeschriebenen Dreiecks, wäre trivial. In Wirklichkeit soll bewiesen werden

$$\frac{2}{3} \triangle CAB < \text{halbes Hyperbelsegment VAB} < \frac{4}{3} \triangle VAB.$$

Die linke Seite der Ungleichung ergibt sich leicht. Es ist nämlich

$$\triangle CAB = 2 \cdot \triangle OAB,$$

halbes Parabelsegment OAB = $\frac{4}{3} \triangle OAB = \frac{2}{3} \triangle CAB$, also, da das Hyperbelsegment das Parabelsegment umgreift,

$$\text{halbes Hyperbelsegment VAB} > \frac{2}{3} \triangle CAB.$$

Die rechte Seite wird von Kepler durch eine unpräzise Überlegung bewiesen. Er argumentiert nämlich: Der Hyperbelbogen VB schmiegt sich enger an die Sehne VB an als der Parabelbogen OB an die Sehne OB. Da aber für die Parabel die bereits erwähnte Gleichung gilt

$$\text{halbes Parabelsegment OAB} = \frac{4}{3} \triangle OAB, \text{ so muß}$$

$$\text{halbes Hyperbelsegment VAB} < \frac{4}{3} \triangle VAB \text{ sein.}$$

161.5. Die Korrektur ist nach dem Münchener Handexemplar gemacht. Zu dem Exempel Z. 8 ff. befindet sich ebenda folgende handschriftliche Korrektur: „Weil dan die Lähn hat 10 schuch, des bodens halber Diameter 3 s. [3 semis = $3\frac{1}{2}$] so multiplicir in einander, khompt 35, das multiplicir in 3.14159,

so khompt 94.248
 15.708
 109.956
 das ist 110.

Kürtzer. Multiplicir die Lähn mit des bodens halbem Diameter, was kompt multiplicir ferners in das Cirkelfeld fol. 10, für nur eine Ziffer verstanden, so hastu etc.“

[Darunter nachträglich:] „Dise correctur ist vnnötig, thails falsch.“

Diese Korrektur hat Kepler auch dem Frankfurter Arzt J. H. Beyer mitgeteilt in einem verlorenen Brief vom 5./15. Jan. 1617. Dieser hatte ihn bereits am 19./29. Sept. 1616 (Bd. XVII, S. 186) auf die Fehlerhaftigkeit des letzten Absatzes von Nr. 19 aufmerksam gemacht. Tatsächlich ist ja, wenn r den

Radius der Kugel, s die Mantellinie des einbeschriebenen rechtwinkligen Kegels bedeuten, $s = r\sqrt{2}$ und $r\pi s = \sqrt{2} \cdot r^2\pi$, nicht $\sqrt{2r^2\pi}$, wie Kepler angibt.

162.3. Korrektur nach dem Münchener Handexemplar.

162.30. Das Handexemplar hat an dieser Stelle die Randnotiz: „An einer Kugel zeigt der boltz die proportion des felds am Huetlin, an einer Parabola zeigt er Diametrum des felds am grund des Huetlins.“

166.35. *Villalpandus, Job. Bapt.:* Commentarius in Ezechielem III, 295. Rom 1598.

167.8. Ein Zusatz zu dieser Stelle am Ende von Nr. 89, S. 242.

167.16. Archimedes hatte nur Schnitte eines geraden Kegels senkrecht zur Achse oder zu einer Mantellinie zugelassen und dementsprechend Ellipse, Parabel, Hyperbel als resp. Schnitte eines spitzwinkligen, rechtwinkligen, stumpfwinkligen Kegels erklären müssen. Im Gegensatz dazu läßt Apollonius sowohl gerade als schiefe Kegel und Schnittebenen beliebiger Lage zur Achse zu, so daß alle Arten von Kegelschnitten an einem einzigen Kegel entstehen können. Vgl. Cantor I³, 334f.

Kampffrad (Z. 18) = Kammrad, Gewirtzscarnitzel (Z. 19) = Gewürztüte.

168.4. *Serenus von Antinoeia* (4. Jh. n. Chr.) ist Verfasser einer Schrift „Über den Zylinderschnitt“. Lat. Ausgabe von Commandino 1566. (Tropfke VI², 139). schlims (Z. 5) ist Adverb von schlimm = schief, schräg.

169.18. Die Fadenkonstruktionen von Ellipse, Hyperbel, Parabel gibt Kepler erstmals im 4. Kap. der „Astronomiae Pars Optica“ (Bd. II, S. 92 f.). Die Ellipsenkonstruktion ist altbekannt; das bedeutet auch die köstliche Bemerkung über die Cavallieri. Die von Hyperbel und Parabel hat Kepler auf alle Fälle selbständig gefunden.

173.4. Hiezu ein Zusatz in Nr. 89, S. 241.

174.18. Die Zahl 78 53982 ist falsch, es müßte vielmehr $785398 = 500^2 \cdot \pi$ heißen. Der Fehler zieht sich durch die ganze Rechnung hin. Das Endergebnis müßte statt „zehnmal hundert tausend Mann“ „hundert tausend Mann“ lauten.

177.17. Die zwei zusammen zu setzenden Höhen sind $IO = 142\ 049$ und $IP = 278\ 201$. Daher wird $OP = 420\ 250$, nicht $356\ 250$.

177.35. Die Berechnung der Tabelle der Kugelsegmente geschieht in gleicher Weise wie die der Kreissegmente (Anm. 158.23) durch ein Summations-

verfahren. Die Halbkugel vom Radius $r = 100$ wird durch Ebenen parallel zu dem sie begrenzenden Großkreis in 100 gleichhohe Kugelzonen zerlegt. Gibt man dem Großkreis die Nummer 100, so ist die i -te Schnittfläche ein Kreis vom Radius $\rho_i = \sqrt{i(2r-i)}$.

Für die Summation wird nun der 1. Abschnitt, eine Kalotte von der Höhe 1, durch ein Paraboloidsegment vom Inhalt $S_1 = \frac{\rho_1^2 \pi}{2}$, die zwischen der i -ten und $(i+1)$ ten Schnittebene enthaltene Kugelzone durch den Zylinder $\frac{\rho_i^2 + \rho_{i+1}^2}{2} \pi$ ersetzt. Dementsprechend wird die Summe der n ersten Abschnitte $S_n = \pi \left(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \dots + \rho_{n-1}^2 + \frac{\rho_n^2}{2} \right)$, und die Differenz

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \frac{\rho_n^2 + \rho_{n+1}^2}{2} \pi = \pi \left[n(2r-n) + (r-n) - \frac{1}{2} \right] \\ &= \pi \left[r \cdot n + (n+1)(r-n) - \frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

„Deß Formats wegen“ nimmt Kepler als Tabellenwert nicht S_n , sondern $\frac{S_n}{10} = S'_n$. Es ist also $S'_{n+1} - S'_n = \frac{\pi}{10} [r \cdot n + (n+1)(r-n)] - \frac{\pi}{20}$. Da die Tabelle nur ganze Zahlen hat, läßt sich das kleine Korrekturglied $\frac{\pi}{20}$ nicht an der einzelnen Zahl berücksichtigen, sondern nur von Zeit zu Zeit, nach je 6 bis 7 Schritten, als zu subtrahierende Einheit.

Als Beispiel seien die Tabellenwerte für $n = 21$ bis 26 gerechnet, wenn von dem Keplerschen Wert $S'_{20} = 11728$ ausgegangen wird. Es ergibt sich

n	S_n	$S_{n+1} - S_n$	2. Differenz $\frac{2[r - (n+1)]}{10} \frac{\pi}{10}$	3. Diff.
20	11728			
	1156	$(2000 + 21 \cdot 80) \frac{\pi}{10} = 368 \pi$		
21	12884		15,8 π	
	1205 ⁷	$(2100 + 22 \cdot 79) \frac{\pi}{10} = 383,8 \pi$		0,2 π
22	14089		15,6 π	
	1254 ⁸	$(2200 + 23 \cdot 78) \frac{\pi}{10} = 399,4 \pi$		0,2 π
23	15343		15,4 π	
	1303	$(2300 + 24 \cdot 77) \frac{\pi}{10} = 414,8 \pi$		0,2 π
24	16646		15,2 π	
	1351 ⁹	$(2400 + 25 \cdot 76) \frac{\pi}{10} = 430 \pi$		0,2 π
25	17998		15,0 π	
	1398	$(2500 + 26 \cdot 75) \frac{\pi}{10} = 445 \pi$		
26	19396			

(Bei $n = 23$ ist die Korrektur um eine Einheit nach unten vorgenommen)

Die Probe zeigt, daß in der Tabelle Keplers Ungleichheiten vorhanden sind. Es kommt eine andere Beobachtung hinzu: Rechnet man das Segment S_n nach der bekannten Formel $S_n^* = \frac{\pi n^2}{3} (3r-n)$, und

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} p_i^2 + \frac{p_n^2}{2} = \pi \left[n(n-1)r - \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} + \frac{n(2r-n)}{2} \right] \\ = \pi \left(rn^2 - \frac{n^3}{3} - \frac{n}{6} \right),$$

dann wird $S_n^* - S_n = \frac{\pi n}{6}$. Bei $n = 100$ wird diese Differenz in der Tabelle $\frac{5\pi}{3}$. Da Kepler an dieser Stelle aber den genauen Wert von $\frac{2r^3\pi}{3}$ hat, so muß seine Tabelle auch auf dieses Ziel hin ausgeglichen worden sein.

179. 17. Ein großer Zusatz zu Nr. 40 bei Nr. 89, S. 241 f.

183. 20. „Pianta“ ist in der Festungsbaukunst term. techn. für Grundriß. (Vgl. etwa *Cabrera: La nuova architettura militare*. Bologna 1683).

184. 6. Der Buchstabe Y, der wie in der Fig. XIV, S. 50 links oben am Zylinder stehen müßte, fehlt in der Fig. S. 183 versehentlich.

188. 33. Die launige Bemerkung „das lehret Archimedes usw.“ besagt natürlich nur, daß die Berechnung des Hyperbelsegments ein vorerst noch ungelöstes Problem sei, wie in der angezogenen Nr. 18 (S. 160) auch wirklich gesagt wird.

194. 16. Daß die vereinzelt schon S. 178, konsequent aber von hier ab verwendete Dezimalbruchsymbolik, die sich von unserer lediglich durch die Klammer anstelle des Kommas unterscheidet, von Jost Bürgi stammt, erfährt man nur aus dieser Bemerkung Keplers, der damit wieder einmal beweist, wie gewissenhaft er geistiges Eigentum anderer achtet. Er selbst benützt 10 Jahre früher in der Parallaxentafel der „Optik“ (Bd. II, nach S. 240) die Schreibweise $572^{\frac{96}{100}}$ für 572,96.

196. 17. *Clavius: Opera*, Mainz 1610 ff., tom. II, pag. 145.

„Dreyling“ wird bei der „Erklärung der gebrauchten geometrischen Wörter“ S. 270 kurz gleich „Dolium magnum“ gesetzt. Die Angaben über die zahlenmäßige Größe des Dreilings als Weinmaß schwanken; Kepler legt hier für den doppelten österreichischen Dreiling rund 40 Eimer zugrunde.

196. 34. Der Satz ist das Theor. XXIII, S. 61, das in deutscher Übersetzung lautet: „Zwei Kegel, die durch Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks mit ungleichen Katheten um eben diese Katheten entstehen, verhalten sich zueinander wie die jeweils rotierende Kathete.“ Sind nämlich b und c die Katheten, $b > c$, dann verhalten sich tatsächlich die Kegel $\frac{c^2 b \pi}{3} : \frac{b^2 c \pi}{3} = c : b$.

197. 12. Dieser Satz entspricht dem Theor. XXIV, S. 61 (vgl. Anm. 61.31). Ist b der Halbmesser der großen Kugel, c der der kleinen, so verhalten sich die 4 Körper K_1 = große Kugel, S_b = Linse („gedruckte Kugel“), S_c = Ei („ablenge Kugel“), K_2 = kleine Kugel

$$K_1 : S_b : S_c : K_2 = \frac{4b^3\pi}{3} : \frac{4b^2c\pi}{3} : \frac{4bc^2\pi}{3} : \frac{4c^3\pi}{3},$$

also

$$K_1 : S_b = S_b : S_c = S_c : K_2 = b : c.$$

197. 17. Vgl. dazu Theor. XXV, S. 62 und Anm. 62.11. Abgesehen davon, daß auch hier zu sagen ist, daß der Satz Falsches vermutet, ist hier wenigstens der Fehler im Wortlaut des lateinischen Theorems korrigiert, indem statt des Verhältnisses Haube : Zitrone das richtige

Haube : halbe Zitrone = $\rho : h$ gesetzt wird.

199. 24. Hier ist wieder übersehen, daß nach Theor. XXVI, S. 63 f. das Verhältnis halbe Olive : Sphäroidsegment $\approx h : \rho$, also die halbe Olive $\approx$ Sphäroidsegment $\cdot \frac{h}{\rho}$ sein soll. Vgl. im übrigen Anm. 64.3.

201. 27. Der Sinn dieser Überlegungen ist die Vorbereitung der Aufgabe (Nr. 88), den Inhalt eines nur teilweise gefüllten Fasses zu berechnen. Näherhin wird hier das Problem gestellt, von einem durch Rotation eines Kegelschnitts um eine zur Sehne parallele Achse entstehenden Rotationskörper ein durch eine Ebene parallel zur Rotationsachse abgeschnittenes Körpersegment zu berechnen. Auf die Faßrechnung übertragen soll das heißen, daß der Abstand der schneidenden Ebene von der Achse der Halbmesser des Faßbodens sei.

In der Figur sei ABCD das rotierende Kegelschnittsegment, AC die Spur der schneidenden Ebene. Das Segment F_s liegt nun offenkundig zwischen den beiden „Gesellen“, nämlich den durch Rotation von ABCD um BD einerseits, um AC andererseits entstehenden Rotationskörpern R_1 und R_2 . Zur Berechnung von F_s macht Kepler ferner Gebrauch von den Schnitten der Mittelebene zwischen den Faßböden mit F_s und R_2 , S bzw. S_2 . Da F_s und R_2 gleiche Länge AC haben, so setzt Kepler ihre Inhalte proportional zu S und S_2 , also

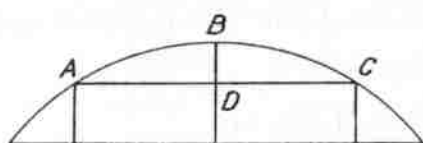


Fig. 28

$$F_s : R_2 = S : S_2 \quad \text{oder} \quad F_s = \frac{R_2 \cdot S}{S_2}.$$

Nach der zusätzlichen Bemerkung in Nr. 89, S. 241 würde diese Beziehung genau gelten, wenn der Bogen ABC parabolisch oder elliptisch wäre, in dem wichtigsten Fall des Kreisbogens stimmt sie jedoch nur angenähert.

202. 24. Das Resultat Keplers für das Segment des Kegelstumpfs ist ganz unmöglich. Tatsächlich enthält seine Rechnung mehrere Fehler. Die Fläche des Halbkreises vom Radius 3 ist nicht 9,425, sondern 14,136, der halbe Kegel entsprechend 127,224. Aber auch die oben entwickelte Rechenregel ist nicht richtig angewandt; es müßte $F_s \approx \frac{45 \cdot 127}{14} \approx 410$ statt 17,76 herauskommen.

Die im folgenden Abschnitt vorgetragene „Special-Lehre“, nach der im Fall kreisförmig gebogener Faßdauben der halbe Zitronenkörper und sein Mittelschnitt durch das Kugelsegment und sein ebenes Kreissegment ersetzt werden, würde in der Bezeichnung von Anm. 201.27

$$R_1 : S_1 = R_2 : S_2 \text{ oder } R_1 : R_2 = S_1 : S_2$$

lauten, während nach Theor. XXV, S. 62 $R_1 : R_2 = AD : BD$ sein soll. Eine weitergehende Erklärung gibt die Nr. 89, S. 242.

205. 38. Schaub = Stroh, Widen = Weiden zu Stroh- oder Weidenbändern.

206. 11. Delrio = *Martinus Antonius del Rio*: *Disquisitionum magicarum libri VI*, Löwen 1599, Mainz 1603 und spätere Ausgaben.

207. 17. Siehe dazu die Anm. 78.14.

210. 38. Wegen $AC^2 = AT^2 + CT \cdot AV$ und $AT^2 = \frac{1}{2} CT^2$.

213. 2. Genau $\sqrt{200} = 14,14$. Z. 3/4 ist die Angabe „nit gar 12“ zu korrigieren, da $3080 : 252 = 12 \frac{2}{9}$.

217. 34. Diese Tabelle ist lediglich eine Zusammenfassung der drei Tabellen von S. 94 und S. 114. Vgl. daher die Anm. 94.8 und 114.21, sowie 221.5.

218. 16. „Weitlinge“ sind Milchsüsseln (vgl. S. 216, Z. 6/7), die vielerorts die Form von Kegelstümpfen haben mit offenem größerem Grundkreis, wovon der Name herkommt.

221. 5. Über die Art, wie die Tabelle gerechnet wurde, macht Kepler keine Andeutung; auch im handschriftlichen Nachlaß ist nichts darüber zu finden. Auf alle Fälle muß das Volumen eines Fasses mit kreisförmig gebogenen Dauben und dem Verhältnis $a : b = n : (n + 1)$, rheinischer oder österreichischer Bauart, bekannt sein.

Sei also a der Halbmesser der Böden, b der des Bauches, der Abstand der Böden $2l$, r der Krümmungshalbmesser der Dauben, also $r = \frac{2a^2}{(b-a)x^2}$, wobei x wie früher das Konjugationsverhältnis bedeutet, $x^2 = 2$ beim österreichi-

schen, $\kappa^2 = 1$ beim rheinischen Faß, und $l^2 = 2r(b-a) - (b-a)^2$, d. h. beim österreichischen Faß $l^2 = a^2 + b(2a-b)$, beim rheinischen $l^2 = 3a^2 + b(2a-b)$.

Das Volumen des Fasses V_F setzt sich zusammen aus dem Zylinder zwischen den Böden und dem unter den gekrümmten Dauben liegenden Teil. Denkt

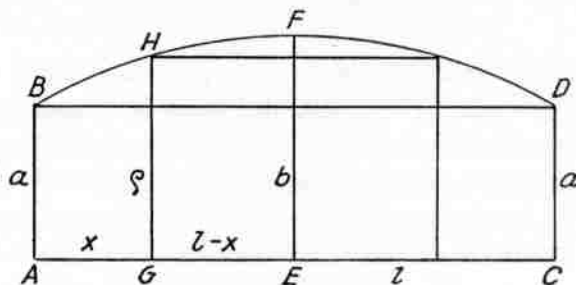


Fig. 29

man sich diesen letzteren nach dem von Kepler benützten Schalenmodell (Anm. 49.15) in eine Folge von Zylinderschalen zerlegt, so erhält man mit $AG = x$, $GE = l-x$, $GH = \rho$ und dem Schalendurchmesser $d\rho$

$$V_F = 2a^2 l \pi + 4\pi \int_0^1 (l-x) \rho \, d\rho$$

mit

$$\rho \, d\rho = \left[(l-x) + (r-b) \frac{1-x}{\sqrt{r^2 - (1-x)^2}} \right] dx.$$

Es wird daher

$$V_F = 2\pi l \left[1 \left(a^2 + \frac{2l^2}{3} + (r-b) \sqrt{r^2 - l^2} - r^2 (r-b) \arctg \frac{1}{r} \right) \right]$$

oder näherungsweise, wenn $\arctg \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{6} \frac{l^2}{r^3}$ gesetzt wird,

$$V_F \approx 2\pi l \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{l^2 b}{6r} \right).$$

Für die Differenz Δ zwischen Faß und doppeltem Kegelstumpf ergibt sich daher

$$V_F - V_{st} = \Delta = \frac{2\pi l}{3} \left[\frac{(b-a)^2}{2} + \frac{l^2 b}{2r} \right].$$

Für die Tabellenwerte V_F : Δ erhält man also

$$\frac{V_F}{\Delta} = \frac{3a^2 + 3b^2 + \frac{l^2 b}{r}}{(b-a)^2 + \frac{l^2 b}{r}}.$$

Setzt man schließlich $a = n$, $b = n+1$, $l^2 = 2n^2 - 1$, $r = n^2$ beim österreichischen, $l^2 = 4n^2 - 1$, $r = 2n^2$ beim rheinischen Faß in die letzte Formel ein, so kommt

$$\frac{V_F}{\Delta} = \frac{3n^2 [n^2 + (n+1)^2] + (2n^2 - 1)(n+1)}{n^2 + (2n^2 - 1)(n+1)} \quad \text{für das österreichische,}$$

$$\frac{V_F}{\Delta} = \frac{6n^2 [n^2 + (n+1)^2] + (4n^2 - 1)(n+1)}{2n^2 + (4n^2 - 1)(n+1)} \quad \text{für das rheinische Faß.}$$

Das ergibt beispielsweise für $n = 3$, d. h. $a : b = 3 : 4$, die Werte 9,65 bzw. 9,43, abweichend von Kepler, der die runden Zahlen 11 bzw. 9 angibt.

Eine einfachere, entsprechend auch ungenauere Formel für V_F erhält man, wenn man beachtet, daß $\frac{4a}{x^2} < \frac{l^2 b}{a^2} < \frac{4b}{x^2}$ ist, daß also angenähert $\frac{l^2 b}{a^2} \approx \frac{2(a+b)}{x^2}$ gesetzt werden kann. Man erhält auf diese Weise

$$\frac{l^2 b}{6r} = \frac{l^2 b}{6a^2} \cdot \frac{a^2}{r} \approx \frac{a+b}{3x^2} \cdot \frac{(b-a)x^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{6}$$

und

$$V_F \approx 2\pi l \left(\frac{a^2}{3} + \frac{2b^2}{3} \right) = \frac{Z_1 + 2Z_2}{3},$$

wobei Z_1 und Z_2 die Zylinder von der Höhe $2l$ über den Böden bzw. dem Bauch des Fasses bedeuten.

Zu dieser Näherungsformel kommt *J. H. Lambert* in der Abhandlung „Die Visierkunst“, abgedruckt in: *Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung*, Bd. 1, Berlin 1765, S. 329. Nach der Bemerkung Keplers S. 221/22 wurde im Rheinland mit dem schlechteren Näherungswert $\frac{Z_1 + Z_2}{2}$ gearbeitet.

Als Differenz Δ erhält man nun

$$\Delta = \frac{2\pi l}{3} b(b-a) \quad \text{und entsprechend} \quad \frac{V_F}{\Delta} = \frac{a^2 + 2b^2}{b(b-a)} = \frac{3n^2 + 4n + 2}{n+1}$$

für beide Arten von Fässern, da l weggefallen ist. Im Beispiel $n = 3$ ergibt sich so $V_F : \Delta = 11 \frac{1}{4}$.

Die Differenz sukzessiver Tafelwerte zu $a : b = n : (n+1)$ und $a : b = (n+1) : (n+2)$ wird danach

$$\frac{3(n+1)^2 + 4(n+1) + 2}{n+2} - \frac{3n^2 + 4n + 2}{n+1} = \frac{3n^2 + 9n + 5}{(n+1)(n+2)}.$$

Der Wert dieses Bruches ist $\frac{59}{20}$ für $n = 3$, $\frac{89}{30}$ für $n = 4$ und nähert sich mit wachsendem n immer mehr dem Wert 3, während Keplers Tabelle gerade bei größeren n die Tendenz zur Differenz 4 zeigt.

Es ist zu beachten, daß das österreichische und das rheinische Faß von gleichem Verhältnis $a : b$ nicht gleiche Länge und deshalb auch nicht gleiches Visier haben. Dieses ist nämlich $v = \sqrt{l^2 + (a+b)^2}$, beim österreichischen Faß also $v_1 = \sqrt{2a(a+2b)}$, beim rheinischen $v_2 = \sqrt{4a(a+b)}$. Soll das rheinische Faß auf gleiches Visier mit dem österreichischen gebracht werden, wie in der Tabelle S. 217/18 vorausgesetzt ist, so muß es verkürzt und ähnlich verkleinert werden. Dabei wird sein Volumen V_{Rh} im Verhältnis $v_1^3 : v_2^3$ kleiner, also $V'_{Rh} = \frac{v_1^3}{v_2^3} \cdot V_{Rh}$.

Mit $a = 3$, $b = 4$ wird $v_1 = \sqrt{66}$, $v_2 = \sqrt{84}$, $V_{Rh} = 161,7 \pi$, also

$V'_{Rh} = \frac{\sqrt{66^3}}{\sqrt{84^3}} \cdot 161,7 \pi = 112,6 \pi$, während das österreichische Faß mit $a = 3$, $b = 4$ das Volumen 112π hat. Es bestätigt sich daher Keplers Befund S. 217,

daß bei diesem Verhältnis „Das Reinfäß gegen dem Oesterreichischen“ „nichts mehr, nichts weniger“ habe.

Die Grenzbedingung, bei der die Zitronenrundung über die Kugel in die Apfelfrundung übergeht (S. 221 oben), lautet einfach $r = b$, beim rheinischen Faß also $b = \frac{2a^2}{b-a}$ oder $\frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a} - 2 = 0$, $\frac{b}{a} = 2$, beim österreichischen $b = \frac{a^2}{b-a}$, $\frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a} - 1 = 0$, $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Die zwei ersten Näherungswerte des Kettenbruchs $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sind $\frac{3}{2}$ und $\frac{5}{3}$, wenn $1 + \sqrt{5} = 3,2360$ gerechnet wird. Den Wert $\frac{5}{3}$ gibt Kepler an. Der Wert $\frac{200000}{123607}$ ist mit Regel de tri berechnet. Das rheinische Faß mit $b = r = 2a$, $l = a\sqrt{3}$ hat, nach der Integralformel gerechnet, $V_F = 6\pi a^3 \sqrt{3}$, $\Delta = \frac{4\sqrt{3}}{3} a^3 \pi$, daher $\frac{V_F}{\Delta} = 4,5$; Kepler gibt dafür die Zahl 4 an.

222. 9. Vgl. Anm. 120.8. Da Beyer das Faß als doppelten Kegelstumpf behandelt, ist die vorangehende Tabelle – ihre Richtigkeit vorausgesetzt – ein Maß für die von ihm erreichte Genauigkeit.

223. 8. Der Maßstab sollte genau einen halben Linzer Schuh lang sein. Wie indes Kepler nachträglich feststellte, hatte sich das Papier, das für den Druck genetzt wurde, etwas verzogen und zeigte den halben Linzer Schuh um 2 Punkte zu kurz. Er ließ deshalb den Maßstab neu drucken und auf besonderem Blatt jedem Exemplar beifügen (S. 255, Z. 11 ff.). Diese lose Beilage ist nur noch vereinzelt erhalten, z. B. im Exemplar des Stiftes St. Paul in Kärnten. Natürlich kann auch dieser korrigierte Maßstab nicht als Grundlage für eine Umrechnung in heutiges Maß genommen werden.

237. 11. Siehe Anm. 264.42.

237. 39. Die Berechnung geschieht nach der „Special-Lehre“ für die Zitronenrundung von S. 202. Bedient man sich der Keplerschen Bezeichnung und setzt: „Großer Zirkelschnitt“ = ζ , „Kugelschnitt“ = κ , „Bauchzirkelschnitt“ = β , dann wird das gesuchte Segment x der Zitronenrundung $x = \frac{\kappa \cdot \beta}{\zeta}$. Bezeichnet man wie bisher die Halbmesser von Boden und Bauch mit a und b , mit l seine halbe Länge, mit r den Krümmungsradius der Dauben, mit $h = b - a$ die gemeinsame Höhe aller 4 Segmente, dann lautet die Formel für x explizit

$$x = \frac{\pi h^2}{3} \cdot \frac{(3r - h) [b^2 \beta - a \sqrt{(b+a) \cdot h}]}{r^2 \alpha - l(r - h)}, \quad \alpha = \arcsin \frac{l}{r}, \quad \beta = \arccos \frac{a}{b}.$$

Kepler führt seine Rechnung nicht an dem vorgegebenen Faß mit $r = 61,5$ durch, sondern an einem im Verhältnis $r : R = 61,5 : 10^5$ vergrößerten Modell. In diesem haben ζ' und κ' den Radius $R = 10^5$, die Segmente sind also der Tabelle S. 158 zu entnehmen. Zur Berechnung von β' vergrößert er zu-

nächst $b' = \frac{R}{r}b$ auf $b'' = 10^5 = \frac{r}{b}b'$, entnimmt β'' der Tabelle und verkleinert b'' wieder im Verhältnis $\frac{b}{r}$, d. h. $\beta' = \frac{b^2}{r^2}\beta''$. Der endgültige Wert x wird schließlich $x = x' \cdot \frac{r^3}{R^3}$.

In Keplerschen Zahlen sieht das so aus: $a = 9,5$, $b = 11$, $r = 61,5$, $h = 1,5$, $R = 10^5$, $h' = 2439$. Damit wird

$\zeta' = 7162 \cdot 10^4$ (bei Kepler irrtümlich 10^5), $\kappa' = 185 \cdot 10^{10}$, $\beta'' = 930 \cdot 10^6$, $\beta' = 2975 \cdot 10^4$, $x' = 76,8 \cdot 10^{10} \approx 77 \cdot 10^{10}$, $x = x' \cdot 232\,608 \cdot 10^{-15} \approx 180$. Bei direkter Berechnung nach der expliziten Formel, wobei $l = 13,5$, $\alpha = 0,221$, $\beta = 0,528$ zu setzen ist, ergibt sich $x = 187$ in befriedigender Übereinstimmung mit Kepler.

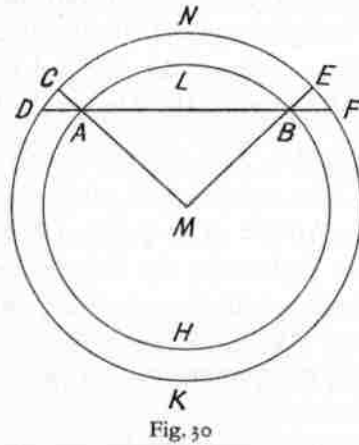
Die analytische Behandlung der Aufgabe führt, je nachdem man sich Keplers Schalenmodell oder das Schichtmodell zu eigen macht, auf das Integral

$$4 \int_0^l x \cdot \arccos \frac{a}{\rho} \cdot \rho \rho' dx \quad \text{oder} \quad 2 \int_0^l \rho^2 \cdot \arccos \frac{a}{\rho} dx.$$

Keines von beiden ist in geschlossener Form integrierbar. Eine leidliche Annäherung liefert nach dem Urteil des Auges der Halbzylinder von der Länge $2l$ und dem Grundkreishalbmesser $(b - a)$. In dem Beispiel $a = 9,5$, $b = 11$, $l = 27$ hat er den Inhalt $V = 60,75 \pi = 190,8$, während Keplers Rechenregel $V = 187$ ergab.

238. 26. Zur Erläuterung der zwei Vorschriften für die Berechnung des „anderen Falles“, d. h. des Faßsegmentes von der Höhe $h > b - a$, sei folgendes bemerkt:

Die Figur ist als senkrechte Projektion eines Fasses auf eine zu den Böden parallele Ebene aufzufassen. Es ist darin ALBH ein Faßboden, DNFK der „Bauchzirkel“, $MA = a$, $MC = b$, $AC = b - a$. Die Dreieckchen ACD und BEF der Figur sind in Wirklichkeit keilförmige, beiderseits an den Böden zugespitzte Zwickel von der Länge des Fasses, von Kepler (Z. 22) als „zwey kleine zugespitzte stücklin“ bezeichnet. Läßt man diese ihrer Kleinheit wegen fürs erste außer Betracht, so ergibt sich das Volumen des leeren Segmentes als die Differenz des Sektors vom Öffnungswinkel $\alpha = \angle AMB$ des ganzen Fasses und des Prismas über dem Dreieck MAB von der Höhe $2l$. Das ist der „erste Teil“.



„Umb der Künstler willen“ werden im zweiten Teil auch die „zwey kleinen spitzfeldlein“ (Z. 30) in die Rechnung einbezogen. Da ihre Gestalt auf eine Verwandtschaft mit dem Faßsegment der Höhe $(b - a)$ hinzudeuten scheint,

so wird ihr Inhalt nach der Regel de tri aus diesem Segment in folgender Weise berechnet: Ist nach Anm. 237.39 $x = \frac{x \cdot \beta}{\zeta}$ der Inhalt des Faßsegmentes, wobei β der „Bauchzirkelschnitt“, ferner σ die Summe der Dreieckchen ACD und BEF, Z die Summe der beiden Zwickel, so wird $Z : x = \sigma : \beta$ gesetzt, also $Z = \frac{\sigma \cdot x}{\beta} = \frac{\sigma \cdot x}{r}$. Dabei ergibt sich die Summe σ in der Form: Kreissegment DNF + Dreieck MAB — Kreissektor CME.

Es mag hier interessieren, daß *Lambert* in der bereits erwähnten Abhandlung von 1765 (Anm. 221.5) mit dem ganzen Titel „Die Visierkunst sowohl ganz als nicht ganz gefüllter liegender Fässer“ genau denselben Weg der Berechnung eines Faßsegmentes einschlägt wie Kepler, mit dem Unterschied nur, daß dieser den geleerten Teil, Lambert dagegen den noch vollen Teil im Auge hat. Im Vorbericht sagt er dazu (S. 314): „Für liegende Fässer, die nicht ganz voll sind, hat man noch gar keine genaue Methode sie zu visieren finden können. Ich habe daher einen Versuch angestellt, sie zu zergliedern, welcher glücklicher ausgefallen, als es anfangs zu vermuthen war. Es ließe sich nämlich der Raum, der in solchen Fässern ausgefüllt ist, der Achse nach in 4 Ausschnitte zerteilen, welche theils prismatisch, theils pyramidal, theils auch considal sind, und wovon nicht nur jedes besonders gemessen und mit dem Inhalte des Fasses verglichen werden konnte, sondern die sich in eine Summe zusammenziehen ließe.“ Als Rechenregel stellt er in § 36 auf: „Setzet, das Faß habe in der Mitte bei dem Spundloch noch einen Boden, der mit den beyden andern parallel sey. Messet den Raum aus, den der Wein auf diesen dreyen Böden benetzt oder bedeckt. Den Raum des mittleren Bodens nehmet vierfach, und addirt dazu den Raum der äußeren Böden. Die Summe wird durch 6 getheilt, und was herauskömmt, mit der Länge des Fasses multipliziert, so wird das Product der Inhalt des Fasses seyn, soweit es angefüllt ist.“

An die Stelle der durch die Dreieckchen CDA und EBF angedeuteten Zwickel treten bei Lambert die Ausschnitte aus dem Faßwulst, die durch den Flüssigkeitsspiegel DF und die Meridianebenen MD bzw. MF gebildet werden. Diese ergänzen die Zwickel zu Sektoren des Wulstes vom Öffnungswinkel CMD bzw. EMF. Als Inhalt des ganzen Wulstes ergibt sich aus Anm. 221.5 (S. 535) $J = \frac{Z_1 + 2Z_2}{3} - Z_1 = \frac{2}{3}(Z_2 - Z_1)$.

Nur auf den Fall parabolischer Krümmung der Faßdauben abgestellt ist die Arbeit: „Des Jesuiten P. Pezenas Auflösung der Keplerischen Aufgabe, das Verhältniß der Faßschnitte betreffend, wenn selbige mit der Achse des Fasses parallel geschehen“, in: Auserlesene Abhandlungen, welche an die Kgl. Akademie der Wiss. zu Paris eingesendet worden. 2. Teil. Übersetzt von Ferd. Wilh. Beer. Leipzig 1754, S. 80–105.

240. 7. Die Tabelle sei nur „beyläufig proportionirt“, bemerkt Kepler und will damit sagen, daß die Werte für das Segment über den Faßböden nur angenähert gelten. Tatsächlich entsteht die Tabelle aus vier durchgerechneten Fällen durch Interpolation und Extrapolation.

243. 43. Dazu Randnote in Keplers Handexemplar:

1.	2.	3.
Gantze	Eich des	Höch des
überhöhung	bauchschnitzes	lähren Theils

244. 1. Der Inhalt eines Fasses setzt sich zusammen aus dem Walger (dem Zylinder zwischen den Böden) und dem durch die Wölbung der Dauben gebildeten Wulst, bei Kepler „die Gürtel“ genannt. Schneidet die Oberfläche der Flüssigkeit von jedem Boden ein Segment der Höhe $h < a$ ab, dann ist das Verhältnis von Walgersegment zu Walger

$$Z'_1 = \frac{a^2 \alpha - (a-h) \sqrt{h(2a-h)}}{a^2 \pi}, \quad a = \arccos \frac{a-h}{a}.$$

Hält der Walger genau einen Eimer, dann gibt Z'_1 den Bruchteil eines Eimers, der im Walgersegment enthalten ist, $Z_1 = 41 \cdot Z'_1$ also die Zahl der Achteringe im Segment, da der Eimer zu 41 Achteringen genommen wird. Wird schließlich $a = 100$ gesetzt, so sind die Zahlen der ersten Reihe die Werte von

$$Z_1 = \frac{41}{\pi} \left[\alpha - \frac{100-h}{100} \sqrt{2 \frac{h}{100} - \left(\frac{h}{100} \right)^2} \right].$$

Ist Z_2 die entsprechende Verhältniszahl für den Wulst, so ergibt sich unter Vernachlässigung der beiden Zwickel (vgl. Anm. 238.26)

$$Z_2 = \frac{(V_F - V_W) \cdot \frac{\alpha}{\pi}}{(V_F - V_W)} \cdot 41 = \alpha \cdot \frac{41}{\pi}, \quad \alpha = \arccos \frac{a-h}{a}.$$

Beispiel: Mit $h = 75$, $\alpha = 1,31776$ wird $Z_1 = 14,04$, $Z_2 = 17,2$. In der Tabelle findet man übereinstimmend damit das Paar $h = 75$, $Z_1 = 14$ und, mit Interpolation, $h = 75$, $Z_2 = 17,2$. Setzt man umgekehrt $Z_2 = 17$, woraus $\alpha = 1,30263$, $\alpha^\circ = 74^\circ 38' 10''$, so wird $\cos \alpha = 0,26495$, $h = 100(1 - \cos \alpha) = 73,5$. In Keplers Tabelle findet man den Wert $h = 73,4$.

Bei kleinen Werten von h müßte Z_2 nach dem genaueren Verfahren von Nr. 88 (S. 238) gerechnet werden. Kepler rechnet jedoch unverändert weiter, z. B. $Z_2 = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{41} = 0,07662$, $\alpha^\circ = 4^\circ 23' 25''$, $\cos \alpha = 0,99707$, $h = 0,293$, Tabellenwert $h = 0,3$.

245. 12. Randnote im Handexemplar:

„Nota. Weil fol. 91 der Obere bauchschnitz in wind geschlagen würt, wan es schon alberait an die böden gehet: damit doch auch diß orts etlicher maßen bekant werde, wie vil vom Obern bauchschnitz in einer jeden weins Höch biß an das centrum des bodens hinzue zurechnen, oder vnderm Centro davon zuziehen: so thue also. Visier die halbe boden Höch, mit anschlagung des visierstabs: visier auch die weins Höch yber das centrum des bodens, oder sein ernidrigung under das centrum. Setz baide eichen in die regel zur link vnd

rechten; setz die aich des bauchschnitzes in die mit, so kompt im facit die gesuchte correction. Diß ist ein proceß mit demjenigen, da man des bauchschnitzes Thail suchet, hatt auch einerlay grund ex cubo.“

246. 33. „röricht“ bezeichnet die Eigenschaft, durch die Ritzen eines Siebes zu fallen.

Zum System der römischen Gewichtsmaße vgl. Tropfke I², 123 f.

Die Randnote zu dieser Stelle im Handexemplar ist nicht von Keplers Hand.

248. 24. *Heurnius, Joannes*: Praxis Medicinae nova ratio. Leiden 1590.

249. 37. *Agustín, Antonio* (Erzbischof von Tarragona): Antiquitatum Romanarum Hispanarumque in nummis Veterum dialogi XI. Antwerpen 1617. Frühere Ausgaben in italienischer Sprache Rom 1592 und später.

250. 38. Der Kölner Erzbischof Ernst von Wittelsbach († 1612) trug sich um 1600 mit einem umfassenden Plan der Reform des deutschen Maß- und Gewichtswesens. Als er Ende Mai 1605 nach Prag kam und dort durch Vermittlung Herwarts von Hohenburg Kepler kennenlernte, legte er diesem sein Manuskript vor, zu dem er bereits Gutachten von Simon Stevin, Lazarus Schoner und Adrianus Zelstius vorliegen hatte, und forderte auch ihn zu einer Stellungnahme auf. Keplers eigenhändiges Gutachten ist im Entwurf in Mss. Pulk. V, 187ff. erhalten.

251. 11. Die in der Folge erscheinende Zahl von 307 055 Kubikeinheiten der Visierrute für eine Halbkandel = ein halber Achtering, wird in Nr. 81 (S. 226) begründet.

251. 38. Das als Mesolabus oder Mesolabium bekannte Instrumentchen, das zur graphischen Lösung der Würfelverdoppelung erfunden wurde, beschreibt Cantor I², 330f.

254. 10. *Speckle, Daniel*: Architectura von Vestungen. Strassburg 1599 u. später.

254. 13. *Brechtel, Franz Joachim*: Büchsenmeisterey, d. i. kurtze, doch eigentliche erklerung deren ding u. s. w. Nürnberg 1591 und 1613.

254. 31. *Myritius, Joannes*: Opusculum geographicum rarum ... Ingolstadt 1590.

255. 13. Die Stellenangabe ist zu korrigieren in fol. 498b. B. C. *Villalpando* diskutiert dort den „pes Colotianus“ unter Hinweis auf Agricola, Paetus, Philander und Grsepsius (Grzebski).

255. 36. *Freher, Marquard*: Statura Caroli Magni. Φιλοπόνημα. O. O. u. J. (ca. 1600).

258. 13. Bei den hier und S. 263, Z. 32 angezogenen Titeln handelt es sich um ein und dasselbe Werk von *Lazarus Ercker*: Beschreibung aller fürnemster Mineralischen Ertzt und Berckwercksarten, Prag 1574 und zahlreiche spätere Ausgaben. Erst von 1674 ab mit dem Titel: *Aula subterranea alias Probierebuch*.

259. 8. Zu der Angabe über das Prager Pfund notiert Kepler in dem Münchener Handexemplar: „falsch“. Die von Bodin übernommenen Zahlen, sämtlich auf das Pariser Pfund bezogen, hat Kepler in Mss. Pulk. V, 206 zusammengestellt; nicht alle davon sind in der vorliegenden Tabelle als solche gekennzeichnet. Der Umrechnungsfaktor von Pariser auf Linzer Gewicht ist 1,11, z. B. Toulouse/Montpellier/Avignon 121 ergibt, auf Linz bezogen, $1,11 \cdot 121 = 134$. Die Bedeutung von f. in der Tabelle ist unklar.

260. 15. Randnote im Handexemplar: „Diser Tafel bedürffen wir nit, auch nit der buchstaben, die Ziffer seind genugsam. Erstlich hatt man dise Zahlen durch einen stain 13.9.27.81. ferners hatt man dise per additionem zwaier stain durch

1 4. 10. 28. 82.
 3 12. 30. 84.
 9 36. 90.
 27 108.

durch drey zusammengelegte stain dise 13. 31. 85. 37. 91. 109.

vnd dise 39. 93. 111. 117.

durch vier dise 40. 94. 112. 118. 120.

durch alle 5 disen 121.

Summa 31 bishero 1. 3. 4. 9. 10. 12. 13. 27. 28. 30. 31. 36. 37. 39. 40. 81. 82. 84. 85. 90. 91. 93. 94. 108. 109. 111. 112. 117. 118. 120. 121. Die ybrige 90 hatt man durch subtraction oder gegen gewicht zwaier auß jetzgesetzten.“

Die Mnemotechnik war in den mittelalterlichen Schulen als didaktisches Hilfsmittel beliebt und verbreitet. Ein bekanntes Beispiel, das sich in etwa mit dem hier vorliegenden vergleichen läßt, ist der *Cisiojanus* für den Kalender.

261. 23. Randnote im Handexemplar: „Et quia VII Modij Romanj aequant Medimnum, ut testatur Cornelius Nepos in vita Attici, quare Medimnus Atticus paulo quid minus est dan ein Öst: Metzen.“

„Ruth II vers. 17. Ephii tres Modios est latinae versionis interpretamentum.“

261. 33. Randnote: „Also soll das Täfle verstanden werden. 30 Ob der Enser Metzen seind $54\frac{3}{4}$ Wiener vnd $37\frac{1}{2}$ Vnter Enser etc. vnd $22\frac{1}{2}$ Prager

Strich. Item 31 Wiener seind $21\frac{3}{8}$ Vnter Enser, vnd etc. $17\frac{1}{8}$ Ob der Enser etc. vnd $12\frac{7}{8}$ Prager Strich. Item 30 Metzen Vnter Enser seind $43\frac{1}{2}$ Wiener vnd 24 Ob der Enser vnd $18\frac{1}{16}$ Prager Strich etc.“

Zu der auf der folgenden Seite vorkommenden Schiffsbezeichnung „Hohe Naue“ vgl. den Brief Keplers an Remus vom 31. Aug. 1619 (Bd. XVII, S. 375): „... praemisi tres paginas in classe funaria (tu mihi dicito aliud vocabulum quo exprimam Ein hohe naue).“

264. 1. *Bodin, Jean*: *Universae naturae Theatrum*. Lyon 1596 und später.

264. 25. Wegen des Briefwechsels zwischen Kepler und Thomas Harriot, der sich an das Erscheinen der „*Astronomiae Pars Optica*“ anschloß, vgl. Bd. II, S. 425. Die Briefe selbst sind in Bd. XV und XVI zu finden.

264. 42. Michel Coignet (vgl. auch Anm. 128.8) gilt als Erfinder des Proportionalzirkels. Vgl. Cantor II, 687.

Die 265.2 erwähnte Tafel der Kubikzahlen von *Clavius* bildet einen Anhang zu dessen *Geometria practica*, lib. VIII. *Opera Omnia* II, 221–226.

268. 25. In der Rechnung stecken zwei Fehler: Der Feingoldgehalt ist ungenau zu $1151\frac{1}{2}$ statt 1146,4 berechnet. Sodann ist der Kupfergehalt irrtümlich von der Zahl 1875 statt von 1500 gerechnet. Anstelle der Zahl $723\frac{1}{2}$ müßte 353,6 herauskommen, wie man leicht nachrechnet. Dabei ist das Verhältnis der spezifischen Gewichte von Gold und Kupfer mit Kepler als 1875 : 910 = 2,06 statt richtiger 2,15 angenommen.

272. 25. Die drei Nummern 26.27.28. sind im Register versehentlich ausgelassen.

279. 10. Der Angeredete ist Landgraf Philipp (III.) von Hessen (1581–1643), dritter Sohn des Landgrafen Georg I. von Hessen-Darmstadt, der seit 1609 in dem wiederhergestellten Schloß Butzbach residierte. Seine Biographie in ADB XXVI, 2f. Die Widmung des Werkes an Philipp überrascht insofern, als von einem Briefwechsel mit Kepler vor Juli 1623 nichts bekannt ist, während das Manuskript der „*Chilias*“ mitsamt der Widmung schon 1622 nach Tübingen geschickt wird. Wir wissen jedoch, daß Kepler 1621 von Württemberg aus einen Besuch in Butzbach machte; in einem Schreiben an Landgraf Georg II. von Hessen-Darmstadt vom November 1627 (Bd. XVIII, S. 323) bemerkt er außerdem, daß er „von 6 Jahren hero von deroselben [d. i. Landgraf Philipp] vnderschiedliche Fürstliche gut thaten empfangen“ habe. Zu diesen „Guttaten“ gehören ohne Zweifel die 30 Silbermünzen (Reichstaler), von denen in dem Gedicht die Rede ist und die Kepler mit seinen 30 Propositionen erwidern will. „*Φίλα πολλά*“ ist die Übersetzung von „Philipps = Villiebs“.

286. 35. Der Begriff „aussprechbar“ ($\rho\eta\tau\acute{o}\varsigma$) ist bei Kepler weiter als bei Euklid. Während dort eine Strecke a aussprechbar heißt, wenn sie mit der Einheitsstrecke e quadratisch kommensurabel ist, d. h. wenn $a^2 = \alpha \cdot e^2$ ist, definiert Kepler in der „Harmonice Mundi“ (lib. I, Def. 13.14; Bd. VI, S. 23) indem er den Kreisdurchmesser d als Einheit wählt, dem Sinn nach so: eine Strecke s heißt aussprechbar in Länge, wenn $s = \frac{\lambda}{\mu} \cdot d$, die Fläche f aussprechbar, wenn $f = \frac{\lambda}{\eta} \cdot d^2$ ist. Dazu kommt noch der Begriff der Aussprechbarkeit in Potenz, wenn s in Länge nicht aussprechbar, dagegen $s^2 = \kappa \cdot d^2$ ist. Aussprechbare Strecken schlechthin sind als in Länge aussprechbar zu verstehen. Wird $d = 1$ gesetzt, so sind die Größen aussprechbarer Strecken Rationalzahlen, in Übereinstimmung mit der „Notitia communis“ zu Prop. XXIV (S. 303): „Jede Zahl drückt eine aussprechbare Größe aus.“

Prop. IX ist nun so zu verstehen, daß von zwei Rationalzahlen a und b , deren Verhältnis nicht die Potenz einer Rationalzahl ist, die mittlere Proportionale keine Rationalzahl sein kann. Wäre nämlich $x = \sqrt{a \cdot b}$ rational, dann wäre auch $\frac{x}{b} = \lambda$ rational und wegen $a = \lambda^2 b$ das Verhältnis $a : b = \lambda^2$ das Quadrat einer Rationalzahl gegen die Voraussetzung. Allgemeiner würde aus der Existenz einer Reihe von i rationalen mittleren Proportionalen zwischen a und b folgen, daß $a : b = \lambda^{i+1}$, also die $(i+1)$ te Potenz einer Rationalzahl sein müsse.

Prop. XI besagt: In der arithmetischen Reihe $a, x_1, x_2 \dots x_n, b$ deren Glieder aussprechbar sind, sind die Verhältnisse zwischen jeweils benachbarten Gliedern inkommensurabel zueinander. Der Satz ist eo ipso richtig, wenn das Verhältnis der Endtermini a und b nicht die Potenz einer Rationalzahl ist, weil dann keine aussprechbare mittlere Proportionale existiert. Im allgemeineren Fall, wo das Verhältnis a zu b die $(i+1)$ te Potenz einer Rationalzahl ist, und daher i aussprechbare mittlere Proportionalen existieren, gibt Kepler lediglich das Zahlenbeispiel $a = 8, b = 18$ mit der mittleren Proportionale 12 und dem arithmetischen Mittel 13. Sein Beweis, daß die Verhältnisse $13 : 8$ und $18 : 13$ sowohl unter sich als mit dem ganzen Verhältnis $18 : 8$ inkommensurabel seien, kann jedoch als Modell für den allgemeinen Beweis dienen.

289. 11. Sind $a < b < c$ die drei Größen, dann behauptet Kepler

$$1. \frac{c}{a} : \frac{b}{a} < \frac{c-a}{b-a} \quad 2. \frac{c}{a} : \frac{c}{b} > \frac{c-a}{c-b}.$$

Daß der Satz nicht in dieser Allgemeinheit gilt, beweist man ohne Zuhilfenahme des Maßbegriffs etwa so: es werde zunächst vorausgesetzt, daß a, b, c Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Anfangslied a seien, $b = a \cdot q^m$, $c = a \cdot q^n$ ($q > 1$). Dann wird

$$\frac{c}{a} : \frac{b}{a} = q^n : q^m \quad \frac{c-a}{b-a} = \frac{q^n - 1}{q^m - 1}$$

und offenbar

$$\frac{q^n}{q^m} < \frac{q^n - 1}{q^m - 1}.$$

Im zweiten Fall wird

$$\frac{c}{b} : \frac{c}{a} = \frac{1}{q^m} \text{ und } \frac{c-a}{c-b} = \frac{q^n-1}{q^n-q^m},$$

also wegen

$$\frac{1}{q^m} < \frac{q^n-1}{q^n-q^m} \quad \frac{c}{b} : \frac{c}{a} < \frac{c-a}{c-b}.$$

Aber die Umkehrung $\frac{c}{a} : \frac{c}{b} > \frac{c-a}{c-b}$ ist nur dann richtig, wenn auch $\frac{c}{b} : \frac{c}{a} < \frac{c-b}{c-a}$ ist.

Trifft die Voraussetzung, daß a, b, c Glieder einer geometrischen Reihe seien, nicht zu, dann läßt sich durch fortgesetzte Unterteilung des Verhältnisses $c : a$ nach dem Verfahren von Postulat 2 eine geometrische Reihe mit dem Anfangsglied a und dem Endglied c bilden, von der ein Zwischenglied $a \cdot q^m$ um weniger als eine vorgegebene Größe ε von b differiert. Der Satz gilt daher mit derselben Einschränkung für drei beliebige Größen $a < b < c$.

289. 30. Die (unvollständige) Prop. XIV ist eine Verschärfung des Corollars zu Prop. XIII. Der Satz besagt, daß unter derselben Voraussetzung $b - a = c - b = \Delta$

$$\frac{c}{a} < \left(\frac{b}{a}\right)^2 \text{ sei.}$$

Zum Beweis bilde man $\frac{c}{b} = \frac{b+\Delta}{a+\Delta} < \frac{b}{a}$. Wegen $\frac{c}{a} = \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a}$ ist also $\frac{c}{a} < \left(\frac{b}{a}\right)^2$, aus demselben Grund ist aber auch $\frac{c}{a} > \left(\frac{c}{b}\right)^2$, also schließlich $\left(\frac{c}{b}\right)^2 < \frac{c}{a} < \left(\frac{b}{a}\right)^2$ oder auch umgekehrt $\left(\frac{a}{b}\right)^2 < \frac{a}{c} < \left(\frac{b}{c}\right)^2$. Bei Frisch (VII, 312) ist der Satz falsch verstanden, nämlich $\frac{a}{c} > 2 \left(\frac{a}{b}\right)$.

290. 17. Der Satz ist eine Folge des vorhergehenden. Setzt man $a > b$ und $2b > a$ voraus, so gilt für die drei Größen $a, b, (2b - a)$ die Gleichung $a - b = b - (2b - a)$, also ist nach Satz XIV $\frac{a}{2b-a} = \frac{\frac{a}{2}}{b-\frac{a}{2}} > \left(\frac{a}{b}\right)^2$. Kepler gibt auffallenderweise ein Zahlenbeispiel als Beweis. Auch diese Beziehung wird von Frisch falsch interpretiert als $\frac{a}{2} : \left(b - \frac{a}{2}\right) > 2 \left(\frac{b}{a}\right)$.

291. 29. „Excessus“ bedeutet (wie schon früher) den Überschuß $\alpha = v_1 : v_2$ des größeren Verhältnisses v_1 über das kleinere v_2 . Dementsprechend wird der Überschuß α_1 von $\frac{999}{998}$ über $\frac{1000}{999}$ $\alpha_1 = 998001 : 998000$ (Kepler rechnet

ein wenig anders, indem er $\frac{1000}{999} = \frac{999}{998 \frac{1}{1000}}$ setzt). Ebenso wird nachher der Überschuß α_2 von $\frac{998}{997}$ über $\frac{1000}{999}$ gleich $\frac{997 \cdot 002}{997 \cdot 000}$. Es ist also

$$\alpha_1 = 1 + \frac{1}{998 \cdot 000}, \quad \alpha_2 = 1 + \frac{2}{997 \cdot 000} \\ = 1 + \beta_1, \quad = 1 + \beta_2, \text{ wobei } \beta_2 > 2 \beta_1,$$

$$\text{allgemein } \alpha_n = \frac{1000 - n}{999 - n} : \frac{1000}{999} = \left(1 - \frac{n}{1000}\right) : \left(1 - \frac{n}{999}\right) \\ = 1 + \frac{n}{1000(999 - n)} = 1 + \beta_n, \text{ also } \beta_n = \frac{n}{1000(999 - n)} > n \beta_1.$$

292. 29. Die Zahl 999 001 002 004 etc. ist nicht ganz richtig. Wird nämlich das Verhältnis $v_1 = \frac{1000}{999}$ in n gleiche Teilverhältnisse aufgeteilt:

$v_1 = \frac{1000}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \dots \frac{x_n}{999}$, so daß $\frac{x_1}{x_1 + 1} \leq \frac{998 \cdot 001}{998 \cdot 000}$, so gilt das insbesondere für $\frac{x_n}{999}$, es wird also $x_n \leq 999,001 \cdot 001 \cdot 002 \cdot 004$ etc. Da die Differenz der Glieder $x_n - 999 \leq 0,001 \cdot 001$ etc. und diese Zahl $> \frac{1}{1000}$ ist, da ferner $x_n - 999$ das Maß des Verhältnisses $\frac{x_n}{999}$ sein soll, so läßt sich das Verhältnis $v_1 = \frac{1000}{999}$ mit dem Überschuß α_1 nur in weniger als 1000 gleiche Teilverhältnisse teilen.

293. 22. Zu der Berechnung des Elementes von 1000:998 aus dem von 1000:999 und insbesondere zu der Fehlerschätzung ist zu bemerken: Kepler geht aus von der Ungleichung $\frac{1000}{998} > \left(\frac{1000}{999}\right)^2$, aus der eine entsprechende Ungleichung für die beiden Elemente folgt. Zur Beurteilung seines Ergebnisses bilden wir die Reihe der mittleren Proportionalen

$$x_1 = \sqrt{999 \cdot 1000}, \quad x_2 = \sqrt{x_1 \cdot 1000} \dots x_{10} = \sqrt{x_9 \cdot 1000} \\ y_1 = \sqrt{998 \cdot 1000}, \quad y_2 = \sqrt{y_1 \cdot 1000} \dots y_{10} = \sqrt{y_9 \cdot 1000}.$$

$$\text{Es ist dann } \frac{x_{10}}{1000} = x'_{10} = (0,999)^{\frac{1}{1024}} \\ \frac{y_{10}}{1000} = y'_{10} = (0,998)^{\frac{1}{1024}} \quad \text{oder}$$

$$x'_{10} = (1 - 0,001)^{\frac{1}{1024}} = 1 - \frac{0,001}{1024} - \frac{1023}{2(1024)^2} \cdot 0,001^2 \dots \\ 1 - x'_{10} = \frac{0,001}{1024} + \frac{0,001^2}{2 \cdot 1024}.$$

Entsprechend wird

$$1 - y'_{10} = \frac{0,002}{1024} + \frac{0,002^2}{2 \cdot 1024}.$$

In erster Näherung erhält man daher

$$1000 - x_{10} = \frac{1}{1024} \quad 1000 - y_{10} = \frac{2}{1024} = 2(1000 - x_{10}).$$

Genauer wird

$$1000 - y_{10} - 2(1000 - x_{10}) = 1000 \left[\frac{1}{2} \frac{0,002^2}{1024} - \frac{0,001^2}{1024} \right] = \frac{1}{1000 \cdot 1024} \approx \frac{1}{10^6}$$

in Übereinstimmung mit der Angabe Keplers. – Das Wort „nequaquam“ (S. 294, Z. 4/5) wäre demnach entweder zu streichen oder durch „certe“ zu ersetzen.

295. 11. In Prop. XVIII ist zwar nur die Rede von Proportionen, für die der Satz unmittelbar klar ist, der eigentliche Sinn ist jedoch die Anwendung auf die Maßzahlen, mit denen im Beweis tatsächlich operiert wird. Aus $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \dots$ folgt $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{b}{c} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{c}{d} \right\rfloor \dots$ und $\left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \right\rfloor = 2 \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$, $\left\lfloor \frac{a}{d} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \right\rfloor = 3 \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ u. s. w.

Der Satz läuft auf die seit Archimedes bekannte Zuordnung einer geometrischen Reihe zu einer arithmetischen hinaus.

296. 12. Ist $\frac{1000}{b} = \frac{c}{d}$ und kennt man die Maßzahlen $\left\lfloor \frac{1000}{c} \right\rfloor$ und $\left\lfloor \frac{1000}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{c}{d} \right\rfloor$, so ist auch $\left\lfloor \frac{1000}{d} \right\rfloor$ bekannt wegen $\left\lfloor \frac{1000}{d} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{c} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{d} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{c} \right\rfloor$. Zu je zwei Maßzahlen $\left\lfloor \frac{1000}{b} \right\rfloor$ und $\left\lfloor \frac{1000}{c} \right\rfloor$ findet man also durch Addition eine dritte $\left\lfloor \frac{1000}{x} \right\rfloor$, und es ist $\frac{1000}{b} = \frac{c}{x}$. Das ist der Inhalt von Prop. XIX, die zwar wieder nur von den Verhältnissen redet, während in Wirklichkeit die „mensurae“ gemeint sind. Aus den 15 Proportionen S. 295, Z. 22–27 gewinnt man daher durch Addition von je zweien $\binom{15}{2} = 105$ neue, hat dann also insgesamt 120, nicht 120 neue, wie Kepler sagt. Dabei fallen sogar noch 5 von den 105 weg, weil sich in jeder Zeile durch Addition der ersten beiden Maßzahlen die schon bekannte dritte ergibt.

300. 10. Die beiden Praecepta dienen der angenäherten Berechnung von Logarithmen großer Zahlen nahe an 100 000.00. Während die erste Vorschrift, die in moderner Formelsprache

$$1 - \sin \alpha < \text{Log} \sin \alpha < \frac{\text{cosec } \alpha - \sin \alpha}{2}$$

lauten würde, aus der vorausgehenden Proposition folgt, wird die zweite, welche aus einem gegebenen Logarithmus den der nächst kleineren runden Zahl zu finden lehrt, ohne Beweis so gegeben:

Bekannt ist Log 99 970,149, gesucht wird Log 99 970; als Lösung wird angegeben:

$$\begin{aligned} \text{Log } 99\,970.000 - \text{Log } 99\,970.149 &= 99\,970.149 - 99\,970.000 \\ &= 0.149, \text{ also} \end{aligned}$$

$$\text{Log } 99\,970.00 \approx 29.854 + 0.149 = 30.003.$$

Die Begründung kann kurz so gegeben werden:

Sind a und $\log a$ gegeben, $\log(a - \Delta a)$ gesucht, Δa klein gegenüber a , so wird $\frac{1000}{a - \Delta a} = \frac{1000}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Delta a}{a}} \approx \frac{1000}{a} \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right)$, daher $\left\lfloor \frac{1000}{a - \Delta a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a + \Delta a}{a} \right\rfloor$, oder, da $\left\lfloor \frac{a + \Delta a}{a} \right\rfloor = a + \Delta a - a = \Delta a$ gesetzt werden kann, $\log(a - \Delta a) - \log a = \Delta a$.

301. 37. Werden $\gamma\eta = \left\lfloor \frac{AC}{AH} \right\rfloor$, $\delta\gamma = \left\lfloor \frac{AD}{AC} \right\rfloor$ gesetzt, dann besagt Prop. XXIV:

$$\frac{\gamma\eta}{\delta\gamma} < \sqrt{\frac{AD}{AH}}.$$

Zu Keplers Beweis ist zu bemerken: Aus $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ folgt allgemein

$$ad + cd \leq bc + cd \text{ oder } \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}, \text{ aus } \frac{v\eta}{v\eta} > \frac{\gamma v}{CV} > \frac{\delta\gamma}{DC} \text{ also}$$

$$\frac{v\eta + v\gamma}{v\eta + v\gamma} = \frac{\eta\gamma}{HC} > \frac{\gamma v}{CV} > \frac{\delta\gamma}{DC} \text{ und } \frac{\eta\gamma + \gamma\delta}{HC + CD} = \frac{\eta\delta}{HD} > \frac{\delta\gamma}{DC},$$

während Kepler $\frac{\eta\delta}{HD} > \frac{v\gamma}{VC}$ behauptet, was nicht in allen Fällen zutrifft. (Aus $\frac{9}{8} > \frac{10}{9} > \frac{11}{10}$ folgt beispielsweise $\frac{19}{17} > \frac{10}{9}$ und $\frac{30}{27} > \frac{11}{10}$, aber nicht $\frac{30}{27} > \frac{10}{9}$.)

Falsch ist auch die Aussage $\eta\gamma - \gamma\delta = \gamma v$. Es ist vielmehr

$$\eta\gamma = \left\lfloor \frac{AC}{AH} \right\rfloor, \gamma\delta = \left\lfloor \frac{AD}{AC} \right\rfloor,$$

also

$$\eta\gamma - \gamma\delta = \left\lfloor \frac{AC}{AH} : \frac{AD}{AC} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(AC)^2}{AH \cdot AD} \right\rfloor = \left\lfloor \left(\frac{AC}{AV} \right)^2 \right\rfloor = 2 \cdot \gamma v.$$

302. 25. Das Zahlenbeispiel soll $\frac{\gamma\eta}{\delta\gamma} < \sqrt{\frac{AD}{AH}}$ als richtig erweisen. Wegen $\frac{DA}{AV} = \frac{AV}{AH}$ wird $\frac{DA}{AH} = \left(\frac{AV}{AH} \right)^2$, also $\frac{\gamma\eta}{\delta\gamma} < \frac{DA}{AV}$.

Nun ist $\delta = 0.00$

$$\gamma = 28\,768.21 \quad \delta\gamma = 28\,768.21 \quad DA = 1000$$

$$\eta = 69\,314.72 \quad \eta\gamma = 40\,546.51 \quad VA = 707.1068$$

Aus der Proportion $\frac{1000}{707.1068} = \frac{x}{\delta\gamma}$ ergibt sich $x = 40\,684.39$. Da also $\frac{x}{\delta\gamma} = \frac{AD}{AV} = \sqrt{\frac{AD}{AH}}$ ist und $x > \eta\gamma$, so wird tatsächlich $\frac{\eta\gamma}{\delta\gamma} < \sqrt{\frac{AD}{AH}}$. Das zweite Beispiel geht ähnlich, nur wird mit der Gleichung $\frac{AD}{AV} = \frac{\eta\gamma}{x}$ gearbeitet.

304. 4. Kepler beweist die Prop. XXV für den Einzelfall $a + 1 = 501$, $a = 500$, d. h. für die Ungleichungen $\frac{1000}{501} < \left\lfloor \frac{501}{500} \right\rfloor : \left\lfloor \frac{1000}{999} \right\rfloor < \frac{1000}{500}$ und $\left\lfloor \frac{501}{500} \right\rfloor : \left\lfloor \frac{1000}{999} \right\rfloor < \frac{1000}{\sqrt{500 \cdot 501}}$.

Man erhält jedoch den Satz in der allgemeinen Form leicht, indem man in die Ungleichung $\frac{a+1}{a} < \left\lfloor \frac{a}{a-1} \right\rfloor : \left\lfloor \frac{a+1}{a} \right\rfloor < \frac{a}{a-1}$ von Prop. XXIII der Reihe nach die Werte $a = 999, 998$ u. s. w. bis $a-1 = S$ einsetzt und die Zeilen gliedweise miteinander multipliziert. So wird

$$\frac{1000}{999} \cdot \frac{999}{998} \cdots \frac{S+2}{S+1} < \frac{\left\lfloor \frac{999}{998} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{1000}{999} \right\rfloor} \cdot \frac{\left\lfloor \frac{998}{997} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{999}{998} \right\rfloor} \cdots \frac{\left\lfloor \frac{S+1}{S} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{S+2}{S+1} \right\rfloor} < \frac{999}{998} \cdot \frac{998}{997} \cdots \frac{S+1}{S}$$

oder

$$\frac{1000}{S+1} < \left\lfloor \frac{S+1}{S} \right\rfloor : \left\lfloor \frac{1000}{999} \right\rfloor < \frac{999}{S} < \frac{1000}{S}.$$

In gleicher Weise führt die Ungleichung

$$\left\lfloor \frac{a}{a-1} \right\rfloor : \left\lfloor \frac{a+1}{a} \right\rfloor < \frac{a+1}{\sqrt{(a+1)(a-1)}} = \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$$

auf die Beziehung

$$\left\lfloor \frac{S+1}{S} \right\rfloor : \left\lfloor \frac{1000}{999} \right\rfloor < \sqrt{\frac{1000 \cdot 999}{(S+1)S}} < \frac{1000}{\sqrt{(S+1)S}}.$$

Wegen $\sqrt{\frac{1000 \cdot 999}{S(S+1)}} < \frac{999}{S} < \frac{1000}{\sqrt{S(S+1)}}$ liefert der Wurzelausdruck die beste obere Grenze, für die praktische Rechnung ist jedoch die Größe $\frac{999}{S}$ vorzuziehen.

304. 24. In einem Verzeichnis der Corrigenda zu Beginn des „Supplementums“ notiert Kepler, daß die letzte Zahl 999 der Zeile in 501 zu ändern sei. Aus sachlichen Gründen muß jedoch 999 stehen bleiben.

306. 2. In unserer Formelsprache lautet der Satz XXVI: Sind a und b successive Tafelargumente, dann ist

$$\frac{1000}{b} < \frac{\log a - \log b}{b-a} < \frac{1000}{a}.$$

Der allgemeine Beweis, den Kepler wieder durch das Zahlenbeispiel $\log 500 - \log 501$ ersetzt, kann so geführt werden: Definitionsgemäß ist $\frac{b}{a} = \log a - \log b$, und der Keplerschen Tafel entnimmt man $b-a = 100 < \log 99\,900 = 100.05$. Da nach Satz XXV

$$\frac{\log a - \log b}{\log 999} > \frac{1000}{b}, \text{ so wird also } \frac{\log a - \log b}{b-a} > \frac{\log a - \log b}{\log 999} > \frac{1000}{b}.$$

Auf der andern Seite ist nach Satz XXV

$$\frac{\log a - \log b}{\log 999} < \frac{999}{a} \text{ und } \frac{100.05}{100} < \frac{1000}{999},$$

also

$$\frac{\log a - \log b}{b-a} = \frac{\log a - \log b}{\log 999} \cdot \frac{\log 999}{b-a} < \frac{999}{a} \cdot \frac{1000}{999} = \frac{1000}{a}.$$

307. 25. Der nicht ganz glücklich formulierte und deshalb schwer verständliche Satz XXVII ist einfach die Übersetzung von Satz XXV in trigonometrische Form. Setzt man in der Fig. (S. 307) den Halbmesser des Kreises $AD = 1000$, dann wird bei beliebigem $b = AB$, $c = AC$, also auch, wenn b und c sukzessive Tabellenargumente sind ($b < c$),

$$AB : AD = AD : AF \text{ und } AC : AD = AD : AG.$$

Die Ungleichung von Satz XXV läßt sich daher so schreiben:

$$\frac{1000}{c} = \frac{AD}{AC} = \frac{AG}{AD} < \frac{\log b - \log c}{\log 999} < \frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AB} = \frac{1000}{b}.$$

Mit $b = \sin(90^\circ - \beta)$, $c = \sin(90^\circ - \gamma)$ wird daher $AF = \sec \beta$, $AG = \sec \gamma$ und

$$\frac{\sec \gamma}{AD} < \frac{\log b - \log c}{\log 999} < \frac{\sec \beta}{AD}, \quad \frac{\log b - \log c}{\log 999} < \frac{\sqrt{\sec \beta \cdot \sec \gamma}}{AD}.$$

Diese beiden Ungleichungen sind die Aussage von Satz XXVII. Der Beweis begründet zugleich die Korrekturen.

308. 14. Die Rechenregel ergibt sich unmittelbar aus der Proposition; es wird nämlich $\log b - \log c \approx 100.05 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{AD}{AB} + \frac{AD}{AC} \right) = 100.05 \cdot \frac{\frac{1000}{b} + \frac{1000}{c}}{2}$ (während Kepler nicht ganz korrekt sagt, daß das arithmetische Mittel bereits die Differenz der Logarithmen ergebe) oder („si placet labor“)

$$\log b - \log c \approx 100.05 \frac{1000}{\sqrt{b \cdot c}}.$$

308. 24. Der Wortlaut von Coroll. IV ist zu korrigieren. Es ist nämlich $\log \sin \beta - \log \sin \varphi < (\sin \varphi - \sin \beta) \sqrt{\sec(90^\circ - \beta) \cdot \sec(90^\circ - \varphi)}$. In Keplers Beispiel $\varphi = 0^\circ 2'$, $\beta = 0^\circ 1'$ steckt ein Rechenfehler. Mit $\sin \text{tot} = 100000$ wird nämlich $\sin \gamma = 38.18$, $\sin \beta = 29.09$, $\sec(90^\circ - \varphi) = 1718.873$, $\sec(90^\circ - \beta) = 3437.746$, $\log \sin \beta - \log \sin \gamma < 2430.87 \cdot 29.09 \approx 70714$, während er 80000 errechnet. Tatsächlich ist nach der Tabelle

$$\log 29.09 - \log 38.18 \approx 69000 < 70714.$$

309. 13. Der Appendix zeigt, daß Kepler sein Augenmerk auch auf die Differenzenreihen der Chilias gerichtet hat. Experimentell stellt er fest, daß bei wachsendem Numerus die Reihe der ersten Differenzen linear, die der zweiten quadratisch, die der dritten biquadratisch abnimmt. Den Beweis dafür versucht er nicht, „um nicht allzu dunkle Dinge vorzusetzen, da in einer so ungewöhnlichen Sache das Fehlen der Vokabeln zu schaffen macht.“ Mit Hilfe der Beziehung $\log x = z \cdot \ln \frac{z}{x}$ läßt sich Keplers Beobachtung verifizie-

ren bzw. korrigieren. x, x_1, x_2, x_3 seien sukzessive Numeri. Das Bild der Tabelle mit den Differenzen sieht dann so aus:

Num.	Log.	Erste Diff.	Zweite Diff.	Dritte Diff.
x	$z \cdot \ln \frac{z}{x}$	$z \cdot \ln \frac{x_1}{x}$		
x_1	$z \cdot \ln \frac{z}{x_1}$	$z \cdot \ln \frac{x_2}{x_1}$	$z \cdot \ln \frac{x_1^2}{x x_2}$	
x_2	$z \cdot \ln \frac{z}{x_2}$	$z \cdot \ln \frac{x_3}{x_2}$	$z \cdot \ln \frac{x_2^2}{x_1 x_3}$	$z \cdot \ln \frac{x_1^3 x_3}{x_1 x_2^2}$
x_3	$z \cdot \ln \frac{z}{x_3}$			

Setzt man nun

$$y = \frac{x_1 - x}{x_1 + x}, \quad u = \frac{x_1^2 - x x_2}{x_1^2 + x x_2}, \quad v = \frac{x_1^3 x_3 - x x_2^2}{x_1^3 x_3 + x x_2^2},$$

so wird

$$\begin{aligned} d' &= z \cdot \ln \frac{x_1}{x} = z \cdot \ln \frac{1+y}{1-y} = 2z \cdot \left(y + \frac{y^3}{3} + \dots \right) \\ d'' &= z \cdot \ln \frac{x_1^2}{x x_2} = z \cdot \ln \frac{1+u}{1-u} = 2z \cdot \left(u + \frac{u^3}{3} + \dots \right) \\ d''' &= z \cdot \ln \frac{x_1^3 x_3}{x x_2^2} = z \cdot \ln \frac{1+v}{1-v} = 2z \cdot \left(v + \frac{v^3}{3} + \dots \right). \end{aligned}$$

Wegen der konstanten Tabellendifferenz $x_1 - x = x_2 - x_1 = \dots = 100$ wird $y < \frac{100}{2x}$, $u < \frac{100^2}{2x^2}$, $v < \frac{100^3}{x^3} \left(1 + \frac{150}{x} \right)$. Je größer x , desto genauer gelten daher die Beziehungen

$$\begin{aligned} d' &\approx 2zy \approx \frac{100 \cdot z}{x} = \frac{10^7}{x} \\ d'' &\approx 2zu \approx \frac{100^2 \cdot z}{x^2} = \frac{10^9}{x^2} \\ d''' &\approx 2zv \approx \frac{2 \cdot 100^3 \cdot z}{x^3} = \frac{2 \cdot 10^{11}}{x^3}. \end{aligned}$$

Das ergibt für $x = 50000$ beispielsweise $d' = 200$ (199.80), $d'' = 0.4$ (0.409), $d''' = 0.0016$ (0.0017). In Klammern sind die genauen Werte beigegefügt.

Es bestätigt sich also, daß die ersten und zweiten Differenzen mit der 1. und 2. Potenz des Numerus abnehmen, bei der 3. Differenzenreihe ist dagegen an die Stelle des Biquadrats die 3. Potenz zu setzen. Nimmt man die Differenzen als Maßstab, so muß man Keplers Chilias geradezu als ein Muster für Genauigkeit erklären.

311. 21. In der Zahl $\text{Log } 100 = 690\,775.5422$ sind die drei letzten Dezimalen fehlerhaft. Die richtige Zahl wäre $\text{Log } 100 = 690\,775.5279$, oder, auf zwei Dezimalen gekürzt wie in der Chilias, $\text{Log } 100 = 690\,775.53$. Der Fehler

rührt von der Ungenauigkeit des Verdopplungslogarithmus her, der statt 69 314.7198 lauten müßte 69 314.7179. Für die Tafel ist er bedeutungslos, dagegen führt die aus Log 100 abgeleitete und deshalb ebenfalls fehlerhafte Zahl Log 10000 = 230 258.5141 statt 230 258.5093 Kepler auf den Verdacht, daß in der Logarithmentafel von Briggs etwas nicht in Ordnung sei. Vgl. dazu den Brief an E. Gunter vom 4. Dez. 1623 (Bd. XVIII, S. 144).

312. 21. Wird $a = \sin(90^\circ - \alpha)$, $(a + 1) = \sin(90^\circ - \beta)$ gesetzt und daher, mit $\sin \text{tot} = 1000$, $\frac{1000}{a} = \sec \alpha$, $\frac{1000}{a+1} = \sec \beta$, dann gilt nach Satz XXVII

$$\text{Log } a - \text{Log } (a + 1) \approx 100 \cdot \sqrt{\sec \alpha \cdot \sec \beta}$$

und

$$\text{Log } a - \text{Log } (a + 1) \approx \frac{\sec \alpha + \sec \beta}{2}$$

oder

$$2 \text{ Log } a \approx 2 \text{ Log } (a + 1) + \sec \alpha + \sec \beta.$$

Im Text müßte es Z. 19/20 statt „mediarum porportionalium“ wohl heißen „mediorum arithmeticozum“.

314. 7. Der Rechenfehler läßt sich nicht korrigieren, da er sich in der weiteren Rechnung fortsetzt.

361. 13. Zwischen „Praefatio“ und „Primum Caput“ ist im Original ein Blatt „Corrigenda“ eingefügt, das in dieser Ausgabe wegfällt, da die Korrekturen alle im Text berücksichtigt sind.

361. 37. Die Logarithmentafel der Rudolphinischen Tafeln ist als „Heptacosias“ mit 720 Zeilen angelegt. Es fehlt in ihr die Spalte der Sinus bzw. Absolutzahlen; an ihre Stelle treten die Partes vicesimae quartae und die Partes sexagenariae mit dem $\sin \text{tot}$ 24.0 bzw. 60.0 und der konstanten Argumentdifferenz 0.5 bzw. 0.2. Über die Konstruktion der „Heptacosias“ vgl. S. 400 f. (Praec. V).

363. 18. „Numeri figurati seu logistici“ nennt Kepler benannte Zahlen. Arithmetica logistica ist also das Rechnen mit benannten Zahlen. Viète nennt dieses Rechnen Logistica speciosa (im Gegensatz zu Logistica numerosa). Vgl. dazu Tropfke II², 48 und IV², 32. Der immer wieder begegnende Ausdruck „apices“ und „numeri apicati“ bedeutet die Winkelzeichen bzw. die Winkelzahlen.

365. 36. Werden die Zahlen der zweiten Spalte mit a_n bezeichnet, so sind die der dritten Spalte $a'_n = \frac{a_n}{z} \cdot 24.0$, die der fünften Spalte $a''_n = \frac{a_n}{z} \cdot 60.0$. Da also in allen 3 Spalten Verhältnisgleichheit herrscht, so ist

$$\text{Log } a_n = \text{Log } a'_n = \text{Log } a''_n,$$

also auch, wenn

$$x = \frac{a_1 a_2}{10^5}, \quad x' = \frac{a'_1 a'_2}{24.0}, \quad x'' = \frac{a''_1 a''_2}{60.0}$$

gesetzt wird, wegen $\text{Log } 10^5 = \text{Log } 24.0 = \text{Log } 60.0 = 0$

$$\text{Log } x = \text{Log } a_1 + \text{Log } a_2 = \text{Log } a'_1 + \text{Log } a'_2 = \text{Log } a''_1 + \text{Log } a''_2.$$

Ist also d die tägliche Bewegung eines Gestirns, dann berechnet sich der Bogen b , den es in h Stunden zurücklegt, als $b = \frac{d \cdot h}{24.0}$ und

$$\text{Log } b = \text{Log } d + \text{Log } h.$$

Die Einfachheit dieser und entsprechender Rechnungen mit den Zahlen der Spalte 5 ist es, die Kepler letzten Endes dazu bewegt, von den Briggs'schen Logarithmen Abstand zu nehmen und seine eigenen bzw. die Neperschen beizubehalten.

366.18. Ist die „separatio diurna“ (tägliche Annäherung bzw. Entfernung) s , die Distanz d , die Zeit x (in Stunden), dann wird $d = \frac{s \cdot x}{24}$, also

$$\text{Log } x = \text{Log } d - \text{Log } s.$$

376.15. Ist c die Hypotenuse des rechtwinklig sphärischen Dreiecks mit den Katheten a und b , so ordnen sich die 16 Aufgaben Keplers nach dem folgenden Schema zu den bekannten 6 Grundaufgaben zusammen:

Nr. der Aufgabe bei Kepler	Gegeben	Gesucht
4	c, a	α
13		β
7		b
2	a, b	c
9		α/β
1	c, α	a
12		b
10		β
3	b, α	β
15		c
11		a
14	a, α	b
5		c
6		β
8	α, β	a
16		c

Wie schon früher (S. 473) erwähnt wurde, muß Kepler auf die Funktion tg verzichten, weil der Mesologarithmus in seiner Chilias keinen Platz hat. In der Randnote sagte er ausdrücklich, daß Nepers Canon geeigneter wäre für die Lösung seiner Aufgaben 9–16, die bei ihm zwei Gänge erfordert, während sich die Fälle 1–8 in einem einzigen erledigen lassen. So braucht er für die Auflösung der Aufgabe 9 die zwei Gleichungen $\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$, $\cos c = \cos a \cdot \cos b$, während Neper direkt $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$ berechnen kann. Zu einem solchen Opfer muß sich Kepler also entschließen, weil er seine Chilias den Bedürfnissen des numerischen Rechnens anpassen will.

378. 25. Die Unstimmigkeiten in dem Beispiel gehen auf die ungenaue Zahl a zurück, die 5020 statt 5030 lauten müßte.

381. 5. Keplers 12 Fälle lassen sich wieder zu 6 Grundaufgaben zusammenordnen.

- 1.–3. Gegeben a, b, α Gesucht β, c, γ
4. 5. Gegeben b, c, α Gesucht a, β (bzw. γ)
6. Gegeben a, b, c Gesucht α , bzw. β , bzw. γ

Die dazu polaren Aufgaben

- 7.–9. Gegeben α, β, a Gesucht b, γ, c
10. 11. Gegeben β, γ, a Gesucht α, b (bzw. c)
12. Gegeben α, β, γ Gesucht a , bzw. b , bzw. c .

383. 14. Die Lösung der Aufgabe, bei gegebenen a, b, c den Winkel α zu finden durch

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s_b \cdot \sin s_c}{\sin b \cdot \sin c}},$$

gibt Neper in der „Descriptio“ lib. II, cap. VI (vgl. Tropfke V², 152). Es muß auffallen, daß Kepler, der gewissenhaft die Autoren nennt, wenn er sie kennt, und Neper zumal rühmt, wo er kann, hier keinerlei Andeutung über seine Quelle macht. Man müßte daraus schließen, daß er die Lösung nicht von Neper hat.

389. 14. Nach Prop. XXVII, Coroll. III ist, wenn a die gegebene Zahl, c die nächst niedere runde Zahl bedeutet,

$$\operatorname{Log} c - \operatorname{Log} a = (a - c) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{z}{c} + \frac{z}{a} \right) = \frac{(a - c) \cdot z}{c + \varepsilon}, \quad \text{wobei} \quad \varepsilon \approx \frac{a - c}{2}.$$

Setzt man nämlich

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{2c} \left(1 + \frac{c}{a} \right) = \frac{1}{c + \varepsilon},$$

dann ist

$$2c = c \left(1 + \frac{c}{a} \right) + \varepsilon \left(1 + \frac{c}{a} \right), \quad \varepsilon = c \frac{a-c}{a+c} \approx \frac{a-c}{2}.$$

392. 27. Nach Satz XXII ist $\text{Log } c = \text{Log } \cos \alpha < \frac{1}{2}$ (Sagitta + Secans).

394. 8. Die Division ist fehlerhaft. Der Quotient ist nicht 28.82, sondern 28.91.

397. 29. $a > z$ sei die Zahl, zu der der Logarithmus gesucht wird. Bestimmt man c so, daß $c : z = z : a$, so wird $\text{Log } a = -\text{Log } c$. Mit $z = 10^5$ wird $\frac{a}{10^5} = 100 \cdot \frac{z}{c}$. Sind nun $c_1 < c < c_2$ die zu c benachbarten Tafelargumente, also $c_2 - c_1 = 100$, so ist nach Prop. XXVII

$$\text{Log } c_1 - \text{Log } c_2 \approx 100 \sqrt{\frac{z}{c_1} \cdot \frac{z}{c_2}} \approx \frac{100 \cdot z}{c} = \frac{a}{10^5}.$$

Zu genauer Rechnung ist diese Regel natürlich nicht geeignet; in dem Beispiel wäre denn auch richtiger $\text{Log } 152500 = -42199.44$. Viel bessere Resultate liefert die in der „Admonitio alia“ gegebene Vorschrift zur Benützung der Neperschen Spalte der „Differentiae“. Man findet so etwa zu $\text{tg } 60^\circ = 173205$ direkt den $\text{Log. } 173205 = -54930.59$ (durch wirkliche Ausrechnung -54930.57).

398. 10. Vgl. die vorhergehende Anmerkung. Neper selbst hat diese Anwendung seiner Tafel nicht.

398. 18. Es sei gegeben $\text{Log } c$, gesucht c . Nach Satz XXVII ist

$$\frac{z}{c} < \frac{\text{Log } c_1 - \text{Log } c}{c - c_1} < \frac{z}{c_1},$$

wenn $\text{Log } c_1$ den nächst größeren Tabellenlogarithmus und c_1 die zugehörige Winkelzahl bedeutet. Es ist also

$$(\text{Log } c_1 - \text{Log } c) \cdot \frac{c_1}{z} < (c - c_1).$$

Wird $z = 10^7$ angenommen, dann ist $c - c_1$ die Zahl, die entsteht, wenn die vier Nullen der runden Zahl c_1 durch die entsprechenden zählenden Ziffern von c ersetzt werden. So ergibt sich also die erste Näherung. Die zweite Stufe der Annäherung erreicht man, wenn aus der Ungleichung

$$(\text{Log } c_1 - \text{Log } c) \cdot \frac{c_1}{z} < c - c_1 < (\text{Log } c_1 - \text{Log } c) \cdot \frac{c}{z}$$

als Folge

$$\frac{\text{Log } c_1 - \text{Log } c}{z} \cdot \frac{c_1 + c}{2} \approx c - c_1$$

hergeleitet und auf der linken Seite der vorläufige Wert c eingesetzt wird.

Es sei beispielsweise gegeben $\text{Log } c = 48\,357.02$. Es wird dann $\text{Log } c_1 = 48\,450.83$, $c_1 = 61\,600$, $\text{Log } c_1 - \text{Log } c = 93.81$, daher $(\text{Log } c_1 - \text{Log } c) \cdot \frac{c_1}{z} = 57.787$, also $c \approx 61\,657.787$. Mit diesem Wert c_1 erhält man sodann

$$\frac{\text{Log } c_1 - \text{Log } c}{z} \cdot \frac{c + c_1}{2} = 57.81,$$

also genauer $c = 61\,657.81$.

In dem Beispiel Keplers ist gegeben $\text{Log } c = 145\,001.10$. Es wird dann $\text{Log } c_1 = 145\,243.42$, $c_1 = 23\,400.00$, $\text{Log } c_1 - \text{Log } c = 242.32$, daher $(\text{Log } c_1 - \text{Log } c) \cdot \frac{c_1}{z} = 56.70$, also $c \approx 23\,456.70$. Mit diesem Wert c_1 erhält man sodann $\frac{c + c_1}{2} = 23\,428.35$, schließlich $c = 23\,456.77$.

400. 17. Vgl. hierzu die Anm. 397.29.

404. 11. Das Ergebnis 0.31 ist offenkundig unrichtig. Der Fehler liegt daran, daß Kepler $\text{Log } 0.01$ statt $\text{Log } 1$ nimmt. Es muß also heißen

$\text{Log } x = \text{Log } 1 - \text{Log } 3\,200 + \text{Log } 99\,200 = 1\,151\,292.57 - 344\,201.94 + 803.22 = 807893.85$, also $x = 31$.

405. 28. Die zwei Formen des logarithmischen Radizierens kommen so zustande:

$$1. \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{1}, \quad \text{Log } x = \frac{1}{2} (\text{Log } a + \text{Log } 1).$$

$$2. \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{z}, \quad \text{Log } x = \frac{1}{2} \text{Log } (a \cdot z).$$

Wird $z = 10^7$ genommen, so ist also im zweiten Fall a durch Wegnahme einer ungeraden Zahl k von Stellen kleiner als z zu machen. Das Ergebnis ist sodann nochmals um $(7 - k) : 2$ Stellen zu kürzen.

408. 6. Die Bemerkung, daß dem Ergebnis zwei Stellen hinzuzufügen, zwei wegzunehmen seien, ist zu korrigieren: Es ist nur je eine Stelle wegzunehmen und zuzugeben. Im Endeffekt ändert sich dadurch nichts.

411. 34. Das „Exemplum nobile“, die Zerlegung eines gegebenen Verhältnisses in das Produkt zweier Teilverhältnisse, die selbst wieder in einem vorgegebenen Verhältnis zueinander stehen, läuft auf das 3. Keplersche Gesetz am Beispiel von Mars hinaus.

Ist nämlich $u_1 = 687$ die Umlaufzeit des Mars in Tagen, $u_2 = 365.25$ die der Erde, dann verlangt Kepler, $\frac{u_1}{u_2}$ so als Produkt der Teilverhältnisse $\frac{u_1}{u}$ und

$\frac{u}{u_2}$ darzustellen, daß $\frac{u}{u_2} > \frac{u_1}{u}$ und $\frac{u_1}{u} : \frac{u}{u_2} = \lambda : \lambda^3$ sei. Wird also $\frac{u_1}{u} = v$ gesetzt, so wird $\frac{u}{u_2} = v^3$ und $\frac{u_1}{u_2} = v^3$. Nun ist

$$\text{Log } u_1 = 37542, \text{ Log } u_2 = 100740$$

$$\text{Log } v = \frac{1}{3} (\text{Log } u_2 - \text{Log } u_1) = 21066$$

$$\text{Log } \frac{u}{u_2} = 2 \cdot \text{Log } v = 42132$$

$$\text{Log } u = \text{Log } u_2 - 2 \cdot \text{Log } v = 58608$$

$$u = 556,50.$$

Bestimmt man jetzt die Zahl a so, daß $\frac{u}{u_2} = \frac{a}{10^5}$, so ergibt sich $a = 152400$. Das ist die mittlere Entfernung des Mars von der Sonne, bezogen auf den Erdbahnhalmmesser $e = 10^5$. Da nun aber $\frac{a}{e} = v^3$, so hat man $\frac{u_1}{u_2} = v^3 = \left(\frac{a}{e}\right)^{3/2}$ oder $\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^2 = \left(\frac{a}{e}\right)^3$, das dritte Gesetz der Planetenbewegung, das Kepler am 15. Mai 1618 gefunden und erstmals im 3. Kap. des 5. Buches der „Weltharmonik“ ausgesprochen hat.

413. 30. Vgl. Anm. 365.36. Die Bemerkung, daß Dividend und Quotient auch aus der Spalte der „Partes vicesimae quartae“ entnommen werden können, ist richtig. Ist a der Dividend, b der Divisor, c der Quotient, dann folgt aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{60}$ oder $\frac{c}{a} = \frac{60}{b}$, daß $\text{Log } a - \text{Log } c = \text{Log } b$. Dabei kann a in der einen oder andern Spalte der Partes abgelesen werden, entscheidend ist nur, daß c derselben Spalte wie a entnommen wird. Umgekehrt kann man (Praec. III) die Aufgabe $x = \frac{d \cdot h}{24}$ lösen, indem man d und x in der Spalte der „Sexagenariae“ aufsucht.

416. 32. Sind α_1 und α_2 die zu dem gegebenen α benachbarten Arcusargumente, so ist anzusetzen

$$\frac{\sin \alpha - \sin \alpha_1}{\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1} = \frac{\sin \alpha - \sin \alpha_1}{100.00} = \frac{k}{z},$$

oder $k = 1000 \cdot (\sin \alpha - \sin \alpha_1)$. Nun ist aber $\text{Log } k = \frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$, also $\text{Log } (\alpha - \alpha_1) = \text{Log } k + \text{Log } (\alpha_2 - \alpha_1)$.

420. 7. In der Rechnung sind die Winkel 60° und 70° verwechselt. Das richtige Ergebnis wäre 528 statt 622.

425. 26. Die Rechnung wird durch die nebenstehende Figur erläutert. Es sei $a > b > c$ gewählt, $CD = b - c$, $CF = b + c$, $EC = x$, dann wird

$$(b - c)(b + c) = a \cdot x$$

$$x = \frac{(b - c)(b + c)}{a}$$

$$a - x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a}$$

$$a + x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a}$$

$$\cos \beta = \sin \alpha_1 = \frac{a - x}{2c}$$

$$\cos \gamma = \sin \alpha_2 = \frac{a + x}{2b}$$

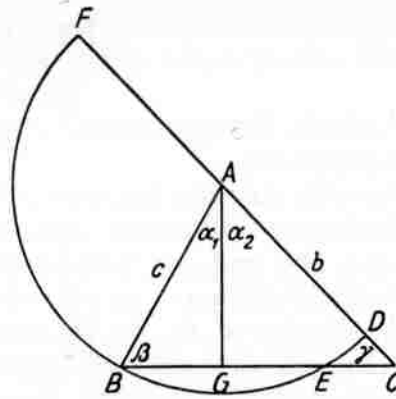


Fig. 31

Die Lösung in dieser Form wird wieder notwendig wegen des fehlenden Mesologarithmus.

PERSONENREGISTER

- Agricola, Georg 255, 540
 Agrippa 487
 Agustín, Antonio 249, 540
 Anderson, Alexander 430, 431, 435, 485, 492, 493, 518, 520, 521
 Apian, Peter 432
 Apollonius 30, 64, 67, 69, 70, 79, 167, 451, 500, 501, 506, 529
 Archimedes 13-15, 17, 20, 21, 26-31, 36, 37, 40, 41, 43, 47, 49, 72, 79, 127, 167, 188, 267, 268, 430, 431, 436-442, 484-486, 489, 493, 497, 506, 520, 529, 546
 Bartsch, Jakob 467
 Becker, Friedrich 506
 Beer, Ferd. Wilhelm 538
 Beyer, Joh. Hartmann 120, 222, 525, 528, 536
 Blanck, Hans 433, 434
 Bodin, Jean 247, 249, 250, 255, 259, 264, 268, 541, 542
 Brechtel, Franz Joachim 254, 258, 259, 264, 267, 540
 Briggs, Henry 435, 449, 457, 465, 466, 483, 503, 504, 507, 551
 Budäus, Wilhelm 252, 254
 Bürgi, Jost 113, 147, 194, 429, 460, 462, 463, 474, 523, 526, 531
 Cabrera 531
 Candalla, Franc. Flussates 264, 267
 Cavalieri, Franc. Bonaventura 431, 443, 485, 486
 Chemlin, Caspar 468, 483
 Clavius, Christoph 32, 73, 96, 120, 196, 265, 488, 503, 504, 531
 Coignet, Michel 128, 237, 259, 264, 265, 267, 525
 Colotius, Angelus 254
 Commandino, Fed. 431, 529
 Crüger, Peter 254, 435
 Curtius, Jakob 255
 Delrio, Martin 206, 533
 Eisenschmid, Joh. Caspar 467
 Epstein, Paul 472
 Ercker, Lazarus 258, 263, 266, 267
 Ernst v. Wittelsbach, Kurfürst v. Köln 250-255, 458, 540
 Euklid 69, 75, 79, 96, 282, 287, 288, 290, 293, 299, 304, 356, 429, 460, 462, 485, 506, 543
 Eutokius 493
 Ferdinand, Erzherzog 257
 Freher, Marquard 255, 540
 Frisch, Christian 435, 458, 475, 483, 486, 509, 526, 544
 Galenus 251, 267
 Galilei, Galileo 484
 Geber 112
 Georg I. v. Hessen-Darmstadt 542
 Georg II. v. Hessen-Darmstadt 542
 Glareanus, Heinrich Loris 252, 254
 Götze, Alfred 460
 Grammateus, Heinrich 432
 Gregorius a St. Vincentio 431
 Grienberger, Christoph 264
 Gringallet, Jean 480
 Grzebski, Stanislaus 255, 540
 Guldin, Paul 430, 431, 435, 466, 469, 484-486, 491, 493, 494, 497, 503
 Gunter, Edmund 465, 466, 551
 Habermehl, Erasmus 255
 Harriot, Thomas 264, 267, 542

- Hartmann, Georg 264
 Heiberg, Joh. Ludwig 439
 Helm, Erhart 432
 Herwart v. Hohenburg, Joh.
 Georg 540
 Heurnius, Johannes 248, 250, 267,
 540
 Hillinger 254, 264, 265, 267
 Hofmann, Jos. E. 504, 506
 Holtzmann, Wilhelm (Xylander)
 460
 Horky, Martin 484
 Hostius, Matthaeus 254
 Hulsius, Levin 254, 256, 264
 Hultsch, Friedrich 431
 Huygens, Christian 525
 Hysikles 79, 506

 Jörger, Helmhard v. 9, 10, 36, 433,
 436, 437, 483
 Junge, Johannes 523

 Karl V., Kaiser 250, 258
 Karl d. Große 255, 540
 Kästner, Abr. Gotth. 435
 Kaufmann, Martin 258
 Kepler, Johannes 485–487, 491,
 493, 494, 497, 498, 502, 503, 508,
 521
 Klug, Rudolf 435, 513, 516
 Köbel, Jakob 432
 Konstantin d. Große 250
 Kopernikus, Nikolaus 411
 Krüger, Johann 433

 Lambert, Joh. Heinrich 448, 449,
 459, 535, 538
 Lansberghe, Philipp van 147, 485,
 520, 526
 Lasantz 264
 Leiß, Nikolaus 258
 Liechtenstein, Maximilian v. 9, 10,
 36, 433, 436, 437, 483, 484

 Marius, Simon 460
 Mästlin, Michael 433, 434, 461,
 463–465, 467, 468, 471, 475
 Maximilian II., Kaiser 255

 Müller, Philipp 429
 Myritius, Johannes 254, 540

 Neper, John 355, 357, 461, 462 bis
 466, 469–473, 475, 479, 481, 482,
 553, 554
 Nepos, Cornelius 541

 Otho, Valentin 147, 526

 Paetus, Lukas 255, 540
 Pappus 20, 79, 113, 431, 506
 Paulus 487
 Peters, Theodor 429
 Pezenas, Esprit 538
 Pfeiderer, Christoph 491, 495, 496
 Philander, Wilhelm 255, 540
 Philipp III. v. Hessen-Butzbach
 279, 356, 466–468, 482, 542
 Pitiscus, Bartholomäus 147, 158,
 526
 Plank, Hans s. Blanck
 Plato 251
 Plinius 251
 Portis, Leonhard de 254
 Ptolemäus 147, 364

 Regiomontanus, Johannes 526
 Remus Quietanus, Johannes 463
 Rheticus, Joachim 147
 Roomen, Adriaen van 15, 104, 112,
 147, 429, 453, 514, 515, 518, 526
 Rudolph II., Kaiser 255

 Sarton, George 432
 Schickard, Wilhelm 430, 461, 464,
 467, 468, 473
 Schoner, Lazarus 540
 Schultes, Hans 258
 Serenus v. Antinoeia 168, 529
 Snell, Willibrord 71, 104, 448, 453,
 456, 503, 514
 Speckle, Daniel 254, 540
 Stevin, Simon 540
 Strahlendorf, Heinrich v. 355, 482
 Stromer, Ulman 432

 Tampach, Gottfried 468

- Thorndike, Lynn 432
 Torricelli, Evangelista 431
 Ursinus, Benjamin 393, 463
 Ursus, Nikolaus Raimarus 113, 523
 Vespasianus 250-252, 255
 Vicke, Nikolaus 460
 Vieta, Franc. 429, 492, 515, 521, 551
 Villalpando, Johann Bapt. 166,
 182, 248-255, 259, 264, 267, 268,
 529, 540
 Wallis, Joh. 525
 Welser, Markus 36, 433
 Wieleitner, Heinrich 435, 436,
 486, 487, 489, 494, 502, 504,
 508, 509, 511, 513, 514, 516-518,
 520
 Witelo (Vitellio) 169
 Wodderborn, John 10, 484
 Xylander s. Holtzmann
 Zelstius, Adrianus 540

INHALTSVERZEICHNIS

Stereometria doliorum	5
Messekunst Archimedis	135
Chilias logarithmorum	275
Supplementum Chiliadis	353
Nachbericht	427
Die stereometrischen Schriften	430
Die logarithmischen Schriften	461
Anmerkungen	483
Personenregister	558