

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1915

München 1915

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Über eine charakteristische Eigenschaft sogenannter Treppenvpolygone und deren Anwendung auf einen Fundamentalsatz der Funktionentheorie.

Von Alfred Pringsheim.

Vorgetragen in der Sitzung am 9. Januar 1915.

Ein von Weierstraß herrührender, für die Theorie der analytischen Funktionen grundlegender Satz besagt folgendes: Wenn ein Funktions-Element sich auf jedem innerhalb eines einfach zusammenhängenden Bereiches B verlaufenden Wege analytisch fortsetzen läßt, so sind jene Fortsetzungen vom Wege unabhängig, und es definiert jenes Funktions-Element mit seinen Fortsetzungen eine im Innern von B eindeutige analytische Funktion regulären Verhaltens.

Der Beweis dieses Satzes bietet keine besondere Schwierigkeit, falls man sich dabei auf Bereiche einfacher Art beschränkt, etwa solche, die von konvexen Polygonen oder einfach geschlossenen konvexen Kurven begrenzt sind, wird indessen selbst bei dieser Beschränkung in den mir bekannten Lehrbüchern in nicht völlig befriedigender Weise dargestellt. Recht verwickelt und wenig durchsichtig gestaltet sich aber der fragliche Beweis für den Fall, daß man einfach zusammenhängende Bereiche allgemeinsten Art dabei ins Auge faßt, selbst wenn man in Bezug auf die besondere Struktur der Begrenzung noch gewisse (für die Tragweite des Beweises tatsächlich ziemlich unwesentliche) Beschränkungen einführt, etwa daß dieselbe nicht aus beliebigen stetigen, sondern aus abteilungsweise mono-

tonen oder sogenannten regulären Kurvenstücken bestehen solle, und wenn man auch bezüglich der Wege, welche für die analytische Fortsetzung benützt werden sollen, die analogen Einschränkungen macht¹⁾. Bei der grundlegenden Wichtigkeit des fraglichen Satzes hielt ich es nach alledem für wünschenswert, für denselben einen wirklich elementaren, auch dem Anfänger in allen Einzelheiten verständlichen und überzeugend erscheinenden Beweis zu suchen, der von vornherein auf einer anderen Methode beruht, als die bisher gegebenen Beweise. Während diese nämlich stets direkt darauf ausgehen, die verschiedenen Wege-Möglichkeiten durch sukzessive Reduktionen als äquivalent zu erweisen, glaubte ich das fragliche Ziel weit einfacher und durchsichtiger auf andere Weise zu erreichen, indem ich zeige, daß nach Einführung einer passenden Gebietseinteilung der gesamte Bereich systematisch mit einem Netz ineinander greifender Potenzreihen überzogen werden kann, welche eine eindeutige analytische Funktion erzeugen und somit ohne weiteres deren analytische Fortsetzung innerhalb jenes Bereiches von dem dabei benützten Wege vollständig unabhängig erscheinen lassen. Dabei beschränke ich mich auf diejenige Begrenzungsform, für die ich bei früherer Gelegenheit²⁾ die Bezeichnung „Treppenpolygon“ eingeführt habe: in der Tat erweist sich diese Annahme für ziemlich weitgehende funktionentheoretische Ansprüche als völlig ausreichend, da sich Begrenzungen sehr allgemeiner Natur durch Treppenpolygone beliebig approximieren lassen³⁾. Die oben erwähnte Gebiets-einteilung läuft alsdann auf eine Zerlegung in Rechtecke hinaus, deren charakteristische Eigenschaft darin besteht, daß bei einer besonderen Anordnung bzw. Numerierung, wobei zu-

¹⁾ S. z. B. Stolz-Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie, I (1904), p. 116; II (1905), p. 320. Vgl. auch W. F. Osgood: On a gap in the ordinary presentation of Weierstraß's theory of functions. Bull. of the American Math. Soc. (2), X (1904), p. 294.

²⁾ Dieser Berichte Bd. 25 (1895), p. 56.

³⁾ S. z. B. Burkhardt, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen. Dritte Aufl. (1908), p. 90, 102.

nächst ein bestimmtes Rechteck als erstes fixiert wird, jedes folgende mit einem vorangehenden nur längs einer Seite zusammenhängt. Der Nachweis einer solchen Zerlegbarkeit ist das Hauptziel der folgenden Untersuchung. Wenn dieser Nachweis trotz seiner prinzipiellen Einfachheit in der vorliegenden Darstellung etwas lang und umständlich erscheinen mag, so rührt das lediglich davon her, daß ich es für zweckmäßig hielt, den ganzen Gegenstand von Grund aus im Zusammenhange zu entwickeln und dabei so gut wie gar nichts vorauszusetzen. Diese Entwicklungen bilden den Inhalt der beiden ersten Paragraphen, während der dritte die Anwendung des gewonnenen Ergebnisses auf den Beweis des erwähnten Weierstraßschen Satzes enthält.

§ 1.

Treppenwege.

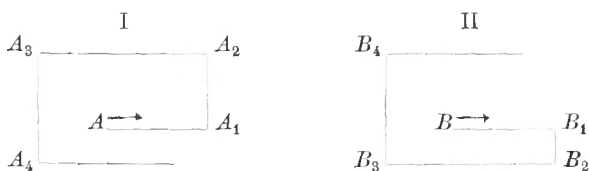
1. Unter einem (sc. endlichen) Treppenwege verstehen wir eine gebrochene Linie, die aus einer endlichen Anzahl paarweise rechtwinklig aneinander stoßender, jedoch keinen weiteren Punkt gemein habender Strecken besteht. Diese letzteren, die man ohne Beschränkung der Allgemeinheit als abwechselnd horizontal und vertikal annehmen kann, sollen als Seiten, die Punkte, in denen zwei Seiten zusammenstoßen, als Ecken des Treppenweges bezeichnet werden.

Bezieht man die Punkte des Treppenweges auf ein rechtwinkliges, zu den Seiten parallel gestelltes Koordinatensystem und bedient sich der Schreibweise $(x_v \dots x \dots x_{v+1})$ bzw. $(y_v \dots y \dots y_{v+1})$, um auszudrücken, daß x bzw. y beständig wachsend oder abnehmend das Intervall (x_v, x_{v+1}) bzw. (y_v, y_{v+1}) durchläuft, so läßt sich, falls man etwa den Treppenweg mit einer Horizontalen beginnen und mit einer Vertikalen endigen läßt, die Gesamtheit seiner Punkte in folgender Weise anschreiben:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_0 \dots x \dots x_1 & y = y_0 \\ x = x_1 & y_0 \dots y \dots y_1 \\ x_1 \dots x \dots x_2 & y = y_1 \\ x = x_2 & y_1 \dots y \dots y_2 \\ \dots & \dots \\ x_{n-1} \dots x \dots x_n & y = y_{n-1} \\ x = x_n & y_{n-1} \dots y \dots y_n \end{array} \right.$$

Bedeutet (x', y') irgend einen Punkt des Treppenweges, so kann für die übrigen Punkte zwar x noch beliebig oft den Wert x' , ebenso y den Wert y' annehmen, dagegen kann das Wertepaar (x', y') kein zweites Mal vorkommen.

2. Die Ecken, welche bei Treppenwegen auftreten, lassen sich zunächst nach dem folgenden rein geometrischen Gesichtspunkte in zwei verschiedene Gruppen teilen. Durchläuft man den Treppenweg von einem beliebig gewählten der beiden äußersten Punkte anfangend, also in einem nach getroffener Wahl nunmehr eindeutig bestimmten Fortschreitungsinn, so sollen die einzelnen Ecken als solche erster oder zweiter Art bezeichnet werden, je nachdem man bei ihrer Umlaufung den Winkel von 90° (s. Fig. I) oder denjenigen von 270° (s. Fig. II) zur Linken hat. Diese Bezeichnungen sind offenbar lediglich relative, jede derselben geht in die andere über, wenn man die Durchlaufung des Treppenweges in entgegengesetztem Sinne ausführt.



Um die obige zunächst rein geometrisch definierte Einteilung auch arithmetisch zu charakterisieren, bemerke man folgendes. Eine Ecke entsteht beim Übergange von der horizontalen, also x -Richtung in die vertikale, also y -Richtung oder umgekehrt: hiernach wollen wir die Ecken im ersten Falle als xy -Übergänge, im zweiten als yx -Übergänge bezeichnen.

Andererseits können sich in der Nachbarschaft eines solchen Überganges x und y in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne ändern, und es sollen, je nachdem das eine oder das andere der Fall ist, die betreffenden Übergänge als gleichstimmige oder als ungleichstimmige bezeichnet werden. Alsdann erkennt man unmittelbar, daß die oben gegebenen Begriffsbestimmungen auch durch die folgenden ersetzt werden können:

Ecken erster Art $\left\{ \begin{array}{l} \text{Gleichstimmige } xy\text{-Übergänge (Fig. I: } A_1, A_3) \\ \text{Ungleichstimmige } yx\text{-Übergänge (Fig. I: } A_2, A_4) \end{array} \right.$

Ecken zweiter Art $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ungleichstimmige } xy\text{-Übergänge (Fig. II: } B_1, B_3) \\ \text{Gleichstimmige } yx\text{-Übergänge (Fig. II: } B_2, B_4) \end{array} \right.$

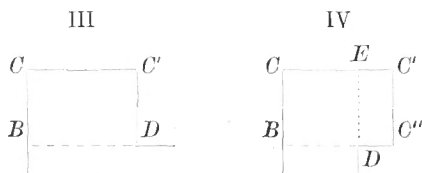
Ecken derselben Art sollen als gleichartig bezeichnet werden.

3. Ändern sich bei Durchlaufung des Treppenweges x und y durchweg monoton (und zwar gleichgültig, ob in demselben oder in entgegengesetztem Sinne), so soll der Treppenweg monoton heißen: er hat dann entweder lauter gleichstimmige oder lauter ungleichstimmige Ecken, also in beständiger Abwechselung solche erster und zweiter Art, er verläuft „treppenförmig“ im gewöhnlichen Sinne.

Ist nun der Treppenweg nicht monoton, so muß wenigstens eine der beiden Veränderlichen x und y ein Maximum oder Minimum aufweisen, so daß also mindestens einmal eine unmittelbare Aufeinanderfolge einer gleichstimmigen xy - und einer ungleichstimmigen yx -Ecke (bzw. yx - und xy -Ecke), d. h. zweier gleichartigen Ecken eintritt. Eine solche Folge zweier gleichartigen Ecken soll schlechthin als Eckenfolge, ihre Verbindungslinie als Rückkehrseite bezeichnet werden.

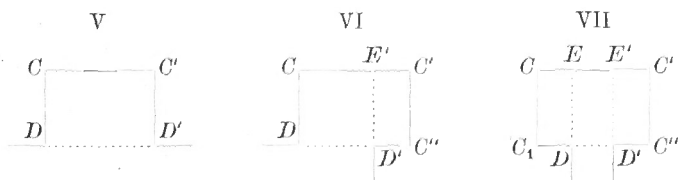
Es sei C, C' eine solche Eckenfolge, und es werde zunächst vorausgesetzt, daß die zu einer dieser beiden Ecken, etwa die zu C' benachbarte Ecke näher an C' liegt, als an C die zu C benachbarte Ecke (an deren Stelle eventuell

auch einer der Endpunkte des Treppenweges treten darf). Die zu C' benachbarte Ecke ist entweder von anderer oder von der gleichen Art, wie C , und zwar soll im letzteren Falle angenommen werden, daß dann die nächstfolgende Ecke der anderen Art angehört. In jedem dieser beiden Fälle wird eine von der Ecke anderer Art D zur Rückkehrseite $\overline{CC'}$ gezogene Parallele die bei C anstoßende Seite in einem Punkte B treffen (s. Fig. III und IV). Alsdann soll der Linienzug $\overline{BCC'D}$



bzw. $\overline{BCC'C''D}$ ein einfaches Endstück und, falls keine andere Seite des Treppenweges in das Innere des Rechtecks $\overline{BCC'D}$ bzw. $\overline{BCC'C''}$ eintritt oder mit der Geraden $\overline{BD}$ ein Stück gemein hat, ein freies (einfaches) Endstück des Treppenweges heißen. Man kann dann bei Durchlaufung des Treppenweges ohne jede sonstige Abänderung desselben das Wegstück $\overline{BCC'D}$ bzw. $\overline{BCC'C''D}$ ausschalten und durch den kürzeren Weg $\overline{BD}$ ersetzen, eine Operation, für die wir die Bezeichnung einführen wollen: man könne das freie Endstück $\overline{BCC'D}$ bzw. $\overline{BCC'C''D}$ mit Hülfe des Querschnittes $\overline{BD}$ von dem Treppenwege abschneiden. Bei dieser Operation kommen im Falle der Figur III die Ecken C , C' und die damit ungleichartige Ecke D in Wegfall, während eine mit den beiden erstgenannten gleichartige Ecke bei B neu hinzutritt: der Treppenweg verliert also im ganzen ein Paar ungleichartiger Ecken. Im Falle der Figur IV verschwinden die drei gleichartigen Ecken C , C' , C'' und die damit ungleichartige D , während andererseits zwei mit jenen ersteren gleichartige Ecken bei B und D neu hinzukommen: auch hier geht also genau ein Paar ungleichartiger Ecken verloren.

Wir betrachten jetzt zweitens den Fall, daß C und C' von ihren benachbarten Ecken gleich weit entfernt sind. Dabei unterscheiden wir, ob diese benachbarten Ecken mit C und C' beide ungleichartig (s. Fig. V) oder beide gleichartig (Fig. VII) sind, oder ob die eine mit C , C' ungleichartig, die andere gleichartig ist (Fig. VI); zugleich sollen in den beiden letzten Fällen die nächstbenachbarten bzw. die nächstbenachbarte mit C , C' ungleichartig sein. Wir bezeichnen alsdann die Linienzüge $\overline{DCC'D'}$, $\overline{DCC'C''D'}$, $\overline{DC_1CC'C''D'}$ gleichfalls als Endstücke und, falls eine besondere Unterscheidung gegenüber den zuvor betrachteten erforderlich sein sollte, als Doppel-Endstücke (aus einem sogleich verständlich werdenden Grunde). Offenbar läßt sich jedes dieser drei Endstücke, wenn es in dem zuvor angegebenen Sinne ein freies

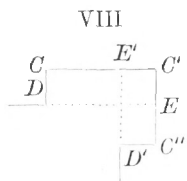


ist, durch den Querschnitt $\overline{DD'}$ abschneiden. Dabei gehen im Falle der Figur V die beiden Ecken C , C' und die damit ungleichartigen D , D' ohne jeden Ersatz verloren. Im Falle der Figur VI verschwinden die drei Ecken C , C' , C'' und die beiden damit ungleichartigen D , D' , während bei D' eine mit den erstgenannten gleichartige neu entsteht. Endlich im Falle der Figur VII verschwinden die vier Ecken C_1 , C , C' , C'' und die damit ungleichartigen D , D' , während zwei jener ersteren durch entsprechende gleicher Art bei D und D' entstehende ersetzt werden. In jedem dieser drei Fälle gehen also zwei Paare ungleichartiger Ecken verloren. Somit ergibt sich schließlich:

Wird von einem Treppenwege ein freies Endstück abgeschnitten, so verliert derselbe ein Paar oder zwei Paare ungleichartiger Ecken.

Im Anschluß an die vorstehenden Figuren möge noch (NB. nicht als Beweismittel, sondern lediglich zum besseren Verständnis verschiedener späterhin in Betracht kommender Möglichkeiten) darauf hingewiesen werden, daß im Falle der Figur IV auch bei $\overline{C'C''}$ ein freies Endstück entsteht, welches statt des horizontal abgeschnittenen durch einen vertikalen Schnitt abgetrennt werden kann (s. die punktierte Linie in Fig. IV). Das gleiche ergibt sich bei Figur VI, während man im Falle der Figur VII, statt das Doppel-Endstück durch einen horizontalen Schnitt abzutrennen, auch die beiden einfachen Endstücke mit den Rückkehrseiten $\overline{CC_1}$ und $\overline{C'C''}$ durch vertikale Querschnitte abschneiden könnte.

Bei den eben betrachteten Beispielen sind die vertikal abzuschneidenden Endstücke so gelegen, daß sie vollständig in die horizontal abzuschneidenden hineinfallen und daher gleichzeitig mit diesen auch beseitigt werden. Andererseits kann natürlich auch der Fall eintreten, daß solche Endstücke sich nur teilweise decken und daß man daher lediglich die Wahl hat, zunächst das eine oder das andere abzuschneiden (s. z. B. Fig. VIII).



4. Lehrsatz I. Ein horizontal beginnender und ebenso endigender, *nicht monotoner* Treppenweg, der zwei beliebige Punkte (x_0, y_0) und (X, Y) verbindend ganz *im Innern* des von den Vertikalen $x = x_0$ und $x = X$ begrenzten Parallelstreifens verläuft, läßt sich durch sukzessives Abschneiden freier Endstücke in einen jene beiden Punkte gleichfalls verbindenden *monotonen* Treppenweg verwandeln, der sich im Falle $y_0 = Y$ auf eine horizontale Gerade reduziert.

Beweis. Da der Treppenweg nicht monoton ist, also mindestens eine Rückkehrseite enthält, so läßt sich zeigen, daß dann auch mindestens ein freies Endstück vorhanden sein muß. Existiert nur eine einzige Rückkehrseite, so muß die betreffende Eckenfolge offenbar zwei ungleichartige

benachbarte Ecken¹⁾ haben, andernfalls würde ja eine weitere Eckenfolge, also auch eine weitere Rückkehrseite entstehen. Somit liefert also jene eine Rückkehrseite jedenfalls ein Endstück. Dieses ist aber auch stets ein freies: zunächst kann keinesfalls einer der Endpunkte des Treppenweges im Innern desselben oder auf dem Querschnitt liegen, denn ist etwa $x_0 < X$, so genügen ja die Abszissen x (aller Punkte des Treppenweges, da er im Innern des Parallelstreifens $x = x_0$, $x = X$ verläuft) der Bedingung $x_0 < x < X$. Träte also überhaupt irgend ein Teil des Treppenweges in das Innere jenes Endstücks oder an den zugehörigen Querschnitt, so müßte er auch wieder umkehren, was ja die Existenz einer weiteren Rückkehrseite nach sich ziehen würde.

Enthält der Treppenweg mehrere Rückkehrseiten, so muß es unter diesen eine oder auch mehrere einander gleiche kürzeste gegeben. Dann liefert aber wieder jede solche kürzeste Rückkehrseite CC' ein freies Endstück. Gehören nämlich zu C und C' nicht gleichweit entfernte Nachbarcken, so muß, wenn etwa die am nächsten gelegene Ecke zu C' benachbart ist, einer der beiden durch Fig. III und IV charakterisierten Fälle eintreten²⁾, und das so entstehende Endstück muß ein freies bleiben, da ja bezüglich eines etwaigen Eindringens eines Endpunktes des Treppenweges die bereits im vorigen Falle erörterte Unmöglichkeit bestehen bleibt, andererseits auch kein anderer Teil des Treppenweges in das Innere jenes Endstückes eintreten oder mit dem abschließenden Querschnitt ein Stück gemein haben, ohne die Existenz einer noch kürzeren

¹⁾ Ist eine Rückkehrseite vorhanden, bei welcher einer der Endpunkte des Treppenweges die Stelle einer benachbarten Ecke vertritt, so kann eine solche Rückkehrseite niemals als einzige auftreten: diese Möglichkeit scheidet also in dem vorliegenden Falle von vornherein aus. (Vgl. auch die Fußnote auf p. 40.)

²⁾ Es kann nicht etwa der Treppenweg in dem durch Fig. IV dargestellten Falle beim Punkte D nach der entgegengesetzten Richtung abbiegen, da ja auf diese Weise eine Rückkehrseite $\overline{DC''} < \overline{CC'}$ entstehen würde.

Rückkehrseite (d. h. $< \overline{CC'}$) nach sich zu ziehen. Liegen dagegen C und C' gleichweit entfernt von ihren Nachbarecken, dann muß ein Endstück von einer der Formen, wie in Fig. V bis VII dargestellt, zum Vorschein kommen¹⁾, das dann wieder aus den unmittelbar zuvor angeführten Gründen auch ein freies bleiben muß.

Somit ist gezeigt, daß jeder nicht-monotone Treppenweg ein oder mehrere freie Endstücke enthält. Werden diese abgeschnitten, so ist der übrig bleibende Treppenweg (d. h. derjenige, welcher aus dem ursprünglichen dadurch entstanden ist, daß die abgeschnittenen Wegstücke durch die entsprechenden Querschnitte ersetzt worden sind) entweder monoton (was sicher dann der Fall ist, wenn überhaupt nur eine Rückkehrseite vorhanden war) oder er besitzt noch ein oder mehrere freie Endstücke, die dann wieder analog wie zuvor abgeschnitten werden können. Führt man in dieser Weise fort, so muß, da ja der ursprüngliche Treppenweg nur eine endliche Anzahl von Ecken besaß und durch das Abschneiden eines freien Endstückes jedesmal mindestens ein Eckenpaar verloren geht, nach einer endlichen Anzahl der angedeuteten Operationen, ein Treppenweg zum Vorschein kommen, der keine Rückkehrseite mehr enthält, also monoton ist. Dabei bleiben die beiden Endpunkte offenbar unverändert, da ja nach Voraussetzung der Treppenweg ganz im Innern des Parallelstreifens $x = x_0$, $x = X$ verlaufen sollte, jene beiden Endpunkte bei den fraglichen Operationen also niemals beteiligt sind. Daraus folgt schließlich noch, daß jener monotone Treppenweg sich auf die Verbindungslinie $\overline{x_0 X}$ reduziert, wenn Anfangs- und Endpunkt des Treppenweges in derselben Horizontalen liegen.

5. Lehrsatz II. Der im vorigen Lehrsatz charakterisierte Treppenweg zerlegt den von den Vertikalen $x = x_0$, $x = X$ begrenzten Parallelstreifen in zwei ge-

¹⁾ Bezüglich der Fälle Fig. VI und VII gilt eine analoge Bemerkung, wie die in der vorigen Fußnote gemachte.

trennte Stücke, ein „oberes“ und ein „unteres“, deren jedes einen zusammenhängenden Bereich bildet.

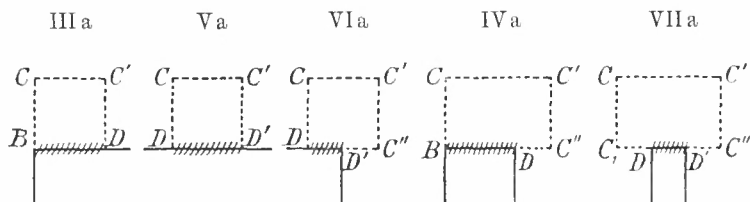
Beweis. Der ausgesprochene Satz gilt zunächst, falls der Treppenberg ein monotoner ist, wie man unmittelbar erkennt, wenn man den letzteren aus einer Horizontalen, welche den Parallelstreifen in ein „oberes“ und ein „unteres“ Stück zerlegt, durch sukzessives Ansetzen treppenförmig gelagerter Rechtecke entstehen läßt.

Angenommen nun der Satz sei für irgend einen speziellen Treppenberg $\mathbf{T}$ erwiesen. Ist dann P ein innerer Punkt des einen Teilbereiches, etwa des oberen, so muß eine durch P gezogene, nach abwärts gerichtete Vertikale den Treppenberg $\mathbf{T}$ mindestens in einem, eventuell in einem ersten Punkte P' schneiden. Für einen anderen, nicht gerade der Strecke $\overline{PP'}$ angehörigen¹⁾ Innenpunkt P_1 des oberen Teilbereiches mag P_1 die analoge Bedeutung haben. Alsdann bildet der Linienzug $\overline{PP'}(\mathbf{T})\overline{P'_1P_1}$, wo $(\mathbf{T})$ das zwischen P' und P'_1 liegende Stück von $\mathbf{T}$ bedeutet, einen die Punkte P und P_1 verbindenden Treppenberg. Bedeutet nun δ eine positive Zahl, die höchstens so groß ist, wie die kleinste Seite und der kleinste Abstand zweier paralleler Seiten von $\mathbf{T}$, auch höchstens so groß, wie jede der Strecken $\overline{PP'}$, $\overline{P'_1P_1}$ und ihre kleinsten Abstände von den zwischenliegenden Vertikalseiten von $\mathbf{T}$, und wird $\delta' < \frac{\delta}{2}$ angenommen, so läßt sich dem Treppenberg $\mathbf{T}$ ein aus Innenpunkten des oberen Bereiches bestehender, im Abstände δ' parallel zu den Seiten von $\mathbf{T}$ verlaufender Treppenberg τ zuordnen, der $\overline{PP'}$ im Punkte P'' , $\overline{P'_1P_1}$ im Punkte P''_1 treffen mag. Wird das zwischen P'' und P''_1 liegende Stück von τ mit (τ) bezeichnet, so bildet der Linienzug $\overline{PP''}(\tau)\overline{P''_1P_1}$ einen durchweg aus Innenpunkten des oberen Bereiches bestehenden, die Punkte P und P_1 verbindenden Treppenberg, dessen Existenz

¹⁾ Der Fall, daß P_1 auf $\overline{PP'}$ liegen sollte, ist zu trivial, um in dem vorliegenden Zusammenhange eine Erörterung zu erfordern.

als Kriterium dafür gelten kann, daß jener obere Bereich ein zusammenhängender ist.

Nun werde der obige Treppenweg T durch Ansetzen eines freien Endstückes in einen (gleichfalls im Innern des Parallelstreifens $x = x_0$, $x = X$ verlaufenden) Treppenweg T' übergeführt, also in der Weise abgeändert, daß man entweder ein Stück einer Seite (s. Fig. IIIa, Va, VIa) oder eine ganze Seite (s. Fig. IVa, VIIa)¹⁾ durch einen mit dem Treppenwege T sonst nirgends kollidierenden, auch die Grenzvertikalen nicht berührenden, gebrochenen Linienzug ersetzt, der mit der ausgeschalteten Strecke zusammen ein Rechteck bildet. Als dann läßt sich zeigen, daß der fragliche Satz auch für den



Treppenweg T' gilt. Da zu beiden Seiten des ausgeschalteten Wegestücks Punkte verschiedener Kategorie, zu beiden Seiten des neu hinzutretenden Wegestücks Punkte derselben Kategorie liegen, so werden durch die angedeutete Operation lediglich die Innenpunkte des betreffenden Rechtecks dem einen Bereiche — etwa, um eine Festsetzung zu treffen, dem oberen, entzogen und dem anderen, also dem unteren, hinzugefügt. Daß auch der Treppenweg T' die beiden Bereiche vollständig gegen einander abschließt und zugleich der untere dabei ein zusammenhängender bleibt, ist evident. Um die Erhaltung dieser Eigenschaft auch für den oberen Bereich zu erkennen, bemerke man zunächst, daß

¹⁾ Die Numerierung der Figuren und die Bezeichnung der verschiedenen Eckpunkte entspricht genau derjenigen der Fig. III—VII, p. 32, 33 während die Reihenfolge nach Maßgabe des hier vorliegenden Einteilungsprinzips abgeändert erscheint.

die von einem beliebigen Innenpunkte P des oberen Bereichs nach abwärts gerichtete Vertikale, falls sie nicht einen bzw. einen ersten Punkt von $\mathbf{T}'$ trifft, der dem ursprünglichen Treppenwege $\mathbf{T}$ angehört, die obere Seite des eingeschalteten Rechteckstückes treffen muß, so daß also die Fußpunkte der von zwei solchen Punkten P, P_1 gefällten Vertikalen zunächst durch ein gewisses Stück ($\mathbf{T}'$) des Treppenweges $\mathbf{T}'$ verbunden erscheinen. Diesem letzteren läßt sich aber, da in der unmittelbaren äußeren Nachbarschaft der fraglichen Rechteckseiten ausschließlich Innenpunkte des oberen Bereiches liegen, ein aus solchen Punkten in einem gewissen Abstände δ' verlaufender Parallelweg τ' zuordnen, so daß schließlich P und P_1 gerade so, wie zuvor, durch einen aus lauter Innenpunkten des oberen Bereiches bestehenden Treppenweg verbunden werden können.

Nun kann nach dem zuvor bewiesenen Lehrsatz jeder Treppenweg der näher bezeichneten Art durch Abschneiden freier Endstücke auf einen monotonen reduziert werden. Er läßt sich daher auch umgekehrt aus diesem letzteren durch sukzessives Ansetzen jener Endstücke wieder herstellen. Hieraus, im Zusammenhange mit dem bisher gesagten ergibt sich aber die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes.

6. Lehrsatz III. Jeder Treppenweg der bisher betrachteten Kategorie besitzt ebensoviele Ecken der einen, wie der anderen Art.

Beweis. Bei der Reduktion des Treppenweges auf einen monotonen gehen ungleichartige Ecken stets paarweise verloren. Da andererseits der resultierende monotone Treppenweg gleich viel Ecken beiderlei Art besitzt (eventuell gar keine, falls er sich auf eine horizontale Gerade reduziert), so erkennt man unmittelbar die Richtigkeit der obigen Behauptung.

Zusatz. Die Lehrsätze I und III bleiben auch gültig, wenn der Treppenweg, statt ganz im Innern des betrachteten Parallelstreifens zu verlaufen, diesen lediglich nicht überschneidet, also eventuell mit den begrenzenden Vertikalen

$x = x_0$, $x = X$ ein oder mehrere Stücke gemein hat¹⁾. Um dies einzusehen, braucht man nur die Anfangs- und End-Horizontale um ein beliebig kleines Stück nach links bzw. rechts zu verlängern. Hierdurch erleidet offenbar der Eckenvorrat des Treppenweges keinerlei Veränderung, während andererseits die fragliche Voraussetzung der Lehrsätze I und III wieder erfüllt ist.

Im übrigen läßt sich, wie im Anschluß an die eben gemachte Bemerkung leicht zu erkennen, jene Voraussetzung auch noch merklich weiter verallgemeinern, nur werden dann wieder gewisse ausdrücklich zu erwähnende Einschränkungen notwendig, so daß der etwa erzielte Gewinn an Allgemeinheit den tatsächlichen Verlust an Einfachheit nicht aufwiegt und das um so mehr, als der Satz I bzw. III in der vorliegenden Fassung für die weiterhin daran zu knüpfenden Schlüsse vollkommen ausreicht.

§ 2.

Treppenpolygone.

1. Unter einem Treppenpolygon verstehen wir einen geschlossenen Treppenweg, also einen solchen, bei dem Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen. Aus der in § 1 Nr. 1 gegebenen Definition eines Treppenweges folgt dann schon von selbst, daß ein solches Treppenpolygon in einem Zuge durchlaufen werden kann, ohne daß irgend ein Punkt, abgesehen von dem am Schlusse des Umlaufs wieder auftretenden An-

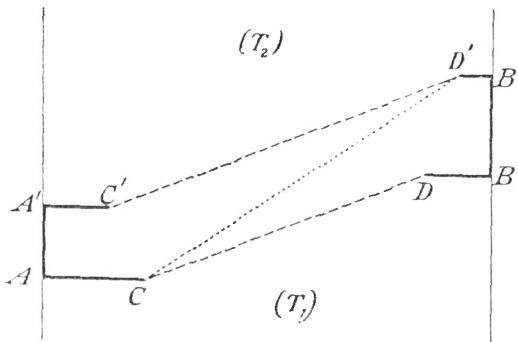
¹⁾ Der Grund, warum der Voraussetzung nicht von vornherein diese etwas erweiterte Form gegeben wurde, ist folgender. Darf der Treppenweg die begrenzenden Vertikalen berühren, so könnte, falls die erste vertikale Seite des Treppenweges eine Rückkehrseite ist, die nächste Horizontale bis an die Grenzvertikale heranreichen. Analoge Verhältnisse könnten auch am Ende stattfinden. Diese Art von Rückkehrseiten würden dann keine Endstücke im Sinne unserer Definition liefern und müßten bei der Betrachtung immer ausdrücklich ausgenommen werden, was zwar keinerlei prinzipiellen Schwierigkeiten, aber eine unnötige Beschwerung der Darstellung zur Folge hätte.

fangspunkte, ein zweites Mal erreicht wird; mit anderen Worten: ein geschlossener Treppenweg ist eo ipso ein einfach geschlossener Weg ohne Doppelpunkte.

Lehrsatz I. Jedes Treppenvpolygon H zerlegt die Ebene in zwei getrennte Gebiete, deren jedes einen zusammenhängenden Bereich, einen inneren und einen äußeren, bildet.

Beweis. Es seien x_0 und X , wo etwa wieder $x_0 < X$, die äußersten Abszissen, denen noch Punkte des Treppenvpolygons entsprechen, so daß also das letztere noch eine oder mehrere Seiten mit je einer der Vertikalen $x = x_0$ und $x = X$ gemeinsam hat, dieselben aber nicht überschneidet. Wir wollen vorläufig annehmen, daß das Treppenvpolygon nur je eine Seite mit diesen Vertikalen gemein hat, etwa $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$. Die beiden an $\overline{AA'}$ bzw. $\overline{BB'}$ anstoßenden horizontalen Seiten mögen mit $\overline{AC}$, $\overline{A'C'}$ bzw. $\overline{BD}$, $\overline{B'D'}$ bezeichnet werden. Dann soll zunächst gezeigt werden, daß der von C aus weiterführende Treppenweg im Punkte D , also der von C' ausgehende in D' einmünden muß. Angenommen, der Treppenweg führe von C nicht nach D , sondern nach D' (wie in der nebenstehenden Figur IX durch die punktierte Linie schematisch angedeutet ist), so würde der Treppenweg $\overline{AC \dots D'B'}$ den

IX



von den beiden Vertikalen $x = x_0$ und $x = X$ begrenzten Parallelstreifen in zwei getrennte Stücke zerlegen derart, daß $\overline{A'C'}$ dem oberen, $\overline{DB}$ dem unteren Stücke angehört, und es wäre daher unmöglich, die noch offenen Endpunkte C' und D durch einen Treppenweg zu verbinden, ohne den Treppenweg $\overline{AC \dots D'B'}$ zu überschreiten. Somit muß in der Tat das Treppenpolygon so verlaufen, daß der Punkt C mit D , C' mit D' durch je einen Treppenweg verbunden erscheint, wie dies in Figur IX die gestrichelten Linien schematisch andeuten. Durch den Treppenweg $\overline{AC \dots DB}$ wird alsdann ein unteres Stück (T_1), durch den Treppenweg $\overline{A'C' \dots D'B'}$ ein oberes Stück (T_2) von dem Parallelstreifen abgeschnitten: diese beiden bilden zusammen mit den beiden links und rechts von dem Parallelstreifen gelegenen Halbebenen einen zusammenhängenden, von dem Treppenpolygon begrenzten Bereich, den wir als äußeren bezeichnen. Andererseits haben das von dem Treppenwege $\overline{AC \dots DB}$ begrenzte obere und das von dem Treppenwege $\overline{A'C' \dots B'D'}$ begrenzte untere Gebiet des Parallelstreifens ein Stück gemein, das, außer von diesen Treppenwegen, von den Parallelen $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ begrenzt wird. Daß dasselbe einen gegen den zuvor erwähnten äußeren Bereich durch das Treppenpolygon II abgeschlossenen Bereich bildet, folgt dann unmittelbar aus dem Lehrsatz II des vorigen Paragraphen. Wir bezeichnen ihn als inneren Bereich und zeigen, daß derselbe gleichfalls ein zusammenhängender ist. Für die Seitenlängen und die Abstände irgend zweier paralleler Seiten muß wiederum ein gewisses Minimum δ bestehen. Wird dann $\delta' < \frac{\delta}{2}$ angenommen, so läßt sich dem Treppenpolygon II ein aus lauter Innenpunkten von II bestehendes im Abstände δ' parallel verlaufendes Treppenpolygon II' zuordnen, das zunächst mit II zusammen einen zusammenhängenden Rand von Innenpunkten des Polygons II begrenzt. Da ferner jede durch einen inneren Punkt von II' (der also auch innerer Punkt von II ist) ge-

zogene Gerade, etwa, um eine Festsetzung zu treffen, eine nach abwärts gerichtete Vertikale, die Begrenzung II' in einem bzw. in einem ersten Punkte treffen muß, so folgt, daß jeder solche Punkt mit den zuvor erwähnten Innenpunkten des Randes zusammenhängt und daß andererseits auch zwei derartige Punkte durch einen aus Innenpunkten von II gebildeten Treppenweg verbunden werden können. Jener innere Bereich von II ist also tatsächlich zusammenhängend.

Hierbei war die beschränkende Voraussetzung gemacht worden, daß das Treppenpolygon nur je eine Seite mit den beiden begrenzenden Vertikalen gemein haben solle. Sind nun mehrere solche Seiten vorhanden, so mögen etwa mit $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ die beiden links und rechts am tiefsten gelegenen bezeichnet werden. Wird dann das Treppenpolygon in der Weise abgeändert, daß man $\overline{AA'}$ um eine beliebige kleine Strecke δ nach links, $\overline{BB'}$ in gleicher Art nach rechts verschiebt und die anstoßenden Horizontalen in entsprechender Weise um δ verlängert, so genügt das nunmehrige Treppenpolygon der zuvor gemachten Beschränkung, teilt somit die Ebene in einen äußeren und einen inneren Bereich, welchem letzteren insbesondere die beiden an die Vertikalen $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ anstoßenden Streifen von der Breite δ angehören. Werden diese von dem inneren Bereiche abgeschnitten und dem äußeren hinzugefügt, so ergibt sich ohne weiteres die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes für das gegebene und somit für jedes beliebige Treppenpolygon.¹⁾

Zusatz. Wird für eine bei A beginnende Durchlaufung des Treppenpolygons die Richtung $\overline{AC}$ als positive bezeichnet, so ist der innere von dem Treppenpolygon begrenzte Bereich dadurch charakterisiert, daß seine an die Begrenzung anstos-

¹⁾ Mit Rücksicht auf den folgenden Lehrsatz sei noch ausdrücklich hervorgehoben, daß auch in dem zuletzt betrachteten allgemeineren Falle die Fortsetzung des mit $\overline{AC}$ beginnenden Treppenweges stets zunächst nach B , niemals nach einem auf der Grenzvertikale höher gelegenen Eckpunkte führt (was genau so, wie in dem zuerst betrachteten Falle erkannt werden kann).

senden Punkte bei positivem Umlauf stets zur Linken bleiben. In der Nähe der Ecken erster Art (s. § 1, Nr. 2) gehören dann die Punkte zwischen den Schenkeln des rechten Winkels dem inneren Bereiche an, in der Nähe der Ecken zweiter Art die Punkte innerhalb der Schenkel des überstumpfen Winkels. Die Ecken erster Art sollen in diesem Zusammenhange als konvex (sc. nach außen), diejenigen zweiter Art als konkav bezeichnet werden.

2. Lehrsatz II. Jedes Treppenvolygon hat einen Überschuß von vier gleichartigen und zwar bei positivem Umlauf konvexen Ecken.

Beweis. Mit Festhaltung der im vorigen Lehrsatz angewendeten Bezeichnungen läßt sich das Treppenvolygon, etwa bei positivem Umlauf, zerlegen in zwei Treppenwege, einen „unteren“: $\overline{AC \dots DB}$ und einen „oberen“: $\overline{B'D' \dots C'A'}$ nebst den beiden verbindenden Vertikalen $\overline{BB'}$ und $\overline{A'A}$. Jeder der beiden genannten Treppenwege hat nach dem Lehrsatz III des § 1 gleichviel Ecken von jeder Art. Dazu kommen noch die vier Ecken bei B, B', A', A , welche in jedem Falle gleichartig, bei positivem Umlauf offenbar konvex sind.

Anmerkung. Wird die Seitenzahl des Treppenvpolygons, die ja offenbar stets gerade sein muß, mit $2m$ bezeichnet, so ist nach dem eben bewiesenen Satze $(m+2)$ die Anzahl der konvexen, $(m-2)$ diejenige der konkaven Ecken. Daraus würde folgen, daß die Summe der inneren Winkel des Treppenvpolygons den Wert $(m+2) \frac{\pi}{2} + (m-2) \frac{3\pi}{2}$, also $(2m-2)\pi$ haben muß. Umgekehrt könnte man natürlich, wenn man etwa die Anzahl der konvexen Ecken mit x bezeichnet, diese aus der Gleichung $x \cdot \frac{\pi}{2} + (2m-x) \cdot \frac{3\pi}{2} = (2m-2)\pi$ bestimmen, falls man sich auf den als bekannt anzusehenden Satz stützt, daß die Summe der inneren Winkel eines beliebigen n -Ecks den Wert $(n-2)\pi$ hat. In der Tat findet sich ja dieser Satz wohl in zahlreichen Lehrbüchern der Elementargeometrie: in-

dessen scheint mir der gewöhnlich dafür gegebene, auf vollständiger Induktion beruhende Beweis¹⁾ unzureichend. Dabei wird nämlich etwa folgendermaßen geschlossen: Bezeichnet man mit ω_n die Summe der Innenwinkel eines beliebigen n -Ecks, durch Vielfache von π ausgedrückt, und beachtet, daß ein $(n-1)$ -Eck in ein n -Eck mit neu hinzutretender ausspringenden oder einspringenden Ecke übergeht, wenn man an eine Seite des $(n-1)$ -Ecks ein Dreieck nach außen oder innen ansetzt und an Stelle jener Seite in die Begrenzung aufnimmt, so ergibt sich in jedem der beiden genannten Fälle die Rekursionsformel

$$\omega_n = \omega_{n-1} + \pi,$$

aus der dann, wegen $\omega_3 = \pi$, in der Tat das fragliche Resultat $\omega_n = (n-2)\pi$ unmittelbar hervorgeht. Das Unzureichende dieser Schlußweise liegt indessen darin, daß dabei ohne jede Begründung vorausgesetzt wird, es könne jedes n -Eck durch die angedeutete Operation aus einem gewissen $(n-1)$ -Eck hergestellt werden oder, was offenbar auf dasselbe hinausläuft, man könne jedes n -Eck dadurch in ein $(n-1)$ -Eck verwandeln, daß man die nicht gemeinsamen Endpunkte zweier benachbarter Seiten durch eine Gerade verbindet. Diese Annahme ist aber nur dann einwandfrei, wenn feststeht, daß stets mindestens zwei benachbarte Seiten vorhanden sind, deren Endpunkte sich durch eine Gerade verbinden lassen, ohne daß diese mit irgend einer anderen Polygonseite einen Punkt gemein hat. Die Tatsache selbst dürfte richtig sein: ob sie jemals streng bewiesen wurde, möchte ich dahingestellt lassen, da ich in dem betreffenden Zweige der mathematischen Literatur sehr wenig bewandert bin²⁾.

¹⁾ S. z. B. Baltzer, Elemente der Mathematik, Bd. 2: Viertes Buch, § 3, Nr. 10.

²⁾ Während der Drucklegung dieser Arbeit wurde mir durch Herrn A. Rosenthal mitgeteilt, daß sich die fragliche Ergänzung zu dem Beweise des Satzes über die Winkelsumme eines Polygons in zwei Publikationen jüngeren Datums findet, nämlich: W. Killing und H. Hovestadt, Handbuch des mathemat. Unterrichts, I (Leipzig 1910), p. 62–67; N. J. Lennes, American Journal of Mathematics 33 (1911), p. 42–47.

Will man sich darauf beschränken, den Satz über die Winkelsumme lediglich für ein Treppenvolygon durch das obige Induktionsverfahren abzuleiten, so hätte man zuvor nur zu erweisen, daß die Seitenzahl jedes Treppenvolgons stets durch Abschneiden oder Ansetzen eines Rechtecks reduziert werden kann, was sich durch die Beweismethode des Lehrsatzes I von § 1 leicht begründen ließe und merklich weniger Umstände macht, als die der vorliegenden Untersuchung als Endziel zu Grunde liegende Feststellung, daß die fragliche Reduktion stets durch bloßes Abschneiden von Rechtecken erzielt werden kann.

3. Zwei parallele Seiten bzw. Stücke von Seiten, deren senkrechte Verbindungslinien abgesehen von den Endpunkten aus lauter Innenpunkten des Treppenvolgons bestehen¹⁾, sollen gegenüberliegend heißen.

Lehrsatz III. Verbindet man zwei gegenüberliegende Seiten eines Treppenvolgons durch eine senkrechte Gerade, so zerlegt dieselbe, als Querschnitt aufgefaßt, das Treppenvolygon (und zwar sowohl *Grenzung*, wie *Innenfläche*) in zwei Treppenvolgone.

Beweis. Wir betrachten zunächst zwei beliebige²⁾ parallele Seiten bzw. Stücke von Seiten $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, deren senkrechte Verbindungslinien von keiner anderen Seite geschnitten werden, und zeigen, daß zu diesen stets entgegengesetzte Richtungen gehören, wenn das Treppenvolygon H in einem bestimmten Richtungssinne durchlaufen wird³⁾. Angenommen, dies wäre nicht der Fall, so daß also $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ in derselben Richtung, etwa, um eine Festsetzung zu treffen, in der

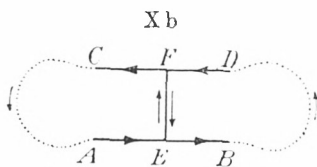
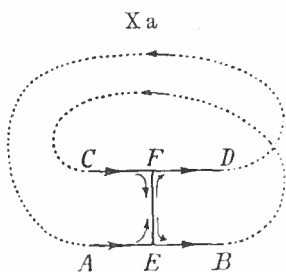
¹⁾ Damit ist also implicite gesagt, daß solche parallele Seitenstücke nur so lange „gegenüberliegend“ heißen, als ihre senkrechten Verbindungslinien mit keiner anderen Seite des Treppenvolgons einen Punkt gemein haben.

²⁾ D. h. also: nicht notwendig im Sinne der oben gegebenen Definition „gegenüberliegende“.

³⁾ Vgl. hierzu die Fußnote 1) auf p. 48.

Richtung $A \dots B$, bzw. $C \dots D$ (d. h. in der Richtung der wachsenden Variablen) durchlaufen würden. Alsdann müßte bei einem in A beginnenden Umlauf die Fortsetzung von $\overline{AB}$ auf irgend einem Treppenwege zunächst in C , ebenso die Fortsetzung von $\overline{CD}$ schließlich wieder in A einmünden (wie dies in der Fig. X a durch die punktierten Linien schematisch angedeutet ist). Wird nun irgend ein Punkt E der Strecke AB mit dem senkrecht gegenüber liegenden Punkte F der Strecke $\overline{CD}$ geradlinig verbunden, so ließe sich ein bei A beginnender Umlauf über $\overline{AEFD}$ und den dort anschließenden (durch die punktierte Linie angedeuteten) Weg wieder nach A zurückführen, ebenso ein bei C beginnender über $\overline{CFEB}$ und den dort anschließenden (punktierten) Weg nach C zurückführen. Das Treppenvpolygon Π würde also in zwei gesonderte Treppenvpolygone Π_1 und Π_2 zerfallen, deren jedes einen Überschuß von 4 gleichartigen Ecken haben müßte. Es müßte also, je nachdem diese zweimal 4 Ecken noch unter einander gleichartig sind oder nicht, ein Gesamtüberschuß von 8 gleichartigen Ecken oder überhaupt keiner vorhanden sein. Beide Annahmen sind aber unmöglich, da der ursprüngliche Eckenvorrat von Π einen Überschuß von 4 konvexen Ecken enthält und die neu hinzutretenden Ecken bei E und F sich auf Π_1 und Π_2 so verteilen würden, daß jedem dieser Polygone ein Paar ungleichartiger Ecken zufällt. Damit ist aber die ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Dies vorausgeschickt, seien jetzt $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ zwei gegenüberliegende Seiten bzw. Seitenstücke des Polygons Π , so wird eine Durchlaufung von $\overline{AB}$ in der Richtung $A \dots B$ eine solche von $\overline{CD}$ in



der entgegengesetzten Richtung $D \dots C$ zur Folge haben¹⁾ und daher die Fortsetzung des Weges $\overline{AB}$ zunächst nach dem Punkte D , diejenige des Weges $\overline{DC}$ schließlich wieder nach A führen (wie durch die punktierten Linien in Fig. Xb angedeutet wird). Zieht man jetzt wiederum den Querschnitt $\overline{EF}$, so läßt sich ein bei A beginnender Umlauf über $\overline{AEFC}$ und den dort anschließenden (punktierten) Weg nach A zurückführen, ebenso ein bei D beginnender über $\overline{DFEB}$ usw. zurück nach D . Das Treppenpolygon II zerfällt also durch den Querschnitt $\overline{EF}$ in zwei Treppenpolygone II_1 und II_2 , und zwar werden die Innenpunkte, von II abgesehen, von den nunmehr der Begrenzung angehörenden Punkten des Querschnittes $\overline{EF}$, auch zu Innenpunkten von II_1 und II_2 , da ja der äußere, die unendlich fernen Punkte enthaltende Bereich von II bei dem fraglichen Prozeß als solcher völlig unberührt bleibt und daher auch wiederum vollständig dem äußeren Bereiche von II_1 bzw. II_2 angehören muß. Es zerfällt also gleichzeitig mit der Begrenzung auch der innere Bereich von II durch den Querschnitt $\overline{EF}$ in zwei getrennte Stücke.

Dieses Resultat erleidet keinerlei Änderung, wenn einer der beiden Endpunkte des Querschnittes oder auch jeder von beiden ein Eckpunkt sein sollte (der dann offenbar nur einer konkaven Ecke angehören kann). Man erkennt dies am einfachsten, wenn man dem Querschnitt zunächst eine minimale Verschiebung zu Teil werden läßt.

4. **Lehrsatz IV.** Von jedem Treppenpolygon, das nicht schon durch einen einzigen Querschnitt in zwei Rechtecke zerfällt²⁾, lassen sich sowohl durch hori-

¹⁾ Man könnte dies natürlich auch unmittelbar aus dem in Nr. 1, Zusatz, ausdrücklich erwähnten Umstande folgern, daß bei einer Umlaufung des Polygons etwa in positivem Sinne der innere Bereich stets zur Linken bleiben muß. Es erschien mir indessen nicht ganz einwandfrei, die geometrische Anschauung in diesem Umfange zur Begründung der fraglichen Tatsache in Anspruch zu nehmen.

²⁾ Dies tritt stets beim Sechseck ein, da dieses ja nur eine einzige konkave Ecke besitzt und daher überhaupt nur einen horizontalen

zontale, wie durch vertikale Querschnitte mindestens zwei freie Eckstücke abschneiden¹⁾).

Beweis. Ein Treppenvpolygon mit $2m$ -Seiten besitzt allemal $(m - 2)$ konkave Ecken. Von jeder dieser letzteren aus läßt sich nach beliebiger Wahl ein Querschnitt in horizontaler, wie in vertikaler Richtung ziehen.

Man gehe nun von einer beliebig gewählten konkaven Ecke aus, etwa, um eine Festsetzung zu treffen, derjenigen konkaven Ecke C_1 , welche als die erste auftritt, wenn man das Treppenvpolygon von dem tiefsten linken Eckpunkt anfangend in positiver Richtung umläuft, und ziehe von C_1 zunächst einen horizontalen Querschnitt q_1 , welcher also das Treppenvpolygon II in zwei solche zerlegt: ein „unteres“, d. h. an die untere Seite des Querschnittes sich anschließendes, II_1 und ein „oberes“ $\overline{II}_1$. Möglicherweise ist II_1 dann schon ein Rechteck, also ein durch den Querschnitt q_1 abgeschnittenes freies Endstück von II . Wenn nicht, so ziehe man von derjenigen konkaven Ecke C_2 aus, welche bei Fortsetzung des positiven Umlaufs als nächste zum Vorschein kommt, einen weiteren horizontalen Querschnitt q_2 , durch welchen II_1 in zwei Teilpolygone II'_1 und II_2 zerfällt. Dabei soll II'_1 dasjenige Treppenvpolygon bedeuten, dessen Begrenzung beide Querschnitte q_1 und q_2 enthält, während dann diejenige von II_2 nur aus dem einen Querschnitte q_2 , im übrigen aus lauter Seiten des ursprünglichen Polygons II besteht. Da die konkave Ecke C_2

und einen vertikalen Querschnitt der fraglichen Art zuläßt; ferner, wenigstens in Bezug auf die eine Querschnittsrichtung, bei denjenigen Achtecken, deren zwei (einzigen) konkaven Ecken in einer horizontalen oder vertikalen Geraden liegen.

¹⁾ Dies ist nicht so zu verstehen, daß sich stets zwei Endstücke durch horizontale und zugleich zwei andere durch vertikale Querschnitte abtrennen lassen müßten. Vielmehr könnten diese beiden Arten von Endstücken teilweise zusammenfallen (vgl. § 1, p. 34, insbesondere das zu Fig. IV und VI—VIII gesagte), so daß lediglich die Wahl zwischen beiden freistünde.

bei dieser Operation vollständig verloren geht¹⁾, so besitzt Π_2 jedenfalls um mindestens eine konkave Ecke und infolge dessen um mindestens ein Eckenpaar weniger als Π_1 (da ja der Unterschied zwischen der Anzahl der vorhandenen konvexen und konkaven Ecken immer konstant, nämlich $= 4$, bleiben muß). Ist Π_2 noch kein Rechteck, so läßt sich in analoger Weise ein Treppenvolygon Π_3 davon abtrennen, dessen Begrenzung wiederum nur aus einem Querschnitt q_3 , im übrigen aus Seiten des ursprünglichen Treppenvpolygons besteht und mindestens ein Eckenpaar weniger enthält als Π_2 . Da die Anzahl der von vornherein überhaupt vorhandenen Ecken eine endliche ist, andererseits jedes der sukzessive von Π_1 abgetrennten Treppenvpolygone $\Pi_2, \Pi_3 \dots$ noch einen Überschuß von 4 konvexen Ecken besitzt, so muß nach einer endlichen Anzahl der angedeuteten Operationen ein Treppenvpolygon mit nur vier und zwar konvexen Ecken zum Vorschein kommen, also ein nur Innenpunkte des Treppenvpolygons umschließendes Rechteck, dessen Begrenzung nur einen Querschnitt enthält, mit anderen Worten: ein durch diesen letzteren abgeschnittenes freies Endstück.

Die gleiche Schlußweise, auf das „obere“ Treppenvpolygon $\bar{\Pi}_1$ angewendet, liefert dann die Existenz eines zweiten, gleichfalls durch einen horizontalen Querschnitt abzutrennenden Endstücks.

Ersetzt man in der vorstehenden Betrachtung die horizontalen Querschnitte durch vertikale, so ergibt sich in Bezug auf diese ein völlig gleichartiges Resultat. Damit ist aber der oben ausgesprochene Satz vollkommen bewiesen.

5. Als unmittelbare Folgerung des eben bewiesenen Satzes resultiert schließlich der folgende, das eigentliche Ziel dieser ganzen Untersuchung bildende Hauptsatz:

Jedes Treppenvpolygon, das nicht schon durch einen einzigen Querschnitt in zwei Rechtecke

¹⁾ Die durch einen Querschnitt erzeugten neuen Ecken können offenbar immer nur konvexe sein.

zerfällt¹⁾, läßt sich (auf mehrfache Art) in der Weise aus Rechtecken zusammensetzen, daß um einen rechteckigen Kern sukzessive weitere Rechtecke angesetzt werden, wobei jedes neu hinzukommende Rechteck nur längs *einer* Seite ganz oder teilweise mit einem einzigen der bereits vorhandenen Rechtecke zusammenhängt.

Beweis. Zunächst lassen sich von dem Treppenvpolygon etwa durch horizontale Querschnitte mindestens zwei, eventuell auch eine größere Anzahl von freien Endstücken abschneiden, die durchweg mit der Nummer 1 bezeichnet werden mögen. Jedes dieser Rechtecke stößt nur längs des Querschnittes, welcher eine Seite oder auch nur einen Teil einer Seite bildet (vgl. Fig. III—VII) an das übrig bleibende Treppenvpolygon. Das letztere besitzt mindestens vier Ecken weniger, als das ursprünglich und gestattet, falls es nicht bereits ein Rechteck ist, oder schon durch einen Horizontalschnitt in zwei Rechtecke zerfällt, ein weiteres Abschneiden von mindestens zwei weiteren freien (genauer gesagt: durch die erste Operation frei gewordenen) Endstücken, die dann die Nummer 2 erhalten sollen. Führt man in dieser Weise fort, so wird schließlich, etwa nach der $(k - 1)^{\text{ten}}$ derartigen Operation ein einziges Rechteck übrig bleiben, dem also die Nummer k zukommen würde.²⁾ Alsdann läßt sich aber offenbar das ursprüngliche Treppenvpolygon in der Weise wieder herstellen, daß man an das Rechteck mit der Nummer k zunächst dasjenige oder diejenigen mit der Nummer $(k - 1)$, an das so

1) Vgl. p. 48, Fußnote 2).

2) Man kann leicht eine obere Grenze für die Zahl k angeben. Bei jeder der ersten $(k - 2)$ Operationen gehen mindestens 4 Ecken verloren, bei der $(k - 1)^{\text{ten}}$ möglicherweise nur 2. Alsdann bleiben noch die 4 Ecken des mit k numerierten Kernrechtecks übrig. Darnach hat man, wenn mit $2m$ die Eckenzahl des gegebenen Treppenvpolygons bezeichnet wird: $4(k - 2) + 2 + 4 \leq 2m$, also:

$$k \leq \frac{m + 1}{2}.$$

entstandene Treppenpolygon die Rechtecke mit der Nummer $(k - 2)$ ansetzt, u. s. f. Dabei hängt jedes neu hinzukommende Rechteck auf Grund seiner Entstehungsweise nur längs des Querschnittes, durch welchen es früher abgeschnitten wurde, mit einem einzigen Rechteck des bereits vorhandenen Komplexes zusammen.

In ganz analoger Weise kann man mit lauter vertikalen Querschnitten operieren. Das in diesem Falle zum Vorschein kommende Kernrechteck muß offenbar ein anderes sein, als das zuvor resultierende, da jenes frühere nur längs seiner horizontalen, das jetzige nur längs seiner vertikalen Seiten mit anderen Bestandteilen des Treppenpolygons zusammenhängt.

Schließlich kann man auch horizontale und vertikale Querschnitte beliebig kombinieren, insbesondere bei jeder einzelnen Operation alle überhaupt vorhandenen freien Endstücke abschneiden, soweit sich das durch Anwendung beider Arten von Querschnitten bewerkstelligen läßt.

§ 3.

Funktionentheoretische Anwendung.

Lehrsatz. Es sei x_0 ein beliebiger Punkt im Innern eines Treppenpolygons H , $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ eine für eine gewisse Umgebung von x_0 konvergierende Potenzreihe. Läßt sich diese auf jeder im Innern von H verlaufenden gebrochenen Linie¹⁾ analytisch fortsetzen, so definiert das Funktions-Element $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ eine im Innern von H eindeutige und reguläre analytische Funktion.

Beweis. Wir betrachten vorläufig den speziellen Fall, daß das Treppenpolygon sich auf ein einfaches Rechteck R reduziert. Man erkennt dann zunächst, daß der Konvergenz-kreis von $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ und jeder daraus abgeleiteten, um irgend einen Innenpunkt von R konvergierenden Potenzreihe sich zum

¹⁾ Es würde schon ausreichen, vorauszusetzen, daß die Fortsetzung auf jedem innerhalb H verlaufenden Treppenwege möglich sein soll.

mindesten bis an die Begrenzung von R erstrecken muß. Denn auf jedem dieser Konvergenzkreise muß mindestens eine singuläre Stelle c der betreffenden Potenzreihe liegen, die andernfalls in das Innere von R fallen würde. Alsdann wäre es aber unmöglich, $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ auf einem durch das Innere des betreffenden Konvergenzkreises gehenden Wege über c hinaus fortzusetzen.

Dies vorausgeschickt, denken wir uns nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Zahl ε ein Rechteck R' konstruiert, dessen Seiten im Abstande ε parallel zu den Seiten von R und im Innern von R verlaufen. Hierauf teile man eine Seite von R' (etwa, wie in der nebenstehenden Fig. XI, die untere horizontale) in n gleiche Teile, deren Länge δ der Beziehung genügen soll

$$(1) \quad \delta < (1 + \sqrt{2}) \varepsilon = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2} - 1},$$

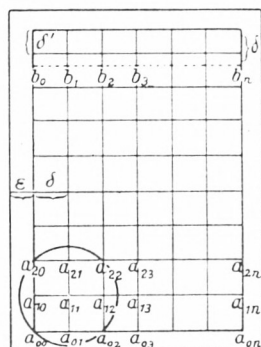
und trage die Strecke δ auch auf einer der vertikalen Seiten ab, so oft es angeht (etwa, wie in der Figur, von unten beginnend). Zieht man sodann durch sämtliche Teilpunkte Parallelen zu den Seiten, so zerfällt das Rechteck R' in eine Anzahl von (horizontal gelagerten) Parallelstreifen, deren jeder aus n Quadraten von der Seitenlänge δ besteht, und eventuell einen letzten Parallelstreifen aus Rechtecken mit der Grundlinie δ und einer Höhe $\delta' < \delta$. Die Eckpunkte jener Quadrate mögen, von unten links beginnend, mit

$$\begin{array}{ccccccc} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

bezeichnet werden.

Man leite nun aus $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ auf irgend einem in R' verlaufenden Wege eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x|a_{11})$ ab, deren Konver-

XI



genzradius nach dem oben gesagten mindestens den Wert $\delta + \varepsilon$ haben muß. Da aber aus Ungl. (1) folgt, daß:

$$\delta + \varepsilon > \sqrt{2} \cdot \delta,$$

so ist derselbe größer als die Diagonale der einzelnen Quadrate, so daß also ein um den Punkt a_{11} mit der Diagonale $\sqrt{2} \cdot \delta$ beschriebener Kreis einschließlich seiner Peripherie aus lauter Innenpunkten des Konvergenzbereiches von $\mathfrak{P}(x|a_{11})$ besteht und somit die zwei ersten Quadrate des untersten und diejenigen des nächstfolgenden Parallelstreifens ganz in das Innere jenes Konvergenzbereiches fallen. Leitet man sodann aus $\mathfrak{P}(x|a_{11})$ sukzessive die Potenzreihen ab:

$$\mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{12}), \mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{12}, a_{13}) \dots \mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{12}, \dots a_{1,n-1}),$$

so wird der Konvergenzbereich einer jeden dieser Potenzreihen immer je ein Quadrat des unteren und des oberen Parallelstreifens mit dem Konvergenzbereich der unmittelbar vorangehenden Potenzreihe gemein haben, und es definiert somit die obige Folge von Potenzreihen zunächst für die beiden untersten Parallelstreifen eine daselbst eindeutige analytische Funktion regulären Verhaltens.

Nun läßt sich aber aus $\mathfrak{P}(x|a_{11})$ auch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{21})$ und aus dieser letzteren wiederum eine Folge von Potenzreihen ableiten

$$\mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{21}, a_{22}),$$

$$\mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{23}) \dots \mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{21}, a_{22} \dots a_{2,n-1}),$$

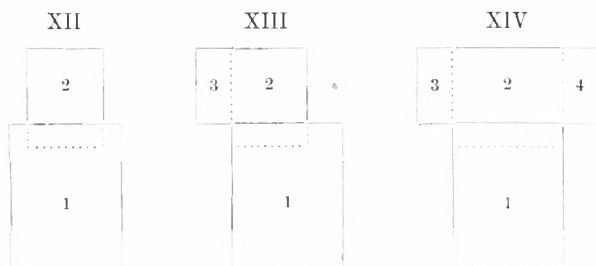
deren Konvergenzbereiche mit demjenigen von $\mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{21})$ zusammen den zweiten und dritten Parallelstreifen umfassen. Dabei hat der Konvergenzbereich der Reihe $\mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{21})$ das erste und zweite Quadrat des zweiten Parallelstreifens mit dem Konvergenzbereich von $\mathfrak{P}(x|a_{11})$ gemein, derjenige von $\mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{21}, a_{22})$ noch das zweite jener Quadrate mit dem Konvergenzbereich der genannten Reihen und mit demjenigen von $\mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{12})$. Daraus folgt aber die Gültigkeit der Beziehung $\mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{21}) = \mathfrak{P}(x|a_{11})$ für die beiden ersten Qua-

drate, diejenige der Beziehung $\mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{21}, a_{22}) = \mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{12})$ für das zweite und folglich auch für das (den Konvergenzbereichen dieser Reihen gleichfalls gemeinsame) dritte Quadrat des zweiten Parallelstreifens. So fortschließend findet man, daß die obige zweite Folge von Potenzreihen für den zweiten und dritten Parallelstreifen eine daselbst eindeutige und reguläre analytische Funktion definiert, welche im zweiten Parallelstreifen mit der bereits durch die erste Serie von Potenzreihen definierten vollständig übereinstimmt. Und durch Fortsetzung dieses Verfahrens läßt sich schließlich das ganze Rechteck R' mit einem System von Potenzreihen belegen, deren Konvergenzbereiche sich in analoger Weise teilweise überdecken. Dabei hat man nur bei der Ausdehnung der Entwicklungen auf den obersten Parallelstreifen, falls nicht zufällig $\delta' = \delta$ sein sollte, vielmehr der (allgemeine) Fall $\delta' < \delta$ eintritt, das Verfahren in der Weise zu modifizieren, daß man als Mittelpunkte der betreffenden Potenzreihen-Entwicklungen nicht die auf der letzten Teilungs-Horizontalen gelegenen Gitterpunkte, sondern diejenigen benützt, die auf einer im Abstände δ zur oberen Seite des Rechtecks R' gezogenen Parallelen liegen (in der Figur die Punkte $b_1, b_2 \dots b_{n-1}$).

Die Gesamtheit der so hergestellten Potenzreihen definiert eine im Innern und auf der Begrenzung von R' eindeutige und reguläre analytische Funktion $f(x)$. Zu jeder Stelle von R' gehört ein und nur ein bestimmtes Funktionselement und, auf Grund des oben näher beschriebenen Ineinandergreifens der verschiedenen Potenzreihen, ist jedes andere auf jedem beliebigen, dem Bereiche R' angehörenden Wege daraus ableitbar. Insbesondere kann das nunmehr der Stelle x_0 zugehörige Funktionselement kein anderes sein, als die ursprünglich vorgelegte Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$. Denn auf dem speziellen Wege, welcher zuerst dazu diente, $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ in $\mathfrak{P}(x|a_{11})$ überzuführen, ließe sich bekanntlich — allenfalls mit Einschaltung geeigneter Zwischenpunkte — auch die Rückbildung von $\mathfrak{P}(x|a_{11})$ in $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ bewerkstelligen. Da es ferner freisteht, den mit δ bezeichneten Abstand von R' und R unbegrenzt

zu verkleinern, so ist damit der oben ausgesprochene Satz zunächst für das Innere eines Rechtecks bewiesen.

Es hat keine Schwierigkeit, das zur Definition von $f(x)$ angewendete Verfahren auf den Fall auszudehnen, daß der Bereich, in dessen Innern die gemachten Voraussetzungen gelten sollen, durch Ansetzen eines „freien Endstücks“ vergrößert wird, also eines Rechtecks, welches mit dem ursprünglichen eine Seite ganz oder teilweise gemein hat. Man hat dann nur, nachdem $f(x)$ in dem einen, als Anfangsbereich angesehenen (in den beigegebenen Figuren mit 1 bezeichneten) Rechteck definiert ist, einen gewissen Parallelstreifen dem benachbarten Rechteck, soweit es an die eine Seite des ursprünglichen anstößt, hinzuzufügen und die daselbst bereits bestehende Definition von $f(x)$ auf das Rechteck 2 (Fig. XII) bzw. das Teilrechteck 2 (Fig. XIII, XIV) auszudehnen und eventuell das analoge Verfahren zur weiteren Fortsetzung von $f(x)$ über das Teilrechteck 3 bzw. 4 anzuwenden.



Um nun schließlich den ausgesprochenen Satz für ein beliebiges Treppenvolygon II zu beweisen, denke man sich dasselbe auf Grund des im vorigen Paragraphen abgeleiteten „Hauptsatzes“ in ein Kernrechteck und eine Anzahl sukzessive daran anzusetzender freier Endstücke zerlegt. Ist dann das Funktionselement $\mathfrak{P}(x|x_0)$ in einem der einzelnen Teilrechtecke vorgelegt, so hat man dasselbe auf irgend einem das betreffende Teilrechteck mit dem Kernrechteck verbindenden, im Innern von II verlaufenden Treppenwege bis in das

Kernrechteck fortzusetzen. Hierauf läßt sich nach dem oben gelehrten Verfahren $f(x)$ zunächst für das Kernrechteck eindeutig definieren, und diese Definition kann sukzessive über sämtliche Teilrechtecke von Π in eindeutiger Weise fortgesetzt werden. Daß die so definierte, im Innern von Π eindeutige und reguläre Funktion $f(x)$ in der Umgebung der Stelle x_0 mit dem ursprünglich gegebenen Funktionselement $\mathfrak{P}(x, x_0)$ übereinstimmt, folgt dann genau so, wie oben für den Fall des Rechtecks.

Damit ist der fragliche Satz vollständig bewiesen.

Nachtrag zu der vorstehenden Abhandlung.

Von Alfred Pringsheim.

Vorgetragen in der Sitzung am 6. März 1915.

1. Wie ich schon in einer der vorstehenden Abhandlung während der Drucklegung hinzugefügten Fußnote (s. p. 45) hervorgehoben habe, findet sich in dem Handbuche des mathematischen Unterrichts von W. Killing und H. Hovestadt, Bd. (1910) die von mir bisher vermißte Ergänzung zu dem Beweise des Satzes, daß die Summe der inneren Winkel eines beliebigen n -Ecks $(n-2)\pi$ beträgt. Nachdem ich inzwischen von den bezüglichen Auseinandersetzungen genauere Kenntnis genommen habe, scheint es mir zweckmäßig, daran noch die folgenden Bemerkungen zu knüpfen.

A. a. O. p. 66 ergibt sich der Satz: In jedem einfachen Polygon¹⁾ läßt sich mindestens eine *ganz im Innern* verlaufende *Diagonale* (d. h. zwei nicht benachbarte Eckpunkte verbindende Gerade) ziehen. Hieraus wird dann durch vollständige Induktion erschlossen, daß es in jedem einfachen n -Eck mindestens ein System von $(n-3)$ im Innern verlaufenden und daselbst sich nicht schneidenden Diagonalen gibt, durch welche dann das Polygon in $(n-2)$ Dreiecke zerlegt wird. Man erkennt nun aber des weiteren durch dieselbe Schlußweise, wie sie beim Beweise des Lehrsatzes IV über Treppenvpolygone angewendet wurde (s. p. 49), daß immer

¹⁾ Ein Polygon heißt einfach, wenn jede Seite außer den beiden mit den zwei benachbarten Seiten gemeinsamen Eckpunkten keinen weiteren Punkt mit irgend einer anderen Seite gemein hat. Bei dieser Terminologie wären also die bisherigen „Treppenvpolygone“ als einfache zu bezeichnen.

mindestens zwei Teildreiecke vorhanden sein müssen, deren Begrenzung nur je eine Diagonale, also je zwei Polygonseiten enthält (entsprechend den zwei abschneidbaren freien Endstücken beim Treppenvolygon), und daraus folgt dann wiederum die Möglichkeit, jedes einfache Polygon durch sukzessives Ansetzen von Dreiecken an ein Kerndreieck in der Weise zu erzeugen, daß jedes neu anzusetzende Dreieck nur längs einer Seite mit dem bereits vorhandenen Komplex zusammenhängt. Um dieses Ergebnis zur Übertragung des in § 3 der vorigen Abhandlung für ein Treppenvolygon bewiesenen Weierstraßschen Satzes auf ein beliebiges einfaches Polygon zu verwerten, hätte man den entsprechenden Beweis also nur für ein Dreieck zu führen. Dies läßt sich aber, in den Einzelheiten der Ausführung zwar etwas weniger einfach, jedoch prinzipiell in derselben Weise bewerkstelligen, wie es a. a. O. für ein Rechteck geschah.

2. Zu dem Weierstraßschen Satze über die Eindeutigkeit einer durch ein Funktionselement $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ für das Innere eines einfach zusammenhängenden Bereiches B definierten analytischen Funktion $f(x)$ möchte ich noch die folgenden auf die Fassung der Voraussetzung sich beziehenden Bemerkungen machen. Diese Voraussetzung bestand in der Forderung, daß $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ auf jedem innerhalb B verlaufenden Wege (bzw., was im Effekt auf dasselbe hinausläuft, auf jedem polygonalen oder auch nur auf jedem Treppenwege) analytisch fortsetzbar sein sollte. Daraus folgt dann auf Grund eines bekannten Satzes über den wahren Konvergenzbereich einer Potenzreihe, daß für keine der aus $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ ableitbaren Reihen eine im Innern von B gelegene singuläre Stelle vorhanden sein kann, und diese Eigenschaft bildet die eigentliche Grundlage des weiteren Beweises. Nichtsdestoweniger dürfte es kaum als zweckmäßig erscheinen, dieselbe, wie manche Autoren tun, von vornherein in die Voraussetzung aufzunehmen. Will man nämlich ausreichend charakterisieren, in wieweit irgend eine Stelle als singuläre zu betrachten sei, so muß doch gesagt werden, es solle kein auf beliebigem innerhalb B verlaufenden Wege

aus $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ ableitbares Funktionselement eine im Innern von B gelegene singuläre Stelle besitzen¹⁾. Diese Fassung enthält aber im Grunde genommen einen logischen Fehler. Denn aus der darin enthaltenen Forderung, daß überhaupt auf jedem beliebigem (innerhalb B verlaufenden) Wege immer wieder Funktionselemente ableitbar sein sollen, ergibt sich die Nichtexistenz innerhalb B liegender Singularitäten schon als notwendige Folgerung, während sie hier als besonderes Postulat erscheint. Immerhin würde auf diese Weise wenigstens nichts geradezu Unrichtiges gefordert. Das letztere ist dagegen tatsächlich der Fall, wenn die Voraussetzung so gefaßt wird²⁾: es solle die (durch das Element $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ definierte) Funktion $f(x)$ im Innern von B keine singulären Stellen haben. Denn der durch das Element $\mathfrak{P}_0(x|x)$ bei Beschränkung der Fortsetzungswege auf den Bereich B erzeugte Zweig der Funktion $f(x)$ kann sehr wohl durchweg eindeutig und regulär verlaufen, andererseits aber die Funktion $f(x)$, bei Fortsetzung über B hinaus und schließlich Rückkehr in diesen Bereich, daselbst beliebige Singularitäten besitzen³⁾.

¹⁾ So, dem Sinne nach, bei C. Jordan, *Cours d'Analyse* 1 (1893), p. 346. Der Beweis läßt übrigens mancherlei zu wünschen. Erstens wird es dabei als selbstverständlich angesehen, daß man jedes Polygon durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen könne, derart, daß jedes Dreieck mit dem nächstfolgenden eine Seite gemein hat, was doch keineswegs so selbstverständlich ist (vgl. oben Nr. 1 des Textes), zweitens scheint mir die infinitesimale Betrachtung, welche schließlich zum Beweise des fraglichen Satzes für den Fall eines Dreiecks angewendet wird, dem Wesen der Sache nicht recht zu entsprechen und ermangelt daher der schlagenden Beweiskraft.

²⁾ S. z. B. Harkness and Morley, *A Treatise of the Theory of Functions* (1893), p. 152.

³⁾ Vgl. das weiter unten gegebene Beispiel (letzter Absatz). Ein anderes einfaches Beispiel entsprechender Art liefert die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{x^{\nu-1}}{\nu},$$

welche zunächst für $|x| < 1$ den Hauptwert von $\frac{1}{x} \lg(1+x)$, also in der

Im Anschluß an die letzte Bemerkung verdient aber noch hervorgehoben zu werden, daß ein ähnlicher Vorgang auch innerhalb des Bereiches B sich vollziehen kann. D. h. es kann der Fall eintreten, daß bestimmte Innenpunkte von B bei Fortsetzung von $\mathfrak{P}_0(x \mid x_0)$ auf gewissen (sogar auf unendlich vielen, überall dicht liegenden) Wegen sich als Punkte regulären Verhaltens erweisen, bei der Wahl anderer (sc. immer nur im Innern von B verlaufender) Wege aber als singuläre Punkte erscheinen. Hiernach würde es also nicht genügen, die Voraussetzung für die eindeutige Fortsetzbarkeit von $\mathfrak{P}_0(x \mid x_0)$ über den Bereich B etwa in der Weise zu fassen: es solle für jeden Innenpunkt x' des Bereiches B ein Funktionselement $\mathfrak{P}_0(x \mid x_0, \dots x')$ auf irgend einem innerhalb B verlaufenden Wege aus $\mathfrak{P}_0(x \mid x_0)$ ableitbar sein.

Die generelle Bestätigung für das wirkliche Vorhandensein von Fällen der oben bezeichneten Art liefert ein Blick auf die Riemannsche Theorie der algebraischen Funktionen, bzw. auf die Zusammenhangsverhältnisse gewisser Riemannscher Flächen (worauf mich Herr Hartogs gelegentlich aufmerksam gemacht hat). Es erschien mir indessen für das volle Verständnis des vorliegenden, der elementaren Funktionentheorie angehörenden Weierstraßschen Satzes und namentlich mit Rücksicht auf Vorlesungszwecke wünschenswert, ein Beispiel zu konstruieren, welches ohne jedes kompliziertere Hilfsmittel das Erforderliche leistet, also eine Potenzreihe explizite anzuschreiben, von der sich durch eine Betrachtung sehr einfacher Art nachweisen läßt, daß sie im Innern eines gewissen Be-

Weierstraßschen Bezeichnung $\frac{1}{x} \lg(1+x)$ darstellte. Das gleiche gilt auch noch von der analytischen Fortsetzung des obigen Funktionselements für die ganze längs der reellen Achse von -1 bis $-\infty$ zerschnittenen Ebene, welche also hier den im Texte immer mit B bezeichneten Bereich vorstellt. Wird nun aber die Funktion weiter fortgesetzt auf Wegen, die den Schnitt $(-1, -\infty)$ beliebig oft in der einen oder in der anderen Richtung überschreiten, so entstehen Funktionszweige von der Form $\frac{1}{x} (\lg(1+x) \pm 2m\pi i)$, die an der Stelle $x=0$ einen Pol haben.

reiches B nach jedem Punkte analytisch fortsetzbar ist und dennoch keine in B eindeutige analytische Funktion definiert.

3. Wir betrachten die dreiwertige Funktion $y = f(x)$, welche definiert wird durch die kubische Gleichung:

$$(1) \quad y^3 - 3y - 2x = 0.$$

Die Cardanische Formel liefert alsdann für die drei Werte von $f(x)$ die Ausdrücke:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = f_1(x) = \sqrt[3]{V1+x^2} + x - \sqrt[3]{V1+x^2} - x \\ \quad \quad \quad = u - v \\ y_2 = f_2(x) = \alpha u - \alpha^2 v \\ y_3 = f_3(x) = \alpha^2 u - \alpha v \end{array} \right\} \text{ wo: } \alpha = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad \alpha^2 = e^{-\frac{2\pi i}{3}}.$$

Dabei sind zunächst für $|x| < 1$ unter den Radikalen die Hauptwerte der betreffenden Wurzeln zu verstehen, also speziell:

$$(3) \quad \begin{array}{ll} f_1(0) = 0 & f_2(0) = \alpha - \alpha^2 = i \cdot \sqrt{3} \\ f_3(0) = \alpha^2 - \alpha = -i \cdot \sqrt{3}. \end{array}$$

Die Funktion $f(x)$ besitzt, wie die Substitution $x = \frac{1}{x'}$ lehrt, in $x = \infty$ einen Verzweigungspunkt, in welchem alle drei Werte der Funktion zusammenfallen. Da andererseits die Radikanden $\sqrt{1+x^2} \pm x$ für kein endliches x verschwinden, so kommen als etwaige weitere Verzweigungspunkte von $f(x)$ nur diejenigen von $\sqrt{1+x^2}$, also die Stellen $x = i$ und $x = -i$ in Betracht. Um das Verhalten von $f(x)$ in der Umgebung dieser Stellen zu untersuchen, machen wir die Substitution:

$$(4) \quad x = i \cdot \sin \vartheta, \quad \text{also: } \sqrt{1+x^2} = \cos \vartheta,$$

so daß die Beziehungen (2) in die folgenden übergehen:

$$(5) \quad \begin{array}{ll} f_1(x) = 2i \cdot \sin \frac{\vartheta}{3} & f_2(x) = 2i \cdot \sin \frac{\vartheta + 2\pi}{3} \\ f_3(x) = 2i \sin \frac{\vartheta - 2\pi}{3}. \end{array}$$

Es beschreibe jetzt ϑ den folgenden Weg: von 0 positiv bis $\frac{\pi}{2} - |\delta|$, wo $|\delta| > 0$ beliebig klein, sodann auf einem Halbkreise mit dem Radius $|\delta|$ von $\frac{\pi}{2} - |\delta|$ bis $\frac{\pi}{2} + |\delta|$, schließlich wieder reell positiv wachsend bis π . Da

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \delta\right) = \cos \delta = 1 - \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^4}{4!} - \dots,$$

so wird x für $0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2} - |\delta|$ den rein imaginären Weg von 0 bis $i \cdot \cos |\delta|$ durchlaufen. Da ferner $\cos \delta$ für hinlänglich kleine $|\delta|$ sich näherungsweise verhält wie $1 - \frac{\delta^2}{2}$, so wird, wenn ϑ einen Halbkreis mit dem Radius $|\delta|$ um $\frac{\pi}{2}$ beschreibt, $x (= i \cdot \cos \delta)$ eine nahezu kreisförmige geschlossene Kurve um den Punkt i beschreiben und sodann vom Werte $i \cdot \cos |\delta|$ wieder nach 0 zurücklaufen, wenn ϑ von $\frac{\pi}{2} + |\delta|$ bis π wächst. Läßt man (lediglich der größeren Einfachheit der Notierung halber) δ gegen Null konvergieren, zieht also den von x beschriebenen Schleifenweg in den Weg $(0, i, 0)$ zusammen, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Beziehungen (5)

$$\left(\text{und wegen: } \sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \right)$$

das folgende Schema:

$$(A) \quad \begin{cases} x = 0 & i & 0 \\ \vartheta = 0 & \frac{\pi}{2} & \pi \\ f_1(x) = 0 & i & i \cdot \sqrt{3} \\ f_2(x) = i \cdot \sqrt{3} & i & 0 \\ f_3(x) = -i \cdot \sqrt{3} & -2i & -i \cdot \sqrt{3}. \end{cases}$$

Die Stelle $x = i$ ist daher ein Verzweigungspunkt nur für $f_1(x)$ und $f_2(x)$, dagegen nicht für $f_3(x)$.

Analog ergibt sich für negative ϑ bzw. negativ imaginäre Werte von x das Schema:

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{lll} x = 0 & -i & 0 \\ \vartheta = 0 & -\frac{\pi}{2} & -\pi \\ f_1(x) = 0 & -i & -i \cdot \sqrt{3} \\ f_2(x) = i \cdot \sqrt{3} & 2i & i \cdot \sqrt{3} \\ f_3(x) = -i \cdot \sqrt{3} & -i & 0, \end{array} \right.$$

so daß die Stelle $x = -i$ nur für $f_1(x)$ und $f_3(x)$, nicht aber für $f_2(x)$ als Verzweigungspunkt erscheint.

Nun lassen sich aber die für $|x| < 1$ bestehenden Potenzreihen-Entwicklungen von $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ leicht angeben. Für reelle ϑ des Intervalls $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ und beliebige reelle λ bestehen bekanntlich die Reihendarstellungen¹⁾:

$$(6) \quad \begin{aligned} \sin \lambda \vartheta &= \lambda \cdot \sin \vartheta + \frac{\lambda(1^2 - \lambda^2)}{3!} \sin^3 \vartheta \\ &+ \frac{\lambda(1^2 - \lambda^2)(3^2 - \lambda^2)}{3!} \sin^5 \vartheta + \dots \end{aligned}$$

$$(7) \quad \begin{aligned} \cos \lambda \vartheta &= 1 - \frac{\lambda^2}{2!} \sin^2 \vartheta + \frac{\lambda^2(2^2 - \lambda^2)}{4!} \sin^4 \vartheta \\ &- \frac{\lambda^2(2^2 - \lambda^2)(4^2 - \lambda^2)}{6!} \sin^6 \vartheta + \dots \end{aligned}$$

Setzt man speziell $\lambda = \frac{1}{3}$ und substituiert in (6) mit Rücksicht auf Gleichung (4): $\sin \vartheta = \frac{x}{i}$, so ergibt sich auf Grund der ersten Gleichung (5):

¹⁾ S. z. B. Schlömilch, *Algebr. Analysis* (4. Aufl. 1868), § 60 (p. 263), Gl. (18), (16). — Hattendorf, *Algebr. Analysis* (1877), § 47 (p. 133), Gl. (7), (8) ... Auch: Stolz-Gmeiner, *Einl. in die Funktionentheorie*, II (1905), p. 383, Gl. (18), (19), (wenn daselbst $\arcsin x = \vartheta$ gesetzt wird).

wo:

$$(8) \mathfrak{P}(x) = \frac{x}{3} - \frac{(1^2 \cdot 3^2 - 1)}{3!} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \frac{(1^2 \cdot 3^2 - 1)(3^2 \cdot 3^2 - 1)}{5!} \left(\frac{x}{3}\right)^5 - \dots,$$

zunächst für reelle x des Intervalls $-1 \leq x \leq +1$, dann aber wegen des analytischen Charakters von $f_1(x)$ ohne weiteres für komplexe x des Bereiches $|x| \leq 1$.

Man hat ferner:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\vartheta \pm 2\pi}{3} &= \sin \frac{\vartheta}{3} \cos \frac{2\pi}{3} \pm \cos \frac{\vartheta}{3} \sin \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{\vartheta}{3} \pm \sqrt{3} \cdot \cos \frac{\vartheta}{3} \right). \end{aligned}$$

Substituiert man auch in Gleichung (7): $\sin \vartheta = \frac{x}{i}$ und bezeichnet die für $\lambda = \frac{1}{3}$ resultierende Potenzreihe mit $Q(x)$, so daß also:

$$(9) \quad \begin{aligned} Q(x) &= 1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{(2^2 \cdot 3^2 - 1)}{4!} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^4 \\ &\quad + \frac{(2^2 \cdot 3^2 - 1)(4^2 \cdot 3^2 - 1)}{6!} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^6 + \dots, \end{aligned}$$

so ergibt sich weiter mit Berücksichtigung von (5):

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \mathfrak{P}_2(x) = -\mathfrak{P}(x) + i \cdot \sqrt{3} \cdot Q(x) \\ f_3(x) &= \mathfrak{P}_3(x) = -\mathfrak{P}(x) - i \cdot \sqrt{3} \cdot Q(x). \end{aligned}$$

Aus den vorausgeschickten Betrachtungen über das Verhalten von $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ in Bezug auf die Stellen $x = \pm i$ folgt dann, daß für das Funktionselement $\mathfrak{P}_1(x)$ die beiden Stellen $x = \pm i$ singuläre sind, dagegen für $\mathfrak{P}_2(x)$ nur die Stelle $x = i$, für $\mathfrak{P}_3(x)$ nur $x = -i$.

Bedeutet also B irgend einen einfach zusammenhängenden Bereich, der die beiden Stellen $x = \pm i$ im Innern enthält, so wird das Funktionselement $\mathfrak{P}_1(x)$ bei analytischer Fortsetzung über einen den Punkt $x = i$ einmal umlaufenden Schleifenweg, wie das Schema (A) zeigt, in $\mathfrak{P}_2(x)$ übergehen. Wird sodann vom Punkte i aus ein Schnitt längs der imaginären Achse in

der Richtung nach oben gezogen, so existiert in dem so zerschnittenen Bereich B' für $\mathfrak{P}_2(x)$ keine singuläre Stelle, und es ist daher $\mathfrak{P}_2(x)$ auf jedem beliebigen innerhalb B' verlaufenden Wege analytisch fortsetzbar. Das analoge findet statt, wenn man $\mathfrak{P}_1(x)$ durch analytische Fortsetzung über einen die Stelle $x = -i$ umlaufenden Schleifenweg zunächst in $\mathfrak{P}_3(x)$ überführt (s. das Schema (B)) und sodann einen Schnitt vom Punkte $-i$ in der negativen Richtung der imaginären Achse führt.

Es zeigt sich also, daß das Funktionselement $\mathfrak{P}_1(x)$ auf unendlich vielen überall dicht liegenden Wegen nach jedem inneren Punkte von B analytisch fortsetzbar ist, ohne indessen einen im Bereiche B eindeutigen und regulären Zweig einer analytischen Funktion zu definieren.

Schließlich sei mit Rücksicht auf eine in Nr. 2 (s. p. 60 am Schlusse und Fußn. 3) gemachte Bemerkung noch folgendes erwähnt: Enthält der Bereich B nur eine der Stellen $x = \pm i$ im Innern, z. B. nur die Stelle $x = i$, so definiert offenbar das Funktionselement $\mathfrak{P}_3(x)$ einen im Innern von B eindeutigen und regulären Funktionszweig, obschon der Bereich die singuläre Stelle i der betreffenden analytischen Funktion im Innern enthält.
