Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1899. Heft II.

München.
Verlag der k. Akademie.
1899.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Ueber ein Convergenz-Kriterium für Kettenbrüche mit positiven Gliedern.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 8. Juli.)

Im folgenden sollen a_ν, b_ν, p_ν, q_ν, r_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) allemal unbegrenzte Folgen positiver Zahlen bedeuten.

Als notwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz des unendlichen Kettenbruches:

$$(1) \qquad \left[\frac{1}{q_\nu}\right]_1^\infty \equiv \frac{1|}{|q_1} + \frac{1|}{|q_2} + \ldots + \frac{1|}{|q_\nu} + \ldots\ldots$$

ergiebt sich alsdann:[1])

(A_1) die Divergenz der Reihe $\sum q_\nu$;

ebenso für die Convergenz des Kettenbruches:

$$(2) \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \ldots\ldots = \left[\frac{1}{r_\nu}\right]_1^\infty$$

(A_2) die Divergenz der Reihe $\sum r_\nu$,

wo: $r_1 = \dfrac{b_1}{a_1}$, im übrigen:

$$(3) \qquad r_{2\nu} = \frac{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu-1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}} \cdot b_{2\nu}, \quad r_{2\nu+1} = \frac{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}}{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu-1}} \cdot \frac{b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}}.$$

Da sodann die Divergenz der Reihe $\sum q_\nu q_{\nu+1}$ stets die-

[1]) Vgl. Bd. 28 (1898) dieser Berichte p. 311. — Encyklop. der Math. Wissensch. Bd. 1, p. 128. — Stolz, Vorl. über Allg. Arithm. Bd. 2, p. 282.

jenige der Reihe $\sum q_\nu$ nach sich zieht, aber nicht umgekehrt,[1]) so resultirt als eine hinreichende, aber nicht nothwendige Bedingung für die Convergenz des Kettenbruches (1):

(B₁) die Divergenz der Reihe $\sum q_\nu\, q_{\nu+1}$;

und daraus entsprechend für die Convergenz des Kettenbruches (2):

(B₂) die Divergenz der Reihe $\sum \frac{b_\nu\, b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}$.

In zwei kürzlich publicirten Arbeiten[2]) über die Convergenz gewisser Kettenbrüche hat nun Herr Saalschütz zunächst ohne Beweis den Satz mitgetheilt, dass

(C) die Divergenz der Reihe $\sum \sqrt{\frac{b_\nu\, b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}}$

als nothwendige[3]) und hinreichende Bedingung für die Convergenz des Kettenbruches (1) zu gelten habe, und er erblickt gerade in der Auffindung dieses Kriteriums ein deutliches Kennzeichen für die grössere Tragweite seiner Untersuchungs-Methode[4]) gegenüber der bei früherer Gelegenheit[5])

---

[1]) Wenn nämlich $\sum q_\nu$ convergirt, so muss auch $\sum q_\nu\, q_{\nu+1}$ a fortiori convergiren; wenn dagegen $\sum q_\nu$ divergirt, so kann immerhin $\sum q_\nu\, q_{\nu+1}$ noch convergiren $\left(\text{Beispiel: } q_\nu = \frac{1}{\nu}\right)$.

[2]) Journ. f. Math. Bd. 120 (1899), p. 138, Fussnote. — Mitth. der Königsberger phys.-ökon. Ges. vom 9. Februar 1899, p. 6.

[3]) An der zuletzt citirten Stelle heisst es noch ausführlicher, dass der Kettenbruch allemal oscillirt, wenn jene Reihe convergirt. Dies ist indessen unrichtig, wie weiter unten gezeigt werden wird.

[4]) Der Kern der von Herrn Saalschütz befolgten Methode besteht darin, dass er der bekannten Recensionsformel für den n^{ten} Näherungsbruch-Nenner B_n des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, nämlich:

(a) $$B_n = b_n\, B_{n-1} + a_n\, B_{n-2}$$

die Form giebt:

(b) $$C_{n-1}\,(C_n - b_n) - a_n = 0, \text{ wo: } C_\nu = \frac{B_\nu}{B_{\nu-1}},$$

und sodann diese Quotienten C_ν als Unbekannte betrachtet.

[5]) S. das erste Citat in Fussnote 1) p. 261.

von mir benützten. Da ich die ziemlich schwer zu übersehenden Resultate jener umfangreichen Arbeiten (74 Quartseiten) noch nicht genügend studirt habe, so bin ich weit entfernt, die Richtigkeit jener Bemerkung im allgemeinen bestreiten zu wollen.[1]) In Beziehung auf das eben erwähnte Convergenz-Kriterium möchte ich sie jedoch aus zwei Gründen als unzutreffend bezeichnen: erstens weil dasselbe nur zur Hälfte richtig ist, insofern die fragliche Bedingung zwar als hinreichend, keineswegs aber als nothwendig erscheint; zweitens aber, weil sich das so berichtigte Kriterium ohne die, wie ich glauben möchte, wohl etwas umständlichere Methode des Herrn Saalschütz unmittelbar aus dem Fundamental-Kriterium (A_1), (A_2) ableiten lässt, nämlich analog wie die ebenfalls lediglich hinreichenden Convergenz-Bedingungen (B_1), (B_2) durch eine ganz elementare Ueberlegung über die gegenseitigen Convergenz-Beziehungen der Reihen $\sum q_\nu$, $\sum \sqrt{q_\nu\, q_{\nu+1}}$.

---

1. Um die beiden zuletzt ausgesprochenen Behauptungen näher zu begründen, schicke ich zunächst den folgenden Hülfssatz voran:

> Sind die beiden Reihen $\sum q_\nu$, $\sum r_\nu$ *convergent*, so *convergirt* auch die Reihe $\sum \sqrt{q_\nu\, r_\nu}$: die *Divergenz* der Reihe $\sum \sqrt{q_\nu\, r_\nu}$ bildet also eine *hinreichende* Bedingung dafür, dass *mindestens eine* der beiden Reihen $\sum q_\nu$, $\sum r_\nu$ *divergirt.* Diese Bedingung ist aber *keine nothwendige*, und zwar können trotz der *Convergenz* von $\sum \sqrt{q_\nu\, r_\nu}$ sogar *beide* Reihen $\sum q_\nu$, $\sum r_\nu$ *divergiren.*

---

[1]) Immerhin will mir nicht einleuchten, warum gerade, wie Herr Saalschütz bemerkt (Journ. f. Math. a. a. O.), die in Fussnote 4), p. 262 mit (b) bezeichnete Gleichung die „wahre Quelle" eines von mir a. a. O. aufgestellten Convergenz-Kriteriums sein soll, da ich dasselbe doch direkt aus der eigentlichen Fundamentalgleichung (a) abgeleitet habe, ohne den Umweg über (b) zu nehmen.

Beweis. Aus der Beziehung:

$$(4) \qquad (\sqrt{q_\nu} - \sqrt{r_\nu})^2 = q_\nu + r_\nu - 2\sqrt{q_\nu r_\nu} \geqq 0$$

folgt unmittelbar (der bekannte Satz, dass das geometrische Mittel niemals das arithmetische übersteigt):

$$(5) \qquad \sqrt{q_\nu r_\nu} \leqq \tfrac{1}{2}(q_\nu + r_\nu).$$

Da nun gleichzeitig mit den beiden Reihen $\sum q_\nu$, $\sum r_\nu$ stets auch $\sum \frac{1}{2}(q_\nu + r_\nu)$ convergirt, so ergiebt sich in diesem Falle, dass auch $\sum \sqrt{q_\nu r_\nu}$ convergirt.

Zugleich lehrt die Ungleichung (5), dass es zunächst nicht erlaubt ist, umgekehrt aus der Convergenz von $\sum \sqrt{q_\nu r_\nu}$ auf diejenige von $\sum q_\nu$, $\sum r_\nu$ zu schliessen. Dass aber dieser Schluss nicht nur logisch unzulässig, sondern sachlich falsch wäre, erkennt man leicht aus den folgenden Beispielen.

Es bezeichne zunächst d_ν, wo $0 < d_\nu < G$, das allgemeine Glied einer divergenten, $c_\nu > 0$ dasjenige einer convergenten Reihe. Setzt man sodann:

$$(6) \qquad q_\nu = d_\nu, \quad r_\nu = c_\nu^2$$

so wird:

$$(7) \qquad \sqrt{q_\nu r_\nu} = \sqrt{d_\nu} \cdot c_\nu < G \cdot c_\nu,$$

sodass $\sum \sqrt{q_\nu r_\nu}$ convergirt, obschon $\sum q_\nu \equiv \sum d_\nu$ divergirt.

Bezeichnet ferner $d_\nu > 0$ das allgemeine Glied einer divergenten Reihe von der Beschaffenheit, dass $\sum d_\nu^{1+p}$ für ein hinlänglich grosses $p > 0$ convergirt $\left(\text{z. B. } d_\nu = \frac{1}{\nu^\varrho}\right.$, wo: $0 < \varrho \leqq 1$, also: $\sum d_\nu^{1+p} = \sum \frac{1}{\nu^{\varrho(1+p)}}$ convergent, wenn: $\varrho(1+p) > 1$, d. h. wenn: $\left. p > \frac{1-\varrho}{\varrho}\right)$, so setze man:

$$(8) \qquad \begin{cases} q_\nu = d_\nu^{1+p(1+(-1)^\nu)}, \text{ d. h. } q_{2\nu} = d_\nu^{1+2p}, \; q_{2\nu+1} = d_\nu, \\ r_\nu = d_\nu^{1+p(1-(-1)^\nu)}, \text{ d. h. } r_{2\nu} = d_\nu \quad, \; r_{2\nu+1} = d_\nu^{1+2p}. \end{cases}$$

Alsdann wird:

$$\sqrt{q_\nu r_\nu} = d_\nu^{1+p}, \tag{9}$$

also $\sum \sqrt{q_\nu r_\nu}$ convergent, während die Reihen $\sum q_{2\nu+1}$, $\sum r_{2\nu}$ und somit auch die beiden Reihen $\sum q_\nu$, $\sum r_\nu$ divergiren.

3. Setzt man jetzt speciell $r_\nu = q_{\nu+1}$, so bleibt zunächst der erste Theil des vorigen Satzes unverändert bestehen, da die zum Beweise dienende Ungleichung (5) durch jene besondere Festsetzung nicht alterirt wird. Somit folgt:

Ist die Reihe $\sum q_\nu$ *convergent*, so *convergirt* auch die Reihe $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$: die *Divergenz* der Reihe $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ bildet also eine *hinreichende* Bedingung für diejenige der Reihe $\sum q_\nu$.

Dass aber auch hier diese Bedingung keine nothwendige ist, dass also $\sum q_\nu$ divergiren kann, auch wenn $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ convergirt, zeigt eine einfache Modification des zuletzt angegebenen Beispiels. Man setze (wieder unter der Voraussetzung, dass $\sum d_\nu$ divergirt, $\sum d_\nu^{1+p}$ convergirt):

$$\left\{\begin{aligned} &q_\nu = d_\nu^{1+(p+\frac{1}{2})(1+(-1)^\nu)} \\ &\text{also: } q_{2\nu+1} = d_{2\nu+1}, \quad q_{2\nu} = d_{2\nu}^{2+2p}, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

und daher:

$$\sqrt{q_{2\nu+1}\, q_{2\nu}} = \sqrt{d_{2\nu+1}} \cdot d_{2\nu}^{1+p}. \tag{11}$$

Daraus folgt, dass $\sum \sqrt{q_{2\nu+1} \cdot q_{2\nu}} = \sum \sqrt{q_\nu \cdot q_{\nu+1}}$ wiederum convergirt, während $\sum q_{2\nu+1}$, also auch $\sum q_\nu$ divergirt.

4. Wie ein Blick auf das vorige Beispiel lehrt, rührt die Convergenz der Reihe $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ bei gleichzeitiger Divergenz von $\sum q_\nu$ wesentlich davon her, dass $\sum q_{2\nu}$ convergirt, dagegen $\sum q_{2\nu+1}$ divergirt. Daraus folgt, dass in dem vorliegenden Falle die q_ν sicherlich keine von irgend einem Index $\nu > n$ ab monoton bleibende Folge bilden können. Es gilt aber auch umgekehrt, dass die Monotonie der Folge q_ν (für

$\nu \geqq n$) das Zusammentreffen der Convergenz von $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ und der Divergenz von $\sum q_\nu$ definitiv ausschliesst; d. h. es besteht der folgende Satz:

Sind die q_ν zum mindesten für $\nu \geqq n$ *monoton*, so sind die Reihen $\sum q_\nu$ und $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ stets *gleichzeitig convergent* oder *gleichzeitig divergent*. Insbesondere bildet dann also die *Divergenz* der Reihe $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ eine *nothwendige* und *hinreichende* Bedingung für diejenige der Reihe $\sum q_\nu$.

Beweis. Sind für $\nu \geqq n$ die $q_\nu > 0$ und niemals abnehmend, so erkennt man ohne weiteres, dass die beiden Reihen $\sum q_\nu$, $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ stets divergiren müssen. Sind sie dagegen niemals zunehmend, so hat man:

$$q_\nu \geqq q_{\nu+1} \text{ für } \nu \geqq n, \tag{12}$$

(13) also: $$q_\nu^2 \geqq q_\nu q_{\nu+1} \geqq q_{\nu+1}^2$$

(14) und: $$q_\nu \geqq \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}} \geqq q_{\nu+1} \quad \Big\} (\nu \geqq n)$$

schliesslich:

$$\sum_n^\infty {}^\nu q_\nu \geqq \sum_n^\infty {}^\nu \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}} \geqq \sum_{n+1}^\infty q_\nu, \tag{15}$$

woraus die Richtigkeit des oben ausgesprochenen Satzes unmittelbar hervorgeht.

5. Wendet man diese Resultate zunächst auf das Kettenbruch-Kriterium (A_1) an, so ergiebt sich:

(C_1) Die *Divergenz* der Reihe $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ bildet eine *hinreichende* Bedingung für die *Convergenz* des Kettenbruches $\left[\frac{1}{q_\nu}\right]_1^\infty$; diese Bedingung ist zugleich eine *nothwendige*, wenn die q_ν zum mindesten von einem bestimmten Index $\nu = n$ ab *monoton* bleiben.

In dieser Form erscheint das gewonnene Kriterium zunächst ohne besonderen Werth (ebenso wie das Kriterium (B_1)). da generell, wenn der Kettenbruch von vornherein in der Form $\left[\frac{1}{q_\nu}\right]$ vorgelegt ist, die Anwendung des Haupt-Kriteriums (A_1), d. h. die Untersuchung der Reihe $\sum q_\nu$ einfacher erscheint, als diejenige der Reihe $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$. Seine Bedeutung tritt erst hervor, wenn die q_ν speciell so beschaffen sind, dass $q_\nu q_{\nu+1}$ merklich einfacher ausfällt als q_ν selbst,[1] und dies ist namentlich dann der Fall, wenn $q_\nu = r_\nu$ und die r_ν durch Gl. (3) definirt sind. Man findet auf diese Weise:

(C_2) Die *Divergenz* der Reihe $\sum \sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}}$ bildet eine für die *Convergenz* des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *hinreichende* Bedingung, die aber im allgemeinen *keine nothwendige* ist. Das letztere ist jedoch der Fall, wenn die mit r_ν bezeichneten Ausdrücke (Gl. (3)) zum mindesten für $\nu > n$ *monoton* bleiben.[2]

Da die Feststellung des monotonen Verhaltens der r_ν im allgemeinen verhältnissmässig complicirt ausfällt, so kommt das obige Kriterium wesentlich nur als hinreichende Bedingung in Betracht und stellt in diesem Sinne thatsächlich eine merkliche Verbesserung der ebenfalls nur hinreichenden Convergenz-Bedingung (B_2) dar: die letztere versagt, wenn $\sum \frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}$ convergirt. Man hat in diesem Falle (zum mindesten für $\nu \geq n$): $\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}} < 1$, und daher: $\sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}} > \frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}$, sodass $\sum \sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}}$ eventuell divergiren kann und sodann auf Grund des Kriteriums (C_2) eine Entscheidung liefert.

---

[1]) Dieses Verhältniss ist ein ganz analoges, wie bei den Kriterien erster und zweiter Art für unendliche Reihen — vgl. meine Bemerkungen; Math. Ann. Bd. 35 (1890), p. 308–311.

[2]) Es genügt etwa nicht, dass die $\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}$ monoton ausfallen (s. das Beispiel in Nr. 3).

Eine besonders einfache Gestalt nimmt die fragliche Convergenz-Bedingung für Kettenbrüche von der häufig vorkommenden Form $\left[\frac{p_\nu}{1}\right]_1^\infty$ an: sie reducirt sich in diesem Falle auf die Divergenz der Reihe $\sum \frac{1}{\sqrt{p_\nu}}$. Mit Hülfe dieses Kriteriums erkennt man z. B. ohne alle Rechnung, dass der Kettenbruch $\left[\frac{\nu^p}{1}\right]_1^\infty$ für $0 \leq p \leq 2$ convergirt, während das Kriterium (B_2) die Convergenz des Kettenbruches nur für $0 < p < 1$ erkennen lässt.

Bleiben ferner die $\frac{b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}$ d. h. die $\frac{b_\nu}{a_\nu}$ über, also die $\frac{a_\nu}{b_\nu}$ unter einer endlichen Schranke, so genügt auch die Divergenz der einfacheren Reihe $\sum \sqrt{b_\nu}$ für die Convergenz des Kettenbruches.

Nachtrag zu dem Aufsatze:

Zur Theorie des Doppel-Integrals etc.

(p. 39—62 dieses Bandes).

Bei der Abfassung dieses Aufsatzes war mir eine Arbeit über Doppel-Integrale entgangen, welche Herr C. Arzelà in den Abhandlungen der Bologneser Akademie vom Jahre 1892 veröffentlicht hat.[1]) Herr Arzelà untersucht daselbst[2]) zunächst, in wieweit die Existenz des eigentlichen Doppel-Integrals $\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y)\, dx\, dy$ diejenigen der beiden einfachen Integrale $\int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx$, $\int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy$ nach sich zieht und gelangt hier-

[1]) „Sugli integrali doppi." Mem. Accad. Bologna, Serie V, T. II. p. 133—147.

[2]) A. a. O. Nr. 4—6.

bei zu ähnlichen Resultaten, wie sie in dem Satze meines § 1 zusammengefasst sind. Immerhin dürfte gerade die Vergleichung beider Darstellungen die grössere Prägnanz und Uebersichtlichkeit der von mir gewählten Bezeichnungsweise deutlich hervortreten lassen.

Sodann[1]) giebt Herr Arzelà eine hinreichende Bedingung für die Existenz der Beziehung:

$$(A) \qquad \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy$$

ohne vorausgesetzte Existenz des entsprechenden Doppel-Integrals, die ich etwa in möglichster Kürze als „im allgemeinen gleichmässige, horizontale und vertikale Integrabilität von $f(x, y)$“ bezeichnen will. Im Anschlusse hieran möchte ich zur Vervollständigung der auf p. 60 meines Aufsatzes gemachten Bemerkung,

> „dass die Existenz des betreffenden Doppel-Integrals zur Zeit als die weitaus allgemeinste Form einer hinreichenden Bedingung für das Zustandekommen der Beziehung (A) gelten dürfe“

noch folgendes hinzufügen. Es wäre möglich, dass die Bedingung des Herrn Arzelà für allgemeiner zu gelten hat, als die oben genannte. Hierzu müsste aber zuvor zweierlei bewiesen werden, nämlich: erstens, dass es wirklich Functionen $f(x, y)$ giebt, für welche jene Bedingung erfüllt ist, während andererseits das entsprechende Doppel-Integral nicht existirt; zweitens, dass alle $f(x, y)$, für welche das Doppel-Integral existirt, auch eo ipso der fraglichen Bedingung genügen. Aber selbst wenn dieser Beweis geführt werden kann, so wäre die auf diese Weise erzielte Verallgemeinerung der Bedingungen für die Existenz der Beziehung (A) eine verhältnissmässig unerhebliche. Zu der ausserordentlich weit reichenden, durch präcise Umgrenzung der eventuell zulässigen Unstetigkeiten kurz und scharf zu charakteri-

---

[1]) A. a. O. Nr. 8.

sirenden Klasse von Functionen $f(x, y)$, für welche das Doppel-Integral existirt, würde dann auf Grund der Arzelà'schen Bedingung eine sehr specielle, allenfalls durch künstliche Constructionen mit Beispielen zu belegende Gattung von solchen $f(x, y)$ hinzutreten, denen lediglich die relativ complicirte Eigenschaft der gleichmässigen horizontalen und vertikalen Integrabilität ohne Existenz des Doppel-Integrals zukommt. Keinesfalls werden dann aber etwa alle möglichen $f(x, y)$ umfasst, für welche die Beziehung (A) besteht. Denn, wie auch Herr Arzelà selbst hervorhebt,[1]) die fragliche Bedingung ist zwar eine hinreichende, aber durchaus keine nothwendige. Als Illustration zu dieser Bemerkung können gerade diejenigen Functions-Beispiele dienen, welche ich in § 2 meines Aufsatzes angegeben habe: für diese besteht in der That die Beziehung (A), obschon dieselben, wie leicht zu sehen, der Arzelà'schen Bedingung nicht genügen. Ich möchte darnach sagen, dass man auch im günstigsten Falle den wahren Grundlagen der Beziehung (A) mit Hülfe jener letzteren Bedingung nicht wesentlich näher kommt. —

Schliesslich hätte ich im Interesse der historischen Gerechtigkeit noch folgende zwei Bemerkungen nachzutragen:

In der Fussnote 1) p. 42 ist hervorgehoben, dass Harnack in seinen Elementen der Diff.- und Integr.-Rechnung fälschlich behauptet, dass bei Existenz des Doppel-Integrals $\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy$ die Nicht-Existenz der einfachen Integrale $\int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx$ bezw. $\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy$ auf eine unausgedehnte Menge y bezw. x beschränkt sein müsse.

Dem ist hinzuzufügen, dass Harnack selbst späterhin[2]) den fraglichen Irrthum lediglich als Ausfluss einer incorrecten Ausdrucksweise erklärt und eine vollkommen

[1]) A. a. O. Nr. 7 am Schlusse.

[2]) Math. Ann. Bd. 26 (1886) p. 567.

richtige Fassung der betreffenden Behauptung angegeben hat.

Ferner ist der von mir benützte und auf p. 56, 57 kurz bewiesene Hülfs-Satz:

$$\underline{\int_{x_0}^{X}} f'(x) \cdot dx \leq f(X) - f(x_0) \leq \overline{\int_{x_0}^{X}} f'(x)\, dx,$$

wie ich nachträglich bemerkt habe, in einem von Herrn Pasch[1] aufgestellten, etwas allgemeineren Satze als specieller Fall enthalten.

---

[1]) Math. Ann. Bd. 30 (1887) p. 153.