

Sitzungsberichte
der
mathematisch-physikalischen Classe
der
k. b. Akademie der Wissenschaften
zu München.

Band XX. Jahrgang 1890.



München.
Verlag der K. Akademie.
1891.

In Commission bei G. Franz.

Ueber die interpolatorische Darstellung einer Function durch eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe.

Von H. Seeliger.

(Eingelaufen 8. November.)

Mit derselben Allgemeinheit, mit der man eine Function einer Variablen durch eine Reihe darstellen kann, die nach Sinus und Cosinus der Vielfachen der Variablen fortschreitet, kann man bekanntlich eine Function zweier Variablen nach Kugelfunctionen entwickeln. In der Astronomie und Physik tritt nun sehr häufig die Aufgabe auf, aus gegebenen Werthen der unbekannten Function die unbestimmten Constanten der allgemeinen Reihenentwicklung zu berechnen. Im Allgemeinen bleibt nun freilich nichts übrig, als die in linearer Form auftretenden Constanten durch die gewöhnlichen Ausgleichungsmethoden zu berechnen, was bei einigermaßen grosser Anzahl derselben stets mit bedeutender Mühe verbunden ist. Wählt man aber, und dies ist in vielen Fällen der Praxis ausführbar, die Werthe, welche den Verlauf der Function angeben, in ganz bestimmter Weise, so lassen sich die genannten mühsamen Rechnungen zum grössten Theil vermeiden. Für eine Function einer Variablen gelangt man bekanntlich zu solch einfachen Rechenvorschriften, wenn man aequidistante Argumentenwerthe zu Grunde legt.

Die für diesen Fall aufgestellten Formeln zu Berechnung der Coefficienten der Sinus- und Cosinusreihen lassen an Ein-

fachheit nichts zu wünschen übrig und geben für diese die besten Werthe im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate.

Genau dasselbe gilt nun auch von der Bestimmung der Coefficienten einer nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihe, wenn man die Vorschriften anwendet, welche Fr. Neumann entwickelt hat. Diese schöne und wichtige Methode führt aber geradezu auf ein Minimum von Rechenarbeit, wenn man gewisse Hülftafeln zur Verfügung hat. Der Nutzen derselben ist in die Augen fallend und ihr Vorhandensein für eine leichte Anwendbarkeit der Neumann'schen Methode sehr wünschenswerth. Ich habe mich deshalb der Berechnung solcher Tabellen unterzogen und theile dieselben im Folgenden mit.

Die Vorschriften Fr. Neumann's selbst hier abzuleiten ist um so weniger nöthig, als dieselben ausser in der Originalabhandlung¹⁾ erst neuerlich eine sehr durchsichtige und allgemein zugängliche Darstellung²⁾ erfahren haben. Ich werde mich deshalb nur auf dasjenige beschränken, was zum Verständniss der Tabellen und zu deren Anwendung erforderlich ist.

Es seien die gegebenen Werthe der Function f auf einer Kugelfläche (etwa der Erde) ausgebreitet. ϑ ($\cos \vartheta = \mu$) sei die Nordpoldistanz, φ die geographische Länge. Setzt man dann:

$$f(\mu, \varphi) = \sum_0^n Y^n \quad 1)$$

so handelt es sich um die Bestimmung der Coefficienten der Kugelfunction Y^n vom Grade n . Man hat aber allgemein

$$Y^n(\mu, \varphi) = \sum_0^n (A_n \cos i\varphi + B_n \sin i\varphi) P_n(\mu)$$

1) Fr. Neumann. *Astronom. Nachr.* Band 15, pag. 313 etc.

2) Vorlesungen über die Theorie des Potentials etc. von Fr. Neumann, herausgegeben von C. Neumann. Leipzig 1887. pg. 131 ff.

worin die A und B die $2n + 1$ willkürlichen also jetzt zu bestimmenden Constanten sind und

$$P_{ni}(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d^i P^n(\mu)}{d\mu^i}$$

wenn P^n die Laplace-Legendre'sche Kugelfunction n^{ten} Grades von einer Variablen ist.

Die Fr. Neumann'sche Methode schreibt nun vor: Gegeben seien die $2p(p+1)$ Functionswerthe:

$$\begin{aligned} f(\mu_1, 0), \quad f\left(\mu_1, \frac{\pi}{p}\right) \cdot \cdot \cdot f\left(\mu_1, (2p-1)\frac{\pi}{p}\right) \\ f(\mu_2, 0), \quad f\left(\mu_2, \frac{\pi}{p}\right) \cdot \cdot \cdot f\left(\mu_2, (2p-1)\frac{\pi}{p}\right) \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ f(\mu_{p+1}, 0), \quad f\left(\mu_{p+1}, \frac{\pi}{p}\right) \cdot \cdot \cdot f\left(\mu_{p+1}, (2p-1)\frac{\pi}{p}\right) \end{aligned}$$

worin $\mu_1 \cdots \mu_{p+1}$ die $p+1$ Wurzeln der Gleichung

$$P^{p+1}(\mu) = 0$$

sind.

Man bestimmt nun zunächst für jedes

$$\lambda = 1, 2, \dots p+1$$

und

$$i = 0, 1, 2 \dots p$$

die Grössen C und S durch

$$\text{II) } \begin{cases} \varepsilon_i p C_i(\mu_\lambda) = \sum_0^{2p-1} f\left(\mu_\lambda, \nu \frac{\pi}{p}\right) \cos \nu \frac{i\pi}{p} \\ p S_i(\mu_\lambda) = \sum_0^{2p-1} f\left(\mu_\lambda, \nu \frac{\pi}{p}\right) \sin \nu \frac{i\pi}{p} \end{cases}$$

worin $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots \varepsilon_{p-1} = 1$; $\varepsilon_0 = \varepsilon_p = 2$

Hieraus ergibt sich:

$$1) \begin{cases} A_{ni} = \frac{2n+1}{2} \frac{\Pi(n-i)}{\Pi(n+i)} \sum_1^{p+1} a_\lambda P_{ni}(\mu_\lambda) C_i(\mu_\lambda) \\ B_{ni} = \frac{2n+1}{2} \frac{\Pi(n-i)}{\Pi(n+i)} \sum_1^{p+1} a_\lambda P_{ni}(\mu_\lambda) S_i(\mu_\lambda) \end{cases}$$

Hierin bedeutet $\Pi(\lambda) = 1. 2. \dots \lambda$ und die Zahlen a ergeben sich durch die Auflösung des Systemes linearer Gleichungen:

$$a_1 \mu_1^\lambda + a_2 \mu_2^\lambda + \dots + a_{p+1} \mu_{p+1}^\lambda = \alpha_\lambda$$

$$2) \quad \lambda = 0, 1, \dots, p; \quad \alpha_\lambda = \int_{-1}^{+1} x^\lambda dx$$

Setzt man aber

$$\mathfrak{A}_{ni}(\mu_\lambda) = \frac{2n+1}{2} \frac{\Pi(n-i)}{\Pi(n+i)} a_\lambda P_{ni}(\mu_\lambda)$$

so wird einfach

$$\text{III)} \quad \begin{cases} A_{ni} = \lambda \sum_1^{p+1} \mathfrak{A}_{ni}(\mu_\lambda) C_i(\mu_\lambda) \\ B_{ni} = \lambda \sum_1^{p+1} \mathfrak{A}_{ni}(\mu_\lambda) S_i(\mu_\lambda) \end{cases}$$

Man kann nun die Zahlen $\mathfrak{A}_{ni}$ ein für alle Mal für bestimmte Werthe von p berechnen und in einfachen und wenig umfangreichen Tabellen unterbringen. Dann ist die Berechnung der gesuchten A und B durch die höchst einfachen Formeln II) und III) gegeben. Solche Tabellen enthält nun das Folgende und zwar bis $p+1=7$, welche Grenze auch in der Gauss'schen Abhandlung: *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* 1814 (Werke Band III) eingehalten ist. Diese wunderbare Arbeit enthält bis $p+1=7$ nicht nur die numerischen Werthe der Wurzeln der Gleichung

$$P^{p+1}(\mu) = 0$$

sondern auch die Grössen a . Es ist nämlich

$$\mu = 2a \text{ (Gauss)} - 1$$

$$a = 2R \text{ (Gauss)}$$

Um die letztere Beziehung, die nicht unmittelbar einleuchtend ist, einzusehen, braucht nur daran erinnert zu werden, dass die Gauss'sche Abhandlung unser a_1 so definiert:

$$a_1 = \left(\frac{x - \mu_1}{P^{p+1}(x)} \right)_{x=\mu_1} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{P^{p+1}(x)}{x - \mu_1} dx$$

Man kann nun leicht zeigen, dass die directe Auflösung des Systemes 2) auf dieselbe Form führt. Setzt man nämlich

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{p+1} \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \dots & \mu_{p+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1^p & \mu_2^p & \dots & \mu_{p+1}^p \end{vmatrix}$$

und bezeichnet man die auftretenden Partialdeterminanten mit δ , so hat man

$$\begin{aligned} 3) \quad \mathcal{A} &= \delta_0 + \mu_1 \delta_1 + \mu_1^2 \delta_2 + \dots + \mu_1^p \delta_p \\ &= (\mu_2 - \mu_1) (\mu_3 - \mu_1) \dots (\mu_{p+1} - \mu_1) \\ &\quad (\mu_3 - \mu_2) \dots (\mu_{p+1} - \mu_2) \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad (\mu_{p+1} - \mu_p) \end{aligned}$$

Die Auflösung von 2) giebt aber:

$$4) \quad \mathcal{A} a_1 = \alpha_0 \delta_0 + \alpha_1 \delta_1 + \dots + \alpha_p \delta_p$$

Bezeichnet man den von μ_1 freien Theil von $\mathcal{A}$ mit C so ist nach 3)

$$\mathcal{A} = C (\mu_2 - \mu_1) (\mu_3 - \mu_1) \dots (\mu_{p+1} - \mu_1)$$

Weiter ist, weil $\mu_1 \dots \mu_{p+1}$ Wurzeln von $P^{p+1}(\mu) = 0$ sind

$$P^{p+1}(x) = \varepsilon (x - \mu_1) (x - \mu_2) \dots (x - \mu_{p+1})$$

wo ε der Zahlencoefficient des Gliedes x^{p+1} in dem Ausdrucke der Kugelfunction ist. Man kann hiernach schreiben

$$\mathcal{A} \varepsilon = (-1)^p \cdot C \left(\frac{P^{p+1}(x)}{x - \mu_1} \right)_{x=\mu_1}$$

Nun ist $\frac{P^{p+1}(x)}{x - \mu_1}$ eine ganze Function vom Grade p d. h.

$$5) \quad \frac{P^{p+1}(x)}{x - \mu_1} = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_p x^p$$

net und dann auf 6 Stellen abgekürzt, so dass die letzte Stelle in den Logarithmen im Allgemeinen bis auf 1 oder 2 Einheiten richtig sein wird, was für die meisten praktischen Anwendungen genügen dürfte. Die Rechnungen wurden zwar nur einmal ausgeführt, ihre Richtigkeit ist aber durch mehrere sehr durchgreifende Controlen wahrscheinlich sicherer geprüft, als durch eine Neurechnung.

Solcher Controlgleichungen lassen sich natürlich mit Hilfe der bekannten Relationen zwischen Kugelfunctionen sehr viele ableiten. Als besonders geeignet im vorliegenden Falle wurden aber gefunden

$$\sum \mathfrak{A}_n P_n = 1$$

und

$$a = \frac{2}{2n+1} \sum_0^n \frac{\Pi(n+i)}{\Pi(i)\Pi(n-i)} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \mathfrak{A}_n$$

weil bei passender Anwendung sich diese beiden Formeln in der sicheren Prüfung der berechneten Zahlen auf das Beste ergänzen.

Tabelle 1.

$$\begin{array}{ll} x = \cos \vartheta & P_{n,i} (+x) = \sin^i \vartheta P_i^n(x) \\ P_i^n(x) = \frac{d^i P^n(x)}{dx^i} & P_{n,i} (-x) = (-1)^{n-i} \cdot P_{n,i}(x) \end{array}$$

$$P^0(x) = 1$$

$P_0^0(x) = x$	$P_0^1(x) = 1.5x^2 - 0.5$	$P_0^2(x) = x(-1.5 + 2.5x^2)$	$P_0^3(x) = 0.375 - 3.75x^2 + 4.375x^4$
$P_1^0(x) = 1$	$P_1^1(x) = 3x$	$P_1^2(x) = -1.5 + 7.5x^2$	$P_1^3(x) = x(-7.5 + 17.5x^2)$
	$P_1^4(x) = 3$	$P_1^5(x) = 15x$	$P_1^6(x) = -7.5 + 52.5x^2$
		$P_1^7(x) = 15$	$P_1^8(x) = 105x$
			$P_1^9(x) = 105$

$P_2^0(x) = x(1.875 - 8.75x^2 + 7.875x^4)$	$P_2^1(x) = -0.3125 + 6.5625x^2 - 19.6875x^4 + 14.4375x^6$
$P_2^2(x) = 1.875 - 26.25x^2 + 39.375x^4$	$P_2^3(x) = x(13.125 - 78.75x^2 + 86.625x^4)$
$P_2^4(x) = x(-52.5 + 157.5x^2)$	$P_2^5(x) = 13.125 - 236.25x^2 + 433.125x^4$
$P_2^6(x) = -52.5 + 472.5x^2$	$P_2^7(x) = x(-472.5 + 1792.5x^2)$
$P_2^8(x) = 945x$	$P_2^9(x) = -472.5 + 5197.5x^2$
$P_2^{10}(x) = 945$	$P_2^{11}(x) = 10395x$
	$P_2^{12}(x) = 10395$

Tabelle 2.

$$p + 1 = 3$$

$$\log \mathfrak{A}_{n,i}$$

n	i	μ_1	μ_2	μ_3
0	0	9.443698	9.647818	9.443698
1	0	9.809894 _n	— ∞	9.809894
1	1	9.420819	9.823909	9.420819
2	0	9.744728	0.045758 _n	9.744728
2	1	9.531743 _n	— ∞	9.531743
2	2	8.841638	9.443698	8.841638

$$\text{num. } \mathfrak{A}_{n,i}$$

n	i	μ_1	μ_2	μ_3
0	0	0.277778	0.444444	0.277778
1	0	— 0.645497	0	0.645497
1	1	0.263523	0.666667	0.263523
2	0	0.555556	— 1.111111	0.555556
2	1	— 0.340207	0	0.340207
2	2	0.069444	0.277778	0.069444

	α	$\log \alpha$	$\log \mu$	ϑ
1	0.555556	9.744728	9.889076 _n	140° 46' 6"5
2	0.888889	9.948847	— ∞	90
3	0.555556	9.744728	9.889076	39 13 53.5

Tabelle 3.

$$p + 1 = 4$$

$$\log \mathfrak{A}_{n,i}$$

n	i	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
0	0	9.240368	9.513314	9.513314	9.240368
1	0	9.652561 _n	9.521890 _n	9.521890	9.652561
1	1	9.122643	9.662733	9.662733	9.122643
2	0	9.726326	9.726326 _n	9.726326 _n	9.726326
2	1	9.279563 _n	9.416037 _n	9.416037	9.279563
2	2	8.448615	9.255849	9.255849	8.448615
3	0	9.569405 _n	9.973023	9.973023 _n	9.569405
3	1	9.321173	9.054029 _n	9.054029 _n	9.321173
3	2	8.529815 _n	8.933432 _n	8.933432	8.529815
3	3	7.522775	8.597154	8.597154	7.522775

		num. $\mathfrak{A}_{ni}$			
n	i	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
0	0	0.178927	0.828073	0.326078	0.178927
1	0	— 0.449326	— 0.332576	0.392576	0.449326
1	1	0.192690	0.459974	0.459974	0.192690
2	0	0.582508	— 0.582508	— 0.582508	0.582508
2	1	— 0.190355	— 0.260687	0.260687	0.190355
2	2	0.028094	0.180239	0.180239	0.028094
3	0	— 0.371027	0.939772	— 0.939772	0.371027
3	1	0.209495	— 0.113247	— 0.113247	0.209495
3	2	— 0.038870	— 0.085789	0.085789	0.038870
3	3	0.009333	0.039551	0.039551	0.009333
		$\log a$	$\log \mu$	ϑ	
1		9.541398	9.935072 _n	149° 26'	39.8
2		9.814344	9.531455 _n	109 52	32.6
3		9.814344	9.531455	70 7	27.4
4		9.541398	9.935072	30 33	20.2

Tabelle 4.

$$p + 1 = 5$$

		$\log \mathfrak{A}_{ni}$			
n	i	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
0	0	9.073584	9.378969	9.453998	9.378969
1	0	9.507920 _n	9.587251 _n	— ∞	9.587251
1	1	8.875906	9.480705	9.630089	9.480705
2	0	9.636913	8.891361 _n	9.851938 _n	8.891361 _n
2	1	9.054969 _n	9.433714 _n	— ∞	9.433714
2	2	8.121924	9.026138	9.249878	9.026138
3	0	9.618547 _n	9.844601	— ∞	9.844601 _n
3	1	9.133997	8.899589	9.396006 _n	8.899589
3	2	8.225267 _n	8.903427 _n	— ∞	8.903427
3	3	7.116131	8.319760	8.617854	8.319760
4	0	9.418295	9.870401 _n	9.982271	9.870401 _n
4	1	9.147219 _n	9.073858	— ∞	9.073858 _n
4	2	8.275569	8.515947	8.726999 _n	8.515947
4	3	7.182490 _n	8.160065 _n	— ∞	8.160065
4	4	5.948416	7.451459	7.823909	7.451459

		num. $\mathfrak{A}_{n,i}$				
n	i	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
0	0	0.118463	0.239314	0.284444	0.239314	0.118463
1	0	-0.322048	-0.386590	0	0.386590	0.322048
1	1	0.075146	0.302486	0.426667	0.302486	0.075146
2	0	0.433424	-0.077868	-0.711111	-0.077868	0.433424
2	1	-0.113493	-0.271465	0	0.271465	0.113493
2	2	0.015241	0.106203	0.177778	0.106203	0.015241
3	0	-0.415477	0.699199	0	-0.699199	0.415477
3	1	0.136144	0.079358	-0.248889	0.079358	0.136144
3	2	-0.016798	-0.080062	0	0.080062	0.016798
3	3	0.001307	0.020881	0.041481	0.020881	0.001307
4	0	0.261997	-0.741996	0.960000	-0.741996	0.261997
4	1	-0.140352	0.118538	0	-0.118538	0.140352
4	2	0.018861	0.032806	-0.053333	0.032806	0.018861
4	3	-0.001522	-0.014457	0	0.014457	0.001522
4	4	0.000089	0.002828	0.006667	0.002828	0.000089

Logarithmen

				ϑ
α_1	9.374614	μ_1	9.957214 _n	154° 58' 57.6
α_2	9.679999	μ_2	9.791161 _n	122 34 46.2
α_3	9.755027	μ_3	— ∞	90
α_4	9.679999	μ_4	9.731161	57 25 13.8
α_5	9.374614	μ_5	9.957214	25 1 2.4

Tabelle 5.

		$p + 1 = 6$			$\log \mathfrak{M}_i$		
n	i	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0	0	8.982790	9.256190	9.369136	9.369136	9.256190	8.982790
1	0	9.379546 _n	9.558651 _n	9.228963 _n	9.228963	9.558651	9.379546
1	1	8.666687	9.307460	9.532497	9.532497	9.307460	8.666687
2	0	9.587150	9.147719	9.685726 _n	9.685726 _n	9.147719	9.587150
2	1	8.858170 _n	9.349647 _n	9.132051 _n	9.132051	9.349647	8.858170
2	2	7.844282	8.802426	9.139556	9.139556	8.802426	7.844282
3	0	9.576020 _n	9.531227	9.724728	9.724728 _n	9.531227 _n	9.576020
3	1	8.957324	9.147457	9.152905 _n	9.152905 _n	9.147457	8.957324
3	2	7.960044 _n	8.768893 _n	8.663389 _n	8.663389	8.768893	7.960044
3	3	6.770064	8.045581	8.494802	8.494802	8.045581	6.770064
4	0	9.512349	9.842126 _n	9.568057	9.568057	9.842126 _n	9.512349
4	1	9.000848 _n	7.783788 _n	9.200475	9.200475 _n	7.783788	9.000848
4	2	8.027822	8.593496	8.395859 _n	8.395859 _n	8.593496	8.027822
4	3	6.848843 _n	7.976064 _n	7.981652 _n	7.981652	7.976064	6.848843
4	4	5.539925	7.126813	7.688127	7.688127	7.126813	5.539925
5	0	9.287441 _n	9.766515	9.935079 _n	9.935079	9.766515 _n	9.287441
5	1	9.000301	9.012706 _n	8.626545	8.626545	9.012706 _n	9.000301
5	2	8.061730 _n	8.157746 _n	8.477304	8.477304 _n	8.157746	8.061730
5	3	6.897404	7.806361	7.476025 _n	7.476025 _n	7.806361	6.897404
5	4	5.590711 _n	7.034302 _n	7.152982 _n	7.152982	7.034302	5.590711
5	5	4.178882	6.089141	6.762547	6.762547	6.089141	4.178882

num. $\mathfrak{M}_i$

n	i	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0	0	0.085662	0.180381	0.233957	0.233957	0.180381	0.085662
1	0	-0.239632	-0.357808	-0.167480	0.167480	0.357808	0.239632
1	1	0.046118	0.202983	0.340798	0.340798	0.202983	0.046118
2	0	0.344469	0.140514	-0.484983	-0.484983	0.140514	0.344469
2	1	-0.072139	-0.223690	-0.135535	0.135535	0.223690	0.072139
2	2	0.006987	0.063449	0.137897	0.137897	0.063449	0.006987
3	0	-0.376721	0.339803	0.530552	-0.530552	-0.339803	0.376721
3	1	0.090641	0.140429	-0.142202	-0.142202	0.140429	0.090641
3	2	-0.009121	-0.058734	-0.046067	0.046067	0.058734	0.009121
3	3	0.000589	0.011107	0.081247	0.081247	0.011107	0.000589
4	0	0.325349	-0.695226	0.369877	0.369877	-0.695226	0.325349
4	1	-0.100196	-0.006078	0.158663	-0.158663	0.006078	0.100196
4	2	0.010662	0.039219	-0.024881	-0.024881	0.039219	0.010662
4	3	-0.000706	-0.009442	-0.009586	0.009586	0.009442	0.000706
4	4	0.000034	0.001339	0.004877	0.004877	0.001339	0.000034
5	0	-0.193839	0.584137	-0.861151	0.861151	-0.584137	0.193839
5	1	0.100069	-0.102969	0.042320	0.042320	-0.102969	0.100069
5	2	-0.011527	-0.014380	0.030013	-0.030013	0.014380	0.011527
5	3	0.000790	0.006403	-0.002992	-0.002992	0.006403	0.000790
5	4	-0.000039	-0.001082	-0.001422	0.001422	0.001082	0.000039
5	5	0.000002	0.000123	0.000579	0.000579	0.000123	0.000002

Logarithmen

α_1	9.233819	μ_1	9.969635 _n	$\vartheta_1 = 158^\circ 49' 23.2$
α_2	9.557220	μ_2	9.820339 _n	$\vartheta_2 = 131 \ 23 \ 31.8$
α_3	9.670166	μ_3	9.377705 _n	$\vartheta_3 = 103 \ 48 \ 18.2$
α_4	9.670166	μ_4	9.377705	$\vartheta_4 = 76 \ 11 \ 41.8$
α_5	9.557220	μ_5	9.820339	$\vartheta_5 = 48 \ 36 \ 28.2$
α_6	9.233819	μ_6	9.969635	$\vartheta_6 = 21 \ 10 \ 36.8$

Tabelle 6.

$$p + 1 = 7$$

$$\log \mathfrak{A}_{n,i}$$

$n \ i$	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7
0 0	8.811189	9.145671	9.280840	9.320104	9.280840	9.145671	8.811189
1 0	9.265626 _n	9.492922 _n	9.366322 _n	— ∞	9.366322	9.492922	9.265626
1 1	8.485524	9.148432	9.417850	9.496195	9.417850	9.148432	8.485524
2 0	9.440196	9.356260	9.382818 _n	9.718044 _n	9.382818 _n	9.356260	9.440196
2 1	8.684688 _n	9.240410 _n	9.248059 _n	— ∞	9.248059	9.240410	8.684688
2 2	7.603556	8.594890	8.993557	9.115984	8.993557	8.594890	7.603556
3 0	9.509829 _n	8.958949	9.771017	— ∞	9.771017 _n	8.958949 _n	9.509829
3 1	8.796008	9.157223	8.430385 _n	9.262112 _n	8.430385 _n	9.157223	8.796008
3 2	7.726999 _n	8.611148 _n	8.753046 _n	— ∞	8.753046	8.611148	7.726999
3 3	6.469776	7.789537	8.327453	8.483961	8.327453	7.789537	6.469776
4 0	9.503480	9.661256 _n	9.328407 _n	9.848378	9.328407 _n	9.661256 _n	9.503480
4 1	8.857156 _n	8.822571 _n	9.167745	— ∞	9.167745 _n	8.822571	8.857156
4 2	7.805415	8.526716	7.660290	8.593105 _n	7.660290	8.526716	7.805415
4 3	6.556236 _n	7.768811 _n	8.044958 _n	— ∞	8.044958	7.768811	6.556236
4 4	5.174073	6.822261	7.494426	7.690015	7.494426	6.822261	5.174073
5 0	9.413240 _n	9.801721	9.741786 _n	— ∞	9.741786	9.801721 _n	9.413240
5 1	8.881441	8.352059 _n	8.946042 _n	9.157377	8.946042 _n	8.352059 _n	8.881441
5 2	7.853330 _n	8.319062 _n	8.352349	— ∞	8.352349 _n	8.319062	7.853330
5 3	6.614682	7.679208	7.304058	7.777165 _n	7.304058	7.679208	6.614682
5 4	5.238539 _n	6.779541 _n	7.189936 _n	— ∞	7.189936	6.779541	5.238539
5 5	3.759466	5.736081	6.542494	6.777165	6.542494	5.736081	3.759466
6 0	9.172685	9.668350 _n	9.870184	9.928897 _n	9.870184	9.668350 _n	9.172685
6 1	8.873604 _n	8.933660	8.739475 _n	— ∞	8.739475	8.933660 _n	8.873604
6 2	7.877494	7.839205	8.238596 _n	8.326837	8.238596 _n	7.839205	7.877494
6 3	6.652253 _n	7.509515 _n	7.376453	— ∞	7.376453 _n	7.509515	6.652253
6 4	5.283596	6.685129	6.563583	6.849716 _n	6.563583	6.685129	5.283596
6 5	3.809333 _n	5.678761 _n	6.223405 _n	— ∞	6.223405	5.678761	3.809333
6 6	2.251079	4.556120	5.496782	5.770585	5.496782	4.556120	2.251079

num. $\mathfrak{A}_{ni}$

$n \ i$	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7
0 0	0.064742	0.139853	0.190915	0.208980	0.190915	0.139853	0.064742
1 0	-0.184343	-0.311115	-0.232446	0	0.232446	0.311115	0.184343
1 1	0.030586	0.140745	0.261728	0.313469	0.261728	0.140745	0.030586
2 0	0.275547	0.227123	-0.241445	-0.522449	-0.241445	0.227123	0.275547
2 1	-0.048382	-0.173944	-0.177035	0	0.177035	0.173944	0.048382
2 2	0.004014	0.039345	0.099668	0.130612	0.099668	0.039345	0.004014
3 0	-0.323466	0.090981	0.590224	0	-0.590224	-0.090981	0.323466
3 1	0.062518	0.143623	-0.026939	-0.182857	-0.026939	0.143623	0.062518
3 2	-0.005333	-0.040846	-0.056630	0	0.056630	0.040846	0.005333
3 3	0.000295	0.006159	0.021255	0.030476	0.021255	0.006159	0.000295
4 0	0.318772	-0.458412	-0.213013	0.705306	-0.213013	-0.458412	0.318772
4 1	-0.071971	-0.066462	0.147145	0	-0.147145	0.066462	0.071971
4 2	0.006389	0.033629	0.004574	-0.039184	0.004574	0.033629	0.006389
4 3	-0.000360	-0.005872	-0.011091	0	0.011091	0.005872	0.000360
4 4	0.000015	0.000664	0.003122	0.004898	0.003122	0.000664	0.000015
5 0	-0.258964	0.633463	-0.551805	0	0.551805	-0.633463	0.258964
5 1	0.076110	-0.022494	-0.088316	0.143673	-0.088316	-0.022494	0.076110
5 2	-0.007134	-0.020848	0.022509	0	-0.022509	0.020848	0.007134
5 3	0.000412	0.004778	0.002014	-0.005986	0.002014	0.004778	0.000412
5 4	-0.000017	-0.000602	-0.001549	0	0.001549	0.000602	0.000017
5 5	0.000001	0.000054	0.000349	0.000599	0.000349	0.000054	0.000001
6 0	0.148828	-0.465962	0.741624	-0.848980	0.741624	-0.465962	0.148828
6 1	-0.074749	0.085834	-0.054888	0	0.054888	-0.085834	0.074749
6 2	0.007542	0.006906	-0.017322	0.021224	-0.017322	0.006906	0.007542
6 3	-0.000449	0.003232	0.002379	0	-0.002379	0.003232	0.000449
6 4	0.000019	0.000484	0.000366	-0.000707	0.000366	0.000484	0.000019
6 5	-0.000001	-0.000048	-0.000167	0	0.000167	0.000048	0.000001
6 6	0	0.000004	0.000031	0.000059	0.000031	0.000004	0

Logarithmen

α_1	9.112219	μ_1	9.977316	ϑ_1	= 161° 38' 31.7
α_2	9.446701	μ_2	9.870129	ϑ_2	= 137 51 43.2
α_3	9.581870	μ_3	9.608360	ϑ_3	= 113 56 38.8
α_4	9.621134	μ_4	— ∞	ϑ_4	= 90
α_5	9.581870	μ_5	9.608360	ϑ_5	= 66 3 21.2
α_6	9.446701	μ_6	9.870129	ϑ_6	= 42 8 16.8
α_7	9.112219	μ_7	9.977316	ϑ_7	= 18 21 28.3