

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1976

MÜNCHEN 1977

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über ordnungshomogene Bogen

Von Otto Haupt in Erlangen

Georg Aumann zum 70. Geburtstag in Freundschaft und Dankbarkeit

Einleitung

I. In der Ebene R^2 sei $\mathfrak{f}^1$ das System der Geraden. Man bezeichnet einen Bogen $B \subset R^2$ als $\mathfrak{f}^1$ -ordnungshomogen, wenn alle Teilbogen T von B die gleiche Ordnung $POW(T, \mathfrak{f}^1)$ bezüglich $\mathfrak{f}^1$, kurz $\mathfrak{f}^1$ -Ordnung, besitzen. Hierbei gilt (vgl. [1], 3.4.2.): Besitzt B höchstens endliche $\mathfrak{f}^1$ -Ordnung $POW(B, \mathfrak{f}^1)$, so ist B $\mathfrak{f}^1$ -ordnungshomogen genau dann, wenn $POW(T, \mathfrak{f}^1) = 2$ (für alle $T \subset B$). Da 2 die kleinstmögliche $POW(B, \mathfrak{f}^1)$ ist, hat man den Gleichwertigkeitssatz: $\mathfrak{f}^1$ -Ordnungshomogenität ist, im Falle höchstens endlicher $\mathfrak{f}^1$ -Ordnung, gleichbedeutend mit lokaler $\mathfrak{f}^1$ -Ordnungsminimalität. (Übrigens existieren auch $\mathfrak{f}^1$ -ordnungshomogene Bogen der $\mathfrak{f}^1$ -Ordnung Unendlich). – Der Gleichwertigkeitssatz gilt ebenso für den Fall, daß $\mathfrak{f}^1$, in der Ebene, ersetzt wird durch das System der Kreise oder gewisser konvexer Kurven mit der Grundzahl 3 (d. h. jede Kurve wird, wie der Kreis, durch je 3 ihrer Punkte eindeutig bestimmt); dem entsprechend hat man in diesen Fällen 3 als Minimalordnung (an Stelle von 2 im Falle von $\mathfrak{f}^1$).

II. In den Sätzen der Ziff. I. sind die betrachteten Bogen B , abgesehen von der Endlichkeit der Ordnung, keinen weiteren Forderungen unterworfen. Demgegenüber ist in R^2 bei beliebigen Kurvensystemen mit einer Grundzahl $k \geq 3$ der Gleichwertigkeitssatz bisher nur unter zusätzlichen Forderungen an B , nämlich unter Differenzierbarkeitsforderungen bewiesen (vgl. [5]). Gleiches gilt für Bogen B im R^n , für $n \geq 3$, wenn dabei die Ordnung von B bezüglich des Systems $\mathfrak{f}^n$ der Hyperebenen des R^n definiert wird [6].

III. In der vorliegenden Note werden zunächst (§ 1) die benötigten Hilfsmittel zusammengestellt. Sodann folgt (§ 2) der Be-

weis des Gleichwertigkeitssatzes (2.6.) für den Fall der Ebene R^2 und für Systeme $\mathfrak{f}$ ebener Kurven der Grundzahl $k = 3$, wobei $\mathfrak{f}$ nicht zu den in Ziff. II. genannten Kurvensystemen gehört; die zu Grunde gelegten Bogen B sind bezüglich $\mathfrak{f}$ der folgenden Forderung unterworfen: Zu $x, y \in B$, $x \neq y$, existiert höchstens ein $K \in \mathfrak{f}$ mit $y \in K$ derart, daß B von K in x gestützt wird. Diese zusätzliche Forderung an B ist erheblich schwächer als die bisher (vgl. [5]) in Betracht gezogenen. Schließlich bringt der § 3 den Beweis des Gleichwertigkeitssatzes (3.6.) bezüglich des Systems $\mathfrak{f}$ der Ebenen im R^3 ; dabei sollen die zu Grunde gelegten Bogen B im R^3 differenzierbar sein in dem Sinne, daß in jedem Punkt von B genau eine Tangente an B existiert; diese Differenzierbarkeitsforderung bezüglich B ist ebenfalls schwächer als die bislang in Betracht gezogenen. Der Beweis des Satzes in 3.6. wird auf den Satz in 2.6. zurückgeführt.

§ 1. Vorbemerkungen

1.1. Unter *Bogen* bzw. Kurven werden topologische Bilder einer (abgeschlossenen) Strecke bzw. einer Kreisperipherie verstanden. Sind a, b die Endpunkte des Bogens B (d. h. die Bilder der Endpunkte der Urbildstrecke), so schreiben wir auch $B(a|b)$ statt B ; ferner sei gesetzt $\underline{B} := \underline{B}(a|b) := B(a|b) \setminus \{a, b\}$. Ist B orientiert, so bezeichnet man a als Anfangspunkt von B , weiter a als auf B vor b gelegen und b als hinter a . Dabei bezeichnet $A \setminus B$ das *Komplement* von B bezüglich A .

1.1.1. Für eine beliebige Menge $M \neq \emptyset$ bezeichne $POW(M)$ die Mächtigkeit von M . Ist $\mathfrak{f}$ irgend ein Mengensystem und ist $POW(M \cap S) < +\infty$ für jedes $S \in \mathfrak{f}$, so sagen wir, M besitze bezüglich $\mathfrak{f}$ höchstens endlichen Punktordnungswert $POW(M, \mathfrak{f})$. Existiert sogar $\max. \{POW(M \cap S) : S \in \mathfrak{f}\} = m < +\infty$, so sagen wir, M besitze den beschränkten $POW(M; \mathfrak{f}) = m$.

Sind M und die $S \in \mathfrak{f}$ Teilmengen eines topologischen Raumes, so ist, bei höchstens endlichem $POW(M, \mathfrak{f})$, die Menge M darstellbar als in M abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von ordnungshomogenen Teilmengen M' (vgl. [3]); dabei heißt M' ordnungshomogen bezüglich $\mathfrak{f}$, kurz $\mathfrak{f}$ -o.h., wenn für $x \in M'$

alle hinreichend kleinen Umgebungen $U(x)$ in M' von x einen für alle x konstanten $POW(U(x), \mathfrak{f})$ besitzen, den wir als den lokalen $POW(x, B, \mathfrak{f})$ von M' bezeichnen.

Ist M ein Bogen, so sind in den von uns betrachteten Fällen die M' Teilbogen von B . Es existieren also stets $\mathfrak{f}$ -o. h. Teilbogen eines Bogens B . Und das in der Einleitung angesprochene Problem läuft hinaus auf die *Bestimmung aller lokalen POW* , die bei o.h. Teilbogen von B auftreten können bezüglich des jeweils zu Grunde liegenden $\mathfrak{f}$.

Im § 2 wird gezeigt, daß für die betrachteten B und $\mathfrak{f}$ *die lokalen $POW + \infty$ und 3 die einzig möglichen sind*, daß sich also jedes B aus o.h. Bogen dieser lokalen POW „zusammensetzt“.

1.2. Es sei E topologisches Bild einer abgeschlossenen Kreisscheibe und $\underline{E}$ das der zugehörigen offenen Kreisscheibe. In E sei ein System $\mathfrak{f}$ von sogen. Ordnungscharakteristiken, kurz OCh, im Sinne von [1], 1.1.1., gegeben mit der Grundzahl $k = k(\mathfrak{f}) = 3$; dabei sind also die OCh Bogen oder (und) Kurven, die mit $E \setminus \underline{E}$ genau ihre zwei Endpunkte oder (und) höchstens einen Punkt gemeinsam haben. Ferner ist jede OCh K durch beliebige 3 ihrer Punkte eindeutig bestimmt und hängt stetig von ihnen ab. Ist $x_i \in K$, $i = 1, \dots, r \geq 1$, $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, so schreiben wir $K(x_1, \dots, x_r)$. Gilt also $x_\kappa := \lim_m x_{\kappa m}$, $\kappa = 1, 2, 3$ mit $x_\kappa \neq x_\tau$ für $\kappa \neq \tau$, und existieren die $K_m := K(x_{1m}, x_{2m}, x_{3m}) \in \mathfrak{f}$, so existiert auch $K := \lim_m K_m = K(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{f}$. Es soll keine allen OCh gemeinsamen Punkte geben.

1.2.1. Neben $\mathfrak{f}$ wird zu Grunde gelegt ein fester (Grund-)Bogen $B \subset E$, welcher mit $E \setminus \underline{E}$ genau seine Endpunkte gemeinsam hat. Die beiden Komponenten von $\underline{E} \setminus B$ bezeichnen wir als die *Seiten* $B(\pm)$ von B .

Es heißt B normal zu $\mathfrak{f}$, kurz $\mathfrak{f}$ -normal, wenn für jedes $K \in \mathfrak{f}$ mit $POW(B \cap K) \geq 3$ die einer Orientierung von B entsprechende Reihenfolge der Punkte von $B \cap K$ auf B gleich ist auf K der einer Orientierung von K entsprechenden ([1], 2.3.1.); dabei wird $POW(B; \mathfrak{f})$ als *höchstens endlich* vorausgesetzt (ev. nur für einen Teilbogen von B). Besitzt jeder Punkt von B eine $\mathfrak{f}$ -normale Umgebung auf B , so werde B als *lokal $\mathfrak{f}$ -normal* bezeichnet.

1.2.2. Es sei $z \in B \cap K$, $K \in \mathfrak{f}$. Es heißt z Schnitt- oder Stützpunkt von B und K , je nachdem bei orientiertem K eine

vordere und eine hintere Umgebung von z auf $K \setminus \{z\}$ auf verschiedenen oder auf der gleichen Seite von B liegen; es heißt z Stützpunkt aus $B(\pm)$, wenn eine Umgebung von z auf $K \setminus \{z\}$ in $B(\pm)$ liegt.

Unter einer ($\mathfrak{k}$ -)Sekante von K werde verstanden ein $K \in \mathfrak{k}$ mit lauter Schnittpunkten in $\underline{B} \cap K \neq \emptyset$, wobei $B \cap K = \underline{B} \cap K$ sein möge. In beliebiger Nähe einer (jeden) $\mathfrak{k}$ -Sekante K von B gibt es in $\mathfrak{k}$ offene Mengen $\mathfrak{v}$ derart, daß jedes $K' \in \mathfrak{v}$ Sekante von B ist und daß $\underline{B} \cap K'$ mindestens ebensoviele Schnittpunkte enthält wie $\underline{B} \cap K$ (vgl. [1], 1.4.2., Satz 1). Für irgend zwei OCh K', K'' mit $K' \neq K''$ ist $POW(K' \cap K'') \leq 2$ und $POW(K' \cap K'') = 1$ jedenfalls dann, wenn $K' \cap K''$ einen Stützpunkt enthält.

1.2.3. Ist $x, y \in B$ mit $x \neq y$ und existiert $K(x, y) \in \mathfrak{k}$ mit y als Stützpunkt aus $B(\pm)$, so werde $K(x, y)$ als StützOCh $T(x, y, \pm)$ in y von x aus (auch „durch x “) bezeichnet und B als $\pm$ -stützbar aus x in y und zwar *eindeutig*, wenn es keine zwei verschiedenen $T(x, y, +)$ bzw. $T(x, y, -)$ gibt. Übrigens *können* $T(x, y, +)$ und $T(x, y, -)$ *nicht gleichzeitig existieren* (denn anderenfalls existieren etwa zu $T(x, y, -)$ beliebig benachbarte OCh K mit $POW(T(x, y, +) \cap K) \geq 3$).

Schließlich heiße B höchstens eindeutig stützbar (+ bzw. — bezüglich $\mathfrak{k}$), kurz T -Bogen, wenn gilt:

(I) Für alle $x, y \in B$, $x \neq y$, existiert höchstens ein $T(x, y, +)$ bzw. höchstens ein $T(x, y, -)$.

(II) Es seien $x, y, y_m \in B$, $m = 1, 2, \dots$, mit $y = \lim_m y_m$, $x \neq y$. Es existiere $T_m := T(x, y_m, +)$ und $L := \lim_m T_m$. Dann soll $L \in \mathfrak{k}$ sein. Und Entsprechendes soll bezüglich $T(x, y_m, -)$ gelten.

Folgerung. Existiert $L = \lim_m T(x, y_m, +) \in \mathfrak{k}$ sowie eine Umgebung U von y in E mit $(T(x, y_m, +) \setminus B) \cap U \subset B(+)$ für alle m , so ist $L = T(x, y, +)$.

Anmerkung. Beispiele von OCh-Systeme $\mathfrak{k}$ mit T -Bogen werden geliefert etwa von den Graphen (in einer (ξ, η) -Ebene) der Polynome von höchstens dem Grade zwei; dabei sind ξ, η reelle Zahlen.

Als $\underline{E}$ wählt man dabei etwa die (in der (ξ, η) -Ebene) offene Punktmenge $\underline{E} := \{(\xi, \eta) : \xi \in \underline{J} \wedge \eta \in R\}$ mit $J := [\alpha; \beta]$, und

dann $E = \{(\xi, \eta) : \xi \in J \wedge -\infty \leq \eta \leq +\infty\}$. Als Bogen B wählen wir die Graphen $B := \{(\xi, \eta) : \xi \in J \wedge \eta = f(\xi)\}$ mit stetigem $f|J$. Es ist $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}' \cup \mathfrak{f}''$; dabei bezeichnet $\mathfrak{f}'$ bzw. $\mathfrak{f}''$ das System der Durchschnitte von E mit den Graphen aller Polynome vom Grade Null und Eins bzw. vom Grade Zwei. Ist dann $POW(B; \mathfrak{f})$ höchstens endlich, so auch $POW(B; \mathfrak{f}')$ und daher B abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von abzählbar vielen Konvexbogen ([1], 3.4.2., Satz 3.). Bei Behandlung der Frage nach den $\mathfrak{f}$ -o.h.-Bogen von höchstens endlichem POW kann man sich daher auf Konvexbogen B beschränken. Hat ein solcher überall eine Tangente, so ist er ein T -Bogen (bezüglich $\mathfrak{f}$), wobei keine Stütz-OCh eine Strecke ist. Weitere hierhergehörige Bemerkungen finden sich in 2.6. – Anderen Beispielen werden wir in 3.5. begegnen.

1.3. Für den $\mathfrak{f}$ -normalen Bogen B gilt der *Monotoniesatz*: Es sei K eine $\mathfrak{f}$ -Sekante mit $B \cap K = (x_1, \dots, x_r)$, $r \geq 4$, wobei also die Reihenfolge $x_1, \dots, x_r$ auf B der Orientierung von B entspricht und zugleich einer Orientierung von K . O. B. d. A. kann angenommen werden (vgl. 1.2.2.), daß jedes zu K hinreichend benachbarte $K' \in \mathfrak{f}$ ebenfalls Sekante, sogar mit $POW(B \cap K') = r$ ist ([1], 1.4.2.). Hält man nun irgend zwei der x_q fest und läßt ein drittes x_q sich monoton auf B bewegen, so bewegen sich alle übrigen Schnittpunkte der zugehörigen $\mathfrak{f}$ -Sekanten K' ebenfalls monoton auf B und zwar je zwei auf B benachbarte im entgegengesetzten Sinn (vgl. [1], 2.3.). Dies gilt entsprechend auch für OCh-Systeme $\mathfrak{f}'$ mit der Grundzahl $k = k(\mathfrak{f}') = 2$, wenn nur ein Punkt festgehalten wird. Beispiele solcher $\mathfrak{f}'$ liefern die Systeme $\mathfrak{f}(p)$ der, einen festen Punkt p enthaltenden OCh $K(p) \in \mathfrak{f}$.

§ 2. Bestimmung der $\mathfrak{f}$ -ordnungshomogenen T -Bogen im Falle einer Grundzahl $k=3$.

Es sei $\mathfrak{f}$ wie in 1.2. erklärt. Ferner sei B ein $\mathfrak{f}$ -normaler Bogen (in E) von höchstens endlichem $POW(B; \mathfrak{f})$. Da ein solches B , wenn $POW(B; \mathfrak{f}) = 4$, nicht $\mathfrak{f}$ -o.h. ist (vgl. [1], 4.1.3.) und ein B mit $POW(B; \mathfrak{f}) = 3$ trivialerweise o.h. ist, machen wir die Annahme, daß der T -Bogen B ein o.h.-Bogen mit höchstens endlichem $POW(B, \mathfrak{f}) \geq 5$ sei. Wir wollen zeigen, daß diese An-

nahme zu einem Widerspruch führt, womit der Gleichwertigkeitssatz im Sinne der Einleitung bewiesen ist.

2.1. Zu jedem Teilbogen W des o.h.-Bogens B mit höchstens endlichem $POW(B, \mathfrak{f}) \geq 5$ existiert eine $\mathfrak{f}$ -Sekante K mit $B \cup K = \{x_1, \dots, x_r\}$, $r \geq 5$, wobei x_0 auf B (und K) vor x_{0+1} liegt. Es liegt dann eine vordere Umgebung von x_1 oder von x_2 auf $K \setminus \{x_1, x_2\}$ in $B(+)$ und entsprechend eine vordere Umgebung von x_2 bzw. von x_1 auf $K \setminus \{x_1, x_2\}$ in $B(-)$.

Es liege etwa eine vordere Umgebung $V(x_1) \subset K \setminus \{x_1\}$ von x_1 in $B(-)$. Dann gilt $\tilde{K}(x_1|x_2) \cup \tilde{K}(x_3|x_4) \subset B(+)$.

Nun wenden wir auf das 4-tupel x_1, x_2, x_3, x_4 den Monotoniesatz (1.3.) an, indem wir x_1 und x_4 festhalten und x_2, x_3 kontrahieren, d. h. x_2, x_3 monoton gegeneinander (von x_1 und x_4 fort) bewegen. Bei Fortsetzung dieser Kontraktion (bei welcher Gewinne und Verluste von Punkten des Durchschnittes von B mit den jeweils auftretenden OCh stattfinden können) gelangt man zu dem

Lemma. Bei festen x_1, x_4 und hinreichend weit getriebener Kontraktion der jeweils am nächsten bei x_1 bzw. x_4 gelegenen Schnittpunkte von B mit den jeweils entsprechenden OCh K erhält man ein $\tilde{K} \in \mathfrak{f}$ mit folgender Eigenschaft: Ist $B(x_1|x_4) \cap \tilde{K} = \{x_1, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r, x_4\}$, $r \geq 1$, wobei die Reihenfolge $x_1, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r, x_4$ der Orientierung von B und einer von $\tilde{K}$ entspricht, so gilt

- (1) alle $\tilde{x}_0$ sind Stützpunkte von B und $\tilde{K}$ aus $B(+)$, also $\tilde{K}(\langle x_1|x_4 \rangle \setminus B \subset B(+)$, d. h.
 $\tilde{K}(x_1|\tilde{x}_1) \cup \tilde{K}(\tilde{x}_0|x_{0+1}) \cup \tilde{K}(\tilde{x}_r|\tilde{x}_4) \subset B(+)$.
- (2) Es sind x_1, x_4 Schnittpunkte in $B \cap \tilde{K}$; eine vordere bzw. hintere Umgebung von x_1 bzw. von x_4 auf $\tilde{K} \setminus B$ liegt in $B(-)$.

Zusatz. (1) Das Lemma gilt auch bei Vertauschung von $B(+)$ mit $B(-)$. – (2) Daß B ein T -Bogen sei, wird beim Beweise des Lemmas (noch) nicht benutzt.

Beweis. Betr. Beh. (1) Bei der Kontraktion von x_2 und x_3 können Gewinne und dann (erst) Verluste nur in $B(x_2|x_3)$ auftreten; genauer: Es bezeichne $K' := K(x_1, x'_2, x'_3, x_4)$ die bei der Kontraktion jeweils auftretende OCh, wobei x'_2 bzw. x'_3 der jeweils

am nächsten bei x_1 bzw. bei x_4 gelegene Schnittpunkt in $B \cap K'$ sein soll (soweit solche Schnittpunkte – und dann stets in gerader Anzahl – noch vorhanden sind). „Gewinn“ in $y'_2 \in B(x'_2|x'_3)$ besagt: Ein sich monoton verkleinernder Teilbogen $B(y'_1|y'_3) = B(y'_1|y'_2) \cup B(y'_2|y'_3) \subset B(x'_2|x'_3)$ spaltet sich in y'_2 in zwei fremde, sich verkleinernde Teilbogen $B(z''_1|z''_2)$ und $B(z''_3|z''_4)$ von $B(x'_2|x'_3)$; dabei vergrößert sich dann $B(z''_2|z''_3)$. Demgegenüber besagt ein Verlust in y'_2 : Zwei sich vergrößernde Bogen $B(y'_1|y'_2)$ und $B(y'_2|y'_3)$ vereinigen sich in y'_2 zu einem sich vergrößernden Bogen $B(y'_1|y'_3)$. Wie („analytische“) Induktion zeigt, führt der Kontraktionsprozeß schließlich zu einem $\bar{K}$ gemäß Beh. (1).

Betr. Beh. (2) Gewinne können in den beim Kontraktionsprozeß sich vergrößernden Bogen $B(x_1|x_2)$ und $B(x_3|x_4)$ nicht auftreten. Außerdem ist z. B. x_1 Schnittpunkt von $K = K(x_1, x_2, x_3, x_4)$ mit $\bar{K}$. Wäre nun x_1 Stützpunkt von B und $\bar{K}$, so läge (wegen $\bar{K}(x_1|\bar{x}_1) \subset B(+)$) eine hintere Umgebung von x_1 auf $\bar{K} \setminus \{x_1\}$ in $B(+)$, also (weil x_1 Schnittpunkt von K und $\bar{K}$) im Innern des von $B(x_1|x_2) \cup K(x_1|x_2)$ begrenzten Gebietes G . Und da $\bar{x}_1 \in \bar{K}$ auf B hinter x_2 , also außerhalb G liegt und $B(x_1|\bar{x}_1) \cap \bar{K} = \emptyset$ ist, wäre $\bar{K}(x_1|x_2) \cap \bar{K}(x_1|\bar{x}_1) \neq \emptyset$, also $POW(K \wedge \bar{K}) \geq 3$. Widerspruch mit $K, \bar{K} \in \mathfrak{f}$ und $K \neq \bar{K}$.

2.2. Von jetzt ab sei B ein T -Bogen (1.2.3.). Außerdem (vgl. 2.1., Lemma) sei $B(x_1|x_4) \cap \bar{K} = \{x_1, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r, x_4\}$ mit $\bar{K}(x_1|x_4) \setminus B \subset B(+)$, insbesondere also seien alle $\bar{x}_\rho$ Stützpunkte aus $B(+)$. Gemäß 1.2.3., (I), ist daher $\bar{K}$ die Stütz-OCh $T(x_1, \bar{x}_\rho, +) = T(x_4, x_\rho, +)$, $\rho = 1, \dots, r$.

2.2.1. Es sei $\bar{K}$ wie in 2.2. erklärt. Zuzufolge der Stetigkeitseigenschaft der OCh (vgl. 1.2.) gibt es (hinreichend kleine) Umgebungen U'_1, U_1 von x_1 in E mit $U'_1 \subset U_1$ und dazu Umgebungen $\tilde{U}_1, U_4$ in E von $\bar{x}_1$ bzw. x_4 mit disjunkten abgeschlossenen Hüllen der $U_1, \tilde{U}_1, U_4$ und außerdem mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Es ist $B \cap U_1 \cap (\bar{K} \setminus \{x_1\}) = \emptyset$ (erzwingbar, weil $POW(B, \mathfrak{f})$ höchstens endlich);

(2) Im Falle $r \geq 2$ ist $\bar{x}_\rho \in U_4$ für $2 \leq \rho \leq r$;

(3) Es sei $K'' := K(u, \bar{x}_1, x_4) \in \mathfrak{f}$ mit $x_1 \neq u \in B \cap U'_1$ und x der auf dem (zu x_4 fremden) Teilbogen $B(u|\bar{x}_1)$ von B am näch-

sten bei $B \setminus \bar{U}_1$ gelegene Schnittpunkt von B mit K'' ; bei hinreichend kleinem U'_1 (und festem U_1) gilt $x \in B \cap U_1$, was von jetzt ab angenommen wird. Es ist dann $K(u, \tilde{x}_1, x_4) = K(x, \tilde{x}_1, x_4) = K'' =: K^x$; zu verschiedenen x , etwa $x' \neq x''$, gehören verschiedene $K^{x'}$, $K^{x''}$. Nun ist $\tilde{x}_1$ Schnittpunkt (nicht nur von $\bar{K}$ und K^x sondern auch) von B und K^x ; denn anderenfalls wäre $\tilde{x}_1$ Stützpunkt von B und K^x und zwar (wie aus (4a) folgt) aus $B(+)$, sodaß $\bar{K} = T(x_4, \tilde{x}_1) = T(x, \tilde{x}_1)$ (weil B T -Bogen), mithin $x \in \bar{K}$ im Widerspruch zu (1);

(4) Es habe x die in (3) verabredete Bedeutung, es sei also $x \in B \cap U_1 \setminus \{x_1\}$. Liegt dann x auf $B \cap U_1$ vor bzw. hinter x_1 , so gilt

(4a) $\bar{K}^x(x | \tilde{x}_1) \subset B(+)$ bzw. $\bar{K}^x(\tilde{x}_1 | x_4) < B(+)$;

(4b) $\bar{K}^x(\tilde{x}_1 | \tilde{x}_4) \setminus (\bar{U}_1 \cup U_4) \subset B(+)$ bzw. $(\bar{K}^x(x | \tilde{x}_1) \setminus (\bar{U}_1 \cup B)) \subset B(+)$;

(5) Es sei $y(x)$ der in $B \cap \bar{U}_1 \cap \bar{K}^x(\tilde{x}_1 | x_4)$ bzw. in $B \cap \bar{U}_1 \cap \bar{K}^x(x | \tilde{x}_1)$ am weitesten von x_1 entfernte bzw. am nächsten bei x_1 gelegene Schnittpunkt von B und K^x , je nachdem x auf $B \cap U_1$ vor bzw. hinter x_1 liegt. Dann gilt

(5a) $K^x(y(x) | x_4) \setminus (U_4 \cup B) \subset B(+)$ bzw. $K^x(x | y(x) \setminus B) \subset B(+)$. (Es gelten (4)–(5a), wenn bzw. weil U'_1 hinreichend klein, also K^x beliebig benachbart zu $\bar{K}$ ist). Aus (4)–(5a) folgt schließlich

(6) Es ändert sich $y(x)$ antiton mit x auf B . (Denn $\tilde{x}_1$ ist Schnittpunkt auch von $K^{x'}$ und $K^{x''}$ für $x' \neq x''$).

2.2.2. Es seien $x', x'' \in B \cap U_1 \setminus \{x_1\}$ Punkte x im Sinne von 2.2.1., (3); dabei liege x' vor und x'' hinter x_1 auf B . Es sind dann $y(x')$ bzw. $y(x'')$ die zu $x = x'$ bzw. $x = x''$ im Sinne von 2.2.1., (5), zugehörigen $y(x)$. Bei festen x', x_4 bzw. x'', x_4 kontrahieren wir die zu x' bzw. x'' fremden Teilbogen $B(\tilde{x}_1 | y(x'))$ bzw. $B(y(x'') | \tilde{x}_1)$ von B . Entsprechend wie in 2.1. bei der Kontraktion von x_2 und x_3 mit festem x_1, x_4 erhalten wir, mit der Abkürzung $T(x, y)$ statt $T(x, y, +)$, ein $T(x', y'_1) = T(x_4, y'_1) = K(x', y'_1, \dots, y'_r, x_4) \in \mathfrak{f}$ bzw. $T(x'', y''_1) = T(x_4, y''_1) = K(x'', y''_1, \dots, y''_r, x_4) \in \mathfrak{f}$ der folgenden Art:

Die Reihenfolge $x', y'_1, \dots, y'_r, x_4$ bzw. $x'', y''_1, \dots, y''_r, x_4$ entspricht auf B der (gleichen) Orientierung von B , sodaß y'_1 bzw. y''_1

der auf $\underline{B}(x'|x_4)$ bzw. $\underline{B}(x''|x_4)$ am nächsten bei x' bzw. x'' gelegene Punkt von $B \cap T(x', x_4)$ bzw. $B \cap T(x''|x_4)$ ist; alle y'_e und alle y''_r sind Stützpunkte aus $B(+)$. Und aus 2.2.1., (4)–(6) folgt

- (i) $\underline{B}(x'|x_4) \cap T(x', y'_1) \setminus U_4 = \{y'_1, \dots, y'_r\}$ bzw.
 $\underline{B}(x''|x_4) \cap T(x'', y''_1) = \{y''_1, \dots, y''_t\}$;
 - (ii) $\underline{T}(x'|y'_1) \subset B(+)$ bzw. $\underline{T}(x''|y''_1) \subset B(+)$;
 - (iii) $T(y'_1|y_4) \setminus (B \cup U_4) \subset B(+)$ bzw. $T(y''_1|y_4) \setminus B \subset B(+)$.
- Außerdem liegt y'_1 auf $B \cap \bar{U}_1$ hinter y''_1 (weil x' vor x'').

Anmerkung zu (ii). Es liegt $\underline{T}(x'|y'_1)$ ganz auf der einen Seite von $B(x_1|y'_1)$.

2.3. Es sollen $\tilde{x} := x_1$ und $\tilde{y} := \tilde{x}_1$ die in 2.2. gebrauchte Bedeutung besitzen. Weiter bezeichnen wir mit V bzw. H diejenige Operation, vermöge deren wir in 2.2.2. von $\tilde{K} = K(\tilde{x}, \tilde{y}, x_4)$, kurz von $\tilde{y}$, zu $K(x', y'_1, x_4) = T(x', y'_1)$, kurz zu y'_1 , bzw. zu $K(x'', y''_1, x) = T(x'', y''_1)$, kurz zu y''_1 , gelangt waren. Einer auf B monoton von vorn gegen $\tilde{x}$ konvergenten Folge $(x'_k)_k$ entspricht dann vermöge V , angewandt auf $\tilde{y}$, eine auf B von hinten monoton gegen $\tilde{y}$ konvergierende Folge $(y'_{1k})_k$; die zugehörigen $T(x'_k, y'_{1k}) = T(x_4, y'_{1k})$ konvergieren gegen $T(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{K}$. Entsprechendes gilt für die Anwendung von H auf $\tilde{K} = T(\tilde{x}, \tilde{y})$.

2.3.1. Es sei jetzt $Y \subset B' := B(\tilde{y}|y(x')) \subset B \cap \bar{U}_1$ die Menge aller $y_1 \in B'$ derart, daß $T(x_4, y_1) \in \mathfrak{f}$ existiert mit folgender Eigenschaft: Es ist $T := T(x, y_1) = T(x_4, y_1)$, sodaß x Schnittpunkt von T mit $B \cap U_1$; alle Punkte von $(\underline{B}(x|x_4) \setminus U_4) \cap T$ sind Stützpunkte aus $B(+)$ und liegen in $B \cap \bar{U}_1$; dabei ist y_1 der auf $\underline{B}(x, x_4)$ am nächsten bei x gelegene Stützpunkt, also $\underline{T}(x|y_1) \subset B(+)$ und $(\underline{T}(x, x_4) \setminus (U_4 \cup B)) \subset B(+)$.

Aus der Definition von Y und aus 2.2.2. folgt:

(I) $\tilde{y}, y(x') \in \underline{Y}$, ferner $\underline{Y} := \underline{B}' \cap Y \neq \emptyset$. – Denn $\tilde{y}$ ist hinterer und $y(x')$ vorderer Häufungspunkt, kurz HP, von Y .

(II) Jedes $y_1 \in \underline{Y}$ ist sowohl hinterer als vorderer HP von Y .

(III) Jedes $z \in \underline{B}'$, welches hinterer HP von Y ist, gehört zu Y .

In der Tat: Es sei $z = \lim_k y'_{1k}$ mit $y'_{1k} \in Y \cap \underline{B}'(z|y(x'))$, sodaß $T := T(x_4, y'_{1k}) \in \mathfrak{f}$ existiert. Die Folge der Kompakta $T_k \subset E$ enthält eine, wieder mit $(T_k)_k$ zu bezeichnende konver-

gente Teilfolge. Ist $P := \lim_k T_k$, so gilt $P \in \mathfrak{f}$ (vgl. 1.2.); denn $T_k = T(x_k, y_{1k}) = K(x_k, y_{1k}, x_4)$ mit $x_k \in B \cap U_1$, sodaß die Existenz von $\lim_k x_k = x$ erzwingbar ist (durch Übergang zu einer Auswahlfolge) und $P = \lim_k K(x_k, y_{1k}, x_4)$ mit $\lim_k x_k \neq \lim_k y_{1k} \neq x_4$. – Es ist aber $P = T(x, z) = T(x_4, z)$ (vgl. 1.2.3., Folgerung); dabei ist z der am nächsten bei x gelegene Stützpunkt in $B \cap \underline{T}(x|x_4)$, also z ein y_1 , wozu bemerkt sei, daß x , soweit nicht am nächsten bei z gelegener Schnittpunkt aus $B \cap U_1 \cap P$, durch einen solchen ersetzbar ist (weil P hinreichend benachbart zu $\tilde{K}$).

(IV) Aus (I)–(III) folgt: Es ist Y dicht in B' . Andernfalls nämlich existiert ein Teilbogen $F := B(a|b)$ von B' mit $F \cap Y = \emptyset$. Da $y(x')$ vorderer HP von Y ist, kann b als hinterer HP von Y angenommen werden, sodaß $b \in Y$ (gemäß (III)). Wegen $F \cap Y = \emptyset$ ist andererseits $b \in Y$ nicht vorderer Häufungspunkt von Y im Widerspruch zu (II).

(V) Gemäß (IV) ist jedes $z \in B'$ hinterer HP des in B' dichten Y , also $B' = Y$.

(VI) Aus (V) folgt noch: Jedes $T := T(x_4, y_1) = T(x, y_1)$ mit $y_1 \in Y$ enthält genau einen Stützpunkt in $B(x|x_4) \setminus U_4$, nämlich nur y_1 (und kein weiteres y_2).

In der Tat: Existiert hinter y_1 noch ein zu y_1 auf B unmittelbar benachbarter Stützpunkt $y_2 \in B \cap T \setminus U_4$, so liegt der Teilbogen $\underline{T}(y_1|y_2)$ von T in $B(+)$. Wegen $y_1 \in Y = B'$ gibt es $z \in Y \cap \underline{B}(y_1|y_2)$ und $x^+ \in B \cap U_1$ derart, daß $T^+ := T(x^+, z) = T(x_4, z) = T(x^+, z, +) \neq T$ existiert mit $T^+(z|x_4) \setminus (U_4 \cup \cup B) \subset B(+)$. Nun liegen aber einerseits $x^+ \in B$ und $x_4 \in B$ außerhalb des von $B(y_1|y_2) \cup T(y_1|y_2)$ begrenzten Gebietes G^+ . Andererseits kann T^+ das G^+ nur über $\underline{T}(y_1|y_2)$ verlassen (wegen $T^+(z|x_4) \setminus (U_4 \cup B) \subset B(+)$). Daher gibt es $u^+ \in \underline{T}^+(x^+|z) \cap \cap \underline{T}(y_1|y_2)$ und $v^+ \in \underline{T}^+(z|x_4) \cap \underline{T}(y_1|y_2)$. Und weil auch $x_4 \in \in T \cap T^+$ und die u^+, v^+, x_4 verschieden sind, wäre $POW(T \cap \cap T^+) \geq 3$ im Widerspruch zu $T, T^+ \in \mathfrak{f}$ und $T \neq T^+$.

2.4. Aus 2.3.1. entnimmt man den

Hilfssatz. Vor. Es sei B ein $\mathfrak{f}$ -normaler T -Bogen von höchstens endlichem $POW(B; \mathfrak{f})$. Weiter sei $K \in \mathfrak{f}$ -Sekante von B

und es seien x_1, x_2, x_3, x_4 unmittelbar auf B aufeinanderfolgende Schnittpunkte aus $B \cap K$.

Beh. Es gibt in E Umgebungen U_1 von x_1 und U_4 von x_4 , ferner einen Teilbogen $B' := B(\tilde{x}|\tilde{y}) \subset \underline{B}(x_2|x_3)$ von B und eine Umgebung V in E von B' mit disjunkten $\tilde{U}_1, \tilde{V}$ und $\tilde{U}_4$ von folgender Beschaffenheit: Zu jedem $y_1 \in B'$ existiert $T = T(x_4, y_1) = T(x, y_1) \in \mathfrak{f}$ mit $x \in B \cap U_1 \cap T$. Es enthält $\underline{B}(x|x_4) \setminus U_4$ genau einen Stützpunkt von B mit T , nämlich y_1 . Je nachdem $\underline{K}(x_2|x_3) \subset B(-)$ oder $\subset B(+)$ gilt $\underline{T}(x|x_4) \setminus (U_4 \cup \{y_1\}) \subset \subset B(+)$ oder $\subset B(-)$. Es ändert sich x antiton mit y_1 . Es ist x Schnittpunkt von B mit T .

2.5. Es sei B wieder ein $\mathfrak{f}$ -normaler T -Bogen mit höchstens endlichem $POW(B; \mathfrak{f})$. Überdies sei jetzt B $\mathfrak{f}$ -ordnungshomogen. B_0 sei ein beliebiger Teilbogen von B .

2.5.1. Gemäß 2.1. und 2.4. gibt es

(1) in $\underline{B}_0$ Punkte x_{11}, x_{41} und in E Umgebungen U_{11} von x_{11} , U_{41} von x_{41} mit $\tilde{U}_{11} \cap \tilde{U}_{41} = \emptyset$. Ferner gibt es einen zu $\tilde{U}_{11} \cup \tilde{U}_{41}$ fremden Bogen $B_1 := B(\tilde{x}_1|\tilde{y}_1) \subset \underline{B}(x_{11}|x_{41})$ der folgenden Art: Jedes $y_{11} \in B_1$ liefert ein $T_1 := T(x'_{11}, y_{11}) = T(x_{41}, y_{11}) \in \mathfrak{f}$, wobei $x'_{11} \in B \cap U_{11} \cap T_1$ und $\underline{T}_1(x'_{11}|y_{11}) \subset B(+)$. Es ist x'_{11} Schnittpunkt in $B \cap T_1$.

(2) gibt es $x_{12}, x_{42} \in \underline{B}_1$ und in E Umgebungen U_{12} von x_{12} bzw. U_{42} von x_{42} mit $\tilde{U}_{12} \cap \tilde{U}_{42} = \emptyset = (\tilde{U}_{11} \cup \tilde{U}_{41}) \cap \{\tilde{U}_{12} \cup \tilde{U}_{42}\}$. Dabei ist $(\tilde{U}_{12} \cup \tilde{U}_{14}) \cap B \subset B_1$. Ferner gibt es einen zu $\tilde{U}_{12} \cup \tilde{U}_{42}$ fremden Bogen $B_2 \subset \underline{B}(x_{12}|x_{42})$, welcher folgende Eigenschaften besitzt: Jedes $y_{12} \in B_2$ liefert ein $T_2 := T(x'_{12}, y_{12}) = T(x_{42}, y_{12}) \in \mathfrak{f}$, wobei $x'_{12} \in B \cap U_{12} \cap T_2$ und $\underline{T}_2(x'_{12}|y_{12}) \subset \subset B(-)$, also auf der entgegengesetzten Seite von B wie $\underline{T}_1(x'_{11}|y_{11})$. Es ist x'_{12} Schnittpunkt in $B \cap T_2$. Überdies kann und soll angenommen werden, daß x'_{11} auf B vor x'_{12} liegt und x_{12} vor y_{12} .

Die Operation, welche von (1) zu (2), also von B_1 zu B_2 führt, sei mit Op bezeichnet.

2.5.2. Wegen $B_2 \subset \underline{B}_1$ existiert (gemäß 2.5.1.) zu jedem $y_{12} \in B_2$ sowohl ein $T_1 := T(x'_{11}, y_{12})$ mit $x'_{11} \in T_1 \cap B \cap U_{11}$ und $\underline{T}_1(x_{11}|y_{12}) \subset B(+)$ als ein $T_2 := T(x'_{12}, y_{12}) \subset B(-)$; dabei gilt $x'_{12} \in \underline{B}(x'_{11}|y_{12})$, es liegt also x'_{11} auf B vor x'_{12} und x'_{12} vor y_{12} .

Da x'_{12} Schnittpunkt in $B \cap T_2$ ist, liegt eine vordere Umgebung von x'_{12} auf $T_2 \setminus \{x'_{12}\}$ in $B(+)$, also im Innern des von $T_1(x'_{11}|y_{12}) \cup B(x_{11}|y_{12})$ begrenzten Gebietes G_1 . Da kein Endpunkt von T_2 in G_1 liegt, muß G_1 von T_2 in (mindestens) einem vor x'_{12} auf T_2 liegenden Punkt z verlassen werden. Es ist aber $z \in \underline{B}(x'_{11}|x'_{12})$; denn $(T_1 \setminus \{y_{12}\}) \cap (T_2 \setminus \{y_{12}\}) = \emptyset$, weil $T_1 \neq T_2$ und T_1, T_2 in der Umgebung von y_{12} auf verschiedenen Seiten von B liegen, also y_{12} gemeinsamer Stützpunkt von T_1 und T_2 ist. Somit ist $POW(B \cap T_2) \geq 3$.

2.5.3. Wenden wir Op auf B_2 (statt auf B_1) an, so erhalten wir ein $B_3 \subset B_2$ und ein $T_3 \in \mathfrak{k}$, für welche die Betrachtungen in 2.5.2. ergeben: Es ist $POW(B \cap T_3) \geq 4$ (vgl. [4], S. 25, § 5). Fortgesetzte Anwendung von Op führt zu einer antitonen Folge $(B_m)_m$ von Teilbogen von B , also zu $D := \bigcap_m B_m \neq \emptyset$. Es gibt also ein $y \in D$ und ein $T := T(x, y) \in \mathfrak{k}$ mit $x \neq y$ und $POW(B \cap T) = +\infty$ im Widerspruch damit, daß $POW(B; \mathfrak{k})$ höchstens endlich ist.

2.6. Aus 2.5.3. ergibt sich somit der

Satz. Es sei B ein (lokal) $\mathfrak{k}$ -normaler T -Bogen, wobei $\mathfrak{k}$ ein System von OCh im Sinne von 1.2. ff. ist. Dann besitzt B , falls von höchstens endlichem $POW(B, \mathfrak{k})$ und $\mathfrak{k}$ -ordnungshomogen, den lokalen POW Drei. (Als lokale POW kommen also für ($\mathfrak{k}$ -ordnungshomogene) B höchstens Drei und Unendlich in Betracht).

Anmerkung. Für das in 1.2.3. mit Hilfe der Polynome höchstens 2. Grades erklärte System $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}' \cup \mathfrak{k}''$ von OCh gilt: Es gibt $\mathfrak{k}$ -o.h. T -Bogen B vom lokalen POW *tsowohl für $t = 3$ als für $t = +\infty$.*-Betr., $t = 3$. Zuzufolge des vorstehenden Satzes genügt es, die Existenz von T -Bogen B von höchstens endlichem POW nachzuweisen; denn ein solches B ist abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von $\mathfrak{k}$ -o.h. Bogen, deren lokaler POW nach unserem Satz nur Drei sein kann. Aber z. B. $POW(B, \mathfrak{k})$ ist höchstens endlich, wenn $B = \text{Gr}(f)$ ($=$ Graph von f) mit analytischem, von den Polynomen verschiedenem $f|J$ -Betr. $t = +\infty$. Man wähle $B = \text{Gr}(f)$ mit einem differenzierbaren nirgends (in J) monotonem $f|J$ (vgl. [7]). Es sei dann $\mathfrak{b}$ das Büschel der B treffenden Parallelen zur ξ -Achse. Weil f nirgends monoton, liegen in $\mathfrak{b}$

diejenigen Geraden dicht, welche Punkte mit maximalen Werten von f enthalten, also Stützpunkte mit B . Bekanntlich (vgl. z. B. [1], 1.4.1.) ist dann $POW(B, \mathfrak{b}) = +\infty = POW(B, \mathfrak{f})$, weil $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{f}$. Und da Gleiches für jeden Teilbogen von B gilt, ist B auch $\mathfrak{f}$ -o.h. mit $t = +\infty$. – Man bemerke noch, daß die für $t = 3$ und $t = +\infty$ angegebenen Beispiele T -Bogen sind, weil die zugehörigen f differenzierbar sind.

§ 3 Ordnungshomogene Bogen mit Tangente im R^3

3.1. Mit R^i , $i = 1, 2, 3$, sei der euklidische, i -dimensionale Raum bezeichnet und mit R^t das System der t -dimensionalen Unterräume R^t in R^i , $1 \leq t \leq i - 1$. Es sei $B \subset R^i$ ein Bogen, $2 \leq i \leq 3$. Ist B orientiert und $x \in B$, so bezeichnet man als vordere bzw. hintere Halbtangente $Th_v(x) = Th_v(x; B)$ bzw. $Th_h(x) = Th_h(x, B)$ den Limes, falls er existiert, der Halbgeraden mit x als Anfangspunkt, welche einen von vorn bzw. von hinten gegen x konvergierenden Punkt $u \in B$ enthalten. Die Trägergerade $T_v(x) = T_v(x, B)$ bzw. $T_h(x) = T_h(x, B)$ von $Th_v(x)$ bzw. von $Th_h(x)$ wird als die vordere bzw. hintere Tangente in x an B bezeichnet.

Hingegen heißt der Limes, falls er existiert, der Geraden durch zwei Punkte $u, v \in B$, die beliebig von vorn bzw. von hinten gegen x konvergieren, die vordere bzw. hintere (1-)Paratingente $P_v(x) = P_v(x, B)$ bzw. $P_h(x) = P_h(x, B)$ in x an B . Falls $P_v(x) = P_h(x)$ ist, bezeichnet man diese Gerade als die (1-)Paratingente $P(x) = P(x, B)$ in x an B . – Aus der Existenz z. B. $P_v(x)$ folgt die von $Th_v(x)$, aber nicht umgekehrt.

3.2. Für R^2 ist bekannt, daß die Konvexbogen, also die B mit $POW(B, \mathfrak{f}^1) = 2$, die einzigen $\mathfrak{f}^1$ -o.h.-Bogen von höchstens endlichem $POW(B, \mathfrak{f}^1)$ sind ([1], 3.4.2., Satz 2). Außerdem wurden für den Fall des R^2 $\mathfrak{f}^1$ -o.h. und sogar differenzierbare Bogen vom lokalen $POW + \infty$ angegeben (2.6.)

Im R^3 gibt es $\mathfrak{f}^2$ -o.h.-Bogen vom lokalen $POW t$ sowohl für $t = 3$ als für $t = +\infty$. Man betrachte beispielsweise $B := \{(x, y, z) : x = s \wedge y = s^2 \wedge z = f(s) \wedge s \in J := [0; 1]\}$. Ist $f(s) := s^3$, so liefert der Durchschnitt eines beliebigen Teilbogens B' von B mit einer geeigneten Ebene (vermöge einer Gleichung 3. Grades in s)

maximal 3 Punkte. Es besitzt also B den lokalen POW 3 und ist überdies differenzierbar, d. h. B benutzt in jedem Punkt genau eine Tangente. – Wählt man andererseits als $f|_J$ eine differenzierbare, nirgends monotone Funktion, so folgt, daß die Projektion von B in die x, z -Ebene differenzierbar ist, also, weil gleiches für die Projektion in die x, y -Ebene gilt, daß auch B differenzierbar ist. Ferner ist B bezüglich des Büschels der zur x, y -Ebene parallelen Ebenen vom lokalen $POW + \infty$ (wie aus 2.6. folgt), also erst recht bezüglich $\mathfrak{f}^2$.

3.3. Festsetzung. Von jetzt ab wird jeder Bogen B im $\mathbf{R}^2$ bzw. $\mathbf{R}^3$ als von höchstens endlichem $POW(B, \mathfrak{f}^1)$ bzw. $POW(B, \mathfrak{f}^2)$ angenommen.

3.3.1. Im $\mathbf{R}^3$ sei E eine Ebene, C ein Konvexbogen in E (ohne Teilstrecken), ferner sei $e \in \mathbf{R}^3 \setminus E$ ein Punkt und $\mathfrak{K} := \mathfrak{K}(e, C)$ das, als Konvexkegelsektor bezeichnete Stück der Kegel­fläche zwischen e und E (e ist Scheitel von $\mathfrak{K}$). Außerdem sei $\mathfrak{f} := \{\mathfrak{K} \cap H : H \in \mathfrak{f}^2 \wedge H \cap U^+ = \emptyset\}$, wobei U^+ eine feste Umgebung von e in $\mathbf{R}^3$ mit $U^+ \cap E = \emptyset$. Jeder Bogen $B \subset \mathfrak{K} \setminus (\bar{U}^+ \cup E)$, welcher sich aus e schlicht auf C projiziert, ist dann $\mathfrak{f}$ -normal. Überdies geht durch beliebige 3 Punkte von B genau ein $K \in \mathfrak{f}$; denn wegen der Konvexität von C hat B mit jeder Geraden des $\mathbf{R}^3$ höchstens 2 Punkte gemeinsam.

3.4. Ein Bogen $B = \bar{B} \subset \mathbf{R}^3$ ist, weil beschränkt, enthalten im Innern eines abgeschlossenen Simplexes S . Sind e', e'' Eckpunkte von S , so sei $\mathfrak{b}$ das Ebenenbüschel im $\mathbf{R}^3$ mit der Verbindungsgeraden $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(e' e'')$ als Achse; es ist also $B \cap \mathfrak{A} = \emptyset$. Mit $POW(B, \mathfrak{f}^2)$ ist auch $POW(B, \mathfrak{b})$ höchstens endlich. Daher gibt es Teilbogen $W = \bar{W}$ von B mit $POW(W, \mathfrak{b}) = 1$ ([1], 7.8.4.). Es sei nun $\mathfrak{P}$ eine zu S fremde, zu $\mathfrak{A}$ parallele Ebene (im $\mathbf{R}^3$), für welche W zwischen $\mathfrak{P}$ und der zu $\mathfrak{P}$ parallelen, $\mathfrak{A}$ enthaltenden Ebene liegt; außerdem sei $p' : W \rightarrow \mathfrak{P}$ bzw. $p'' : W \rightarrow \mathfrak{P}$ die Zentralprojektion von W in $\mathfrak{P}$ aus dem Zentrum e' bzw. e'' . Wegen $POW(B, \mathfrak{b}) = 1$ sind $p'(W)$ und $p''(W)$ topologische Bilder von W also $W' := p'(W)$ und $W'' := p''(W)$ Bogen in $\mathfrak{P}$, wobei $W' \cap W'' = \emptyset$ und wobei für jede Parallele $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{A}$ gilt: $POW(W' \cap \mathfrak{A}) = POW(W'' \cap \mathfrak{A}) = 0$ oder $= 1$.

3.4.1.. Weil $POW(W, \mathfrak{f}^2)$ höchstens endlich ist (3.3.), gilt dies auch für $POW(W', \mathfrak{f}^1)$ und $POW(W'', \mathfrak{f}^1)$ (in $\mathfrak{P}$). Gemäß 3.2. gibt

es daher einen konvexen Teilbogen W'_1 von W' , welchem dann eindeutig ein Teilbogen W_1 von W entspricht. Auf $W''_1 := p''(W_1)$ läßt sich der gleiche Schluß anwenden, wie auf W' . Man gelangt so zu einem Teilbogen von W , den wir wieder mit W bezeichnen, für den $C' := p'(W)$ und $C'' := p''(W)$ beide Konvexbogen (in $\mathfrak{P}$) sind.

3.4.2. Jeder Konvexbogen C (in $\mathbf{R}^2$) besitzt in jedem Punkt genau eine vordere und eine hintere (1-)Paratingente, in den Endpunkten je nur eine hintere bzw. vordere (vgl. 3.1.); übrigens fallen diese in jedem Punkt bis auf abzählbar viele Ausnahmen zusammen, liefern also dort die (einzige) (1-)Paratingente, die zugleich Tangente an C und Stützgerade an C ist, wofür letzteres auch für die einseitigen (1-)Paratingenten gilt (vgl. [1], 3.1.6.).

Die am Ende von 3.4.1. erklärten Konvexbogen $\zeta', \bar{\zeta}'' \subset \mathfrak{P}$ besitzen keine zu $\mathfrak{A}$ parallele Stützgeraden; denn anderenfalls gibt es zu $\mathfrak{A}$ parallele Sekanten $\mathfrak{A}^+$ mit $POW(C' \cap \mathfrak{A}^+) = 2$ usw., im Widerspruch zu $POW(C' \cap \mathfrak{A}^+) \leq 1$ usw. (vgl. 3.4.). O. B. d. A. können wir (vermöge Übergang zu einem abgeschlossenen Teilbogen von W) annehmen, daß weder C' noch C'' eine zu $\mathfrak{A}$ parallele Paratingente besitzen. Ist speziell $x' = p'(x)$, $x'' = p''(x)$ für ein $x \in W$, so entsprechen z. B. $P_v(x', C')$ und $P_v(x'', C'')$ einander ein-eindeutig. Und da $P_v(x', C')$ und $P_v(x'', C'')$ nicht parallel zu $\mathfrak{A}$ sind, so ist die Schnittgerade der (Projektions-) Ebenen durch $P_v(x', C')$ und e' bzw. durch $P_v(x'', C'')$ und e'' eine $P_v(x, W)$, und zwar die einzige. Entsprechend für $P_h(x, W)$. Wir erhalten so:

(I) Sind die Projektionen $C' = p'(W)$ und $C'' = p''(W)$ von W in $\mathfrak{P}$ beide konvex, so existiert in jedem $x \in W$ (bei hinreichend kleinem W) sowohl die vordere als die hintere (1-)Paratingente (in den Endpunkten nur je eine) $P_v(x, W)$ bzw. $P_h(x, W)$. Außerdem gibt es eine abzählbare Teilmenge A von W derart, daß, für jedes $x \in W \setminus A$, $P(x, W) = P_v(x, W) = P_h(x, W)$ existiert.

(II) Stetigkeitseigenschaften der 1-Paratingenten an W (im $\mathbf{R}^3$): Es sei $x \in W$ und $x = \lim x_r$, wobei alle $x_r \in W$ vor bzw. alle hinter x liegen sollen; dann ist $P_v(x, W) = \lim P_v(x_r, W)$ bzw. $P_h(x, W) = \lim P_h(x_r, W)$, wobei $P(x_r, W)$ irgend eine, insbesondere vordere oder hintere, (1-)Paratingente bedeute. Speziell ist das auf $W \setminus A$ eindeutige $P(x, W)$ stetig auf $W \setminus A$.

(III) Für alle $x \in W$ und alle (1-)Paratingenten $\tilde{P}(x, W)$, speziell also auch für alle vorderen bzw. hinteren (1-)Paratingenten, in x an W gilt $\tilde{P}(x, W) \cap (W \setminus \{x\}) = \emptyset$.

Denn dies gilt für die beiden (konvexen) Projektionen von W .

3.5. Gemäß 3.4. und 3.4.1. betrachten wir einen Bogen $W \subset \mathbf{R}^3$ welcher sich aus einem Punkt $e \in \mathbf{R}^3$ in eine Ebene $\mathfrak{P}$ topologisch als Konvexbogen C projiziert; o. B. d. A. wird dabei C (und damit W) so klein angenommen, daß die Halbtangenten in den Endpunkten von C an C sich in der (euklidischen) Ebene $\mathfrak{P}$ schneiden, sodaß C in dem von der Verbindungsstrecke der beiden Endpunkte von C und von Teilstrecken der Halbtangenten begrenzten Dreieck liegt. Da W zwischen $\mathfrak{P}$ und der zu $\mathfrak{P}$ parallelen Ebene durch e liegen sollte (vgl. 3.4.), liegt W auf einem Teilbereich E des Konvexkegelsektors $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(e, C)$ (vgl. 3.3.1.), wobei die Begrenzung von E enthalten sein soll in den Mantellinien von $\mathfrak{K}$ durch die Endpunkte von W und in den Schnitten von $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{P}$ und dem Schnitt von $\mathfrak{K}$ mit einer zu $\mathfrak{P}$ parallelen Ebene $\mathfrak{P}'$ zwischen W und e . Daher ist E topologisches Bild einer abgeschlossenen Kreisscheibe. Außerdem bilden die Schnitte von E mit den zu einer Umgebung von e im $\mathbf{R}^3$ fremden Ebenen H des $\mathbf{R}^3$ ein OCh-System $\mathfrak{k}$ in E mit der Grundzahl $k = k(\mathfrak{k}) = 3$. Schließlich ist W normal zu $\mathfrak{k}$, weil die Projektion eines jeden $K \in \mathfrak{k}$ aus e in W injektiv ist. Auch ist $POW(W, \mathfrak{k}_2) = POW(W, \mathfrak{k})$.

Daß die Durchschnitte $K = E \cap H$ evtl. in (höchstens) zwei (Konvex-)Bogen zerfallen, ist für die Ausführungen in 3.5.1. ff. ohne Belang; denn durch Hinzunahme eines Teilbogens B der Begrenzung E_g von E , wobei B keine Strecke ist, läßt sich K zu einem Bogen in E ergänzen, dessen Endpunkte in E_g liegen. (Dies folgt u. a. daraus, daß H mit jeder Erzeugenden der Kegel- fläche höchstens einen Punkt gemeinsam hat) (vgl. auch [1], 4.2.1.)

3.5.1. Von dem in 3.5 betrachteten Bogen $W \subset \mathbf{R}^3$ wird jetzt *zusätzlich* gefordert, daß an W (im $\mathbf{R}^3$) in jedem $x \in W$ (*genau*) eine Tangente (also eine (1-)Paratingente) *existiert*, d. h. es sei $A = \emptyset$, vgl. 3.4.2.). Wir behaupten: Es ist W in E bezüglich $\mathfrak{k}$ ein T -Bogen (vgl. 1.2.3.). In der Tat: Ist $x \in W \cap K$ mit $K \in \mathfrak{k}$ und wird W in $y \in W \setminus \{x\}$ von K gestützt, so ist in der dem K entsprechenden Ebene H (also $K = E \cap H$) die Tangente an W in y (im $\mathbf{R}^3$) enthalten. Denn es gibt zu H beliebig benachbarte x

enthaltende Ebenen H'' , welche mit W mindestens 2 zu y beliebig benachbarte Punkte, etwa $u'', v'' \in W$, gemeinsam haben; läßt man H'' gegen H konvergieren, so konvergiert die Verbindungsgerade (in $\mathbf{R}^3$) von u'' und v'' gegen die (1-)Paratingente $P(y, W)$, also gegen die Tangente in y an W . Da aber gemäß 3.4.2., (III), $P(y, W) \cap (W \setminus \{y\}) = \emptyset$ ist, wird H durch x und y eindeutig bestimmt und damit auch K durch x und den Stützpunkt y .

3.6. Aus 2.6., 3.5. und 3.5.1. folgt nun der in Aussicht genommene

Satz. *Die einzigen bezüglich des Systems $\mathbb{F}^2$ der Ebenen des $\mathbf{R}^3$ ordnungshomogenen Bogen $B \subset \mathbf{R}^3$ von höchstens endlichem $POW(B, \mathbb{F}^2)$, für welche überdies in jedem $x \in B$ eine Tangente an B existiert, sind die B von lokalen POW 3.*

1. Anmerkung. Aus der Existenz der Tangente in $x \in B$ an B folgt noch nicht die Existenz der Schmiegebene an B in x , d. h. die Eindeutigkeit des Limes der Ebenen durch 3 beliebig gegen x konvergierende Punkte von B .

2. Anmerkung. Im $\mathbf{R}^3$ gibt es ordnungshomogene Bogen B der lokalen Ordnung Unendlich, derart daß B in jedem Punkt genau eine Tangente besitzt.

Literatur

- [1] Kaupt-Künneht, Geometrische Ordnungen. Heidelberg-New York 1967.
- [2] Haupt, Zur Differentialgeometrie der Kurven und Flächen. Journ. r. u. angew. Math. 169 (1933), 137–185.
- [3] Haupt, Zum Verteilungssatz der Strukturtheorie reeller Gebilde. Monatsh. f. Math. u. Physik 46 (1937), 84–92.
- [4] Haupt, Bestimmung der zyklisch ordnungshomogenen ebenen Bogen. Journ. r. u. angew. Math. 178 (1938), 14–28; und 180 (1939) 44–72.
- [5] Haupt, Über die Existenz ordnungshomogener Bogen in der Ebene bezüglich vorgegebener Ordnungscharakteristiken, Bull. Soc. Royale Sci. Liège 30 (1961), 195–209.
- [6] Haupt, Über ordnungshomogene Bogen im projektiven n -dimensionalen Raum bezüglich der Hyperebenen als Ordnungscharakteristiken. Bull. Soc. Royale Sci. 31 (1962), 321–333.
- [7] Vgl. A. Köpke, Math. Ann. 34 (1889), 161–171, und Math. Ann. 35 (1890), 104–109. Weitere Literatur bei A. Schönflies, Bericht über die Mengenlehre, Jahresber. d. d. Math. Ver. 8 (1900).