BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1961

MÜNCHEN 1962

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Die Grundlagen der Elastizitätstheorie

Von Ludwig Föppl in München

Vorgetragen am 8. Dezember 1961

Bezeichnet man beim ebenen Spannungszustand in üblicher Weise die Normalspannungen mit σ_x und σ_y und die Schubspannungen mit τ_{xy} bzw. mit τ_{yx}, so lauten die Gleichgewichtsgleichungen in Richtung der beiden Achsen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Wenn man darin, wie es bisher immer geschehen ist, die einander zugeordneten Schubspannungen τ_{xy} und τ_{yx} gleich groß und mit gleichem Vorzeichen annimmt, so bedeutet dies eine Unstetigkeit beim stetigen Übergang vom Schnitt senkrecht zur x-Achse auf den Schnitt senkrecht zur y-Achse. Um die Stetigkeit bei diesem Übergang zu gewährleisten, müssen aus Gleichgewichtsbedingungen τ_{xy} und τ_{yx} zwar gleich groß, aber von entgegengesetztem Vorzeichen sein:

$$\tau_{xy} = \tau\,; \quad \tau_{yx} = -\tau. \tag{2}$$

Damit gehen die Gl. (1) über in:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Dazu tritt die bekannte Verträglichkeitsgleichung:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) \equiv \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \tag{4}$$

Aus den Gl. (3) folgt, daß der Spannungstensor antisymmetrisch ist und nicht symmetrisch, wie es bisher angenommen worden ist.

Die Airysche Spannungsfunktion F ist zur Befriedigung der Gl. (1) bzw. Gl. (3) folgendermaßen anzusetzen:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}; \quad \tau_{yx} = +\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}. \tag{5}$$

Entsprechendes gilt für den räumlichen Spannungszustand. Den Gleichgewichtsgleichungen (1) entsprechen die von Cauchy (1822) erstmals aufgestellten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Im zugehörigen Spannungstensor:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \tag{6a}$$

wurden bisher die zur σ-Diagonale symmetrisch stehenden Schubspannungen als gleich groß und von gleichem Vorzeichen angesehen. Die Stetigkeit verlangt aber, daß sie verschiedene Vorzeichen besitzen:

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} = \tau_x; \quad \tau_{yz} = -\tau_{zy} = \tau_y; \quad \tau_{zx} = -\tau_{xz} = \tau_z. \tag{7}$$

Damit geht der Spannungstensor von (6a) über in:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & -\tau_x & +\tau_z \\ +\tau_x & \sigma_y & -\tau_y \\ -\tau_z & +\tau_y & \sigma_z \end{vmatrix} \tag{7a}$$

Nachdem es sich herausstellt, daß die bisherigen Grundlagen fehlerhaft sind, muß die Elastizitätstheorie kritisch untersucht werden.