

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1948

München 1949

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Zahlenfolgen mit endlich vielen Primteilern.

Von Wilhelm Specht in Erlangen.

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 14. Mai 1948.

Es bezeichne im folgenden

$$\mathfrak{B}: 1 = b_1 < b_2 < b_3 < \dots < b_n < \dots$$

stets die Folge aller der Größe nach geordneten natürlichen Zahlen von der Gestalt $p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_m^{u_m}$ mit festen Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_m$ einer endlichen Anzahl $m \geq 2$, weiter sei $B(x)$ die Anzahl der Glieder der Folge $\mathfrak{B}$, die die Zahl x nicht übertreffen:

$$B(x) = 0, \text{ wenn } x < 1; \quad B(x) = n, \text{ wenn } b_n \leq x < b_{n+1}. \quad (1)$$

Außerdem werde zur Abkürzung gesetzt:

$$P = (p_1 p_2 \dots p_m)^{\frac{1}{2}}; \quad Q = (m! \log p_1 \log p_2 \dots \log p_m)^{\frac{1}{m}}. \quad (2)$$

Unter diesen Bezeichnungen sind, soweit mir die mathematische Literatur zugänglich ist, über die Folge $\mathfrak{B}$ die nachstehenden Grenzwerte bekannt:¹

$$\log b_n \sim Q n^{\frac{1}{m}}, \quad (3)$$

$$B(x) \sim \left(\frac{\log x}{Q} \right)^m, \quad (4)$$

$$b_{n+1} \sim b_n, \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_n) = \infty. \quad (6)$$

Dazu kommt noch die Ungleichung²

$$\gamma_1 \exp \left(Q n^{\frac{1}{m}} \right) < b_n < \gamma_2 \exp \left(Q n^{\frac{1}{m}} \right) \quad (7)$$

mit positiven Konstanten γ_1, γ_2 , durch die die Größenordnung der Glieder b_n der Folge $\mathfrak{B}$ festgelegt wird.

¹ Vgl. G. Pólya, Zur Arithmetik der Polynome. Math. Zeitschr. **1**, 143–148 (1918).

² Vgl. W. Specht, Primteiler von Zahlenfolgen. I, II. Deutsche Math. **3**, 689–697 (1939); **6**, 89–96. (1941).

Die nachfolgenden Untersuchungen stellen sich zur Aufgabe, diese Ergebnisse wesentlich zu vertiefen. Wie gezeigt werden wird, gelten die Gleichungen:

$$\log b_n = Q n^{\frac{1}{m}} - \log P + o(1), \quad (8)$$

$$B(x) = \left(\frac{\log Px}{Q} \right)^m + o((\log x)^{m-1}), \quad (9)$$

$$b_n \sim \frac{1}{P} \exp \left(Q n^{\frac{1}{m}} \right), \quad (10)$$

$$\log (b_{n+1} - b_n) \sim \log b_n \sim Q n^{\frac{1}{m}}. \quad (11)$$

Die Beweise stützen sich, was die ersten drei dieser Formeln angeht, auf eine Abschätzung der Gitterpunkte in einem m -dimensionalen Simplex, die aus einem Gleichverteilungssatz entwickelt wird, während für die letzte Formel in Verfeinerung der von G. Pólya herangezogenen Methode der Satz von C. Siegel³ über diophantische Approximationen algebraischer Zahlen zur Grundlage dient.

Eine asymptotische Bestimmung der Differenz $b_{n+1} - b_n$ aufeinander folgender Glieder der Folge $\mathfrak{B}$ ist mir bisher nicht gelungen. Welche Gestalt sie besitzen müßte, wenn sie überhaupt möglich ist, zeigt der Mittelwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n (b_{\nu+1} - b_{\nu}) \nu^{\frac{m-1}{m}} \exp \left(-Q \nu^{\frac{1}{m}} \right) = \frac{Q}{mP}, \quad (12)$$

aus dem insbesondere

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_n) n^{\frac{m-1}{m}} \exp \left(-Q n^{\frac{1}{m}} \right) &\leq \frac{Q}{mP} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_n) n^{\frac{m-1}{m}} \exp \left(-Q n^{\frac{1}{m}} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

gefolgt werden kann.

³ Vgl. C. Siegel, Approximation algebraischer Zahlen. Math. Zeitschr. 10, 173-213 (1921).

I

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ positive reelle Zahlen, so bezeichne $\Delta_m(\xi, \alpha)$ für jedes positive ξ das abgeschlossene Simplex

$$\Delta_m(\xi, \alpha) \quad \sum_{\mu} \alpha_{\mu} x_{\mu} \leq \xi; \quad x_{\mu} \geq 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

des m -dimensionalen euklidischen Raumes aller Punkte $(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ mit reellen Koordinaten x_{μ} . Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, die Gitterpunkte des Raumes, bezeichne ich stets mit $(u) = (u_1, u_2, \dots, u_m)$.

Die Anzahl $A_m(\xi, \alpha)$ der Gitterpunkte (u) des Simplex $\Delta_m(\xi, \alpha)$ im Innern und auf dem Rande genügt der asymptotischen Gleichung⁴

$$A_m(\xi, \alpha) \sim \frac{\xi^m}{m! \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}. \quad (14)$$

Es wird die Hauptaufgabe dieser Untersuchungen sein, diese Abschätzung bei einer schwachen zusätzlichen Forderung über die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ in ausreichendem Maße zu verbessern.

Unter $\rho(x)$ verstehe ich den Rest der reellen Zahl $x \pmod{1}$:

$$\rho(x) = x - [x]. \quad (15)$$

Ist nun $f(\xi, x) = f(\xi, x_1, x_2, \dots, x_m)$ eine für alle Werte $\xi > 0$ und alle Gitterpunkte (u) des Raumes erklärte reelle Funktion, so bezeichne $N(\xi, f, \eta)$ die Anzahl der Gitterpunkte $(u) \in \Delta_m(\xi, \alpha)$, die der Bedingung

$$\rho(f(\xi, u)) = \rho(f(\xi, u_1, u_2, \dots, u_m)) < \eta \quad (16.1)$$

genügen. Besteht für jedes η aus dem Intervall $0 \leq \eta \leq 1$ die Gleichung

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{N(\xi, f, \eta)}{A_m(\xi, \alpha)} = \eta, \quad (16.2)$$

so heißt $f(\xi, x)$ hinsichtlich $\Delta_m(\xi, \alpha)$ gleichverteilt $(\text{mod } 1)$.⁵

⁴ Vgl. a. a. O. Anm. 2.

⁵ Begriffsbildung und Beweisgänge sind den üblichen für $m = 1$ nachgebildet. Vgl. J. F. Koksma, Diophantische Approximationen. Ergebn. der Math. **4**, 500–506.

Es ist offenbar $N(\xi, f, 0) = 0$ und $N(\xi, f, 1) = A_m(\xi, \alpha)$, wie auch $f(\xi, x)$ gewählt sein mag, so daß η auch auf das offene Intervall $0 < \eta < 1$ beschränkt werden kann.

Ist $\varphi(t)$ eine im Intervall $0 \leq t \leq 1$ erklärte reelle Funktion, so setze ich zur Abkürzung

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{A_m(\xi, \alpha)} \sum_{(u)} \varphi(\rho(f(\xi, u))) = \Re(f, \varphi) \quad (u) \in \Delta_m(\xi, \alpha), \quad (17)$$

falls dieser Grenzwert existiert. Der Operator $\Re$ ist linear, da für zwei Funktionen $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ gilt

$$\Re(f, \varphi_1 + \varphi_2) = \Re(f, \varphi_1) + \Re(f, \varphi_2), \quad (18)$$

falls diese Grenzwerte existieren. In der üblichen Weise läßt sich für eine in t gleichmäßig konvergente Reihe

$$\varphi(t) = \sum_{h=1}^{\infty} \varphi_h(t) \quad (19.1)$$

die Gleichung

$$\Re(f, \varphi) = \sum_{h=1}^{\infty} \Re(f, \varphi_h) \quad (19.2)$$

beweisen, falls alle hierin auftretenden Grenzwerte existieren.

Satz 1. *Es sei $f(\xi, x)$ hinsichtlich $\Delta_m(\xi, \alpha)$ gleichverteilt (mod 1) und $\varphi(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq 1$ beschränkt und Riemann-integrierbar. Dann existiert der Grenzwert $\Re(f, \varphi)$ und besitzt den von $f(\xi, x)$ unabhängigen Wert*

$$\Re(f, \varphi) = \int_0^1 \varphi(t) dt. \quad (20)$$

Für eine beliebige natürliche Zahl k und $\kappa = 1, 2, \dots, k$ sei

$$m_\kappa = \underline{\text{fin}} \varphi(t); \quad M_\kappa = \overline{\text{fin}} \varphi(t), \quad \text{falls } \frac{\kappa-1}{k} \leq t < \frac{\kappa}{k}.$$

Dann ist

$$\frac{1}{k} \sum_{\kappa=1}^k m_\kappa \leq \int_0^1 \varphi(t) dt \leq \frac{1}{k} \sum_{\kappa=1}^k M_\kappa$$

und

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{\kappa=1}^k m_\kappa = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{\kappa=1}^k M_\kappa = \int_0^1 \varphi(t) dt.$$

Andererseits ist für jede feste natürliche Zahl k die Anzahl der Gitterpunkte $(u) \in \Delta_m(\xi, \alpha)$, die der Bedingung

$$\frac{x-1}{k} \leq \rho(f(\xi, u)) < \frac{x}{k} \quad (x = 1, 2, \dots, k)$$

genügen, für die also

$$m_x \leq \varphi(\rho(f(\xi, u))) \leq M_x$$

gilt, gleich $N\left(\xi, f, \frac{x}{k}\right) - N\left(\xi, f, \frac{x-1}{k}\right)$, so daß wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^h m_x \left[N\left(\xi, f, \frac{x}{k}\right) - N\left(\xi, f, \frac{x-1}{k}\right) \right] &\leq \sum_{(u)} \varphi(\rho(f(\xi, u))) \\ &\leq \sum_{x=1}^h M_x \left[N\left(\xi, f, \frac{x}{k}\right) - N\left(\xi, f, \frac{x-1}{k}\right) \right]. \end{aligned}$$

Für alle $\xi > \xi_0 = \xi_0(k, \varepsilon)$ gilt aber, da nach Voraussetzung $f(\xi, u)$ hinsichtlich $\Delta_m(\xi, \alpha)$ gleichverteilt (mod 1) ist,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{k} - \varepsilon\right) A_m(\xi, \alpha) &\leq N\left(\xi, f, \frac{x}{k}\right) - N\left(\xi, f, \frac{x-1}{k}\right) \\ &\leq \left(\frac{1}{k} + \varepsilon\right) A_m(\xi, \alpha) \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{x=1}^h m_x - \varepsilon \sum_{x=1}^h |m_x| &\leq \frac{1}{A_m(\xi, \alpha)} \sum_{(u)} \varphi(\rho(f(\xi, u))) \\ &\leq \frac{1}{k} \sum_{x=1}^h M_x + \varepsilon \sum_{x=1}^h |M_x|. \end{aligned}$$

Da diese Ungleichungen bei festem k für alle $\varepsilon > 0$ bestehen, finden wir

$$\frac{1}{k} \sum_{x=1}^h m_x \leq \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{A_m(\xi, \alpha)} \sum_{(u)} \varphi(\rho(f(\xi, u))) \leq \frac{1}{k} \sum_{x=1}^h M_x.$$

In der Grenze $k \rightarrow \infty$ folgt nun

$$\Re(f, \varphi) = \int_0^1 \varphi(t) dt$$

und damit die Behauptung des Satzes.

Satz 2. Eine Funktion $f(\xi, x) = f(\xi, x_1, x_2, \dots, x_n)$ ist dann und nur dann hinsichtlich $\Delta_m(\xi, \alpha)$ gleichverteilt (mod 1), wenn für jede natürliche Zahl k

$$\Re(f, e^{2\pi i k t}) = 0 \quad (21.1)$$

ist.

Die Bedingung (21.1) ist offensichtlich gleichwertig mit der Bedingung

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{A_m(\xi, \alpha)} \sum_{(u)} \cos(2\pi i k f(\xi, u)) \\ = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{A_m(\xi, \alpha)} \sum_{(u)} \sin(2\pi i k f(\xi, u)) = 0 \end{aligned} \quad (21.2)$$

für jedes natürliche k .

Die Notwendigkeit dieser Bedingungen (21.2) für die Gleichverteilung von $f(\xi, u)$ hinsichtlich $\Delta_m(\xi, \alpha)$ entnimmt man unmittelbar dem Satz 1. Es bleibt daher noch die Umkehrung für eine beliebiges η aus dem Intervall $0 < \eta < 1$ zu beweisen.

Zu diesem Zwecke erklären wir die Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} V(t, \eta) = 1 \text{ für } 0 \leq t < \eta; \quad V(t, \eta) = 0 \text{ für } \eta \leq t < 1; \\ V(t + g) = V(t) \text{ für ganzes } g, \end{aligned} \quad (22)$$

durch die die Anzahl $N(\xi, f, \eta)$ in der Gestalt

$$N(\xi, f, \eta) = \sum_{(u)} V(f(\xi, u), \eta) \quad (u) \in \Delta_m(\xi, \alpha) \quad (23)$$

dargestellt werden kann. Zu $V(t, \eta)$ werden weiter für jedes δ aus dem Intervall $0 < \delta < \eta/2$ zwei für alle t stetige Näherungsfunktionen erklärt durch

$$\begin{aligned} V_1(t, \eta, \delta) &= \frac{t}{\delta} \quad \text{für } 0 \leq t < \delta \\ &= 1 \quad \text{für } \delta \leq t < \eta - \delta \\ &= \frac{\eta - t}{\delta} \quad \text{für } \eta - \delta \leq t < \eta \\ &= 0 \quad \text{für } \eta \leq t < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2(t, \eta, \delta) &= 1 && \text{für } 0 \leq t < \eta \\
&= \frac{\eta + \delta - t}{\delta} && \text{für } \eta \leq t < \eta + \delta \\
&= 0 && \text{für } \eta + \delta \leq t < 1 - \delta \\
&= \frac{-1 + \delta + t}{\delta} && \text{für } 1 - \delta \leq t < 1
\end{aligned}$$

$$V_1(t + g, \eta, \delta) = V_1(t, \eta, \delta); \quad V_2(t + g, \eta, \delta) = V_2(t, \eta, \delta) \\ \text{für ganzes } g.$$

Offensichtlich bestehen für jedes t die Ungleichungen

$$V_1(t, \eta, \delta) \leq V(t, \eta) \leq V_2(t, \eta, \delta). \quad (24)$$

Als überall stetige Funktionen lassen sich $V_1(t, \eta, \delta)$, $V_2(t, \eta, \delta)$ in die für alle t gleichmäßig konvergenten Fourierreihen

$$\begin{aligned}
V_1(t, \eta, \delta) &= \eta - \delta + \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \cos 2\pi k t + b'_k \sin 2\pi k t, \\
V_2(t, \eta, \delta) &= \eta + \delta + \sum_{k=1}^{\infty} a''_k \cos 2\pi k t + b''_k \sin 2\pi k t
\end{aligned} \quad (25)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
a'_k &= \frac{2}{\delta \pi^2 k^2} \cos \pi k \eta \sin \pi k \frac{\eta - \delta}{2} \sin \pi k \delta \\
b'_k &= \frac{2}{\delta \pi^2 k^2} \sin \pi k \eta \sin \pi k \frac{\eta - \delta}{2} \sin \pi k \delta \\
a''_k &= \frac{2}{\delta \pi^2 k^2} \cos \pi k \eta \sin \pi k \frac{\eta + \delta}{2} \sin \pi k \delta \\
b''_k &= \frac{2}{\delta \pi^2 k^2} \sin \pi k \eta \sin \pi k \frac{\eta + \delta}{2} \sin \pi k \delta
\end{aligned} \quad (26)$$

entwickeln. Auf Grund der für alle t gleichmäßigen Konvergenz der Reihen (25) läßt sich nun der Operator $\Re(f, \varphi)$ auf die einzelnen Summanden anwenden, so daß wir wegen (21.2) erhalten:

$$\Re(f, V_1) = \eta - \delta; \quad \Re(f, V_2) = \eta + \delta$$

und wegen (24)

$$\eta - \delta \leq \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{N(\xi, f, \eta)}{A_m(\xi, \alpha)} = \Re(f, V) \leq \eta + \delta.$$

Da dies für alle $\delta > 0$ zutrifft, entsteht schließlich

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{N(\xi, f, \eta)}{A_m(\xi, \alpha)} = \eta,$$

wie zu zeigen war.

Für unsere Zwecke von Wichtigkeit sind lineare Funktionen $f(\xi, x)$; über ihre Gleichverteilung gibt der folgende Satz Auskunft:

Satz 3. *Die lineare Funktion*

$$f(\xi, x) = \lambda \xi + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m$$

ist hinsichtlich $\Delta_m(\xi, \alpha)$ gleichverteilt (mod 1), wenn wenigstens eine der Zahlen β_μ irrational ist.

Ohne Einschränkung kann zum Beweise aus Symmetriegründen angenommen werden, daß die Zahl β_m irrational sei. Dann ist für jede natürliche Zahl k offenbar $|\sin \pi k \beta_m| > 0$.

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$f(\xi, u) = \lambda \xi + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_m u_m = g(\xi, u) + \beta_m u_m$$

$$x_u = \left[\frac{\xi - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 - \dots - \alpha_{m-1} u_{m-1}}{\alpha_m} \right] + 1,$$

so ist

$$s_k = \sum_{(u)} e^{2\pi i k f(\xi, u)} = \sum_{(u)} e^{2\pi i k g(\xi, u)} e^{2\pi i k \beta_m u_m}$$

$$= \sum_{(v)} e^{2\pi i k g(\xi, v)} \left(\sum_{u_m=0}^{x_u-1} e^{2\pi i k \beta_m u_m} \right),$$

wobei die äußere Summe über die Gitterpunkte (v) des $(m-1)$ -dimensionalen Simplex

$$\Delta_{m-1}(\xi, \alpha): \quad \sum_v \alpha_v x_v \leq \xi; \quad x_v \geq 0 \quad (v = 1, 2, \dots, m-1)$$

zu nehmen ist.

Somit ist

$$|s_k| = \left| \sum_{(v)} e^{2\pi i k g(\xi, v)} \cdot \frac{e^{2\pi i k \beta_m x_u - 1}}{e^{2\pi i k \beta_m - 1}} \right| \leq \sum_{(v)} \left| \frac{\sin \pi k \beta_m x_u}{\sin \pi k \beta_m} \right|$$

$$\leq \frac{A_{m-1}(\xi, \alpha)}{|\sin \pi k \beta_m|}.$$

Nun gilt aber nach (14)

$$0 \leq \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{|s_k|}{A_m(\xi, \alpha)} \leq \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{A_{m-1}(\xi, \alpha)}{|\sin \pi k \beta_m| A_m(\xi, \alpha)} = 0,$$

womit Satz 3 auf Grund des Gleichverteilungskriteriums Satz 2 vollständig bewiesen ist.

Hieraus folgt nun rasch der

Satz 4. *Ist unter den positiven Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ wenigstens eine irrational, so ist*

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{A_m(\xi, \alpha)} \sum_{(u)} \rho(\xi - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 - \dots - \alpha_m u_m) = \frac{1}{2}. \quad (27)$$

Denn unter dieser Voraussetzung ist die lineare Funktion $f(\xi, x) = \xi - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \dots - \alpha_m x_m$ hinsichtlich $\Delta_m(\xi, \alpha)$ gleichverteilt (mod 1). Dann aber liefert der Satz 1 mit der Funktion $\varphi(t) = t$ sogleich die Gleichung (27).

II

Die Entwicklungen des ersten Abschnittes waren notwendig, um den folgenden Gitterpunktssatz beweisen zu können:

Satz 5. *Es seien $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ für $m \geq 1$ positive reelle Zahlen, deren Quotienten $\frac{\alpha_\mu}{\alpha_0}$ für $\mu = 1, 2, \dots, m$ nicht sämtlich rational sind. Dann gilt für die Anzahl $A_{m+1}(\xi, \alpha)$ der Gitterpunkte des Simplex*

$$\Delta_{m+1}(\xi, \alpha): \quad \sum_{\nu} \alpha_{\nu} x_{\nu} \leq \xi; \quad x_{\nu} \geq 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, m)$$

die Gleichung

$$A_{m+1}(\xi, \alpha) = \frac{\xi^{m+1}}{(m+1)! \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} + \frac{(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m) \xi^m}{2 \cdot m! \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} + O(\xi^m). \quad (28)$$

Wie man sich leicht überlegt, ist

$$A_{m+1}(\xi, \alpha) = \sum_{(u)} \left(\sum_{\alpha_0 u_0 \leq \xi - \sum \alpha_{\mu} u_{\mu}} 1 \right) = \sum_{(u)} \left(1 + \left[\frac{\xi - \sum \alpha_{\mu} u_{\mu}}{\alpha_0} \right] \right),$$

wobei die Summe über alle Gitterpunkte (u) des Simplex

$$\Delta_m(\xi, \alpha): \quad \sum_{\mu} \alpha_{\mu} x_{\mu} \leq \xi; \quad x_{\mu} \geq 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

zu erstrecken ist. Setzen wir

$$\frac{\xi}{\alpha_0} = \eta; \quad \frac{\alpha_{\mu}}{\alpha_0} = \beta_{\mu}, \quad (29)$$

so ist wenigstens eine der Zahlen β_{μ} irrational und überdies

$$A_{m+1}(\xi, \alpha) = \sum_{(u)} (1 + [\eta - \beta_1 u_1 - \beta_2 u_2 - \dots - \beta_m u_m]), \quad (30)$$

worin die Summe nach wie vor über die Gitterpunkte (u) des Simplex $\Delta_m(\xi, \alpha) = \Delta_m(\eta, \beta)$ geht.

Nach Satz 4 ist nun

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{A_m(\eta, \beta)} \sum_{(u)} \rho(\eta - \beta_1 u_1 - \beta_2 u_2 - \dots - \beta_m u_m) = \frac{1}{2}$$

oder wegen (14)

$$\sum_{(u)} \rho(\eta - \beta_1 u_1 - \beta_2 u_2 - \dots - \beta_m u_m) = \frac{1}{2} A_m(\eta, \beta) + o(\eta^m).$$

Daraus erhalten wir weiter

$$A_{m+1}(\xi, \alpha) = A_m(\eta, \beta) + \sum_{(u)} [\eta - \beta_1 u_1 - \beta_2 u_2 - \dots - \beta_m u_m]$$

oder

$$\begin{aligned} A_{m+1}(\xi, \alpha) \\ = \frac{1}{2} A_m(\eta, \beta) + \sum_{(u)} (\eta - \beta_1 u_1 - \beta_2 u_2 - \dots - \beta_m u_m) + o(\eta^m). \end{aligned} \quad (31)$$

Mithin haben wir nun die Summe

$$S_m(\eta) = \sum_{(u)} (\eta - \beta_1 u_1 - \beta_2 u_2 - \dots - \beta_m u_m) \quad (u) \in \Delta_m(\eta, \beta) \quad (32)$$

zu bestimmen; wir erhalten für sie die Abschätzung

$$S_m(\eta) = \frac{\eta^{m+1}}{(m+1)! \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m} + \frac{(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m) \eta^m}{2 m! \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m} + O(\eta^{m-1}) \quad (33)$$

aus der für alle natürlichen Zahlen k geltenden Gleichung

$$R_k(\eta) = \sum_{0 \leq \beta u \leq \eta} (\eta - \beta u)^k = \frac{\eta^{k+1}}{(k+1)\beta} + \frac{\eta^k}{2} + O(\eta^{k-1}). \quad (34)$$

Um (34) zu beweisen, setzen wir zunächst $k = 1$ und finden

$$\begin{aligned} R_1(\eta) &= \eta \left(1 + \left[\frac{\eta}{\beta} \right] \right) - \frac{\beta}{2} \left[\frac{\eta}{\beta} \right] \left(1 + \left[\frac{\eta}{\beta} \right] \right) \\ &= \frac{1}{2\beta} \left(\beta + \beta \left[\frac{\eta}{\beta} \right] \right) \left(2\eta - \beta \left[\frac{\eta}{\beta} \right] \right) \\ &= \frac{1}{2\beta} \left(\frac{2\eta + \beta}{2} \right)^2 - \frac{1}{2\beta} \left(\frac{2\eta - 2\beta \left[\frac{\eta}{\beta} \right] + \beta}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

worin aber

$$\beta \leq 2\eta - 2\beta \left[\frac{\eta}{\beta} \right] + \beta < 3\beta$$

ist, so daß wir erhalten

$$R_1(\eta) = \frac{\eta^2}{2\beta} + \frac{\eta}{2} + O(1).$$

Nehmen wir daher an, es sei (34) bereits für alle $k' < k$ bewiesen, so folgt aus der Identität

$$\begin{aligned} (\eta - \beta u + \beta)^{k+1} - (\eta - \beta u)^{k+1} &= \binom{k+1}{1} \beta (\eta - \beta u)^k \\ &\quad + \binom{k+1}{2} \beta^2 (\eta - \beta u)^{k-1} + \dots + \beta^{k+1} \end{aligned}$$

durch Summierung über $0 \leq u \leq \left[\frac{\eta}{\beta} \right]$

$$\begin{aligned} (\eta + \beta)^{k+1} - \left(\eta - \beta \left[\frac{\eta}{\beta} \right] \right)^{k+1} &= \\ &= (k+1) \beta R_k(\eta) + \binom{k+1}{2} \beta^2 \frac{\eta^k}{k\beta} + O(\eta^{k-1}) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \eta^{k+1} + (k+1) \beta \eta^k + O(\eta^{k-1}) &= \\ &= (k+1) \beta R_k(\eta) + \frac{1}{2} (k+1) \beta \eta^k + O(\eta^{k-1}), \end{aligned}$$

also die Gleichung (34).

Wegen $R_1(\eta) = S_1(\eta)$ ist gleichzeitig auch (33) für $m = 1$ bewiesen, so daß wir auch diese Gleichung für alle $m' < m$ als richtig ansehen dürfen. Setzen wir

$$S_{m-1}(\zeta) = \sum_{(v)} (\zeta - \beta_1 v_1 - \beta_2 v_2 - \dots - \beta_{m-1} v_{m-1}),$$

wobei die Summe über alle Gitterpunkte (v) des Simplex

$$\Delta_{m-1}(\zeta, \beta) \quad \sum_{\kappa} \beta_{\kappa} x_{\kappa} \leq \zeta; \quad x_{\kappa} \geq 0 \quad (\kappa = 1, 2, \dots, m-1)$$

zu erstrecken ist, so erhalten wir sofort

$$\begin{aligned} S_m(\eta) &= \sum_{\beta_m u_m \leq \eta} S_{m-1}(\eta - \beta_m u_m) = \\ &= \sum_{\beta_m u_m \leq \eta} \left[\frac{(\eta - \beta_m u_m)^m}{m! \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{m-1}} + \frac{(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{m-1})(\eta - \beta_m u_m)^{m-1}}{2 \cdot (m-1)! \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{m-1}} \right. \\ &\quad \left. + O((\eta - \beta_m u_m)^{m-2}) \right] \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} S_m(\eta) &= \sum_{\beta_m u_m \leq \eta} \frac{(\eta - \beta_m u_m)^m}{m! \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{m-1}} \\ &\quad + \sum_{\beta_m u_m \leq \eta} \frac{(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{m-1})(\eta - \beta_m u_m)^{m-1}}{2 \cdot (m-1)! \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{m-1}} + O(\eta^{m-1}) \end{aligned}$$

und weiter mit Hilfe von (34)

$$\begin{aligned} S_m(\eta) &= \frac{\eta^{m+1}}{(m+1)! \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m} + \frac{\eta^m}{2 \cdot m! \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{m-1}} \\ &\quad + \frac{(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{m-1}) \eta^m}{2 \cdot m! \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m} + O(\eta^{m-1}), \end{aligned}$$

also die Gleichung (33).

Setzen wir nun noch nach (14)

$$A_m(\eta, \beta) = \frac{\eta^m}{m! \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m} + o(\eta^m),$$

so nimmt (31) die Gestalt an

$$A_{m+1}(\xi, \alpha) = \frac{\xi^{m+1}}{(m+1)! \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m} + \frac{(1 + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m) \eta^m}{2 \cdot m! \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m} + o(\eta^m),$$

und wenn wir durch (29) zu den ursprünglichen Bezeichnungen zurückkehren

$$A_{m+1}(\xi, \alpha) = \frac{\xi^{m+1}}{(m+1)! \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} + \frac{(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m) \xi^m}{2 \cdot m! \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} + o(\xi^m)$$

in Übereinstimmung mit (28), wofür auch noch

$$A_{m+1}(\xi, \alpha) = \frac{(\xi + \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m))^{m+1}}{(m+1)! \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} + o(\xi^m) \quad (35)$$

gesetzt werden kann.

III

Die Anwendung des Satzes 5 auf die in der Einleitung angegebenen Fragestellungen liefert nun rasch die nachstehenden Ergebnisse:

Satz 6. Für die Folge $\mathfrak{B}$ aller natürlichen Zahlen von der Gestalt $p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_m^{u_m}$ mit $m \geq 2$ ist

$$\log b_n = Q n^{\frac{1}{m}} - \log P + o(1), \quad (8)$$

$$B(x) = \left(\frac{\log Px}{Q} \right)^m + o((\log x)^{m-1}), \quad (9)$$

$$b_n \sim \frac{1}{P} \exp \left(Q n^{\frac{1}{m}} \right). \quad (10)$$

Denn offenbar ist die Anzahl $B(x)$ der Zahlen $p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_m^{u_m} \leq x$ gleich der Anzahl der Gitterpunkte (u) des Simplex

$$\Delta_m(\log x, \log p): \sum_{\mu} x_{\mu} \log p_{\mu} \leq \log x; \quad x_{\mu} \geq 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

Da aber gewiß die Zahl $\log pq^{-1}$ für irgend zwei Primzahlen p, q irrational ist, darf der Satz 5 angewandt werden, wodurch sogleich

$$B(x) = \left(\frac{\log Px}{Q} \right)^m + o((\log x)^{m-1})$$

wegen

$$\log P = \frac{1}{2} (\log p_1 + \log p_2 + \dots + \log p_m);$$

$$Q^m = m! \log p_1 \log p_2 \dots \log p_m$$

erhalten wird.

Setzt man hierin $x = b_n$ und entsprechend $B(x) = n$, so entsteht

$$n = \left(\frac{\log P b_n}{Q} \right)^m + o((\log b_n)^{m-1}),$$

wofür wegen (3) auch

$$(\log P b_n)^m - Q^m n = o\left(n^{\frac{m-1}{m}}\right)$$

gesetzt werden kann, so daß bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ für alle $n > n_0(\varepsilon)$ die Ungleichung

$$|(\log P b_n)^m - Q^m n| < \varepsilon n^{\frac{m-1}{m}}$$

besteht. Nun ist wegen (3) für alle $n > n_0(\varepsilon)$ auch

$$\log P b_n > c Q n^{\frac{1}{m}}$$

mit einer geeigneten Konstanten $c > 0$; daraus ergibt sich

$$\left| \frac{(\log P b_n)^m - Q^m n}{\log P b_n - Q n^{\frac{1}{m}}} \right| > (1 + c + c^2 + \dots + c^{m-1}) Q^{m-1} n^{\frac{m-1}{m}} = C n^{\frac{m-1}{m}}$$

mit einer positiven Konstanten C . Daraus folgt weiter

$$\left| \log P b_n - Q n^{\frac{1}{m}} \right| < \frac{\varepsilon}{C}$$

und schließlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log P + \log b_n - Q n^{\frac{1}{m}} \right) = 0,$$

was mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P b_n}{\exp(Q n^{\frac{1}{m}})} = 1$$

völlig gleichwertig ist.

Satz 7. Für die Differenzen $b_{n+1} - b_n$ aufeinanderfolgender Glieder der Folge $\mathfrak{B}$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n (b_{v+1} - b_v) v^{\frac{m-1}{m}} \exp\left(-Q v^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{Q}{mP}. \quad (12)$$

Durch Abelsche Summierung erhalten wir mit

$$f(x) = x^{\frac{m-1}{m}} \exp\left(-Q x^{\frac{1}{m}}\right)$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n f(v) (b_{v+1} - b_v) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n (f(v-1) - f(v)) b_v + \frac{1}{n} f(n) b_{n+1}. \end{aligned}$$

Hierin ist

$$f(v-1) - f(v) = \int_v^{v-1} f'(x) dx = \int_{v-1}^v \left(\frac{Q}{m} - \frac{m-1}{m} x^{-\frac{1}{m}} \right) \exp \left(-Qx^{\frac{1}{m}} \right) dx.$$

Der Integrand ist für $x > \left(\frac{m-1}{Q} \right)^m$ positiv und für $x > \left(\frac{m}{Q} \right)^m$ monoton fallend. Mithin ist für alle $v > \left(\frac{m}{Q} \right)^m$

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q}{m} - \frac{m-1}{m} (v-1)^{-\frac{1}{m}} \right) \exp \left(-Q(v-1)^{\frac{1}{m}} \right) &\geq f(v-1) - f(v) \\ &\geq \left(\frac{Q}{m} - \frac{m-1}{m} v^{-\frac{1}{m}} \right) \exp \left(-Qv^{\frac{1}{m}} \right). \end{aligned}$$

Ist weiter $n_0 > \left(\frac{m}{Q} \right)^m$ derart gewählt, daß für alle $v \geq n_0$ die Ungleichungen

$$\left| b_v \exp \left(-Qv^{\frac{1}{m}} \right) - \frac{1}{P} \right| < \varepsilon; \quad \left| b_{v+1} \exp \left(-Qv^{\frac{1}{m}} \right) - \frac{1}{P} \right| < \varepsilon$$

bestehen, was wegen $b_{n+1} \sim b_n$ und wegen (10) stets möglich ist, so wird

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n_0-1} (f(v-1) - f(v)) b_v + \frac{1}{n} \sum_{v=n_0}^n (f(v-1) - f(v)) b_v \\ &\quad + \frac{1}{n} f(n) b_{n+1} < \frac{1}{n} C_0 + \frac{Q}{m} \left(\frac{1}{P} + \varepsilon \right) \frac{n-n_0+1}{n} + O \left(n^{-\frac{1}{m}} \right), \end{aligned}$$

andererseits

$$S(n) > \frac{1}{n} C_1 + \frac{Q}{m} \left(\frac{1}{P} - \varepsilon \right) \frac{n-n_0+1}{n} + O \left(n^{-\frac{1}{m}} \right),$$

woraus schließlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \frac{Q}{mP}$$

folgt.

IV

Für die weiteren Untersuchungen nehme ich zum Ausgangspunkt die folgende schwächere Fassung des Siegelschen Satzes⁶: Ist ϑ eine algebraische Zahl vom Grade $k \geq 3$, so hat für jedes $A > 0$ die diophantische Ungleichung

$$\left| \frac{x}{y} - \vartheta \right| < \frac{A}{|y|^{2\sqrt{k}}}$$

nur endlich viele Lösungen in ganzrationalen Zahlen x, y .

Hieraus erhält man auf sehr einfachem Wege den

Satz 8. Ist $k \geq 4$ und $f(z) = a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k$ ein irreduzibles Polynom des Grades k mit ganzrationalen Koeffizienten, so hat für jedes $C > 0$ die diophantische Ungleichung

$$|a_0 x^k + a_1 x^{k-1} y + \dots + a_k y^k| \leq C |y|^{k-2\sqrt{k}} \quad (36)$$

nur endlich viele Lösungen in ganzrationalen Zahlen x, y .

Besitzt nämlich $f(z)$ die (voneinander verschiedenen) Wurzeln $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k$, so ist für jede Lösung x, y der Ungleichung (36)

$$|a_0| |x - \vartheta_1 y| |x - \vartheta_2 y| \dots |x - \vartheta_k y| \leq C |y|^{k-2\sqrt{k}}, \quad (37)$$

sodaß, da ohne Einschränkung $|x - \vartheta_1 y| \leq |x - \vartheta_\kappa y|$ für $\kappa = 2, 3, \dots, k$ angenommen werden darf, insbesondere

$$|x - \vartheta_1 y| \leq \sqrt[k]{\frac{C}{|a_0|}} |y|^{1-\frac{2}{\sqrt{k}}} = B_1 |y|^{1-\frac{2}{\sqrt{k}}}$$

mit einem festen $B_1 > 0$ folgt. Mit einer weiteren Konstanten $B_2 > 0$ ist

$$|\vartheta_1 - \vartheta_\kappa| > B_2 > 0 \quad \text{für } \kappa = 2, 3, \dots, k.$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} |x - \vartheta_\kappa y| &= |(\vartheta_1 - \vartheta_\kappa) y + (x - \vartheta_1 y)| \\ &> B_2 |y| - B_1 |y|^{1-\frac{2}{\sqrt{k}}}. \end{aligned} \quad (38)$$

⁶ Vgl. a. a. O. Anm. 3.

Zu jedem festen Wert y gibt es gewiß nur endlich viele ganzrationale Werte x , derart daß x, y die Gleichungen (36) erfüllen. Besäße also (36) unendlich viele Lösungen x, y , so müßte es auch unendlich viele Lösungen mit $|y| > (2 B_1 B_2^{-1})^{\frac{1}{2}} V_k$ geben. Für diese Lösungen wäre nach (38)

$$|x - \vartheta_x y| > \left(B_2 - B_1 |y|^{-\frac{2}{V_k}} \right) |y| > \frac{B_2}{2} |y|$$

und daher wegen (37)

$$\begin{aligned} |x - \vartheta_1 y| &\leq \frac{C |y|^{k-2} \sqrt{k}}{|a_0| \prod_{\kappa} |x - \vartheta_{\kappa} y|} < \frac{2^{k-1} C |y|^{k-2} \sqrt{k}}{|a_0| B_2^{h-1} |y|^{k-1}} \\ &= \frac{B_3}{|y|^{2\sqrt{k-1}}} \end{aligned}$$

mit einem festen $B_3 > 0$, also schließlich

$$\left| \frac{x}{y} - \vartheta_1 \right| < \frac{B_3}{|y|^{2\sqrt{k}}}.$$

Diese Ungleichung besitzt aber nur endlich viele ganzzahlige Lösungen.

Insbesondere fließt hieraus

Satz 9. *Sind A, B positive ganzrationale Zahlen, so besitzt für jede Primzahl $p \geq 5$ und jedes $C > 0$ die diophantische Ungleichung*

$$0 < Ax^p - By^p \leq Cy^{p-2\sqrt{p}} \quad (39)$$

nur endlich viele Lösungen in natürlichen Zahlen x, y .

Ist nämlich das Polynom $f(z) = Az^p - B$ irreduzibel, so folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 8. Ist dagegen $f(z)$ reduzibel, also $\frac{B}{A}$ die p -te Potenz einer rationalen Zahl:

$$A = ca^p, \quad B = cb^p \quad \text{mit natürlichen Zahlen } a, b, c,$$

so ist für jede Lösung x, y der Ungleichung (39)

$$0 < c [(ax)^p - (by)^p] \leq Cy^{p-2\sqrt{p}},$$

jedenfalls also $ax \geq by + 1$, so daß

$$Cy^{p-2}\sqrt[p]{p} \geq c[(by+1)^p - (by)^p] > cpb^{p-1}y^{p-1}$$

wird, was nur möglich ist für

$$y^2\sqrt[p]{p-1} < \frac{C}{cpb^{p-1}}.$$

Mithin liegen die Zahlen x, y einer Lösung von (39) unter festen Schranken.

Nun ergibt sich rasch das Ziel dieses Abschnittes:

Satz 10. *Für die Differenzen $b_{n+1} - b_n$ aufeinander folgender Glieder der Folge $\mathfrak{B}$ ist*

$$\log(b_{n+1} - b_n) \sim \log b_n \sim Qn^{\frac{1}{m}}. \quad (11)$$

Offenbar folgt (11) ohne Schwierigkeit aus der folgenden Bemerkung: Zu jedem $\varepsilon > 0$ läßt sich eine positive Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$ angeben, derart daß für alle $n > n_0$ in der Folge $\mathfrak{B}$ die Ungleichung

$$b_{n+1} - b_n > b_n^{1-\varepsilon}$$

besteht.

Denn hieraus erhält man sogleich für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log b_{n+1}}{\log b_n} &\geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(b_{n+1} - b_n)}{\log b_n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(b_{n+1} - b_n)}{\log b_n} \\ &\geq 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Ohne Einschränkung darf hierbei $0 < \varepsilon < 1$ angenommen werden. Man wähle zu ε eine feste Primzahl p , die $p\varepsilon^2 > 4$ erfüllt. Wäre nun in der Folge $\mathfrak{B}$ unendlich oft

$$b_{n+1} - b_n \leq b_n^{1-\varepsilon},$$

so wäre auch unendlich oft

$$0 < b_{n+1} - b_n \leq b_n^{1 - \frac{2}{\sqrt[p]{p}}}. \quad (40)$$

Es kann weiter mit natürlichen Zahlen x, y

$$b_{n+1} = Ax^p; \quad b_n = By^p$$

gesetzt werden mit natürlichen Zahlen $A = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$, $B = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_m^{\beta_m}$ aus der Folge $\mathfrak{B}$, in denen die Exponenten α_μ bzw. β_μ sämtlich die Zahl $p-1$ nicht übertreffen, so daß alle möglicherweise auftretenden Zahlen A, B unter der festen Schranke $C = (p_1 p_2 \dots p_m)^{p-1}$ liegen. Insbesondere ist also

$$b_n^{1-\frac{2}{Vp}} = B^{1-\frac{2}{Vp}} y^{p-2Vp} \leq C y^{p-2Vp},$$

wodurch (40) die Gestalt

$$0 < Ax^p - By^p \leq C y^{p-2Vp} \quad (41)$$

annimmt.

Hätte demnach (40) unendlich viele Lösungen in der Folge $\mathfrak{B}$, so hätte auch (41) unendlich viele Lösungen in natürlichen Zahlen x, y , wobei allerdings noch die Zahlenpaare A, B für verschiedene Lösungen x, y verschieden sein können. Da aber A, B die feste Schranke C nicht überschreiten, also nur endlich viele Zahlenpaare A, B auftreten können, würde es mindestens ein Paar A^*, B^* geben, für das die Ungleichung

$$0 < A^* x^p - B^* y^p \leq C y^{p-2Vp}$$

unendlich viele Lösungen in natürlichen Zahlen x, y besitzt. Dies ist aber nach Satz 9 unmöglich.

Der Satz 10 gestattet eine Anwendung auf eine Frage, die ich schon früher einmal behandelt habe:⁷ Es sei $p(a)$ die größte in der natürlichen Zahl a aufgehende Primzahl. Gesucht werden möglichst weitgefaßte Bedingungen für das Wachstum einer Folge

$$\mathfrak{A}: \quad a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$$

natürlicher Zahlen, unter denen die Folge $\mathfrak{A}$ die Eigenschaft

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} p(a_n) = \infty$$

besitzt.

⁷ Vgl. a. a. O. Anm. 2.

Wesentlich weitertragend als früher angegebene Bedingungen sind die nachstehenden:

Satz 11. *Erfüllen die Glieder a_n einer Zahlenfolge $\mathfrak{A}$ mit einem festen, hinreichend kleinen $\delta > 0$ immer einmal wieder die Ungleichung*

$$a_{n+1} \leq a_n + a_n^{1-\delta} \quad (42)$$

oder mit einem festen, hinreichend großen $G > 0$ immer einmal wieder die Ungleichung

$$a_{n+1} - a_n \leq n^G, \quad (43)$$

so ist

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} p(a_n) = \infty.$$

Zum Beweise sei $\mathfrak{A}$ eine Folge von Zahlen, die keine anderen Primfaktoren als $p_1, p_2, \dots, p_m$ besitzen. Dann ist $\mathfrak{A}$ Teil der Folge $\mathfrak{B}$, weshalb für jedes n eine Gleichung

$$a_n = b_{v_n} \text{ mit } v_n \geq n, v_{n+1} \geq v_n + 1 > v_n$$

besteht. Nach Satz 10 ist bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ für alle $v_n \geq n > n_0(\varepsilon)$

$$a_{n+1} - a_n = b_{v_{n+1}} - b_{v_n} \geq b_{v_{n+1}} - b_{v_n} > b_{v_n}^{1-\varepsilon} = a_n^{1-\varepsilon}. \quad (44)$$

Mithin ist für eine solche Folge

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(a_{n+1} - a_n)}{\log a_n} \geq 1$$

im Gegensatz zu der aus (42) sich ergebenden Ungleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(a_{n+1} - a_n)}{\log a_n} \leq 1 - \delta.$$

Weiter folgt aus (44) und (8)

$$\log(a_{n+1} - a_n) \geq (1 - \varepsilon) \log b_n \geq (1 - \varepsilon) C n^{\frac{1}{m}}$$

mit einem geeigneten festen $C > 0$ und damit

$$\frac{\log(a_{n+1} - a_n)}{\log n} \geq \frac{(1 - \varepsilon) C n^{\frac{1}{m}}}{\log n},$$

worin beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ die rechte Seite über alle Grenzen wächst, im Widerspruch zur Voraussetzung (43), die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(a_{n+1} - a_n)}{\log n} \leq G$$

nach sich zieht.