

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1928. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1928

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München



Über die Multiplizität der Lösungen der Theorie der Bahnbestimmung der Kometen.

Von Alexander Wilkens.

Mit 1 Textfigur.

Vorgetragen in der Sitzung am 9. Juni 1928.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist die Klärung der Frage der Multiplizität der Lösungen der Bahnbestimmungstheorie der Kometen. Wenn 3 vollständige Örter eines Kometen gegeben sind, so hat zuerst v. Oppolzer auf Grund der Bahnbestimmung des großen Septemberkometen Cruls vom Jahre 1882 (s. Astr. Nachr., Bd. 103, 1882, ferner Lehrbuch der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, 1. Bd., 2. Auflage, 1882, S. 308) die Möglichkeit einer 3-fachen Lösung gefunden und belegte diese Möglichkeit auch analytisch, indem er im Anschluß an die Olberssche Methode die Lösung einer Gleichung 6. Grades diskutiert, die aus einer vereinfachenden Annahme, nämlich der Proportionalität der Sehne der Kometenbahn mit der Zeit auf Grund der Eulerschen Gleichung entspringt. Neuerdings hat Herr Banachiewicz im Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Série A, Sciences Mathématiques, 1924, in seiner Schrift: „Sur un Théorème de Legendre relatif a la détermination des orbites cométaires“ im Widerspruch zu Legendre ein fingiertes Beispiel, die Bewegung eines Kometen in der Ekliptik betreffend, gegeben, bei dem eine 3-fache reelle Lösung die Beobachtungsdaten darstellt. Bekanntlich hat Legendre in seiner Schrift: Nouvelles Méthodes pour la détermination des orbites des Comètes Paris, 1806, gezeigt, daß unter der Voraussetzung von 3 vollständigen Kometenbeobachtungen nur eine parabolische Bahn durch die 3 Örter möglich ist. Herr Iljinsky vertritt ebenfalls im Gegensatz zu Herrn Banachiewicz die Auffassung, daß, wenn das allgemeine Problem der Bahnbestimmung aus 3 vollständigen Beob-

achtungen ohne Voraussetzung über eine Exzentrizität 2 Lösungen zulasse, beim Spezialfall der Parabel auch nicht mehr als 2 Lösungen existieren könnten (Astr. Nachr. Nr. 5339), während Herr Banachiewicz sein für die Ekliptik gegebenes Beispiel auf den Fall außerekliptikaler Beobachtungen erweitern konnte (Astr. Nachr. Nr. 5423), mit dem Ergebnis der Existenz von 3 parabolischen Bahnen, welche alle die Beobachtungen streng darstellen. Deshalb besteht die Aufgabe der vorliegenden Arbeit in der allgemeinen Untersuchung der Frage nach der Multiplizität der Lösungen und in der Klärung der Widersprüche in den Ergebnissen der früheren Autoren durch Ableitung der notwendigen Bedingungen für die Existenz mehrfacher Lösungen.

Für diesen Zweck ist zuerst die eine exakte Untersuchung störende und überflüssige Voraussetzung der bisherigen Methoden der Kometen-Bahnbestimmung zu beseitigen, daß 3 vollständige Orte, allgemein also sechs Stücke zur Bahnbestimmung herangezogen werden, auch bei der Olbers'schen Methode, in deren Funktion M sämtliche sechs Beobachtungsdaten auftreten, während eine parabolische Bahn im Raume streng bereits durch fünf den fünf Bahnelementen entsprechende Stücke festgelegt wird. Deshalb ist also zuerst eine dementsprechende Theorie der Bahnbestimmung aus fünf Stücken zu entwickeln und dann die Multiplizität der Wurzeln der sich ergebenden Fundamentalgleichung zu untersuchen; dabei ist es sowohl theoretisch wie vom Standpunkte der Praxis aus von Interesse, eine solche Theorie der Kometen-Bahnbestimmung aus den fünf erforderlichen Stücken, etwa den beiden Koordinaten des ersten und dritten Ortes und der einen, etwa der Länge des zweiten Ortes, ohne jede Benutzung des sechsten Stückes kennen zu lernen. Ergibt sich dann zwischen der parabolischen Theorie und der Beobachtung nach Ermittlung der Bahnelemente bei dem sechsten Stücke, der Breite des zweiten Ortes Übereinstimmung oder nicht, so ist damit zugleich die Entscheidung über die parabolische oder elliptische Bahnform des neuen Kometen ermöglicht und die Abweichung liefert sofort das Maß für die Abweichung der Exzentrizität der Bahn von der Einheit für die Parabel. Die neue Methode erweist sich als außerordentlich einfach und übersichtlich, so daß sie die praktische Feuerprobe bestehen kann.

§ 1.

Die Bahnbestimmung aus fünf Beobachtungsdaten.

Zur Darlegung der Methode bediene ich mich vorteilhafterweise derselben Ausgangsformeln, wie sie in meiner früheren Untersuchung über „Eine Methode der Bahnbestimmung für alle Exzentrizitäten“ (Astr. Nachr. Nr. 5022/23) niedergelegt worden sind und die auf einer Potenzentwicklung der heliozentrischen Koordinaten nach der Zeit beruhen.

Es seien x_a, y_a, z_a , die zur Zeit t_a geltenden heliozentrischen auf die Ekliptik als Grundebene bezogenen Koordinaten des Kometen, ferner $X_a, Y_a, Z_a = 0$ die auf den locus fictus bezogenen Koordinaten der Sonne und schließlich ξ_a, η_a, ζ_a die auf den locus fictus bezogenen Koordinaten des Kometen, wobei der locus fictus bei den Kometen in Anbetracht der Unsicherheit der Meßgenauigkeit dieser Himmelskörper und mit Rücksicht auf erste Bahnbestimmungen ev. auch stets mit dem Erdmittelpunkt identifiziert und die Sonnenbreite und Aberration vernachlässigt werden darf, sodaß alsdann:

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} \xi_a &= x_a + X_a = \varrho_a \cos \beta_a \cos \lambda_a \\ \eta_a &= y_a + Y_a = \varrho_a \cos \beta_a \sin \lambda_a \\ \zeta_a &= z_a = \varrho_a \sin \beta_a \end{aligned} \right\} a = 1, 2, 3.$$

Das Ziel der Methode ist die Ableitung der Koordinaten x_2, y_2, z_2 und ihrer Geschwindigkeiten x'_2, y'_2 und z'_2 , indem aus ihnen zusammen die Bahnelemente in bekannter Weise abgeleitet werden können.

Zur sofortigen Elimination der lästigen und überflüssigen Unbekannten ϱ_a ist es notwendig, je 2 der Gleichungen (1) zu dividieren, so daß die neuen Gleichungen

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} \frac{x_a + X_a}{z_a} &= \operatorname{ctg} \beta_a \cos \lambda_a = C_a \\ \frac{y_a + Y_a}{z_a} &= \operatorname{ctg} \beta_a \sin \lambda_a = S_a \end{aligned} \right\} a = 1, 2, 3$$

entstehen.

Von der Zeit t_2 der 2. Beobachtung des Kometen ausgehend werden die Koordinaten x_a, y_a, z_a , wo $a = 1$ und 3, in Potenzreihen nach $\tau_1 = t_1 - t_2$ resp. $\tau_3 = t_3 - t_2$ entwickelt, sodaß

$$(3) \quad x_a = x_2 + \tau_a x'_2 + \frac{1}{2} \tau_a^2 x''_2 + \frac{1}{6} \tau_a^3 R_a(x_2),$$

wo der Rest $R_a(x_2) = x''_2 + \frac{1}{4} \tau_a x''_2 + \frac{1}{24} \tau_a^2 x''_2 + \dots$ und analoge Reihen für y_a und z_a gelten. Da nun die zweiten Ableitungen der Koordinaten und alle höheren Ableitungen derselben auf Grund der Bewegungsgleichungen

$$(4) \quad x''_a = -k^2 (1 + m) \frac{x_a}{r_a^3} \text{ etc., wo } k^2 = \text{Gauß' Konstante,}$$

$m = \text{Kometenmasse, und die Sonnenmasse} = 1,$

allein als Funktionen von x_a, y_a , und z_a und ihrer Geschwindigkeiten x'_a, y'_a , und z'_a darstellbar sind, so sind die Reihenentwicklungen (3) als Funktionen allein der Koordinaten und ihrer ersten Ableitungen darstellbar, wie ich es auf S. 84 meiner oben zitierten Arbeit ausgeführt habe. Deshalb gehen die Gleichungen (2) bei Substitution der Potenzreihen (3) in 6 Gleichungen für die 6 Unbekannten $x_2, y_2, z_2, x'_2, y'_2, z'_2$ über mit noch von $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ abhängigen Koeffizienten. Das ist die Formulierung des allgemeinen Problems unter Verwendung von 6 vorgelegten Beobachtungsdaten, während bei der parabolischen Kometenbahn noch die Spezialbedingung

$$(5) \quad x_2^2 + y_2'^2 + z_2'^2 = \frac{2k^2(1+m)}{r_2}$$

hinzukommt, sodaß wegen der 7 Gleichungen (2) und (5) für die genannten 6 Unbekannten eine der 6 Gleichungen (2), also eine der Beobachtungsdaten C_a und S_a überflüssig und wegzulassen ist, so daß nur 5 Beobachtungsdaten, den 5 parabolischen Bahnelementen entsprechend, heranzuziehen bleiben. Es mögen die beiden Koordinaten des 1. und 3. Ortes, also $\beta_1, \lambda_1, \beta_3$ und λ_3 und ferner vom 2. Orte die Länge λ_2 beibehalten werden, daneben also C_1, S_1, C_3 und S_3 , so daß die Gleichungen (2) für $a = 1$ und 3 anzusetzen bleiben, während an Stelle der entsprechenden Gleichung für $a = 2$ der von ϱ_2 und β_2 freie Quotient der beiden ersten Gleichungen (1), also

$$(1a) \quad \frac{y_2 + Y_2}{x_2 + X_2} = \text{tg } \lambda_2$$

tritt, sodaß nunmehr die folgenden 5 Gleichungen im Falle einer parabolischen Kometenbahnbestimmung zu verwenden sind:

$$\text{I)} \quad x_2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_1^2}{r_2^3} \right) + z_2 C_1 \left(-1 + \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_1^2}{r_2^3} \right) + x_2' \tau_1 - z_2' C_1 \tau_1 \\ = -X_1 - \frac{1}{6} \tau_1^3 R_1(x) + \frac{1}{6} \tau_1^3 C_1 R_1(z),$$

$$\text{II)} \quad y_2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_1^2}{r_2^3} \right) + z_2 S_1 \left(-1 + \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_1^2}{r_2^3} \right) + y_2' \tau_1 - z_2' S_1 \tau_1 \\ = -Y_1 - \frac{1}{6} \tau_1^3 R_1(y) + \frac{1}{6} \tau_1^3 S_1 R_1(z),$$

$$\text{III)} \quad y_2 - x_2 \operatorname{tg} \lambda_2 = X_2 \operatorname{tg} \lambda_2 - Y_2,$$

$$\text{IV)} \quad x_2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_3^2}{r_2^3} \right) + z_2 C_3 \left(-1 + \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_3^2}{r_2^3} \right) + x_2' \tau_3 - z_2' C_3 \tau_3 \\ = -X_3 - \frac{1}{6} \tau_3^3 R_3(x) + \frac{1}{6} \tau_3^3 C_3 R_3(z),$$

$$\text{V)} \quad y_2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_3^2}{r_2^3} \right) + z_2 S_3 \left(-1 + \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_3^2}{r_2^3} \right) + y_2' \tau_3 - z_2' S_3 \tau_3 \\ = -Y_3 - \frac{1}{6} \tau_3^3 R_3(y) + \frac{1}{6} \tau_3^3 S_3 R_3(z).$$

Zu diesen Gleichungen tritt als 6. Bedingung noch die Gleichung der Parabelbewegung hinzu

$$\text{VI)} \quad x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2 = \frac{2k^2}{r_2} \quad (m = 0 \text{ gesetzt}),$$

und insofern r_2 als selbständige Unbekannte betrachtet wird, noch als 7. Bedingungsgleichung

$$\text{VII)} \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

zur Bestimmung der 7 Unbekannten: x, y, z, r, x', y', z' als Definitionsparameter der parabolischen Kometenbahn. Die Auflösung der Gleichungen erfolgt zunächst am zweckmäßigsten in der Weise, daß zuerst y_2 nach III) als Funktion von x_2 in die Gleichungen I), II), IV) und V) substituiert wird, indem die Gleichungen I)–V) zur Darstellung von y_2, z_2, x_2, y_2, z_2 als Funktion von x_2 dienen sollen. Dann folgen zuerst x_2' und y_2' nach I) und II) aus den Gleichungen:

$$\text{Ia)} \quad x_2' \tau_1 = -x_2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_1^2}{r_2^3} \right) - z_2 C_1 \left(-1 + \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_1^2}{r_2^3} \right) \\ + z_2' C_1 \tau_1 - X_1 - \frac{1}{6} \tau_1^3 R_1(x) + \frac{1}{6} \tau_1^3 C_1 R_1(z).$$

$$\text{II a)} \quad y_2' \tau_1 = -(x_2 T_2 + U_2) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_1^2}{r_2^3} \right) - z_2 S_1 \left(-1 + \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_1^2}{r_2^3} \right) \\ + z_2' S_1 \tau_1 - Y_1 - \frac{1}{6} \tau_1^3 R_1(y) + \frac{1}{6} \tau_1^3 S_1 R_1(z),$$

wo gemäß III):

$$6) \quad y_2 = x_2 T_2 + U_2$$

gesetzt ist, indem $T_2 = \operatorname{tg} \lambda_2$ und $U_2 = X_2 \operatorname{tg} \lambda_2 - Y_2$ ist. Dann werden I) und II) in IV) und V) substituiert zwecks Ermittlung von z_2 und z_2' als Funktion von x_2 und r_2 , sodaß durch Division durch $\tau_3 - \tau_1$ die Gleichungen IV a) und V a) entstehen:

$$\text{IV a)} \quad z_2 \left[\frac{C_1 \tau_3 - C_3 \tau_1}{\tau_3 - \tau_1} + \frac{k^2}{2 r_2^3} \frac{(C_3 \tau_3 - C_1 \tau_1)}{\tau_3 - \tau_1} \tau_3 \tau_1 \right] + z_2' \tau_3 \tau_1 \frac{C_1 - C_3}{\tau_3 - \tau_1} \\ = x_2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{k^2}{r_2^3} \tau_3 \tau_1 \right) + \frac{\tau_3 X_1 - \tau_1 X_3}{\tau_3 - \tau_1} + \text{Restgl.}$$

$$\text{V a)} \quad z_2 \left[\frac{S_1 \tau_3 - S_3 \tau_1}{\tau_3 - \tau_1} + \frac{k^2}{2 r_2^3} \frac{(S_3 \tau_3 - S_1 \tau_1)}{\tau_3 - \tau_1} \tau_3 \tau_1 \right] + z_2' \tau_3 \tau_1 \frac{S_1 - S_3}{\tau_3 - \tau_1} \\ = x_2 T_2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{k^2}{r_2^3} \tau_3 \tau_1 \right) + \frac{\tau_3 Y_1 - \tau_1 Y_3}{\tau_3 - \tau_1} + U_2 + \frac{1}{2} U_2 \frac{k^2}{r_2^3} \tau_3 \tau_1 + \text{Restgl.,}$$

sodaß die Auflösung lautet:

$$7) \quad \begin{cases} z_2 = \gamma x_2 + \delta \text{ und } z_2' = \varepsilon' x_2 + \zeta', \text{ wo} \\ \gamma = \frac{1}{D} [S_1 - S_3 - T_2 (C_1 - C_3)], \\ \delta = \frac{1}{D} \left[\frac{\tau_3 X_1 - \tau_1 X_3}{\tau_3 - \tau_1} (S_1 - S_3) - \frac{\tau_3 Y_1 - \tau_1 Y_3}{\tau_3 - \tau_1} (C_1 - C_3) - U_2 (C_1 - C_3) \right], \\ \varepsilon' = \frac{1}{D} \frac{1}{\tau_3 \tau_1} [-(S_1 \tau_3 - S_3 \tau_1) + T_2 (C_1 \tau_3 - C_3 \tau_1)], \\ \zeta' = \frac{1}{D} \frac{1}{\tau_3 \tau_1} \left[-\frac{\tau_3 X_1 - \tau_1 X_3}{\tau_3 - \tau_1} (S_1 \tau_3 - S_3 \tau_1) \right. \\ \left. + \frac{\tau_3 Y_1 - \tau_1 Y_3}{\tau_3 - \tau_1} (C_1 \tau_3 - C_3 \tau_1) + U_2 (C_1 \tau_3 - C_3 \tau_1) \right], \end{cases}$$

wo die Determinante D des Systems:

$$D = \frac{1}{\tau_3 - \tau_1} [(S_1 - S_3) (C_1 \tau_3 - C_3 \tau_1) - (C_1 - C_3) (S_1 \tau_3 - S_3 \tau_1)],$$

welche Gleichungen später noch analytisch zu verwenden sind.

Rein numerisch für die Zwecke einer wirklichen Bahnbestimmung erscheint es vielleicht zweckmäßiger, die Gleichungen IVa) und Va) sowie auch Ia) und IIa) numerisch aufzulösen (siehe das spätere Beispiel). Auf Grund der obigen Darstellungen erscheinen nun y_2 , z_2 , x'_2 , y'_2 und z'_2 als lineare Funktionen von x_2 , wobei die Abhängigkeit von r_2 nur in den Korrektionsgliedern der Form $(1 - \frac{1}{2} k^2 \tau_a^2 / r_2^3)$ enthalten ist, was wohl zu vermerken ist im Gegensatz zur allgemeinen Theorie der Planetenbahnen, wo (siehe meine oben zitierte Arbeit in den Astronom. Nachr. S. 86 Formel (15))

$z_2 = a \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3} \right)$, sodaß hier z_2 und analog alle anderen Koordinaten nebst ihren Geschwindigkeiten als lineare Funktionen von $\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}$ erscheinen. Beim Kometenproblem ist die explizite Abhängigkeit von r_2 , abgesehen von dem Vorkommen von r_2 in den Korrektions- und Restgliedern implizit auf x_2 geworfen, das noch Funktion von r ist. Alsdann haben auch x_2 und y_2 nach I) und II) dieselbe Form wie y_2 , nämlich:

$$8) \left\{ \begin{array}{l} y_2 = a x_2 + \beta, \quad x'_2 = a' x_2 + \beta' \\ z_2 = \gamma x_2 + \delta, \quad y'_2 = \gamma' x_2 + \delta' \\ \quad \quad \quad z'_2 = \varepsilon' x_2 + \zeta' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wo die Koeffizienten } a, \beta, \gamma \text{ und } \delta \\ \text{oben bereits gegeben sind, sodaß} \\ \text{die übrigen Koeffizienten leicht} \\ \text{analytisch angebar sind,} \end{array}$$

sodaß bei Substitution in die Bedingungsgleichungen VI) und VII) die neuen Gleichungen entstehen:

$$9) \left\{ \begin{array}{l} x_2^2 + (a x_2 + \beta)^2 + (\gamma x_2 + \delta)^2 = r_2^2 \\ (a' x_2 + \beta')^2 + (\gamma' x_2 + \delta')^2 + (\varepsilon' x_2 + \zeta')^2 = \frac{2k^2}{r_2} \end{array} \right\},$$

aus denen x_2 zu eliminieren ist, indem man diese Gleichungen zweckmäßig als 2 lineare Gleichungen in x_2 und x_2^2 auffaßt, sodaß:

$$9a) \left\{ \begin{array}{l} c x_2^2 + d x_2 = r_2^2 - e = R \\ c' x_2^2 + d' x_2 = \frac{2k^2}{r_2} - e' = R' \end{array} \right\},$$

wo R und R' nur Abkürzungen sind und wo:

$$10) \quad \begin{array}{ll} e = 1 + a^2 + \gamma^2, & e' = a'^2 + \gamma'^2 + \zeta'^2, \\ d = 2(a\beta + \gamma\delta), & d' = 2(a'\beta' + \gamma'\delta' + \varepsilon'\zeta'), \\ e = \beta^2 + \delta^2, & e' = \beta'^2 + \delta'^2 + \zeta'^2. \end{array}$$

Folglich ist nach 9a):

$$11) \quad A = x^2 = \frac{Rd' - R'd}{A} \quad \text{und} \quad B = x = -\frac{Rc' + R'c}{A},$$

wo $A = cd' - c'd$. Mithin ergibt die Bedingung 12) $A = B^2$ die gesuchte Fundamentalgleichung des Bahnbestimmungsproblems der Kometen, indem bei Substitution von R und R' nach (9a):

$$13) \quad A \left(r_2^2 d' - \frac{2k^2}{r_2} d + g \right) = \left(-r_2^2 c' + \frac{2k^2 c}{r_2} + h \right)^2,$$

eine Gleichung in r allein ergibt, wo noch zur Abkürzung:

$g = -ed' + e'd$ und $h = ec' - ce'$, sodaß schließlich die folgende Gleichung 6. Grades in r_2 resultiert:

$$14a) \quad K_0 r_2^6 + K_2 r_2^4 + K_3 r_2^3 + K_4 r_2^2 + K_5 r + K_6 = 0, \quad \text{wo}$$

$$K_0 = c'^2, \quad K_2 = -2hc' - \Delta d', \quad K_3 = -4k^2 cc', \quad K_4 = h^2 - \Delta g, \\ K_5 = 4k^2 ch + 2k^2 \Delta d, \quad K_6 = 4k^4 c^2.$$

Diese Gleichungen werden zweckmäßigerweise bei $r < 1$ verwendet, während bei $r > 1$ die nach Division durch r^6 entstehende Gleichung:

$$14b) \quad K_6 \left(\frac{1}{r_2} \right)^6 + K_5 \left(\frac{1}{r_2} \right)^5 + K_4 \left(\frac{1}{r_2} \right)^4 + K_3 \left(\frac{1}{r_2} \right)^3 + K_2 \left(\frac{1}{r_2} \right)^2 + K_0 = 0$$

zu verwenden ist.

Was die Zahl der positiven Wurzeln r_2 der Gleichung (14a) anbetrifft, so ist zunächst festzustellen, daß, weil c und c' nach der Definition 10) positive Größen sind, die Koeffizienten: $K_0 > 0$, $K_3 < 0$ und $K_6 > 0$ sind, während bei K_2 , K_4 und K_5 keine unmittelbare Fixierung des Vorzeichens möglich ist; dann aber ergeben sich zur Anwendung des Satzes von Descartes die in der folgenden Tabelle fixierten 8 Möglichkeiten der Vorzeichenfolge.

K_0	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	Z	Aus der Zahl der Vorzeichenwechsel
1)	+	+	-	+	+	2	folgt die in der letzten Kolonne der
2)	+	+	-	-	+	4	Tabelle angegebene Zahl Z der posi-
3)	+	+	-	-	+	2	tiven reellen Lösungen für r_2 ; demnach
4)	+	+	-	-	-	2	ergeben sich also stets nur 2 positive
5)	+	-	-	+	+	2	Wurzeln r_2 , außer in den Fällen 2)
6)	+	-	-	+	-	4	und 6), wo 4 positive Wurzeln möglich
7)	+	-	-	-	+	2	erscheinen, wenn nämlich in diesen beiden
8)	+	-	-	-	-	2	

Fällen unabhängig von K_2 der Koeffizient $K_4 > 0$ und zugleich $K_5 < 0$. Daß aber die Kombination $K_4 > 0$ und zugleich $K_5 < 0$ tatsächlich bei vorgelegten Beobachtungsdaten nur in Spezialfällen eintreten kann, ist aus der folgenden geometrischen Betrachtung zu ersehen. Aus der Gleichung 9 a) folgt nämlich, daß, wenn $r^2 = w$ gesetzt wird

$$9\text{ b)} \quad \begin{aligned} w_1 &= c x_2^2 + d x_2 + e, \\ w_2 &= \frac{4 k^4}{(c' x_2^2 + d' x_2 + e')^2}, \end{aligned}$$

wo die Gleichsetzung die Gleichung 6. Grades in x_2 liefert. Werden jetzt aber die Kurven w_1 und w_2 als Funktionen von x_2 mit x_2 als Abszisse und den w als Ordinaten konstruiert (s. Figur 1), so stellt w_1 eine gewöhnliche Parabel 2. Ordnung dar, deren Achse parallel zur w -Achse ist, deren konvexe Seite nach unten zeigt und die im übrigen ganz in der oberen Halbebene gelegen ist, weil $w_1 = r^2 > 0$ und auch nach Definition 9) eine stets positive

Größe für alle Werte der Koeffizienten ist; ebenso ist $\frac{2 k^2}{r} = \frac{1}{\sqrt{w_2}} = c' x^2 + d' x + e'$ ebenfalls nach der Definition 9) eine stets positive Größe, nämlich das Quadrat der parabolischen Geschwindigkeit, so daß $\frac{1}{\sqrt{w_2}}$ eine nur in der oberen Halbebene gelegene

Parabel, deren Achse der w -Achse parallel ist, sodaß das Quadrat, also $\frac{1}{w_2}$, ebenfalls eine nur in der oberen Halbebene gelegene parabelähnliche Kurve und schließlich der reziproke Wert w_2 ebenfalls eine nur in der oberen Halbebene gelegene Kurve darstellt, die sich bei $x_2 = \pm \infty$, wo $w_2 = 0$ wird, der x -Achse asymptotisch anschmiegt und dann für endliche Werte von x_2 von der negativen wie positiven Seite her monoton bis zu einem

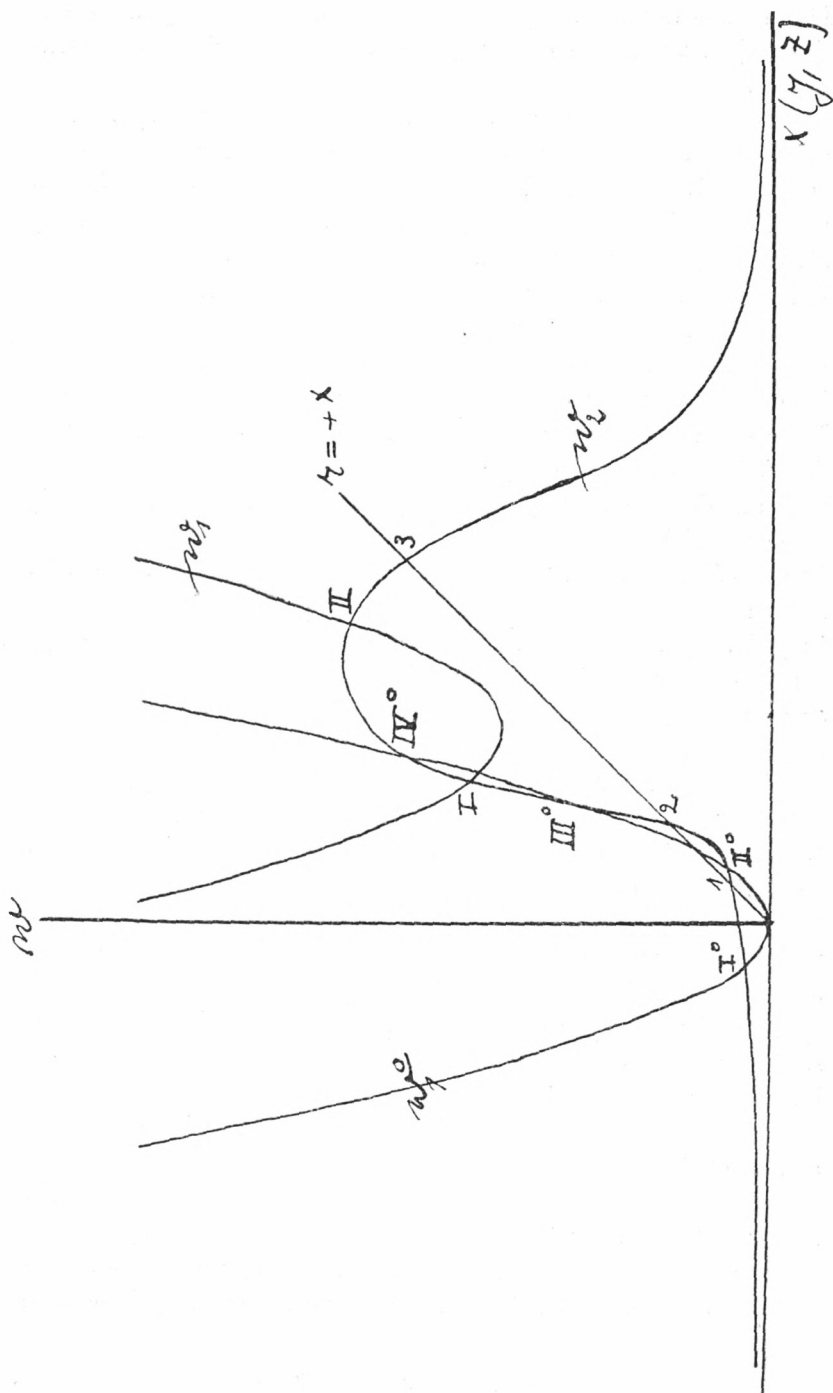
Höchstpunkte ansteigt, für den $\frac{d}{dx} (w_2^{-1/2}) = 2 c' x + d' = 0$ ist,

also bei $x_2 = -\frac{d'}{2 c'}$; da gemäß der Definition 10) $c' > 0$ und

deshalb $\frac{d^2}{dx^2} (w_2^{-1/2}) = 2 c' > 0$, so kehrt die Parabel $w_2^{-1/2}$ stets

ihre konvexe Seite nach unten, während das reziproke Quadrat, die Kurve w_2 , die der Gaußschen Fehlerkurve ähnelt, in der

Umgebung des Höchstpunktes ihre konkave, an den der x -Achse sich nähernden Seitenästen aber die konvexe Seite nach unten kehrt. Folglich haben die Parabel w_1 und die Kurve w_2 im allgemeinen nur 2 Schnittpunkte I und II, wie auf der Figur 1 ersichtlich ist, sodaß im allgemeinen nur 2 Lösungen, 2 Parabeln entsprechend, vorhanden sind; die aus der Gleichung 6. Grades als möglich erkannte vierfache Multiplizität der Lösungen r_2 ist also allgemein nicht vorhanden, sodaß die in der Tabelle aufgeführten Fälle 2) und 6), d. h. $K_4 > 0$ und zugleich $K_5 < 0$, allgemein ausscheiden, außer in dem Spezialfalle, wo die Parabel w_1 mit ihrem Scheitel so nahe an die x -Achse heranrückt, daß im Grenzfalle $w_1 = r_2^2 = c \cdot x^2$ (c positiv und im Grenzfalle gleich 1) wird, also der Scheitel der Parabel im Nullpunkt des Koordinatensystems gelegen ist, die x -Achse zur Tangente im Scheitel wird und die Parabel symmetrisch zur w -Achse gelegen ist. Dann schneidet die Scheitelgegend der Parabel w_1^0 (s. die Figur 1) den einen der x -Achse sich asymptotisch nähernden Äste der Kurve w_2 in 2 dem Nullpunkte nahen Punkten I^0 und II^0 und ferner schneidet unsere Parabel w_1^0 , wie im allgemeinen Falle, den auf- oder absteigenden Zweig von w_2 in den beiden Punkten III^0 und IV^0 ; im allgemeinen kommen, wie wir sehen werden, nur die nullpunktsnahen Punkte I^0 und II^0 für die Kometenbahnbestimmung in Frage, weil die Kometen des Sonnensystems meist nur bei Erd- und Sonnennähe entdeckt werden. Da die Ordinate $w = r^2$, wenn die flachen asymptotischen Äste der Kurve w_2 von der Kurve w_1 geschnitten werden, klein, also auch r und deshalb auch x , y und z an diesen Stellen klein ist, so muß, wenn in $w_1 = cx^2 + dx + e$ die Größe z statt x als Abscisse und darstellender Parameter gewählt wird, unter Verwendung der linearen Beziehung 8) zwischen x und z , auch die Parabel $w_1 = r^2 = fz^2 + gz + h$ nahe an die z -Achse mit ihrem Scheitel herangehen, sodaß auch dann 4 Schnitte mit der Kurve $w_2 = (c'z + d'z + e')^{-2}$ entstehen, wobei aber bei einem Schnittpunkt $z < 0$ und bei den 3 anderen $z > 0$ ist oder umgekehrt. Von diesen Schnittpunkten resp. Wurzeln z kommen aber nur diejenigen in Frage, für die, je nach dem Vorzeichen der Breite β_2 also von z_2 , entweder $z < 0$ oder $z > 0$, so daß also entweder eine oder 3 Lösungen vorhanden sind. Auf die Bedingungen für eine einfache oder eine dreifache



Lösung mit der für w_1 geltenden Form: $w_1 = cx^2$ resp. $w_1 = cx^2 + dx + e$, wo d und e klein gegen c , kommen wir weiter unten zurück.

Die im gewöhnlichen Falle doppelte Lösung für r_2 ist nun auf Grund der Voraussetzungen der Problemstellung nicht etwa nach dem Lambertschen Theorem auf eine einfache reduzierbar, weil von dem 2. Kometenorte nur die Länge λ_2 , nicht aber die Breite β_2 als vorgelegt betrachtet wird, sodaß keine Voraussetzung über die Art der Krümmung der scheinbaren Bahn am 2. Kometenorte gegeben ist. Unter der Annahme kleiner Zwischenzeiten, wie sie bei der Bahnbestimmung der Kometen fast ausnahmslos zutrifft, kann strenge nur vorausgesetzt werden, daß der 2. Ort in der Nähe des Großkreises durch den 1. und 3. Ort gelegen ist und der jeder Lösung r_2 entsprechende geozentrische 2. Kometenort muß auf dieser Richtung (λ_2, β_2) gelegen sein. Da nun aber λ_2 in den Gleichungen I—V nur in III und nur in der einzigen Form $\operatorname{tg} \lambda_2$ vorkommt, so gelten die Lösungen auch für $\lambda_2 + 180^\circ$, sodaß also der entsprechende 2. Kometenort, weil er auf der Richtung λ_2, β_2 liegen muß, die Koordinaten $\lambda_2 + 180^\circ$ und $-\beta_2$ besitzen muß; folglich muß auch die entsprechende Koordinate $z = \varrho \sin \beta$ (ϱ = geozentrischer Abstand) ein der anderen Lösung entgegengesetztes Vorzeichen haben. Damit ist die Wahl der richtigen Wurzel r_2 ermöglicht, indem, je nachdem $\beta_2 \geq 0$, die Wurzel r_2 die richtige ist, die $z_2 \geq 0$ ergibt. Dabei können beide Lösungen $r_2 > 1$ oder beide $r_2 < 1$ sein (s. S. 129 die Lösungen des Beispiels), ohne daß hier, wie bei einer allgemeinen Bahnbestimmung aus 6 Daten, eine doppelte Lösung bestünde. Berücksichtigt man aber bei der Kometenbahnbestimmung aus 5 Daten die Kenntnis der Breite β_2 zwecks Trennung der beiden Wurzeln r_2 soweit, daß die Art der Krümmung der scheinbaren Bahn am 2. Kometenorte als bekannt anzunehmen ist, so gestattet das Lambertsche Kriterium nur dann die Wahl der richtigen Wurzel, falls eine der Wurzeln $r_2 > 1$ und die andere < 1 ist.

Sind nach unserer Methode zuerst nur die Wurzeln r_2 , nicht aber z_2 bekannt, so könnte die den Beobachtungen entsprechende Wurzel sehr wohl, ohne die Berechnung von z_2 abzuwarten, ausgewählt werden, indem das nun zu formulierende analytische Kri-

terium herangezogen wird, es bedarf nur der Heranziehung der in unserem parabolischen Spezialfall gültigen Beziehung, daß nach 6):

$$z_2 = \gamma x_2 + \delta,$$

sodaß nur die dem Kriterium $z_j \geq 0$ entsprechende Ungleichung

$$18) \quad z_9 = \gamma x_9 + \delta \geq 0$$

weiter als Funktion von r_2 umgeformt zu werden braucht, um die entsprechende Bedingung für r_1 zu erhalten. Zunächst folgt also:

$$19) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 \geq -\frac{\delta}{\gamma}, \text{ wenn } \gamma > 0 \text{ und } \beta_2 \geq 0 \\ x_2 \leq -\frac{\delta}{\gamma}, \text{ wenn } \gamma < 0 \text{ und } \beta_2 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Substituiert man in diese Ungleichungen für x_2 die oben abgeleitete Funktion für r , gemäß Gleichung 11), wonach

$$x_2 = -\frac{Rc' + cR'}{A},$$

worin noch für R und R' nach 9 a) die Funktionen von r_2 zu substituieren sind, so ergeben sich die Bedingungsgleichungen für r_0 :

$$20) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{c'}{A} r_2^2 + \frac{c}{A} \cdot \frac{2k^2}{r_2} + \frac{h}{A} \geqslant -\frac{\delta}{\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad \beta_2 \leqslant 0 \\ \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \leqslant -\frac{\delta}{\gamma}, \quad \gamma < 0, \quad \beta_2 \leqslant 0 \end{array} \right.$$

Statt die eben genannten Ungleichungen zu verwenden, ist es mit Rücksicht auf das Kriterium für z_2 auch zweckmäßig, sowohl r_2 wie $\frac{2k^2}{r_2}$ nicht als Funktion von x_2 , wie es in Gleichung 9) geschehen ist, sondern entweder von vorne weg, oder später nach numerischer Darstellung von y_2, z_2, x'_2, y'_2 und z'_2 als Funktion von x_2 , als Funktion von z_2 als unabhängigen Parameter darzustellen, sodaß also

$$21) \quad \begin{cases} w_1 = c_1 z_2^2 + d_1 z_2 + e_1 \\ w_2 = \frac{4k^4}{(c_1' z_2^2 + d_1' z_2 + e_1')^2} \end{cases},$$

sodaß aus den 2 Schnittpunkten der beiden Kurven w_1 und w_2 , wobei stets $w_1 > 0$ und $w_2 > 0$ sind, sofort ersichtlich ist, welcher

der beiden Schnittpunkte mit Rücksicht auf das den Beobachtungen entsprechende z_2 (also $\beta_2 > 0$ oder $\beta_2 < 0$) der richtige ist. Die Darstellung von x_2 , y_2 , x'_2 , y'_2 und z'_2 als Funktion von z_2 ergibt sich auf Grund der Gleichung 6), es dürfte aber nicht zweckmäßig sein, wegen der Länge der Ausdrücke diese Darstellung analytisch vornehmen zu wollen; für die Praxis ist es zweckmäßiger, den Übergang von x_2 auf z_2 als unabhängigen Parameter rein numerisch vorzunehmen, wie es in dem späteren numerischen Beispiel auch geschehen ist.

Für die Auflösung der Gleichung 6. Grades in r_2 ist es für die praktische Anwendung bemerkenswert, daß die linke und rechte Seite der Gleichung 13) in r_2 aus demselben Aggregat bestehen, indem diese Gleichung die Form hat:

$$22) \quad r_2^2 + \frac{a}{r_2} + \beta = \left(r_2^2 + \frac{a'}{r_2} + \beta' \right)^2 \cdot \gamma.$$

Deshalb ist es zweckmäßig, eine Tabelle für $u = r^2 + \frac{c}{r}$ mit c und r als Argumenten zu tabulieren, sodaß es mittels dieser Tafel leicht möglich ist, unter Addition von β resp. β' diejenige Stelle r festzustellen, wo

$$23) \quad u_1 = r^2 + \frac{a}{r} + \beta \quad \text{und} \quad u_2 = \left(r^2 + \frac{a'}{r} + \beta' \right)^2 \cdot \gamma$$

einander gleich sind, was am einfachsten durch graphische Darstellung der beiden Kurven u_1 und u_2 mittelst weniger Punkte an Hand der Tafelwerte zu erreichen ist. Die Rechnung einer differenziellen Verbesserung des der graphischen Darstellung entnommenen Näherungswertes liefert schnell die strengen Werte r_2 . Darauf bezügliche Tafeln werde ich an anderer Stelle publizieren. Zunächst möge jetzt als Beispiel der Bahnbestimmungsmethode die Bahn des Kometen 1896 IV Sperra berechnet werden, dessen Bahn bereits Herr Bauschinger in seinem Lehrbuch der Bahnbestimmung der Himmelskörper, 1. Aufl., S. 359, sowie ich selber in meiner oben zitierten Schrift in den Astr. Nachr. Nr. 5022/23 S. 108 untersucht haben.

Wie ich in dieser Schrift auf S. 108 gezeigt habe, liegt bei dem Kometen Sperra der interessante Fall einer Doppellösung vor, indem sich bei einer Bahnbestimmung ohne Voraussetzung einer

Exzentrizität 2 Bahnen ergeben, von denen die eine eine sehr lang gestreckte, im Beobachtungsbereich der Parabel sehr nahe kommende Ellipse mit der halben großen Achse $a = 29$ und die andere eine Hyperbel mit der Achse $a = -1.8$ darstellt, wobei, wie gezeigt, beide Bahnen die vorgelegten Beobachtungen in Strenge darstellen. Hier wollen wir uns von vornherein auf den Boden der parabolischen Arbeitshypothese stellen, wie es bei der Bestimmung der ersten Bahn eines neuentdeckten Kometen meist zu geschehen pflegt, und wollen entsprechend der oben dargelegten Theorie die beobachteten Längen und Breiten des 1. und 3. Ortes und ferner die Länge des 2. Ortes als die vorgelegten 5 Ausgangsdaten benutzen. Die Darstellung der Breite des 2. Ortes wird das Kriterium für die Richtigkeit der parabolischen Hypothese bilden. Die Beobachtungsdaten sind die folgenden (dieselben wie bei Herrn Bauschinger und in meiner Schrift in den Astr. Nachr. S. 108):

1896 m. Z. Berlin, Aequin. 1896.

$$t_1 = \text{Sept. } 7.42259, \quad \lambda_1 = 171^\circ 22' 49''.4, \quad \beta_1 = +59^\circ 46' 6''.8,$$

$$L_1 = 165 \ 41 \ 26.2, \quad \log R_1 = 0.003027,$$

$$t_2 = \text{Sept. } 10.35812, \quad \lambda_2 = 176^\circ 22' 51''.9, \quad \beta_2 = 61^\circ 27' 43''.8,$$

$$L_2 = 168 \ 32 \ 48.8, \quad \log R_2 = 0.002690,$$

$$t_3 = \text{Sept. } 13.41354, \quad \lambda_3 = 182^\circ 11' 53''.2, \quad \beta_3 = 63^\circ 3' 56''.7,$$

$$L_3 = 171 \ 31 \ 26.2, \quad \log R_3 = 0.002327,$$

wo die L_i die geozentrischen Sonnenlängen fixieren. Wie meist bei ersten Bahnbestimmungen der Kometen sollen die Parallaxe resp. die Reduktion auf den Locus fictus und ferner die Lichtzeitreduktion vernachlässigt werden. Die den Polarkoordinaten L_i und R_i der Sonne entsprechenden rechtwinkligen Koordinaten X_i und Y_i ($Z_i = 0$) und die den Längen und Breiten des Kometen entsprechenden Werte von C_i und S_i seien in der folgenden Tafel zusammengestellt (überall Logarithmen):

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
X_i	9.98934 _n	9.99396 _n	9.99756 _n
Y_i	9.39600	9.30059	9.17081
C_i	9.76055 _n	9.73458 _n	9.70561 _n
S_i	8.94121	8.53562	8.28975 _n

Dann ergeben die Gleichungen 6), I) und II): $T_2 = 8.80103_n$,
 $U_2 = 9.13807_n$ sodaß III) $y_2 = 8.80103_n x_2 + 9.13807_n$ und

$$\text{I a) } x'_2 = 9.53231 \quad x_2 + 9.29286 \quad z_2 + 9.76055_n \quad z'_2 + 9.52165_n,$$

$$\text{II a) } y'_2 = 8.33334_n \quad x_2 + 8.47352_n \quad z_2 + 8.94121 \quad z'_2 + 8.57942.$$

Die Substitution von y_2 , x'_2 und y'_2 in IV) und V) gibt dann direkt numerisch oder auf Grund der Formeln IV) und V) die beiden Gleichungen für z_2 und z'_2 :

$$\text{IV) } 0.04430 \quad z_2 + 9.32054_n \quad z'_2 = 0.30980_n \quad x_2 + 0.30319,$$

$$\text{V) } 8.85381_n \quad z_2 + 9.51375 \quad z'_2 = 9.11083 \quad x_2 + 9.10301_n,$$

sodaß

$$z_2 = 0.26586_n \quad x_2 + 0.25930,$$

$$z'_2 = 7.91039_n \quad x_2 + 7.96095,$$

sodaß bei Substitution in Ia) und IIa):

$$x'_2 = 8.22194_n \quad x_2 + 8.27703 \quad \text{und} \quad y'_2 = 8.51349 \quad x_2 + 8.18431_n.$$

Folglich wird a):

$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 0.64403 \quad x_2^2 + 0.82506_n \quad x_2 + 0.52108.$$

Analog wird bei Substitution der Geschwindigkeitskomponenten in die Parabelbedingung b):

$$\frac{2k^2}{r_2} = x'^2 + y'^2 + z'^2 : \frac{1}{r_2} = 0.37647 \quad x_2^2 + 0.47750_n \quad x_2 + 0.05735.$$

Die Auflösung von a) und b) nach x und x^2 gibt:

$$\text{c) } \begin{cases} x^2 = A = 0.05006_n \quad r_2^2 + 0.39762 \quad \frac{1}{r_2} + 9.94166 \\ x = B = 9.94903_n \quad r_2^2 + 0.21659 \quad \frac{1}{r_2} + 0.03056. \end{cases}$$

Folglich wird auf Grund der Beziehung: $A = B^2$ die folgende Gleichung 6. Grades in r_2 erhalten:

$$f(r) = r^6 + 9.99737_n \quad r^4 + 0.56859_n \quad r^3 + 9.54412 \quad r^2 \\ + 0.11693 \quad r + 0.53512 = (-\infty),$$

woraus ersichtlich ist, daß infolge der vorhandenen beiden Zeichenwechsel nur 2 positive reelle Wurzeln existieren können. Die graphische Aufzeichnung von $f(r)$ oder auch der beiden Kurven w_1

und w_2 nach der Formel 9) liefert die beiden Wurzeln: 1) $r_2^0 = 1.5$, 2) $r_2^0 = 1.2$ als erste Näherungen, sodaß bei differentieller Verbesserung, wenn $r_2 = r_2^0 + \Delta r$ gesetzt wird und dann bei nur linearer Verbesserung $\Delta r = -\frac{f(r^0)}{f'(r^0)}$ berechnet wird, wo $f'(r^0) = \left(\frac{df}{dr}\right)_{r^0}$, bereits in 2. Näherung die definitiven Endwerte erhalten werden: 1) $W_1 = r_2 = 0.17486$ und 2) $W_2 = r_2 = 0.08100$ (Logarithmen), sodaß also beide Werte $r_2 > 1$ sind.

Aus den Gleichungen c) folgen dann in Kontrolle zunächst x_2 , dann, nach III): y_2 und schließlich nach IV) und V) in der obigen numerischen Form z_2 und z'_2 , weiter dann x'_2 und y'_2 nach den numerischen Gleichungen Ia) und IIa), sodaß den beiden Wurzeln r_2 alsdann die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Zahlenwerte entsprechen:

Da $z_2 = \varrho_2 \sin \beta_2 > 0$ sein muß, weil im vorliegenden Falle $\beta_2 > 0$, so ist, da von den beiden Werten z_2 der erste > 0 , der andere < 0 ist, nur W_1 den Beobachtungen entsprechend, weshalb x'_2 , y'_2 und z'_2 für W_2 gar nicht berechnet zu werden brauchten; die entsprechende Ungleichung (20) ist für W_1 erfüllt.

	W_1	W_2
r_2	0.17486	0.08100
x_2	9.26537	0.05995
y_2	9.17342 _n	9.32229 _n
z_2	0.16937	9.47806 _n
x'_2	8.20013	—
y'_2	7.96740 _n	—
z'_2	7.88317	—

Die obige erste Rechnung ist nun aber deshalb noch nicht die definitive, weil die Restglieder in den Gleichungen und ferner die Korrektionsfaktoren $1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_a^2}{r_2^3}$ vor der Berechnung von r_2 noch nicht berücksichtigt werden konnten. Die Berechnung von $R_a(x)$, $R_a(y)$ und $R_a(z)$ nach Ermittlung von x_2 , y_2 , z_2 , x'_2 , y'_2 und z'_2 als Funktion dieser 6 Größen zeigt, daß die Restglieder innerhalb der 5stelligen Rechnung ohne jeden Einfluß auf die Rechnung sind, wie wohl immer, wenn die Zwischenzeiten nur wenige Tage betragen; dagegen ergeben die Korrektionsfaktoren $1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_1^2}{r_2^3} = 9.99983$ und $1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_3^2}{r_2^3} = 9.99982$, d. h. die entsprechenden mit diesen Faktoren versehenen Glieder sind um -17 resp. -18 Einheiten der 5. Dezimale zu verbessern. Als dann ergeben sich, indem y_2 unverändert bleibt, die neuen Ausdrücke:

$$\begin{cases} x'_2 = 9.53214 & x_2 + 9.29269 & z_2 + 9.76055_n & z'_2 + 9.52165_n \\ y'_2 = 8.33317_n & x_2 + 8.47335_n & z_2 + 8.94121 & z'_2 + 8.57963, \end{cases}$$

sodaß die Gleichungen für z_2 und z'_2 werden:

$$\begin{cases} 0.04413 & z_2 + 9.32054_n & z'_2 = 0.30963_n & x_2 + 0.30319 \\ 8.85364_n & z_2 + 9.51375 & z'_2 = 9.11066 & x_2 + 9.10340_n. \end{cases}$$

Folglich ergeben sich sukzessive:

$$\begin{aligned} z_2 &= 0.26586_n & x_2 + 0.25945 & z'_2 = 7.91022_n & x_2 + 7.94328 \\ x'_2 &= 8.22177_n & x_2 + 8.28149 & y'_2 = 8.51332 & x_2 + 8.18462_n, \end{aligned}$$

sodaß jetzt

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 0.64403 & x^2 + 0.82521_n & x + 0.52138 \\ \frac{1}{r} = 0.37613 & x^2 + 0.47763_n & x + 0.05814 & \text{sodaß weiter:} \\ A = x^2 = 0.05194_n & r^2 + 0.39952 & \frac{1}{r} + 9.94216 \\ B = x = 9.95044_n & r^2 + 0.21834 & \frac{1}{r} + 0.03082, \end{cases}$$

also schließlich mittels $A = B^2$ die Gleichung in r :

$$r^6 + 9.99592_n r^4 + 0.56893_n r^3 + 9.54189 r^2 + 0.11638 r + 0.53580 = (-\infty)$$

mit der allein in Betracht kommenden definitiven Lösung $W_1 = r_2 = 0.17469$, die sich hier durch differenzielle Verbesserung des Wertes der ersten Lösung unmittelbar ergibt. Alsdann ergeben sich sukzessive und definitiv:

$$\begin{aligned} x_2 &= 9.26677, & y_2 &= 9.17353_n, & z_2 &= 0.16923, \\ z'_2 &= 7.86169, & x'_2 &= 8.20521, & y'_2 &= 7.96711_n. \end{aligned}$$

Mit diesen für den Zeitpunkt t_2 gültigen Werten der Koordinaten und ihrer Geschwindigkeiten soll unmittelbar der Vergleich mit den Beobachtungsdaten vorgenommen werden, indem die Koordinaten x_i mittels der Reihenentwicklung $x_i = x_2 + \tau_i x'_2 + \frac{1}{2} \tau_i^2 x''_2 + \dots$, für $i=1$ und 3 und analog für y_i und z_i berechnet werden, um dann

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= x_i + X_i = \varrho_i \cos \beta_i \cos \lambda_i \\ \eta_i &= y_i + Y_i = \varrho_i \cos \beta_i \sin \lambda_i \\ \zeta_i &= z_i = \varrho_i \sin \beta_i \end{aligned} \right\} i = 1, 2, 3$$

und aus ihnen die β_i und λ_i , $i = 1, 2$ und 3 zu berechnen und mit der Beobachtung zu vergleichen. Man findet mittels 4) hier und den Ausdrücken 7) und 8) S. 84 meiner Schrift in den Astr. Nachr. für x_2'' etc.:

$$\left. \begin{aligned} x_2'' &= 5.21386_n, & x_2''' &= 4.02585_n \\ y_2'' &= 5.12062, & y_2''' &= 3.73619 \\ z_2'' &= 6.11632_n, & z_2''' &= 4.31271 \end{aligned} \right\};$$

noch höhere Ableitungen erweisen sich als unnötig. Die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung sind dann schließlich in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	1. Ort	2. Ort	3. Ort
$\lambda_B - \lambda_R$	+ 0'030	— 0'018	+ 0'010
$\beta_B - \beta_R$	+ 0'030	— 0.042	— 0'030

Die Übereinstimmung läßt also nichts zu wünschen übrig, auch an der kritischen Stelle, bei der in der ganzen Bahnbestimmung nicht benutzten Breite des 2. Ortes, sodaß also die gefundene Parabel den Beobachtungen gänzlich genügt, indem in β_2 keinerlei Abweichung vorhanden ist, die auf einen elliptischen Charakter hinwiese.

Trotzdem darf man aber nicht vergessen, daß eine Kometenbahnbestimmung bei kleinen Zwischenzeiten, wie hier und meistens, stets einer mehr oder weniger großen Unsicherheit unterliegt, welche Methode man auch immer anwenden möge. Deshalb sind im vorliegenden Falle die Koordinaten und Geschwindigkeiten, besonders x_2 , x_2' und z_2' , weil sie als kleine Differenzen großer Zahlen erscheinen, unsicher, so daß die entscheidende Beziehung zwischen ihnen, die Parabelbedingung in der Form:

$$\frac{2k^2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2$$

linker Hand 6.59750, rechts 6.59783, also eine Differenz von 33 Einheiten der 5. Dezimale ergibt. Trotzdem ist die Genauigkeit der Darstellung der Beobachtungen, wie die obige Tabelle zeigt, von dieser Ungenauigkeit nicht betroffen worden, da die Zwischenzeiten klein sind.

Ferner sei bemerkt, daß die obige Bahnbestimmungsmethode auf Grund des gesamten Algorithmus besonders für die Anwendung einer Rechenmaschine geeignet ist. Schließlich ergeben sich die Bahnelemente des Kometen Sperra aus den $x_2, y_2, z_2, x'_2, y'_2$ und z'_2 auf Grund der Formeln auf S. 95—96 meiner Schrift in den Astr. Nachr. und nehmen bei der nahen Übereinstimmung der Koordinaten und Geschwindigkeiten, die dort unter Benutzung aller 6 Beobachtungsdaten abgeleitet wurden, entsprechend nahe übereinstimmende Werte an, nämlich:

$$\left\{ \begin{array}{l} T = 1896 \text{ Juli } 9.287 \\ \omega = 38^\circ 13.06 \\ A = 150^\circ 34.10 \\ i = 88^\circ 29.096 \end{array} \right\} \text{Aequin. } 1896.0$$

$$\lg q = 0.04625,$$

wobei die wahre Anomalie w_2 aus

$$\cos \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{q}{r}} \text{ resp. } \operatorname{tg} \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{r}{q} - 1}$$

abgeleitet wurde und daraus dann $\omega = u_2 - w_2$, wo u_2 das Argument der Breite.

§ 2.

Die Multiplizität der Lösungen.

Was die Frage nach der Mehrzahl der Lösungen der Hauptgleichung 14 a) und die notwendigen Bedingungen hierfür anbelangt, so hat sich bisher, wie gezeigt, allgemein eine doppelte Lösung, wie bei den Planetenbahnen, als möglich erwiesen. Es könnte aber möglich sein, daß die Gleichung 6. Grades in Spezialfällen von vornweg auf eine Gleichung niederen Grades reduziert wird und diese mehr als 2 positive reelle Lösungen r , mehr als 2 reellen Bahnen entsprechend, besitzen kann. Das ist bei den Kometenbahnen tatsächlich möglich, wie jetzt bewiesen werden soll.

Die zu der Grundgleichung in r_2 oder einer der Koordinaten x_2, y_2 oder z_2 führenden beiden Hauptgleichungen waren:

- a) $r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = x^2 + (ax + \beta)^2 + (\gamma x + \delta)^2,$
 b) $\frac{2k^2}{r_2} = x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2 = (a'x_2 + \beta')^2 + (\gamma'x + \delta')^2 + (\varepsilon'x + \zeta')^2;$

die rechte Seite der Gleichung b) bleibt stets vom 2. Grade in x_2 , weil $\alpha'^2 + \gamma'^2 + \varepsilon'^2 \neq 0$ stets, wenn nicht alle 3 Koeffizienten α' , γ' und ε' gleichzeitig 0 werden, sodaß in diesem Falle r_2 nach b) von x_2 überhaupt unabhängig wäre und dann also direkt aus den Beobachtungsdaten nach b) zu berechnen wäre, wonach x_2 aus a) folgen würde. Die Bedingungen $\alpha' = \gamma' = \varepsilon' = 0$ bedeuten aber eine dreifache Beschränkung der 5 Beobachtungsdaten und die Lösung bleibt trotzdem nach a) als Gleichung 2. Grades in x_2 eine zweideutige, wie im allgemeinen Falle, sodaß die Bedingungen in diesem Falle nicht zu einer höheren Multiplizität führen. Sind von den Koeffizienten α' , γ' und ε' nur einer oder zwei verschieden von 0, so bleibt die Gleichung b) vom 2. Grade in x_2 also unverändert gegen den allgemeinen Fall, sodaß keine Reduktion des Grades der aus a) und b) resultierenden Gleichung erfolgen kann. Es verbleibt nur eine Möglichkeit der Reduktion und zwar durch die Reduktion der Gleichung a), auf eine Gleichung niederen Grades, wenn 23) $r_2^2 = f^2 \cdot x_2^2$ wird, wo f nur von den Beobachtungsdaten abhängig ist; dann wird nämlich 24) $r_2 = \pm f x_2$, so daß die Substitution von x_2 oder r_2 nach dieser Beziehung 24) in die Gleichung b) zu einer Gleichung 3. Grades in x_2 oder r_2 führt, mit also einer oder drei reellen positiven Wurzeln, entsprechend einer oder drei möglichen parabolischen Bahnen, wobei aber die dreifache Möglichkeit reeller Lösungen auf Grund der Untersuchung der Koeffizienten zu beweisen bleibt.

Geometrisch war die Möglichkeit von einer oder von 3 reellen Lösungen im Spezialfall $w_1 = r_2^2 = c x^2$ bereits auf S. 122 bei der Untersuchung der Schnitte der Kurven w_1 und w_2 erkannt worden.

Die Bedingung für die Form 23) resp. 24) ist nach a): $\beta = \delta = 0$, so daß $r = x \sqrt{1 + \alpha^2 + \gamma^2}$. Da nun

$$\beta = X_2 \operatorname{tg} \lambda_2 - Y_2 \text{ und}$$

$$\delta = \frac{1}{D} \left[\frac{\tau_3 X_1 - \tau_1 X_3}{\tau_3 - \tau_1} (S_1 - S_3) - \frac{\tau_3 Y_1 - \tau_1 Y_3}{\tau_3 - \tau_1} (C_1 - C_3) - U_2 (C_1 - C_3) \right],$$

wo D die Determinante der 5 Gleichungen (I—V) (s. Formel 7) und wo $U_2 = X_2 \operatorname{tg} \lambda_2 - Y_2 = \beta$, so sagt die 1. Bedingung $\beta = 0$ aus, daß $\operatorname{tg} \lambda_2 = \frac{Y_2}{X_2}$ oder, da $\frac{Y_2}{X_2} = \operatorname{tg} \Theta_2$, wenn Θ_2 die Länge der zweiten Sonnenposition, sodaß $\lambda_2 = \Theta_2$ oder $= 180 + \Theta_2$

sein muß; der zweite Kometenort muß also zur Sonne in Konjunktion oder Opposition sein. Dann ist aber auch $U_2 = 0$, so daß δ sich im obigen Ausdrucke auf die ersten beiden Terme reduziert; da aber der 2. Term $\tau_3 Y_1 - \tau_1 Y_3 = 0$ ist, weil bei Verlegung des Nullpunktes der Längen in den zweiten Sonnenort: $\frac{Y_1}{Y_3} = \frac{R_1 \sin \Theta_1}{R_3 \sin \Theta_3} = \frac{\Theta_1}{\Theta_3}$ ist, wenn sich der 1. und 3. Sonnenort nicht allzuweit vom 2. entfernen; dann aber ist auch $\frac{\Theta_1}{\Theta_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3}$, also folglich $\frac{Y_1}{Y_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3}$ oder $\tau_3 Y_1 - \tau_1 Y_3 = 0$, so daß δ sich weiter allein auf den ersten Term reduziert, nämlich $\delta = \frac{1}{D} \frac{\tau_3 X_1 - \tau_1 X_3}{\tau_3 - \tau_1} (S_1 - S_3)$.

Die Bedingung $\delta = 0$ kann nicht erfüllt sein durch $\frac{\tau_3 X_1 - \tau_1 X_3}{\tau_3 - \tau_1} (S_1 - S_3) = 0$, da X_1 und X_3 bei kleinen Werten von τ_1 und τ_3 nach Wahl des obigen Nullpunktes der Längen, so daß die x -Achse durch den zweiten Sonnenort geht, immer nahe gleich bleiben, während $\tau_3 - \tau_1$ als Differenz der Zeiten zwischen der ersten und dritten Beobachtung nicht verschwinden kann. Es verbleibt also nur die Möglichkeit, daß $S_1 - S_3 = 0$ ist, d. h. $\text{ctg } \beta_1 \sin \lambda_1 = \text{ctg } \beta_3 \sin \lambda_3$, was geometrisch besagt, daß der 1. und 3. Ort des Kometen auf demselben Großkreise durch den Anfangspunkt der Längenzählung, also den 2. Sonnenort, gelegen sind, so daß $\text{ctg } \beta_1 \sin \lambda_1 = \text{ctg } \beta_3 \sin \lambda_3 = \text{ctg } s$, wo s den Neigungswinkel des genannten Großkreises gegen die Grundebene der Ekliptik fixiert. Da wegen der Wahl des Anfangspunktes der Längen die Größen $\lambda_2 = \Theta_2 = 0$ sind, so ist, weil $\gamma = \frac{1}{D} [S_1 - S_3 - T_2 (C_1 - C_3)]$, mit Rücksicht auf $T_2 = 0$ und $S_1 - S_3 = 0$, schließlich auch $\gamma = 0$, so daß also γ und δ zugleich verschwinden und somit $z_2 = 0$ wird. Das heißt aber, daß der 2. Kometenort außer derselben Länge wie bei der zweiten Sonne auch dieselbe Breite $\beta_2 = 0$ besitzt, so daß der 2. Sonnenort resp. dessen Gegenpunkt, und der 2. Kometenort überhaupt zusammenfallen. Folglich findet immer nur dann eine Reduktion der Grundgleichungen auf den 3. Grad statt, wenn die 3 Kometenörter auf einem Großkreise durch den 2. Sonnenort oder dessen Gegenpunkt gelegen sind und der 2. Kometenort und der 2. Sonnenort resp. dessen Gegenpunkt zusammenfallen.

Liegt der 2. Kometenort aber nur in der Nähe des 2. Sonnenortes oder seines Gegenpunktes, so ist die Bedingung $w_1 = r^2 = x^2$ nur genähert erfüllt, aber die Parabel $w_1 = cx^2 + dx + e$ (c nahe $= 1$, d und e klein) liegt mit ihrem Scheitel immer in der Nähe der x -Achse und wird deshalb von der Kurve w_2 in 2 oder 4 Punkten geschnitten, von denen aber nur einer oder drei brauchbar sind, indem 3 oder 1 Punkt zu Werten von z_2 führen, die in ihrem Vorzeichen der Beobachtung widersprechen.

Die strenge Erfüllung der Bedingungen trifft bei den von Herrn Banachiewicz gegebenen Beispielen einer dreifachen parabolischen Lösung außerhalb und innerhalb der Ekliptik zu. Daß und wann in diesen Fällen nun aber nicht etwa nur eine reelle positive Wurzel, sondern tatsächlich drei reelle positive Wurzeln der resultierenden kubischen Gleichung auftreten, ist jetzt zu beweisen.

Mit Rücksicht auf die Bedingungen:

$$S_1 = S_3 = S, \quad T_2 = U_2 = \operatorname{tg} \lambda_2 = \operatorname{tg} \Theta_2 = 0, \\ y_2 = z_2 = 0 \text{ und } r = \pm x$$

wird die Determinante D des Systems I)–V) nach 7):

$$D = \frac{S(C_3 - C_1)}{\tau_3 - \tau_1}$$

und deshalb z'_2 nach 6) und 7):

$$z'_2 = \frac{\tau_3 - \tau_1}{\tau_3 \tau_1} \cdot \frac{x_2}{(C_1 - C_3)} + \frac{\tau_3 X_1 - \tau_1 X_3}{\tau_3 \tau_1 (C_1 - C_3)},$$

so daß gemäß Ia) und IIa) und 6):

$$\begin{cases} x'_2 \tau_1 = -x_2 - X_1 + \frac{\tau_3 - \tau_1}{\tau_3} \cdot \frac{C_1}{C_1 - C_3} x_2 + \frac{C_1}{C_1 - C_3} \cdot \frac{\tau_3 X_1 - \tau_1 X_3}{\tau_3} \\ y'_2 \tau_1 = -Y_1 + \frac{\tau_3 - \tau_1}{\tau_3} \cdot \frac{S_1}{C_1 - C_3} x_2 + \frac{S_1}{C_1 - C_3} \cdot \frac{\tau_3 X_1 - \tau_1 X_3}{\tau_3} \\ z'_2 \tau_1 = \frac{\tau_3 - \tau_1}{\tau_3} \cdot \frac{1}{C_1 - C_3} x_2 + \frac{\tau_3 X_1 - \tau_1 X_3}{\tau_3} \cdot \frac{1}{C_1 - C_3} \end{cases}$$

zwecks Substitution in die Bedingungsgleichung:

$$\frac{2k^2 \tau_1^2}{r_2} = (x'_2 \tau_1)^2 + (y'_2 \tau_1)^2 + (z'_2 \tau_1)^2.$$

Der Einfachheit halber darf, unbeschadet der Allgemeinheit, Aequidistanz der Zeiten und Längen, also auch Breiten ange-

nommen werden, weil hiermit eine nicht unwesentliche Vereinfachung der Formeln erreicht wird. Dann ist nämlich $\tau_3 = -\tau_1$, $C_3 = -C_1$ und $X_3 = X_1$, so daß

$$\frac{\tau_3 - \tau_1}{\tau_1} = \frac{C_1}{C_1 - C_3} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\tau_3 X_1 - \tau_1 X_3}{\tau_3} = 2 X_1,$$

$$\frac{S_1}{C_1 - C_3} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \lambda_1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{C_1 - C_3} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\cos \lambda_1},$$

sodaß weiterhin:

$$x'_2 \tau_1 = 0, \quad y'_2 \tau_1 = x_2 \operatorname{tg} \lambda_1 + X_1 \operatorname{tg} \lambda_1 - Y_1,$$

$$z'_2 \tau_1 = x_2 \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\cos \lambda_1} + X_1 \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{\cos \lambda_1}.$$

Die Substitution in die parabolische Bedingung ergibt:

$$\frac{1}{V w_2} = \frac{2 k^2 \tau_1^2}{r_2} = c' x_2^2 + d' x_2 + e',$$

wo $c' > 0$ und $e' > 0$, wie früher, und

$$d' = 2 X_1 (\operatorname{tg}^2 \lambda_1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1 \sec^2 \lambda_1) - 2 Y_1 \operatorname{tg} \lambda_1.$$

Substituiert man im Falle a) $x_2 = r_2$ (obere Konjunktion) in die Bedingungsgleichung, so entsteht die kubische Gleichung:

$$c' r^3 + d' r^2 + e' r - 2 k^2 \tau_1^2 = 0;$$

ist $d' > 0$, so hat diese Gleichung nur eine, ist aber $d' < 0$, so hat sie 3 reelle positive Wurzeln und liefert dementsprechend 3 reelle parabolische Bahnen.

Analog der früheren geometrischen Untersuchung der Zahl der Lösungen der Gleichung 6. Grades ergibt sich hier, daß die Kurve w_2 , deren Form dieselbe wie früher ist, von den unter $\pm 45^\circ$ gegen die x -Achse ansteigenden Graden $r = \pm x$ in einem oder 3 Punkten geschnitten wird, wie die geometrische Aufzeichnung sofort ergibt.

Da $X_1 = +1$ (sehr nahe) und $Y_1 < 0$ ($Y_2 = 0$, $Y_3 > 0$), so ist $d' > 0$, wenn $\lambda_1 > 0$; ist $\lambda_1 < 0$, so entscheidet die Größe beider Glieder in d' . Ist im Falle b) $x_2 = -r_2$ (untere Konjunktion oder Opposition des Kometen um die Gegensonne), so wird

$$c' r_2^3 - d' r_2^2 + e' r_2 - 2 k^2 \tau_1^2 = 0,$$

also bei

$$\left. \begin{array}{l} d' > 0, \text{ 3 Parabeln } \\ d' < 0, \text{ 1 Parabel } \end{array} \right\}.$$

Diese Bedingungen sind bei dem Beispiel von Herrn Banachiewicz erfüllt und die Richtigkeit seiner Behauptungen bestätigt. Liegt der 2. Kometenort nur in der Nachbarschaft des 2. Sonnenortes oder seines Gegenpunktes, so sind, wie aus der geometrischen Betrachtung auf S. 135 folgte, 3 Parabeln als Lösungen möglich, wie sie zum 1. Mal bei dem von v. Oppolzer behandelten Beispiel des Kometen Cruls 1882 II in Erscheinung traten.

Der Spezialfall, daß die Kometenbewegung ganz in der Ekliptik stattfindet, bedarf einer Sonderuntersuchung in Bezug auf die Zahl der Lösungen, weil die Beobachtungsdaten und dementsprechend die Gleichungen andere als bei räumlicher Bewegung gegen die Ekliptik sind; wegen des Nichtvorkommens der Breiten sind die Beobachtungsparameter C_a und S_a durch andere zu ersetzen, indem nämlich nur die Längen λ_a zu beobachten sind, sodaß nach den Gleichungen 1) zwecks Elimination von ϱ_a und β_a zu bilden sind: a) $\frac{\eta_a}{\xi_a} = \frac{y_a + Y_a}{x_a + X_a} = \operatorname{tg} \lambda_a$, wo $a = 1, 2$ und 3 , um mit den weiteren beiden Bedingungsgleichungen b) $r_2^2 = x_2^2 + y_2^2$ und c) $\frac{2k^2}{r_2} = x_2'^2 + y_2'^2$ zusammen die fünf Unbekannten x_2, y_2, x_2', y_2' und r_2 aus also 3 Kometenbeobachtungen ermitteln zu können. Die Beseitigung der Nenner in a) und die Potenzentwicklung von x_1, y_1, x_3 und y_3 nach τ_1 und τ_3 liefert alsdann, wenn noch $x_2'' = -k^2 \frac{x_2}{r_2^3}$ etc. substituiert wird, die folgenden 3 Gleichungen:

$$d) \begin{cases} 1) -\operatorname{tg} \lambda_1 x_2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_1^2}{r_2^3}\right) + y_2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_1^2}{r_2^3}\right) - \tau_1 \operatorname{tg} \lambda_1 x_2' + \tau_1 y_2' \\ \quad = X_1 \operatorname{tg} \lambda_1 - Y_1 + (R), \\ 2) -x_2 \operatorname{tg} \lambda_2 + y_2 = X_2 \operatorname{tg} \lambda_2 - Y_2, \\ 3) -\operatorname{tg} \lambda_3 x_2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_3^2}{r_2^3}\right) + y_2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_3^2}{r_2^3}\right) - \tau_3 \operatorname{tg} \lambda_3 x_2' + \tau_3 y_2' \\ \quad = X_3 \operatorname{tg} \lambda_3 - Y_3 + (R), \end{cases}$$

wo unter (R) immer die Restglieder verstanden sind, die hier theoretisch nicht in Frage kommen und praktisch wegen des vorliegenden Idealfalles gar keine Rolle spielen. Die Substitution von y_2 nach der 2. Gleichung in d) in die 1. und 3. Gleichung von d) gibt 2 Gleichungen für x_2' und y_2' als lineare Funktionen

von x_2 , sodaß die Substitution von x'_2 und y'_2 in die Bedingungen b) und c), wie im allgemeinen Falle, Gleichungen der Form ergibt:

$$e) \quad \begin{cases} w_1 = r_2^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ \frac{2k^2}{\sqrt{w_2}} = \frac{2k^2}{r_2} = \alpha' \cdot x^2 + \beta' x + \gamma', \end{cases}$$

sodaß, wie im allgemeinen Falle der Kometenbahnbestimmung, die resultierende Gleichung in r_2 oder einer der Koordinaten oder Geschwindigkeiten vom 6. Grade wird, falls nicht in Spezialfällen wieder eine Reduktion der Gleichungen möglich wird. Die notwendige Bedingung dafür ist auch hier, daß $y_2 = f \cdot x_2$ wird, wo f eine Funktion der Beobachtungsdaten, sodaß alsdann $r_2 = \pm g x_2$ wird und die Substitution in die Parabelbedingung wieder eine Gleichung 3. Grades ergibt. Die Form $y_2 = f x_2$ bedingt nun nach d₂), daß: $X_2 \operatorname{tg} \lambda_2 - Y_2 = 0$, sodaß $\lambda_2 = \Theta_2$ sein muß, wie im allgemeinen räumlichen Falle, und daß infolgedessen jede andere beliebige Lage des zweiten Kometenortes in der Ekliptik, wie im allgemeinen Falle, zu zwei reellen Wurzeln, entsprechend den beiden Schnittpunkten der Kurven w_1 und w_2 gemäß den Gleichungen e) führen muß; wie im allgemeinen räumlichen Falle fällt aber auch hier die eine Wurzel weg, weil der entsprechende Kometenort auch hier aus demselben Grunde auf der Gegenrichtung des beobachteten Ortes gelegen ist. Wird wieder der zweite Sonnenort als Anfangspunkt der Längen gewählt, sodaß in unserem Spezialfall $\Theta_2 = \lambda_2 = 0$, so wird $y_2 = 0$ und dann also:

$$\begin{aligned} d_1) & \quad \left(-x_2 \operatorname{tg} \lambda_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_1^2}{r_2^3} \right) - \tau_1 \operatorname{tg} \lambda_1 x'_2 + \tau_1 y'_2 = X_1 \operatorname{tg} \lambda_1 - Y_1, \right. \\ d_3) & \quad \left(-x_2 \operatorname{tg} \lambda_3 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_3^2}{r_2^3} \right) - \tau_3 \operatorname{tg} \lambda_3 x'_2 + \tau_3 y'_2 = X_3 \operatorname{tg} \lambda_3 - Y_3. \right. \end{aligned}$$

Da $\lambda_2 = 0$, so haben λ_1 und λ_3 entgegengesetzte Vorzeichen, ebenso Y_1 und Y_3 , während X_1 und X_3 dasselbe Vorzeichen haben und bei kleinen Zwischenzeiten nahe gleich sind. Zur Untersuchung der Beschaffenheit der Wurzeln der Lösung ist es auch hier hinreichend, eine Aequidistanz der Zeiten anzunehmen, sodaß also $\tau_3 = -\tau_1$ und bei kleinen Zwischenzeiten deshalb auch $Y_3 = -Y_1$, $X_3 = X_1$, und schließlich ist es auch keine besondere Beschränkung, die λ_1 und λ_3 dem absoluten Betrage nach

gleich anzunehmen, also $\lambda_3 = -\lambda_1$ zu setzen. Dann hat man die von Herrn Banachiewicz getroffenen Voraussetzungen des von ihm fingierten Beispiels. Es folgt alsdann nach den Gleichungen d_1 und d_3) bei Addition und Subtraktion derselben:

f) $x'_2 = 0$ und $\tau_1 y'_2 = X_1 \operatorname{tg} \lambda_1 - Y_1 + x_2 \operatorname{tg} \lambda_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_1^2}{r_2^3}\right)$,
so daß

g)
$$\begin{cases} r_2 = \pm x_2 \\ \frac{2k^2}{r_2} = x_2'^2 + y_2'^2 = y_2'^2 = \frac{1}{\tau_1^2} (a + \beta x_2) \end{cases}$$

wird, wo $a = X_1 \operatorname{tg} \lambda_1 - Y_1$, $\beta = \operatorname{tg} \lambda_1$ (abgesehen von dem Korrektionsfaktor $\left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_1^2}{r_2^3}\right)$). Folglich entsteht nach g) die Gleichung 3. Grades in r_2 :

h)
$$2k^2 \tau_1^2 = r(a \pm \beta r)^2,$$

wo das obere Zeichen der oberen Konjunktion und das untere Zeichen der unteren Konjunktion, resp. Opposition des zweiten Kometenortes mit dem Gegenpunkte der Sonne entspricht. Folglich lautet die Gleichung 3. Grades:

i)
$$\beta^2 r_2^3 \pm 2a\beta r_2 + a^2 r_2 - 2k^2 \tau_1^2 = 0.$$

Im Falle des oberen Vorzeichens ergeben sich also nur eine oder drei reelle positive Wurzeln r_2 , falls $a \cdot \beta \geq 0$, im Falle des unteren Vorzeichens, falls $a \cdot \beta \leq 0$. Da $a = X_1 \operatorname{tg} \lambda_1 - Y_1$, so ist $a \geq 0$, falls $\operatorname{tg} \lambda_1 \geq \frac{Y_1}{X_1}$ d. h. falls $\lambda_1 \geq \Theta_1$, und ferner ist $\beta = \operatorname{tg} \lambda_1 \geq 0$, falls $\lambda_1 \geq 0$. Die Kombination $a \cdot \beta \geq 0$ entscheidet dann also in einfacher Weise über die Zahl der möglichen Parabeln, sodaß nur eine oder drei durch die drei Kometenörter gehen können.

Das Kriterium für die Möglichkeit von 3 Parabeln in der Umgebung der strengen Bedingungen, also in der Nähe der 2. Sonne resp. Gegen Sonne, ergibt sich am einfachsten auf dem folgenden Wege. Da die Schnittpunkte der Kurve w_1 mit dem Asymptoten- zweige der Kurve w_2 in der Nähe der Abscissenachse (x, y oder z) stattfinden, so ist die Bedingung eines Schnittes beider Kurven an dieser Stelle die, daß die Ordinate des Scheitelpunktes der Parabel w_1 kleiner als die Ordinate von w_2 an der dem Scheitelpunkte ent-

sprechenden Abscisse sein muß. Die Koordinaten x_1 und w_1^1 des Scheitelpunktes der Parabel $w_1 = c x^2 + d x + e$ sind aber:

$$x_1 = -\frac{d}{2c} \text{ und } w_1^1 = e - \frac{1}{4} \frac{d^2}{c},$$

sodaß die Substitution in w_2 ergibt:

$$w_2^1 = \frac{16 k^4 c^2}{c' d^2 - 2 c d d' + 4 c^2 e'}.$$

Folglich gibt unsere Bedingung: $w_1^1 < w_2^1$ als die gesuchte Bedingung zwischen den Koeffizienten d. h. zwischen den Beobachtungsdaten die Ungleichung

$$e - \frac{1}{4} \frac{d^2}{c} < \frac{16 k^4 c^2}{c' d^2 - 2 c d d' + 4 c^2 e'},$$

vorausgesetzt aber noch, daß die linke Seite, die w_1^1 darstellt, klein ist, damit die Asymptoten zweige von w_2 geschnitten werden, da die Ungleichung ganz allgemein überhaupt die Bedingung des Schnittes von w_1 und w_2 zum Ausdruck bringt.

Da dieser Ausdruck keine einfache und übersichtliche Funktion der Längen und Breiten des Kometen, der Sonnenlängen und der Zeiten ist, erscheint eine explizite Darstellung des Ausdruckes in Abhängigkeit von den genannten Größen als nicht lohnend.

Insgesamt ergibt sich also das folgende Resultat: Im Raume geht im Allgemeinen nur eine Parabel durch 3 Örter mit 5 Beobachtungsdaten, ebenso bei 3 Beobachtungen in der Ekliptik; fällt aber der 2. Kometenort mit dem 2. Sonnenorte oder dessen Gegenpunkt zusammen, so sind 3 Parabeln oder nur eine durch die 3 Örter hindurchlegbar. Liegen ferner unter Voraussetzung der Koinzidenz des 2. Kometen- und des 2. Sonnenortes der 1. und der 3. Ort des Kometen außerhalb der Ekliptik, aber auf einem Großkreise durch die 2. Sonne oder deren Gegenpunkt, so sind ebenfalls 3 verschiedene Parabeln resp. nur eine durch die 3 Örter des Kometen möglich. Dieses sind die strengen und notwendigen Bedingungen für die Multiplizität der Lösungen der parabolischen Kometenbahnbestimmung aus 5 Beobachtungsdaten. Die obige Ungleichung (S. 140) entscheidet in der Nähe der singulären Stellen über eine eventuelle Multiplizität der Lösungen gegenüber dem gewöhnlichen Falle einer einfachen Lösung.