

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE, HEFT 107

MARTHA NÄBAUER

Apollonische Kurven
auf der Kugel

Mit 39 Abbildungen im Text

Vorgelegt von Herrn Josef Lense

am 6. Oktober 1961

MÜNCHEN 1962

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI DER C. H. BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG MÜNCHEN

Printed in Germany
Druck: Gebr. Parcus KG, München

INHALTSVERZEICHNIS

Verzeichnis der Sätze und Figuren	4
Zusammenfassung	5
Vorbemerkung	5
 I. Definitionen und Allgemeines	 6
 II. Erster Kurvenzweig	 8
Kurvengleichung und Azimutberechnung.	8
Berechnung von ψ und λ aus σ_1 und σ_2 usw.	9
Darstellung in kartesischen Koordinaten	12
Grundrißkonstruktion	13
Kurvenverlauf in Abhängigkeit vom Scharparameter	18
Übergang zu den Apollonischen Kreisen der Ebene	23
 III. Beliebige Kurvenzweige	 26
Klassifizierung der Äquatorpunkte und einige Sätze über Kurvenzweige	 26
Aufstellung eines Strukturschemas	37
Das allgemeine Strukturschema	47
Diskussion des allgemeinen Strukturschemas	52
Die Schalenflächen der einzelnen Zweige und die Apollonische Schalenfläche	 57
Bestimmung von Äquatorpunkten nach Satz 17.	60
Kurven mit rationalem c	62
Kurven, deren c -Wert nahe an 1 liegt	65
Die Kurven $c \gg 1$ und $c \sim 0$	69
Rechnerische Behandlung beliebiger Kurvenzweige	70

VERZEICHNIS DER SÄTZE UND FIGUREN

Satz II 1	Seite 12	Figur II 1	Seite 8
		2	9
Satz III 1	32	3	13
2	32	4	14
3	32	5	15
4	32	6	17
5	33	7	18
6	33	8	19
7	33	9	20
8	34	10	21
9	34	11	23
10	34	12	24
11a	48	13	25
11b	48		
12	48	Figur III 1	28
13	49	2	29
14	49	3	29
15	49	4	29
16	50	5	30
17	50	6	31
18	50	7	32
19	50	8	40
20	51	9	46
21	55	10	48
22	55	11	48
23	56	12	53
24	57/58	13	54
25	64	14	54
26	64	15	58
27	65	16	auf der Tafel
		17	am Ende der Arbeit
		18	59
		19	61
		20	68
		21	70
		22	72
		23	75
		24	76
		25	79
		26	79

ZUSAMMENFASSUNG

Die Gesamtheit aller Kugelpunkte, deren sphärische Entfernungen σ_1 und σ_2 von zwei fest vorgegebenen Kugelpunkten A_1 und A_2 in einem konstanten Verhältnis c zueinander stehen, bezeichnen wir als sphärische Apollonische Kurve c mit den Apollonischen Punkten A_1, A_2 , nehmen den Großkreis durch die Apollonischen Punkte als Äquator und verstehen unter dem Grundriß einer beliebigen Figur die senkrechte Projektion dieser Figur in die Äquatorebene. Jede solche sphärische Apollonische Kurve besteht aus einzelnen Zweigen, die im allgemeinen nicht zusammenhängen.

In Abschnitt II wird der erste Kurvenzweig betrachtet, das ist der Teil der Kurve, für welchen die beiden sphärischen Entfernungen σ_1 und σ_2 kleiner als π sind. Es läßt sich dafür sowohl eine Gleichung zwischen den geographischen Koordinaten ψ, λ als auch eine Parameterdarstellung in rechtwinklig-kartesischen Koordinaten mit σ_1 als Kurvenparameter angeben. Aus dieser Parameterdarstellung folgt eine einfache Konstruktion des Grundrisses von Kurvenpunkten, mit deren Hilfe der Verlauf des ersten Zweiges zunächst einer bestimmten Kurve, dann in Abhängigkeit vom Scharparameter c diskutiert wird. Die ersten Zweige überdecken die Kugeloberfläche schlicht. – Aus der Kurvengleichung in geographischen Koordinaten erhält man durch geeignete Taylorentwicklungen bei Übergang zu unendlich großem Kugelradius die bekannten Apollonischen Kreise der Ebene.

Abschnitt III behandelt beliebige Kurvenzweige, d. h. er läßt beliebige Werte von σ_1 und σ_2 zu. Durch Diskussion der Verhältnisse, die in der Umgebung der Äquatorpunkte einer Kurve auftreten können, wird eine Anzahl von Sätzen über Kurvenzweige im Grundriß hergeleitet und anschließend das sog. Strukturschema aufgestellt, aus dem man für einen beliebigen Zweig einer beliebigen Kurve c die Äquatorpunkte entweder unmittelbar entnehmen oder leicht berechnen kann. Dieses Strukturschema zeigt auch, daß die Gesamtheit der p -ten Zweige die Kugeloberfläche $(2p - 1)$ -mal überstreicht. Für rationales c existiert nur eine endliche Anzahl nicht zusammenfallender Zweige und zwar wird mit zunehmendem σ_1 die Konfiguration dieser ersten nicht zusammenfallenden Zweige immer abwechselnd einmal in der einen, einmal in der anderen Richtung durchlaufen. — Zuletzt wird noch der charakteristische Kurvenverlauf für c -Werte, die nahe an 1 liegen, und für sehr große und sehr kleine c -Werte diskutiert und das Verhalten der Kurven in der Nähe des Äquators und speziell in der Umgebung der Apollonischen Punkte A_1, A_2 und ihrer Gegenpole untersucht.

VORBEMERKUNG

Unter der Voraussetzung gleichen meteorologischen Zustandes im ganzen Arbeitsgebiet ist das Verhältnis der elektronisch gemessenen Abstände von zwei festen Punkten unabhängig von der Wellengeschwindigkeit, und aus diesem Grunde sind die sphärischen Kurven, für deren Punkte das Verhältnis der sphärischen Entfernungen von zwei fest vorgegebenen Kugelpunkten konstant ist, für die elektronische Tachymetrie von Interesse¹⁾. Diese Tatsache gab den Anlaß zu der folgenden Untersuchung.

¹⁾ Herrn Prof. Rinner möchte ich an dieser Stelle danken, daß er mich auf diesen Zusammenhang aufmerksam machte.

I. DEFINITIONEN UND ALLGEMEINES

Abgesehen von Ausnahmefällen, in denen das dann ausdrücklich gesagt wird, arbeiten wir nur auf der Einheitskugel.

Unter dem *sphärischen Abstand* $P_1 \widehat{P}_2$ zweier beliebiger Kugelpunkte P_1 und P_2 verstehen wir einerseits den kürzesten Großkreisbogen zwischen P_1 und P_2 , andererseits auch seine stets positiv gezählte Länge. In dem Sonderfall, daß P_2 diametral zu P_1 liegt, gibt es zwei solche sphärische Abstandsbögen, die aber beide dieselbe Länge π besitzen. In allen übrigen Fällen ist der sphärische Abstand, auch aufgefaßt als Bogen, eindeutig definiert und kürzer als π . Es gilt immer

$$0 \leq \text{sphärischer Abstand } P_1 \widehat{P}_2 \leq \pi. \quad (1)$$

Als *sphärische Entfernung* $P_1 \widehat{P}_2$ der beiden Kugelpunkte P_1 und P_2 bezeichnen wir jeden Großkreisbogen, der P_1 als einen, P_2 als anderen Endpunkt besitzt und zugleich auch die immer positiv gezählte Länge dieses Bogens. Der Großkreis durch P_1 und P_2 kann dabei beliebig oft in derselben Richtung durchlaufen werden. Infolgedessen gibt es für die sphärische Entfernung auch keine obere Schranke. Der sphärische Abstand ist ein Sonderfall der sphärischen Entfernung und zwar ist er die kleinste überhaupt mögliche sphärische Entfernung.

A_1 und A_2 seien zwei Punkte der Einheitskugel mit dem sphärischen Abstand

$$0 < A_1 \widehat{A}_2 = 2\omega < \pi. \quad (2)$$

Den geometrischen Ort aller Kugelpunkte, für welche eine Entfernung von A_2 und eine Entfernung von A_1 im konstanten Verhältnis c zueinander stehen, bezeichnen wir als *sphärische Apollonische¹⁾ Kurve* mit dem *Parameter* c bezüglich der *Apollonischen Punkte* A_1 und A_2 oder mit den Apollonischen Punkten A_1 und A_2 . Wenn keine Unklarheiten zu befürchten sind, sagen wir auch einfach „(Apollonische) Kurve c “. Der sphärische Abstand $A_1 \widehat{A}_2 = 2\omega$ heißt der *Apollonische Winkel*.

Weil wir sphärische Entfernungen nie negativ zählen, kann auch der Parameter c als Verhältnis zweier sphärischer Entfernungen nie negativ sein, sondern es gilt immer

$$c \geq 0. \quad (3)$$

P sei der laufende Punkt der Apollonischen Kurve c , seine eben genannten Entfernungen von A_1 und A_2 seien

$$A_1 \widehat{P} = \sigma_1, \quad A_2 \widehat{P} = \sigma_2. \quad (4)$$

Dann gilt also laut Definition:

$$A_2 \widehat{P} = c A_1 \widehat{P} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_2 = c \sigma_1. \quad (5)$$

Man erkennt, daß es auf die Reihenfolge der Apollonischen Punkte ankommt; denn die Kurve mit dem Parameter c bezüglich des Punktepaares A_1, A_2 hat bezüglich des Punktepaares A_2, A_1 den Parameter $1/c$.

¹⁾ „Apollonisch“ in Analogie zu den Apollonischen Kreisen der Ebene (vgl. S. 23 ff.).

Da der Begriff der sphärischen Entfernung unendlich vieldeutig ist, erscheint durch unsere Definition der Apollonischen Kurven ein reichlich unübersichtliches Kurvengewirr gegeben zu sein. Wir werden aber in Teil III sehen, daß dieses sich so weitgehend ordnen läßt, daß man sich sehr rasch über den Verlauf eines beliebigen Zweiges einer beliebigen Kurve c ein Bild machen kann, und zwar ohne die vorhergehenden Zweige zu kennen.

B_1 bedeutet den Gegenpol von A_1 , desgleichen B_2 den Gegenpol von A_2 . Die vier Punkte A_1, A_2, B_1, B_2 bezeichnen wir als die *vier Fundamentalpunkte unseres Problems* und wählen den Großkreis durch sie als *Äquator* und den Meridian, welcher den Apollonischen Winkel halbiert, als *Nullmeridian*. Die senkrechte Projektion einer beliebigen Figur in die Äquatorebene oder eine dazu parallele Ebene bezeichnen wir als *Grundriß* dieser Figur.

Aus der Definition der Apollonischen Kurven ergeben sich fast unmittelbar die beiden folgenden Symmetrieeigenschaften:

1. Jede Apollonische Kurve verläuft symmetrisch zum Äquator.
2. Die Kurve $1/c$ geht aus der Kurve c durch Spiegelung am Nullmeridian bzw. an dessen Ebene hervor.

II. ERSTER KURVENZWEIG

Kurvengleichung und Azimutberechnung

Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf die sphärischen *Abstände* von den Apollonischen Punkten, setzen dementsprechend voraus

$$0 \leq \sigma_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \sigma_2 \leq \pi \quad (1)$$

und bezeichnen den geometrischen Ort aller Punkte einer Apollonischen Kurve, welche den Bedingungen (1)¹⁾ genügen, als ihren *ersten Zweig*.

ψ, λ seien die geographischen Koordinaten auf der Einheitskugel, P sei der laufende Punkt der Apollonischen Kurve c mit den Apollonischen Punkten A_1, A_2 . Wegen (1) sind wir im Gebiet Eulerscher Dreiecke, für welche die Formeln der sphärischen Trigonometrie vorzeichenrichtig gelten und lesen aus Figur 1 durch Anwendung des Kosinussatzes auf jedes der beiden sphärischen rechtseitigen Dreiecke $A_1 NP$ und $A_2 NP$ ab

$$\begin{aligned} \cos \sigma_1 &= \cos \psi \cos (\lambda - \omega), \\ \cos \sigma_2 &= \cos \psi \cos (\lambda + \omega). \end{aligned} \quad (2)$$

Löst man (2) nach σ_1 und σ_2 auf und setzt das in die Definitionsgleichung

$$\sigma_2 = c \sigma_1 \quad (3)$$

ein, so erhält man

$$f(\psi, \lambda) \equiv \text{Arc cos} [\cos \psi \cos (\lambda + \omega)] - c \text{Arc cos} [\cos \psi \cos (\lambda - \omega)] = 0; \quad (4)$$

Arc bedeutet dabei den Hauptwert des Winkels (im Gegensatz zu arc) und besagt, daß dieser Winkel zwischen 0 und π liegt.

Bei festem c ist (4) die Gleichung der sphärischen Apollonischen Kurve c mit den Apollonischen Punkten A_1, A_2 im geographischen Koordinaten-

system der Figur 1. Für *variables* c bedeutet (4) die Schar der zu diesem Punktepaar A_1, A_2 gehörigen Apollonischen Kurven mit c als Scharparameter.

Zur Kurvendiskussion ist Gleichung (4) nicht sehr geeignet. Diese verschieben wir auf später und leiten jetzt nur aus (4) eine Formel für das *Azimuth* α einer Apollonischen Kurve ab.

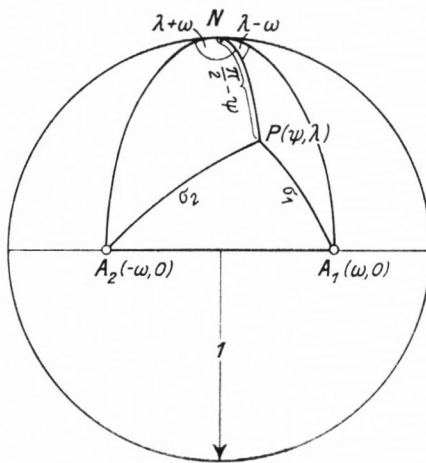


Fig. 1

¹⁾ In jedem der drei Abschnitte I, II, III sind die Gleichungen gesondert durchnummeriert. Bei Verweisen auf eine Gleichung desselben Abschnittes wird nur die Gleichungsnummer angegeben, bei Verweisen auf eine Gleichung eines anderen Abschnittes wird auch die Nummer des Abschnittes dazugeschrieben. Entsprechendes gilt für die Figuren.

Wir beschränken uns hier und auch im folgenden auf die obere oder nördliche Halbkugel und zählen das Azimut, wie in der Geodäsie üblich, von Nord über Ost positiv.

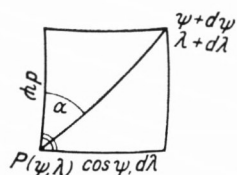


Fig. 2

Aus Figur 2 liest man nun ab

$$\operatorname{tg} \alpha = \cos \psi \frac{d\lambda}{d\psi}. \quad (5)$$

Den hier auftretenden Differentialquotienten berechnen wir nach der Formel

$$\frac{d\lambda}{d\psi} = - \frac{\partial f}{\partial \psi} : \frac{\partial f}{\partial \lambda}, \quad (6)$$

wo f die Funktion (4) bedeutet. Es ist:

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} = \frac{\sin \psi \cos (\lambda + \omega)}{\sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 (\lambda + \omega)}} - \frac{c \sin \psi \cos (\lambda - \omega)}{\sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 (\lambda - \omega)}}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\cos \psi \sin (\lambda + \omega)}{\sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 (\lambda + \omega)}} - \frac{c \cos \psi \sin (\lambda - \omega)}{\sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 (\lambda - \omega)}}, \quad (8)$$

daher nach (5) und (6)

$$\operatorname{tg} \alpha = - \sin \psi \frac{\cos (\lambda + \omega) \sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 (\lambda - \omega)} - c \cos (\lambda - \omega) \sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 (\lambda + \omega)}}{\sin (\lambda + \omega) \sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 (\lambda - \omega)} - c \sin (\lambda - \omega) \sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 (\lambda + \omega)}}. \quad (9)$$

Im Äquator haben wir $\psi = \sin \psi = 0$. Der Nenner des Bruches in (9) bleibt hiefür unter der Voraussetzung $c \neq 1$, $\lambda \neq \pm \omega$ endlich, denn er läßt sich dann wegen $\cos^2 \psi = 1$ umformen in

$$\sin (\lambda + \omega) \sin (\lambda - \omega) - c \sin (\lambda - \omega) \sin (\lambda + \omega) = (1 - c) [\sin (\lambda + \omega) \sin (\lambda - \omega)]. \quad (10)$$

$\operatorname{tg} \alpha$ ist also, mit Ausnahme eventuell der eben genannten Sonderfälle, im Äquator Null, d. h. die Kurve steht senkrecht auf dem Äquator. Daß auch die Kurve $c = 1$ den Äquator senkrecht schneidet, erkennt man unmittelbar, denn sie ist der Großkreis der Meridiane $\lambda = 0$ und $\lambda = \pi$ (siehe S. 18). Über das Verhalten in den Fundamentalpunkten, also für $\lambda = \pm \omega$ siehe S. 78/79.

Berechnung von ψ und λ aus σ_1 und σ_2 bzw. aus c und σ_1 und umgekehrt

Durch Division der beiden Gleichungen (2) und anschließende einfache Umformung findet man

$$\cos \sigma_1 \cos (\lambda + \omega) = \cos \sigma_2 \cos (\lambda - \omega). \quad (11)$$

Wir setzen vorübergehend zur Abkürzung

$$\cos \sigma_1 = a_1, \quad \cos \sigma_2 = a_2 \quad (12)$$

und rechnen folgendermaßen weiter:

$$a_1 (\cos \lambda \cos \omega - \sin \lambda \sin \omega) = a_2 (\cos \lambda \cos \omega + \sin \lambda \sin \omega), \quad (13)$$

$$(a_1 + a_2) \sin \lambda \sin \omega = (a_1 - a_2) \cos \lambda \cos \omega, \quad (14)$$

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \operatorname{ctg} \omega. \quad (15)$$

Damit berechnen wir weiter $\cos^2 \psi$. Es ist nach der ersten Gleichung (2)

$$\cos^2 \psi = \frac{\cos^2 \sigma_1}{\cos^2 (\lambda - \omega)} = \cos^2 \sigma_1 [1 + \operatorname{tg}^2 (\lambda - \omega)]. \quad (16)$$

Wir verwenden wieder die Abkürzungen (12) und rechnen wie folgt weiter:

$$\cos^2 \psi = a_1^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \lambda - \operatorname{tg} \omega}{1 + \operatorname{tg} \lambda \cdot \operatorname{tg} \omega} \right)^2 \right\} \quad (17)$$

oder wegen (15)

$$\begin{aligned} \cos^2 \psi &= a_1^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \operatorname{ctg} \omega - \operatorname{tg} \omega}{1 + \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}} \right)^2 \right\} = \\ &= a_1^2 \left\{ 1 + \frac{[(a_1 - a_2) \operatorname{ctg} \omega - (a_1 + a_2) \operatorname{tg} \omega]^2}{4 a_1^2} \right\} = \\ &= a_1^2 \frac{4 a_1^2 + (a_1^2 - 2 a_1 a_2 + a_2^2) \operatorname{ctg}^2 \omega - 2 (a_1^2 - a_2^2) + (a_1^2 + 2 a_1 a_2 + a_2^2) \operatorname{tg}^2 \omega}{4 a_1^2} \\ &= \frac{4 a_1^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega + (a_1^2 - 2 a_1 a_2 + a_2^2) \cos^4 \omega - 2 (a_1^2 - a_2^2) \sin^2 \omega \cos^2 \omega}{4 \sin^2 \omega \cos^2 \omega} \\ &\quad + \frac{(a_1^2 + 2 a_1 a_2 + a_2^2) \sin^4 \omega}{4 \sin^2 \omega \cos^2 \omega} = \\ &= \frac{(a_1^2 + a_2^2) (\sin^4 \omega + 2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega + \cos^4 \omega) + 2 a_1 a_2 (\sin^4 \omega - \cos^4 \omega)}{\sin^2 2 \omega}, \end{aligned} \quad (18)$$

was sich wegen

$$\sin^4 \omega + 2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega + \cos^4 \omega = (\sin^2 \omega + \cos^2 \omega)^2 = 1, \quad (19)$$

$$\sin^4 \omega - \cos^4 \omega = (\sin^2 \omega + \cos^2 \omega) (\sin^2 \omega - \cos^2 \omega) = -\cos 2 \omega \quad (20)$$

vereinfacht zu

$$\cos^2 \psi = \frac{a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \cos 2 \omega}{\sin^2 2 \omega}. \quad (21)$$

(21) und (15) geben unter Beachtung von (12) und (3) schließlich die beiden Formeln

$$\begin{aligned}\cos^2\psi &= \frac{\cos^2\sigma_1 + \cos^2\sigma_2 - 2\cos\sigma_1\cos\sigma_2\cos 2\omega}{\sin^2 2\omega} \\ &= \frac{\cos^2\sigma_1 + \cos^2 c\sigma_1 - 2\cos\sigma_1\cos c\sigma_1\cos 2\omega}{\sin^2 2\omega},\end{aligned}\quad (22)$$

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\cos \sigma_1 - \cos \sigma_2}{\cos \sigma_1 + \cos \sigma_2} \operatorname{ctg} \omega = \frac{\cos \sigma_1 - \cos c\sigma_1}{\cos \sigma_1 + \cos c\sigma_1} \operatorname{ctg} \omega \quad (23)$$

zur Berechnung von ψ und λ aus σ_1 und σ_2 bzw. aus σ_1 und c .

Bei der Bestimmung von ψ aus (22) kommt nur der positive Wert von $\cos \psi$ in Frage, da die geographische Breite nur im Intervall $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq +\frac{\pi}{2}$ gezählt wird. Der Winkel ψ selbst kann dann (wenn wir von unserer Beschränkung auf die obere Halbkugel absehen) noch sowohl positiv als auch negativ sein, entsprechend der Tatsache, daß jede Apollonische Kurve symmetrisch zum Großkreis durch die beiden Apollonischen Punkte verläuft und daher mit dem Punkt ψ , λ immer auch der Punkt $-\psi$, λ auf ihr liegt.

Da die geographische Länge λ im Intervall $-\pi < \lambda \leq +\pi$ variieren kann und Tangens die Periode π besitzt, liefert (23) zunächst zwei um π voneinander verschiedene λ -Werte, deren einer positiv, deren anderer negativ ist. Wegen der Voraussetzung (1) hat man aber für $c < 1$ den negativen, für $c > 1$ den positiven λ -Wert zu nehmen. Denn unter dieser Voraussetzung liegt der erste Zweig einer Apollonischen Kurve $c < 1$ auf der Halbkugel $\lambda < 0$, der erste Zweig einer Apollonischen Kurve $c > 1$ auf der Halbkugel $\lambda > 0$ (vgl. S. 12 (32) und S. 18 unten).

Aus (22) und (23) erkennt man: Zu einem Wertepaar σ_1, σ_2 bzw. σ_1, c gehört dann und nur dann (mindestens) ein Kugelpunkt, wenn der Bruch in (22) weder negativ noch größer als 1 ist. Daß dieser Bruch keine negativen Werte annehmen kann, erkennt man leicht. Denn der Zähler ist das nach dem Kosinussatz berechnete Quadrat der dritten Seite des ebenen Dreiecks mit den Seiten $\cos \sigma_1, \cos \sigma_2$ und dem Zwischenwinkel 2ω (vgl. S. 14 Figur 4) und den Zusatz. Wegen I (2) können auch weder der Zähler noch der Nenner Null werden. Dagegen kann es vorkommen, daß der Bruch in (22) größer als 1 wird. Dann gibt es keinen reellen ψ -Wert, was bedeutet, daß auf der Apollonischen Kurve mit dem vorgegebenen c -Wert kein Punkt existiert, der von A_1 den vorgegebenen sphärischen Abstand σ_1 besitzt. Wir haben dann ein c, σ_1 -Wertepaar, bei dem mit der Bezeichnungsweise von S. 16 ff. entweder $\sigma_1 < (\sigma_1)_{\min}$ oder $\sigma_1 > (\sigma_1)_{\max}$ ist. (22) liefert also als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß auf einer bestimmten Apollonischen Kurve c ein Punkt mit vorgegebenem σ_1 -Wert liegt:

$$\frac{\cos^2\sigma_1 + \cos^2 c\sigma_1 - 2\cos\sigma_1\cos c\sigma_1\cos 2\omega}{\sin^2 2\omega} \leq 1 \quad (a) \quad (24)$$

bzw.

$$\cos^2\sigma_1 + \cos^2 c\sigma_1 - 2\cos\sigma_1\cos c\sigma_1\cos 2\omega - \sin^2 2\omega \leq 0. \quad (b)$$

Will man umgekehrt feststellen, auf dem ersten Zweig welcher Apollonischen Kurve c ein bestimmter Kugelpunkt ψ, λ liegt, so berechnet man nach (2) $\cos\sigma_1$ und $\cos\sigma_2$ und daraus dann $\sigma_2 : \sigma_1 = c$. (2) liefert immer brauchbare, d. h. dem Betrag nach nicht über 1 gelegene Werte für $\cos\sigma_1$ und $\cos\sigma_2$ und wegen (1) findet man daraus dann eindeutig ein Wertepaar σ_1, σ_2 und einen Parameter c , d. h. durch jeden Kugelpunkt geht der erste

Zweig genau einer Apollonischen Kurve. Man hat daher Satz 1: *Die ersten Zweige der Apollonischen Kurven bezüglich eines bestimmten Paares Apollonischer Punkte A_1, A_2 überdecken die Kugeloberfläche schlicht.*

Darstellung in kartesischen Koordinaten

Wir führen dasjenige rechtwinkelig-kartesische x, y, z -System ein, in dem für die Punkte unserer Kugel gilt

$$\begin{aligned} x &= \cos\psi \cos\lambda, \\ y &= \cos\psi \sin\lambda, \\ z &= \sin\psi. \end{aligned} \quad (25)$$

Die x, y -Ebene ist die Äquatorebene, der Einheitskreis um den Kugelmittelpunkt O der Äquator und der auf die x -Achse fallende Äquatordurchmesser ist der Grundriß der beiden Meridiane $\lambda = 0$ und $\lambda = \pi$.

(2) schreiben wir um in

$$\begin{aligned} \cos\sigma_1 &= \cos\psi \cos\lambda \cos\omega + \cos\psi \sin\lambda \sin\omega, \\ \cos\sigma_2 &= \cos\psi \cos\lambda \cos\omega - \cos\psi \sin\lambda \sin\omega \end{aligned} \quad (26)$$

und erhalten daraus mit den beiden ersten Gleichungen (25)

$$\cos\sigma_1 = x \cos\omega + y \sin\omega, \quad \cos\sigma_2 = x \cos\omega - y \sin\omega. \quad (27)$$

Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen (27) gibt

$$\cos\sigma_1 + \cos\sigma_2 = 2x \cos\omega, \quad \cos\sigma_1 - \cos\sigma_2 = 2y \sin\omega; \quad (28)$$

$$x = \frac{\cos\sigma_1 + \cos\sigma_2}{2 \cos\omega}, \quad y = \frac{\cos\sigma_1 - \cos\sigma_2}{2 \sin\omega}. \quad (29)$$

Damit haben wir x und y durch σ_1 und σ_2 ausgedrückt.

$$\text{Aus} \quad z = (\pm) \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (30)$$

in Verbindung mit (29) findet man als entsprechende Darstellung für die dritte Koordinate

$$z = (\pm) \frac{1}{\sin 2\omega} \sqrt{\sin^2 2\omega + 2 \cos\sigma_1 \cos\sigma_2 \cos 2\omega - (\cos^2\sigma_1 + \cos^2\sigma_2)}; \quad (31)$$

das Pluszeichen gilt für die obere Halbkugel. Die Bedingung für reelle z -Werte ist identisch mit der Bedingung (24) für reelle Kurvenpunkte.

Ersetzt man noch σ_2 durch σ_1 , so erhält man aus (29) und (31)

$$\begin{aligned} x &= \frac{\cos\sigma_1 + \cos\sigma_1}{2 \cos\omega}, \\ y &= \frac{\cos\sigma_1 - \cos\sigma_1}{2 \sin\omega}, \\ z &= (\pm) \frac{1}{\sin 2\omega} \sqrt{\sin^2 2\omega + 2 \cos\sigma_1 \cos\sigma_1 \cos 2\omega - (\cos^2\sigma_1 + \cos^2\sigma_1)}. \end{aligned} \quad (32)$$

(32) ist eine Parameterdarstellung der Kurve c mit σ_1 als Kurvenparameter.

Die ersten beiden Gleichungen (32) sind zugleich eine Parameterdarstellung des Grundrisses dieser Kurve. Durch Differenzieren nach dem Kurvenparameter erhält man aus ihnen

$$\frac{dx}{d\sigma_1} = \dot{x} = -\frac{\sin\sigma_1 + c \sin c\sigma_1}{2 \cos \omega}, \quad \frac{dy}{d\sigma_1} = \dot{y} = -\frac{\sin\sigma_1 - c \sin c\sigma_1}{2 \sin \omega} \quad (33)$$

und daraus weiter für den Winkel μ zwischen Grundrißtangente und positiver x-Achse

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin\sigma_1 - c \sin c\sigma_1}{\sin\sigma_1 + c \sin c\sigma_1} \operatorname{ctg} \omega. \quad (34)$$

Nach (34) sind für die Figuren 5, 8 und 9 die Tangenten in S und T berechnet. Es ergab sich für Figur 5: $\operatorname{tg} \mu_S = -0,314$, $\operatorname{tg} \mu_T = +0,585$; für Figur 8: $\operatorname{tg} \mu_S = -0,639$; für Figur 9: $\operatorname{tg} \mu_S = -0,73$, $\operatorname{tg} \mu_T = +0,496$.

Grundrißkonstruktion

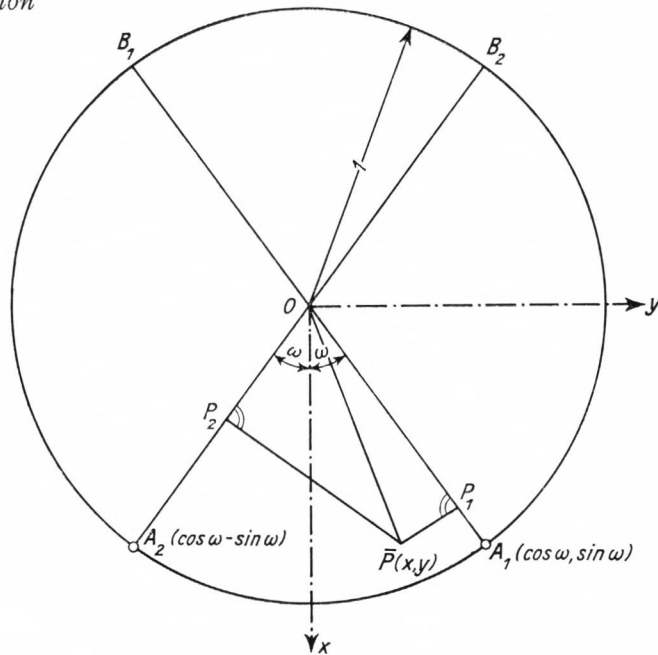


Fig. 3

Figur 3 zeigt die Grundrißebene (Äquatorebene, Großkreisebene durch die Apollonischen Punkte). Der Einheitskreis ist der Äquator, $\bar{P}$ der Grundriß eines Punktes P der sphärischen Apollonischen Kurve c , der von A_1 den sphärischen Abstand σ_1 , von A_2 den sphärischen Abstand $\sigma_2 = c\sigma_1$ besitzt. Aus dieser Figur liest man ab, daß (bezüglich der Koordinatenachsen) x, y die Komponenten des Vektors $O\bar{P}$ und $\cos \omega, \sin \omega$ die Komponenten des Einheitsvektors OA_1 sind. Daher bedeutet der Ausdruck $x \cos \omega + y \sin \omega$ das innere Produkt dieser beiden Vektoren und damit die senkrechte Projektion OP_1 des Vektors $O\bar{P}$ auf den Einheitsvektor OA_1 . Das innere Produkt ist positiv, wenn die Vektoren einen spitzen Winkel, negativ, wenn sie einen stumpfen Winkel miteinander einschließen. Dem-

Zu der angegebenen Grundrißkonstruktion kann man auch ohne Rechnung durch folgende rein geometrische Überlegung kommen: Alle Kugelpunkte, deren sphärischer Abstand von A_i ($i = 1, 2$) den gleichen Wert σ_i besitzt, liegen auf einem Kugelkreis, dessen Ebene senkrecht auf dem Durchmesser $A_i B_i$ steht (geodätischer Entfernungskreis um A_i) und sich im Grundriß als Äquatorsehne senkrecht zu $A_i B_i$ abbildet. Die Endpunkte dieser Sehne sind die Äquatorpunkte, die auf diesem geodätischen Entfernungskreis liegen und man erhält sie daher, wenn man von A_i aus auf dem Äquator nach beiden Seiten den Bogen σ_i abträgt. Der Grundriß $\bar{P}$ des Punktes P mit den sphärischen Abständen σ_1, σ_2 von A_1 und A_2 muß daher der Schnittpunkt dieser beiden Sehnen sein.

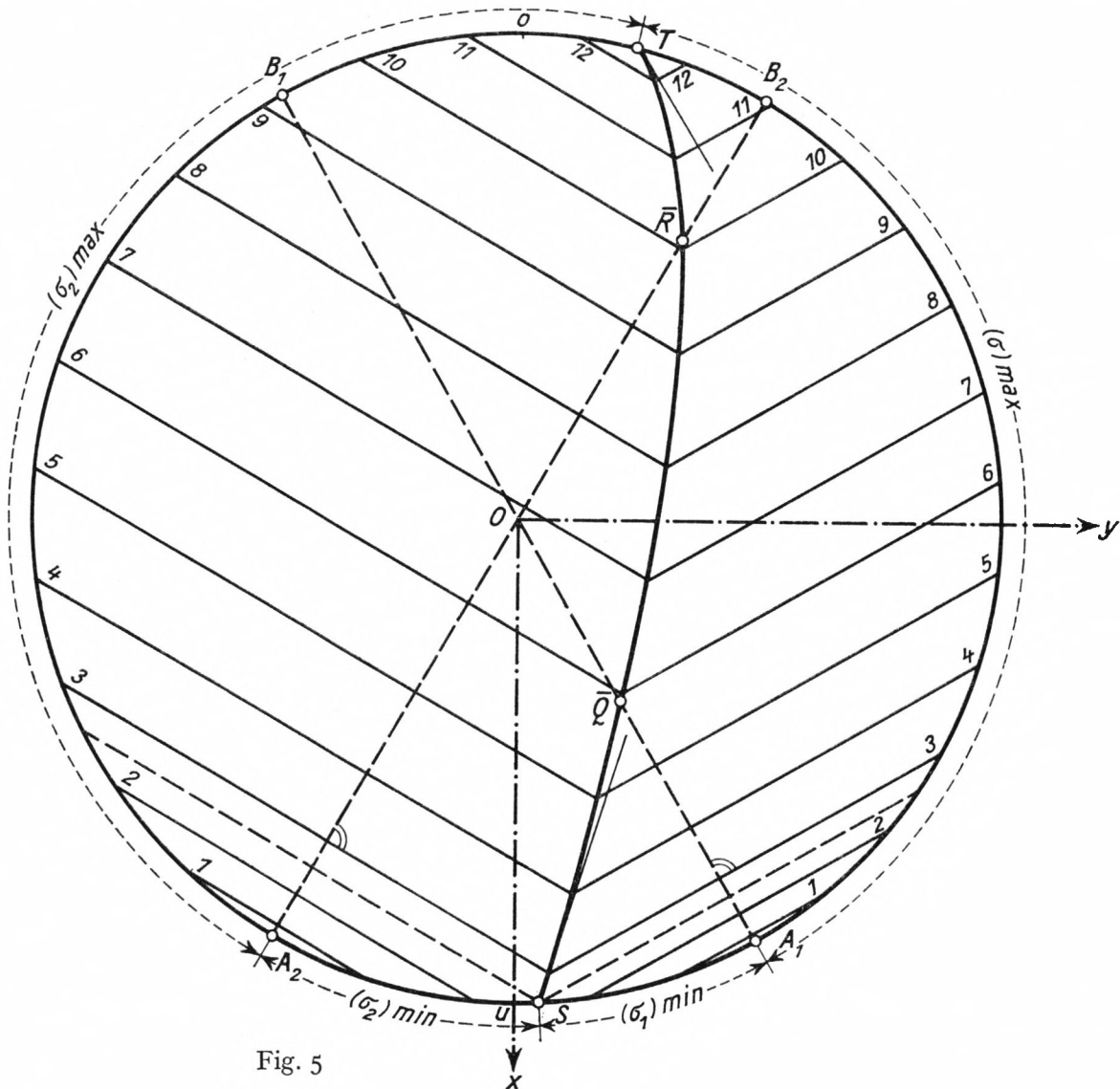


Fig. 5

$$2\omega = \pi/3, c = 1, 2$$

In Fig. 5 ist nach der angegebenen Methode der Grundriß des ersten Zweiges der sphärischen Apollonischen Kurve mit $2\omega = \pi/3$, $c = 1, 2$ konstruiert. Der Grundriß und damit auch die sphärische Kurve selbst trifft den Äquator in den Punkten S und T , in denen die

Endpunkte zweier entsprechender Sehnen zusammenfallen, und zwar treffen sich in S die unteren, in T die oberen Endpunkte des jeweiligen Sehnenpaares¹⁾. Es sind das die beiden Extremlagen, denn einander zugeordnete Sehnen, die dazwischen liegen, schneiden sich im Innern des Äquatorkreises, während für Sehnenpaare, die unterhalb des Sehnenpaares durch S oder oberhalb des Sehnenpaares durch T verlaufen, der Schnittpunkt außerhalb des Kreises liegt und daher keinen brauchbaren Kurvenpunkt liefert.

P bedeute wieder den laufenden Punkt der sphärischen Kurve c und $\bar{P}$ seinen Grundriß. (Für das Folgende siehe Fig. 5; $\bar{P}$ ist dort aber nirgends eingetragen). Der sphärische Abstand des Punktes P von A_1 ist der Großkreisbogen von der Länge σ_1 . Unter allen Kurvenpunkten P hat S den kleinsten sphärischen Abstand von A_1 und zugleich von A_2 . Das folgt aus der Grundrißkonstruktion der Fig. 5; man erkennt es aber auch unmittelbar aus der Tatsache, daß S auf dem Äquatorbogen $A_1\hat{A}_2$ von der Länge $2\omega < \pi$ liegt, welcher die kürzeste auf der Kugel überhaupt mögliche Verbindung der beiden Apollonischen Punkte darstellt. Aus Fig. 5 liest man für diesen kleinsten σ_1 -Wert und den zugehörigen kleinsten σ_2 -Wert ab

$$(\sigma_1)_{\min} + (\sigma_2)_{\min} = 2\omega, \quad (37)$$

daher wegen $\sigma_2 = c\sigma_1$

$$(\sigma_1)_{\min} = \frac{2\omega}{c+1}, \quad (\sigma_2)_{\min} = \frac{2c\omega}{c+1}. \quad (38)$$

Mit wachsendem σ_1 löst sich der sphärische Abstand $A_1\hat{P}$ vom Äquator ab, indem er sich um seinen festen Anfangspunkt A_1 dreht und dabei auf der oberen Halbkugel den Winkel π überstreicht, bis er für T wieder als Bogen $A_1\hat{T}$ auf den Äquator zu liegen kommt, jetzt aber auf der anderen Seite von A_1 als der Bogen $A_1\hat{S}$. Man kann das anhand der Fig. 5 verfolgen (siehe auch Fig. 6, welche denselben Vorgang für den sphärischen Abstand $A_2\hat{P}$ gibt), wenn man bedenkt, daß der sphärische Abstand $A_1\hat{P}$ sich im Grundriß als Ellipsenbogen, der von A_1 zum Kurvenpunkt $\bar{P}$ führt, abbildet. Die große Achse der sämtlichen Ellipsen ist der Durchmesser A_1B_1 ²⁾. Da für diesen ersten Zweig stets $\sigma_1 < \pi$ ist, verläuft der Ellipsenbogen ganz auf der Seite von A_1B_1 , auf der auch $\bar{P}$ liegt. Im Anfangspunkt $P = \bar{P} = S$ ist er ein Kreisbogen, nämlich der Äquatorbogen $A_1\hat{S}$, er wandert mit $\bar{P}$ in das Innere des Kreises, wobei die kleine Achse immer kleiner wird, artet für $\bar{P} = \bar{Q}$ in die Strecke $A_1\bar{Q}$ aus, erscheint dann auf der anderen Seite des Durchmessers A_1B_1 wieder als Ellipsenbogen, jetzt aber nach der entgegengesetzten Seite gekrümmt wie vorher und mit wachsender kleiner Ellipsenachse, um für $\bar{P} = T$ schließlich in den Äquatorbogen $A_1\hat{T}$ überzugehen. σ_1 nimmt dabei ständig zu; infolgedessen gibt der Äquatorbogen $A_1\hat{T}$ (gezählt von A_1 über B_2) den größten σ_1 -Wert, der zu einem Punkt des ersten Zweiges der Kurve $c = 1,2$ gehört; wir schreiben für ihn $(\sigma_1)_{\max}$.

Ebenso gibt $A_2\hat{S}$ den kleinsten sphärischen Abstand σ_2 eines Kurvenpunktes von A_2 und löst sich mit wachsendem σ_1 und damit σ_2 auch der sphärische Abstand $A_2\hat{P}$ vom Äquator, indem er sich um seinen festen Anfangspunkt A_2 dreht und dabei auf der oberen Halbkugel den Winkel π überstreicht, um zuletzt als Kreisbogen $A_2\hat{T}$ wieder auf den Äquator zu fallen, aber auf der zu $A_2\hat{S}$ entgegengesetzten Seite von A_2 . Man macht sich auch

¹⁾ „oben“ und „unten“ in der x, y-Ebene, so wie sie in Figur 5 eingezeichnet ist. Wenn wir dagegen von der „oberen Halbkugel“ sprechen, meinen wir die über der x, y-Ebene gelegene Halbkugel. Die x, y-Ebene stellen wir uns dabei horizontal vor.

²⁾ Denn jede dieser Ellipsen ist die senkrechte Projektion eines Kreises, der A_1B_1 als Durchmesser besitzt.

den Übergang von $A_2\widehat{S}$ zu $A_2\widehat{T}$ mit Hilfe der Ellipsenbögen zwischen A_2 und $\bar{P}$ klar, in welche sich die einzelnen sphärischen Abstände $A_2\widehat{P}$ im Grundriß abbilden. Der Durchmesser A_2B_2 ist die große Achse dieser sämtlichen Ellipsen. Wegen $\sigma_2 < \pi$ verläuft auch jeder dieser Ellipsenbögen ganz auf der Seite dieser großen Achse, auf welcher sein Endpunkt $\bar{P}$ liegt, für $\bar{R}$ artet er in die Strecke $A_2\bar{R}$ aus und ist von da ab nach der anderen

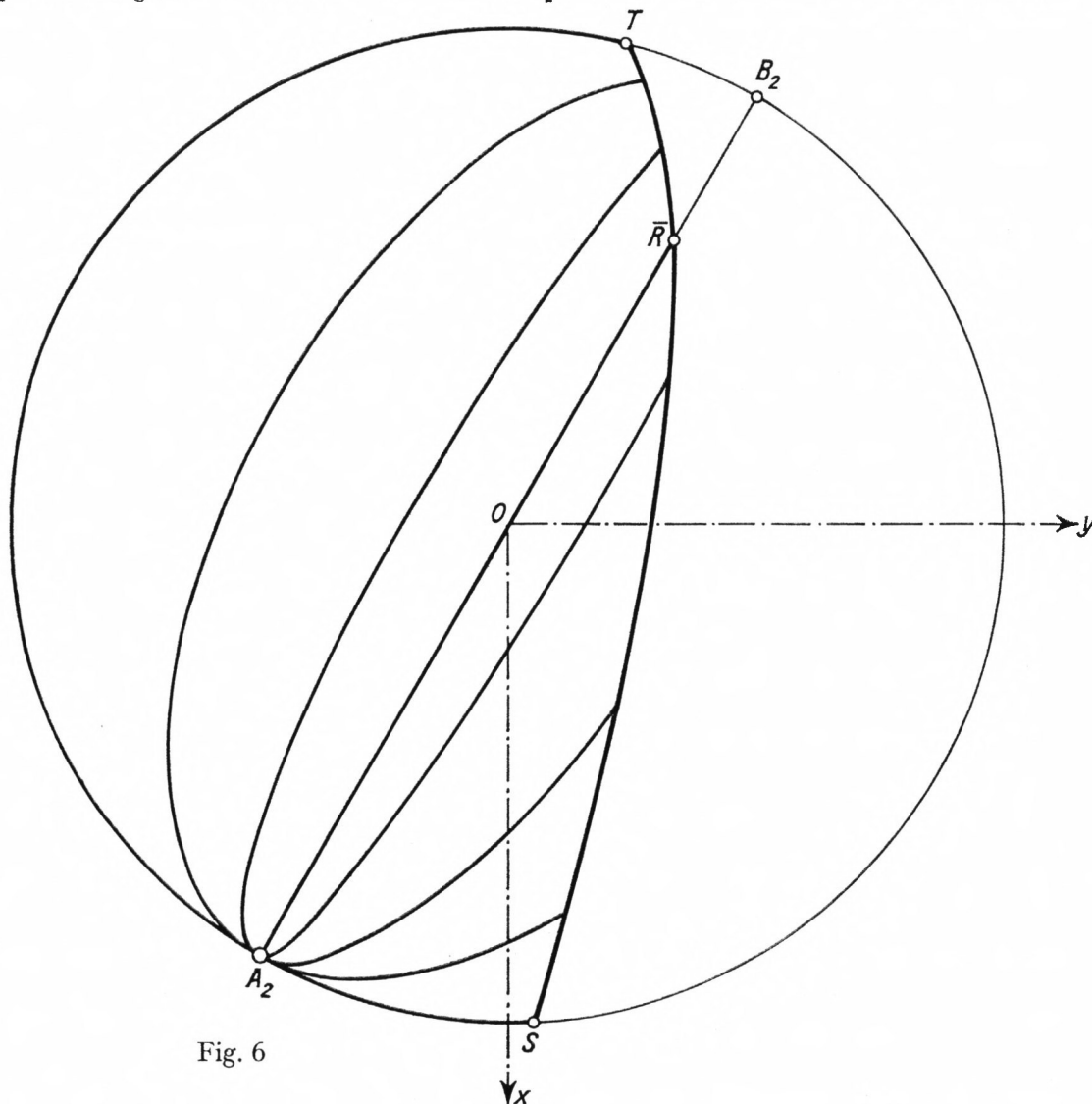


Fig. 6

$$2\omega = \pi/3, c = 1, 2$$

Seite gekrümmt als vorher. Einige dieser Ellipsenbögen sind in Fig. 6 angegeben. Die dortige Kurve $S\bar{R}T$ ist dieselbe wie in Fig. 5. Beim Durchlaufen der Kurven von S nach T nimmt σ_2 ständig zu und erreicht seinen größten Wert $(\sigma_2)_{\max}$ für T . Aus Fig. 5 liest man ab

$$(\sigma_1)_{\max} + (\sigma_2)_{\max} = 2\pi - 2\omega, \quad (39)$$

woraus folgt

$$(\sigma_1)_{\max} = \frac{2\pi - 2\omega}{c + 1}, \quad (\sigma_2)_{\max} = \frac{c(2\pi - 2\omega)}{c + 1}. \quad (40)$$

Kurvenverlauf in Abhängigkeit vom Scharparameter c

Anhand der Grundrißkonstruktion untersuchen wir jetzt den Verlauf des jeweils ersten Zweiges der verschiedenen Apollonischen Kurven in Abhängigkeit vom Parameter c .

Zunächst erkennt man unmittelbar, daß die Kurve $c = 1$ der Großkreis der Meridiane $\lambda = 0$ und $\lambda = \pi$ ist, denn er wird durch die Symmetrieebene zwischen den beiden Apollonischen Punkten (x, z -Ebene) aus der Kugel ausgeschnitten. Dem entspricht (für das Folgende siehe Fig. 7), daß im Grundriß einander zugeordnete Sehnen sich auf der

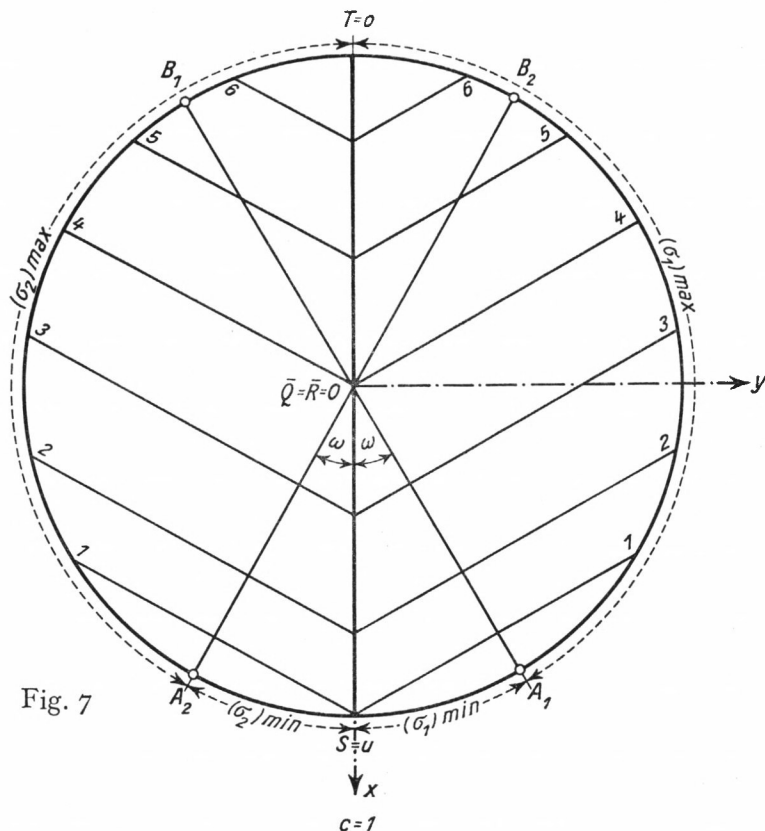


Fig. 7

x -Achse schneiden. Der Punkt S mit den kleinsten sphärischen Abständen σ_1 und σ_2 fällt mit dem untersten Äquatorpunkt u , der Punkt T mit den größten sphärischen Abständen σ_1 und σ_2 fällt mit dem obersten Äquatorpunkt o zusammen. Die sphärischen Abstände A_2S und A_2T werden ebenso wie in Fig. 5 von A_2 aus nach entgegengesetzten Seiten gezählt. Als Besonderheit erscheint, daß die Schnittpunkte $\bar{Q}$ und $\bar{R}$ des Grundrisses mit den Durchmessern A_1B_1 und A_2B_2 beide in den Mittelpunkt O fallen. Aus Fig. 7 liest man ab

$$(\sigma_1)_{\min} = (\sigma_2)_{\min} = \omega, \quad (\sigma_1)_{\max} = (\sigma_2)_{\max} = \pi - \omega, \quad (41)$$

was man auch aus (38) und (40) bekommt, wenn man dort $c = 1$ setzt.

Für das Folgende beschränken wir uns auf die Kurven $c > 1$. Ihre ersten Zweige verlaufen sämtlich im Gebiet $y > 0$, also rechts von der x, z -Ebene und der Kurve $c = 1$. Man erkennt das aus der zweiten Gleichung (32). Denn unter der Voraussetzung (1) ist für $c > 1$ immer $\cos \sigma_1 - \cos c \sigma_1 > 0$.

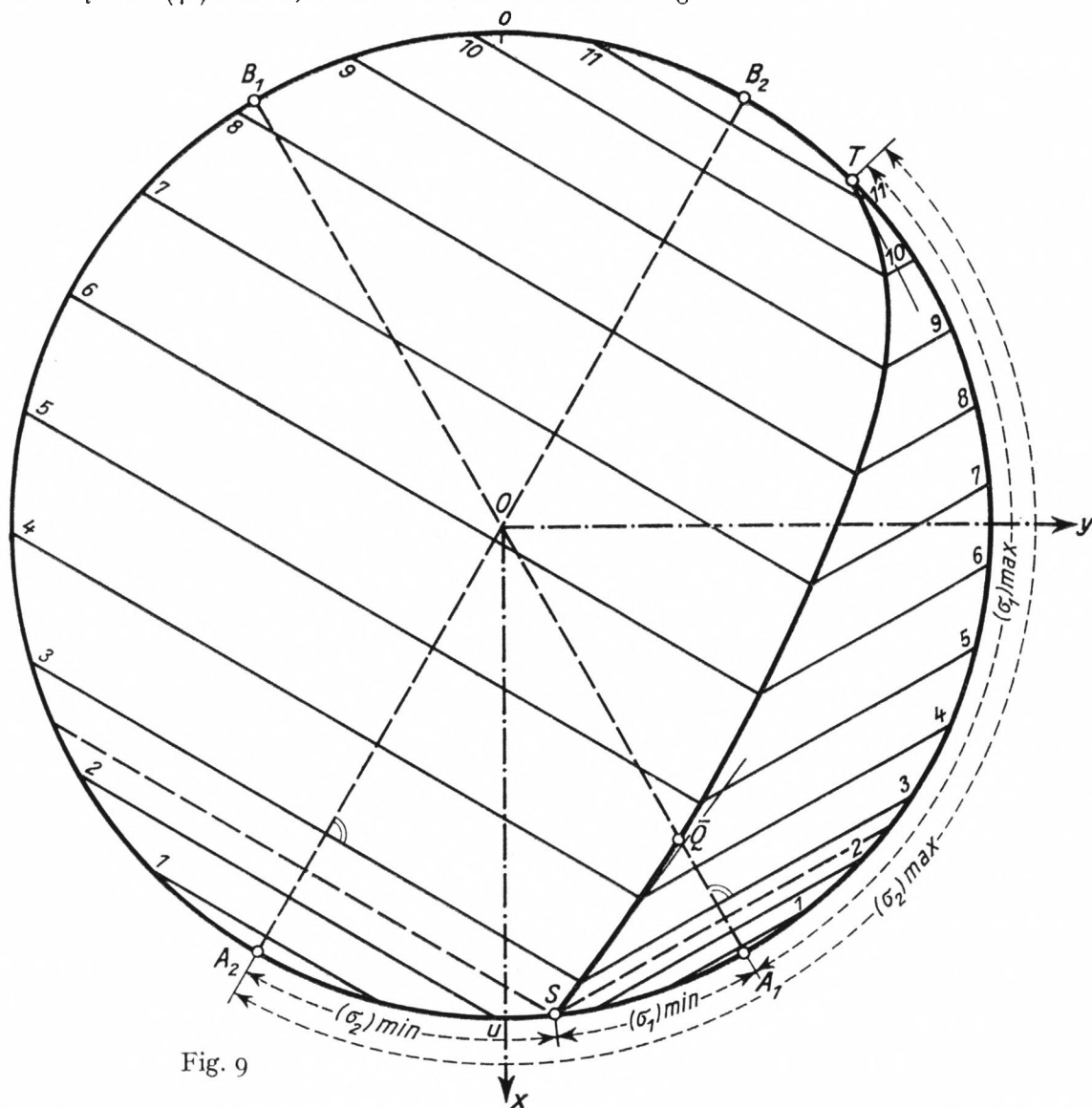
Bei Annäherung von c an den Wert

$$c_t = \frac{\pi}{\pi - 2\omega} \quad (42)$$

(wir bezeichnen c_t als *Trennparameter*) geht das nach (40) berechnete $(\sigma_2)_{\max}$ gegen π und die zum Durchmesser A_2B_2 senkrechte Sehne schrumpft in den Punkt T zusammen, der seinerseits in den Punkt B_2 hineinrückt. Für das folgende siehe Fig. 8. An der Grenze $c = c_t$ haben wir $T = B_2$

$$(\sigma_1)_{\max} = \pi - 2\omega, \quad (\sigma_2)_{\max} = \pi \quad (43)$$

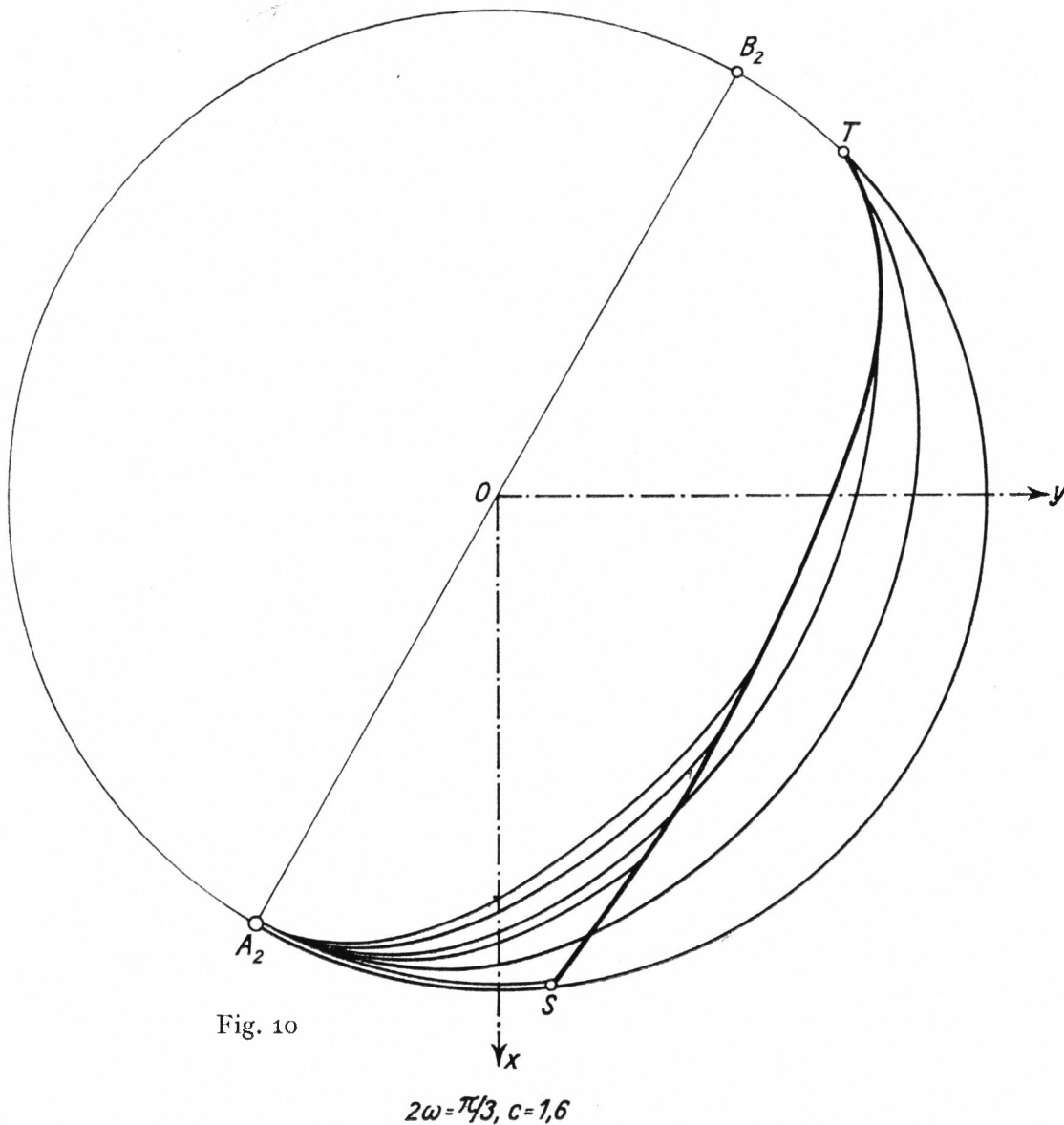
und zwar ist der sphärische Abstand $A_2\widehat{T}$ jetzt π , gleichgültig, ob man ihn über A_1 oder auf die entgegengesetzte Äquatorseite legt. Man erhält (43) aus (40), wenn man dort c durch c_t nach (42) ersetzt, kann es aber auch direkt aus Fig. 8 ablesen.



$$2\omega = \pi/3, c = 1,6$$

Der Grundriß der Kurve c_t berührt, unabhängig vom Winkel 2ω , den Äquator in $T = B_2$. Denn wegen $c\sigma_1 = \sigma_2 = \pi$ liefert (34) für den Winkel μ , den seine Tangente dort mit der x-Achse einschließt, $\operatorname{tg}\mu = \operatorname{ctg}\omega$, d. h. $\mu = \pi/2 - \omega$ und diesen selben Winkel bzw. einen um π größeren, schließt auch die Kreistangente in B_2 mit der x-Achse ein.

Für das Folgende siehe Fig. 9. Nimmt c noch weiter zu, so wandert T auf die rechte Seite von B_2 . Es ist T auch dann noch der obere Endpunkt der zu A_1B_1 senkrechten Sehne, aber er ist — im Gegensatz zu $c < c_t$ und Fig. 5 — der untere Endpunkt der zu A_2B_2 senkrechten Sehne. Die Grundrißkurve trifft jetzt nicht mehr den Durchmesser A_2B_2 , sondern verläuft ganz rechts von ihm, woraus folgt, daß sämtliche sphärischen Abstände $A_2\widehat{P}$ auf der Halbkugel rechts von A_2B_2 (auf der Halbkugel mit A_1) liegen. Nach Ablösung vom Äquator wandert der sphärische Abstand $A_2\widehat{P}$ zwar auch jetzt zunächst gegen den



Meridian durch A_2B_2 , kehrt aber dann, ehe er ihn erreicht hat, um und kommt für $(\sigma_2)_{\max} = A_2\widehat{T}$ wieder auf den Äquatorbogen zu liegen, von dem er ausgegangen ist. Die Ellipsenbögen, in welche sich die sphärischen Abstände im Grundriß abbilden, wandern dementsprechend zwar zunächst auch in das Innere des Äquatorkreises und werden flacher, kehren aber vor Erreichung des Halbmessers A_2B_2 wieder um und sind daher alle nach der gleichen Seite gekrümmt (siehe Fig. 10 im Gegensatz zu Fig. 6). Die sphärischen Abstände $A_2\widehat{S}$ und $A_2\widehat{T}$ haben in diesem Fall gleiche Richtung, $A_2\widehat{S}$ wird von $A_2\widehat{T}$ überdeckt. Aus Fig. 9 liest man ab

$$(\sigma_2)_{\max} - (\sigma_1)_{\max} = 2\omega, \quad (44)$$

daher wegen $\sigma_2 = c\sigma_1$

$$(\sigma_1)_{\max} = \frac{2\omega}{c-1}, \quad (\sigma_2)_{\max} = \frac{2c\omega}{c-1}. \quad (45)$$

(45) tritt für den Fall $c > c_t$ an die Stelle von (40), die Formeln (38) für $\sigma_{\min}$ dagegen bleiben unverändert auch jetzt gültig, denn S liegt nach wie vor auf dem Bogen $A_1\widehat{u}A_2$ und die sphärischen Abstände $A_1\widehat{S}$ und $A_2\widehat{S}$ liegen auf entgegengesetzten Seiten von S, so wie das auch für $c < c_t$ der Fall war.

Für $c \rightarrow \infty$ rückt S von links (von unten her), T von rechts (von oben her) an den Punkt A_1 heran, die zugehörigen Apollonischen Kurven umschließen dabei A_1 immer enger. An der Grenze schließlich fallen S und T in A_1 , die Kurve schrumpft auf den Punkt A_1 zusammen. Man erkennt das aus (38) und (45).

Unsere bisherigen Untersuchungen zeigen, daß wir für $c \geq 1$ beim ersten Kurvenzweig je nach dem Wert des Parameters c drei Fälle zu unterscheiden haben:

- 1) $1 \leq c < c_t$ (siehe Fig. 5); T liegt links von B_2 , die sphärischen Abstände $A_1\widehat{T}$ und $A_2\widehat{T}$ liegen auf entgegengesetzten Seiten von T und es gilt

$$(\sigma_1)_{\max} = \frac{2\pi - 2\omega}{c+1}, \quad (\sigma_2)_{\max} = \frac{c(2\pi - 2\omega)}{c+1}. \quad (40)$$

- 2) $c = c_t$ (siehe Fig. 8). T fällt mit B_2 zusammen und es gilt

$$(\sigma_1)_{\max} = \pi - 2\omega, \quad (\sigma_2)_{\max} = \pi; \quad (43)$$

als sphärischer Abstand von der Länge π kann sowohl der Halbkreis, auf dem A_1 nicht liegt (entspricht Fall 1)), als auch der Halbkreis mit A_1 (entspricht Fall 3)) aufgefaßt werden.

- 3) $c > c_t$ (siehe Fig. 9); T liegt rechts von B_2 und die sphärischen Abstände $A_1\widehat{T}$ und $A_2\widehat{T}$ liegen auf der gleichen Seite von T, so daß sie sich überdecken; es gilt

$$(\sigma_1)_{\max} = \frac{2\omega}{c-1}, \quad (\sigma_2)_{\max} = \frac{2c\omega}{c-1}; \quad (45)$$

$(\sigma_1)_{\min}$ und $(\sigma_2)_{\min}$ werden in allen drei Fällen nach der gleichen Formel (38) berechnet.

In Fig. 11 ist für eine Anzahl Apollonischer Kurven zum Apollonischen Winkel $2\omega = \pi/3$ jeweils der erste Zweig skizziert. Zu jeder Kurve $c > 1$ wurde auch die entsprechende Kurve $1/c$ durch Spiegelung an der x-Achse gewonnen.

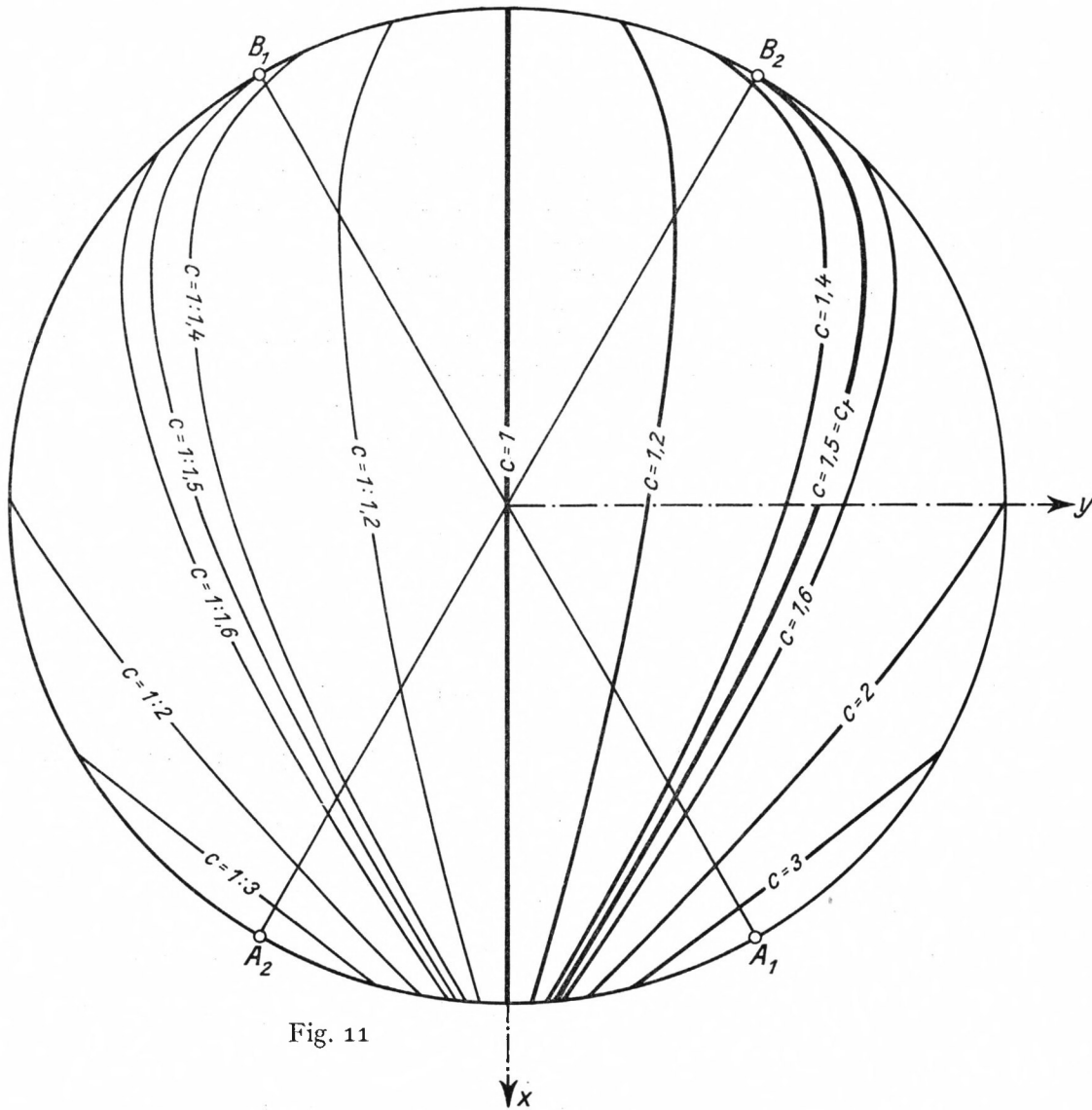


Fig. 11

Übergang zu den Apollonischen Kreisen der Ebene

Wir setzen für das folgende den Kugelradius nicht gleich 1 sondern gleich r und führen auf der Kugel Soldnerkoordinaten

$$X = r \lambda, \quad Z = r \psi \quad (46)$$

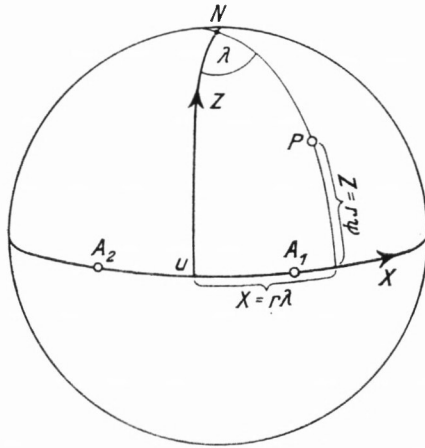


Fig. 12

mit dem Ursprung u und dem Äquator als Abszissenachse ein (siehe Fig. 12). Im übrigen bleibt die Lage der Apollonischen Punkte auf der Kugel und die Bezeichnungsweise dieselbe wie bisher. Die Soldnerabszissen der beiden Apollonischen Punkte seien X_1 und X_2 , so daß gilt

$$\omega r = X_1, \quad -\omega r = X_2. \quad (47)$$

Sollen für großen Kugelradius r der Abstand $2r\omega$ der Apollonischen Punkte und die Soldnerkoordinaten X, Z eines Kurvenpunktes endlich bleiben, so müssen der Apollonische Winkel 2ω und die geographischen Koordinaten dieses Punktes klein sein.

Wir nehmen nun an ψ, λ, ω und $1/r$ seien kleine Größen erster Ordnung und formen folgendermaßen um

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2 \psi \cdot \cos^2 (\lambda \mp \omega) &= 1 - \left(1 - \frac{\psi^2}{2}\right) \left(1 - \frac{(\lambda \mp \omega)^2}{2}\right) + O^4 \\ &= \frac{\psi^2}{2} + \frac{(\lambda \mp \omega)^2}{2} + O^4. \end{aligned} \quad (48)^1$$

Außerdem schreiben wir die Kurvengleichung (4) um in

$$\text{Arc sin } \sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 (\lambda + \omega)} = c \text{ Arc sin } \sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 (\lambda - \omega)}. \quad (49)$$

Für Arcuswerte im ersten Quadranten — und nur um solche handelt es sich gegenwärtig — ist das gestattet.

Mit der Entwicklung $\text{Arc sin } \epsilon = \epsilon + O^3$ und mit (48) geht (49) über in

$$\psi^2 + (\lambda + \omega)^2 = c^2 [\psi^2 + (\lambda - \omega)^2] + O^4 \quad (50)$$

und wenn man hier an Stelle von ψ, λ und ω mittels (46) und (47) Soldnerkoordinaten einführt, dann die ganze Gleichung mit r^2 durchmultipliziert und die Beziehung $r^2 = \frac{1}{O^2}$ beachtet, erhält man

$$Z^2 + (X - X_2)^2 = c^2 [Z^2 + (X - X_1)^2] + O^2. \quad (51)$$

Für $r \rightarrow \infty$ und damit $O^2 \rightarrow \text{Null}$ geht die Kugel in die Ebene, die Soldnerkoordinaten gehen in rechtwinklig-kartesische Koordinaten X, Z dieser Ebene über, so wie Fig. 13 das andeutet, und die Gleichung (51) der sphärischen Apollonischen Kurven geht über in die strenge Beziehung

$$Z^2 + (X - X_2)^2 = c^2 [Z^2 + (X - X_1)^2]. \quad (52)$$

¹⁾ O^k bedeutet eine kleine Größe k -ter Ordnung.

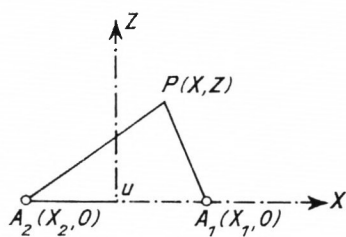


Fig. 13

Das ist aber gerade die Gleichung der Apollonischen Kreise der Ebene bezüglich der Punkte $A_1 (X_1, 0)$ und $A_2 (X_2, 0)$ als Apollonische Punkte. Man liest das aus Fig. 13 ab, wenn man dort P als laufenden Punkt eines solchen Apollonischen Kreises auffaßt und $\frac{A_2P}{A_1P} = c$ setzt.

III. BELIEBIGE KURVENZWEIGE

Wir behalten auch in diesem Abschnitt die Voraussetzung $0 < 2\omega < \pi$ (vgl. I (2)) bei, geben aber die Einschränkung II (1) auf und lassen statt dessen positive σ_1 - und σ_2 -Werte von ganz beliebiger Größe zu. Die Verhältnisse liegen dann wesentlich komplizierter.

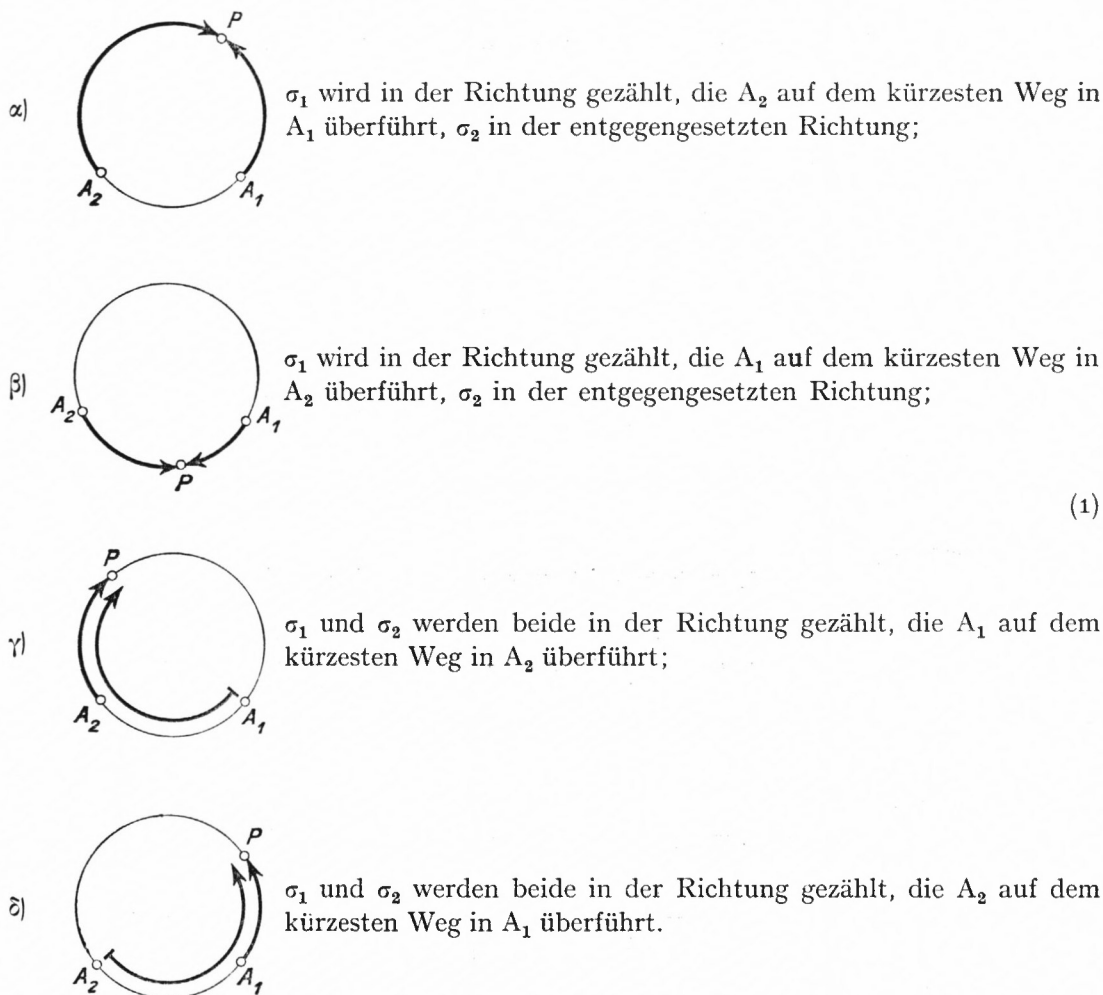
Die auf S. 14/15 beschriebene Grundrißkonstruktion gilt aber auch in diesem allgemeineren Fall. Denn es liegen immer, ganz unabhängig davon, wie groß σ_1 ist, alle Punkte, welche von A_1 dieselbe sphärische Entfernung σ_1 haben, auf einem Kugelkreis, dessen Ebene senkrecht auf dem Durchmesser A_1B_1 steht. Aus dieser Konstruktion nun erkennt man, daß der Grundriß einer Apollonischen Kurve aus einer Anzahl von Kurvenzweigen besteht, deren jeder auf dem Äquator beginnt und auf ihm endet, im übrigen aber ganz im Innern des Äquators verläuft. Denn mit zunehmendem σ_1 und damit auch σ_2 pendelt die 1-Sehne kontinuierlich zwischen A_1 und B_1 hin und her und schrumpft in den Extrem-lagen auf den Punkt A_1 bzw. B_1 selbst zusammen; Entsprechendes gilt für die 2-Sehne. Die Schnittpunkte einander zugeordneter Sehnen bilden daher eine stetige Kurve, die teils innerhalb, teils außerhalb des Äquators verläuft. Sie muß Punkte im Kreisinnern enthalten, weil sowohl die 1- als auch die 2-Sehne auf dem Weg zwischen ihren beiden Extrem-lagen jeweils die ganze Kreisfläche überstreicht; es müssen aber andererseits in der Umgebung aller jener Stellen, für welche eine der beiden Sehnen auf einen Punkt zusammenschrumpft, die Schnittpunkte einander entsprechender Sehnen¹⁾ außerhalb des Äquatorkreises liegen. Von dem Sonderfall, daß die i -Sehne gerade dann durch den Punkt A_k oder B_k ($k \neq i$) geht, wenn die k -Sehne sich auf diesen Punkt zusammenzieht, haben wir dabei abgesehen. Er wird auf S. 31/32 unter 5. behandelt. Da die Apollonische Kurve selbst ganz auf der Kugel liegt, besteht ihr Grundriß nur aus den innerhalb und auf dem Äquator gelegenen Punkten der eben beschriebenen Kurve, zerfällt also in einzelne Kurvenzweige. Eine Apollonische Kurve auf der Kugel zerfällt demnach in geschlossene, zum Äquator symmetrische (vgl. S. 7) Zweige, deren jeder den Äquator zweimal schneidet, nämlich im Anfangs- und im Endpunkt des entsprechenden Zweiges der Grundrißkurve.

Wir numerieren die Zweige nach wachsendem σ_1 - und damit auch σ_2 -Werten.

Klassifizierung der Äquatorpunkte und einige Sätze über Kurvenzweige

P sei ein Äquatorpunkt einer Apollonischen Kurve. Dann fällt einer der von A_1 ausgehenden Äquatorbögen $A_1\widehat{P}$ zusammen mit der sphärischen Entfernung σ_1 des Punktes P von A_1 und ebenso einer der von A_2 ausgehenden Äquatorbögen $A_2\widehat{P}$ mit der sphärischen Entfernung σ_2 des Punktes P von A_2 . Bezüglich des Richtungssinnes, in dem σ_1 und σ_2 auf dem Äquator gezählt werden können, gibt es die folgenden vier verschiedenen Möglichkeiten:

¹⁾ Streng genommen handelt es sich beim Äußeren des Kreises um die Schnitte der Geraden, auf denen die Sehnen liegen. Wir verwenden aber der Kürze halber die obige Ausdrucksweise.

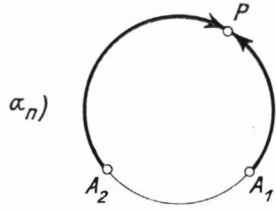


Wegen der Voraussetzung beliebiger σ_1 - und σ_2 -Werte kann dabei jede der beiden sphärischen Entfernungen $\widehat{A_1 P}$ und $\widehat{A_2 P}$ den Äquator oder Teile davon mehr als einmal überdecken.

Mit Hilfe der Fallunterscheidungen (1) lassen sich alle Äquatorpunkte einer Apollonischen Kurve berechnen. Aus der dortigen Zeichnung zu $\alpha)$ erkennt man, daß für jeden $\alpha)$ -Fall gilt

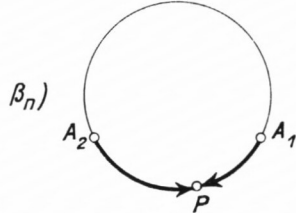
$$\sigma_2 + \sigma_1 = 2n\pi - 2\omega. \quad (2)$$

Setzt man in (2) der Reihe nach $n = 1, 2, 3, \dots$ ($n = 0$ kommt nicht in Frage, weil es einen negativen Wert $\sigma_1 + \sigma_2$ liefern würde), so erhält man daraus eindeutig die σ_1 - und σ_2 -Werte der sämtlichen Äquatorpunkte der Kurve c , die $\alpha)$ -Fälle sind. Wir wollen diese Punkte entsprechend dem zugehörigen n -Wert mit $\alpha_1), \alpha_2), \dots, \alpha_n), \dots$ bezeichnen. Ähnliche Beziehungen wie (2) liest man aus den Zeichnungen zu $\beta), \gamma), \delta)$, ab und erhält unter der Voraussetzung $c > 1$ die folgende Zusammenstellung:



$$\sigma_2 + \sigma_1 = 2n\pi - 2\omega, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

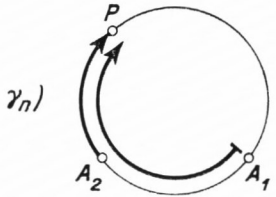
$$\sigma_1 = \frac{1}{c+1} (2n\pi - 2\omega), \quad \sigma_2 = \frac{c}{c+1} (2n\pi - 2\omega);$$



$$\sigma_2 + \sigma_1 = 2n\pi + 2\omega, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

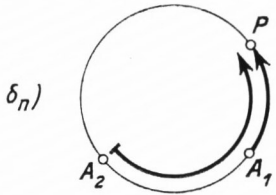
$$\sigma_1 = \frac{1}{c+1} (2n\pi + 2\omega), \quad \sigma_2 = \frac{c}{c+1} (2n\pi + 2\omega);$$

(3)



$$\sigma_2 - \sigma_1 = 2n\pi - 2\omega, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{c-1} (2n\pi - 2\omega), \quad \sigma_2 = \frac{c}{c-1} (2n\pi - 2\omega);$$



$$\sigma_2 - \sigma_1 = 2n\pi + 2\omega, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{c-1} (2n\pi + 2\omega), \quad \sigma_2 = \frac{c}{c-1} (2n\pi + 2\omega).$$

Damit sind alle Äquatorpunkte der Kurven $c > 1$ erfaßt, denn es gibt keine anderen als die unter α) bis δ) genannten Möglichkeiten zur Zählung von σ_1 und σ_2 auf dem Äquator.

Aus den vier Gleichungen für σ_1 in (3) erkennt man, daß für $c > 1$ in jedem der vier Fälle σ_1 mit wachsendem c monoton fällt und für $c \rightarrow \infty$ gegen Null strebt.

Mit Hilfe vollständiger Disjunktion geben wir jetzt noch eine andere Klassifizierung der einzelnen Äquatorpunkte einer Apollonischen Kurve c . Dabei kann bis auf weiteres $c \leq 1$ sein.

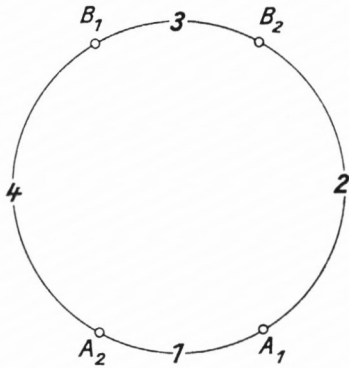


Fig. 1

Die vier Fundamentalpunkte A_1, A_2, B_1, B_2 teilen den Äquator in vier Kreisbögen oder *Sektoren*, deren jeder kleiner als π ist und die wir mit **1, 2, 3, 4** bezeichnen, so wie das aus Fig. 1 ersichtlich wird. Wenn wir in Zukunft von Sektoren auf dem Äquator sprechen, meinen wir immer die in Fig. 1 angegebenen.

I und K seien zwei benachbarte der vier Fundamentalpunkte, I' und K' ihre Gegenpole. Der Kreisbogen $I \frown K < \pi$ ist dann einer der vier Sektoren, welcher, bleibt völlig offen. Wie auch schon vorhin bezeichnen wir die

Sehnen senkrecht zum Durchmesser $A_i B_i$ als i -Sehnen, die Sehnen senkrecht zum Durchmesser $A_k B_k$ als k -Sehnen. Wenn wir von i - und k -Sehnen sprechen, meinen wir immer zwei einander zugeordnete Sehnen der beiden Scharen.

P sei ein Punkt des Sektors $I\widehat{K}$, in dem sich zwei einander zugeordnete Sehnen der beiden Scharen schneiden, also ein Äquatorpunkt der Kurve. Er falle weder mit I noch mit K zusammen. Das σ_i des Punktes P wird von I oder I' aus gezählt, je nachdem, ob I Apollonischer Punkt ist oder I' . Das zugehörige σ_k wird von K oder K' aus gezählt, je nachdem, ob K Apollonischer Punkt ist oder K' . Wie man sich leicht überlegt, ist die Richtung, in der im Äquatorpunkt P das σ_i ($i = 1, 2$) gezählt wird zugleich die Richtung, in welcher sich in der Umgebung von P die i -Sehne mit wachsendem σ_i bewegt.

Es sind nun folgende vier Fälle möglich:

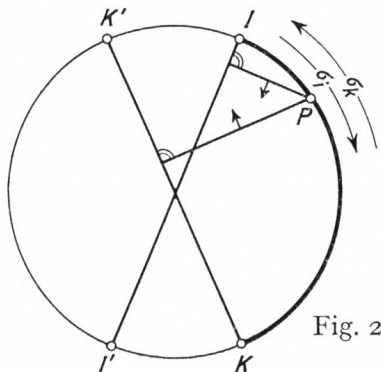


Fig. 2

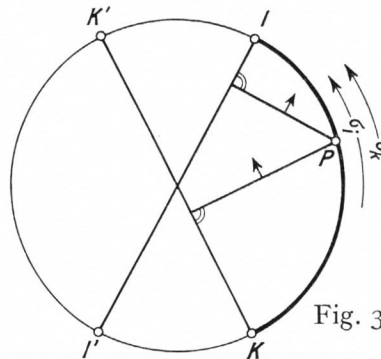


Fig. 3

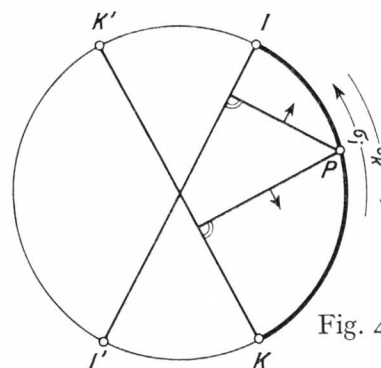


Fig. 4

1. σ_i und σ_k werden auf dem Äquator in entgegengesetzter Richtung gezählt, und zwar wird σ_i von I nach K und σ_k von K nach I gezählt, wie Fig. 2 das andeutet. Dann ist P *Anfangspunkt* eines Kurvenzweiges. Denn vorher, d. h. so lange die σ -Werte kleiner sind als diejenigen von P , fällt der Schnittpunkt entsprechender Sehnen außerhalb des Kreises, nach dem Durchgang durch P innerhalb des Kreises, wie aus Fig. 2 deutlich werden dürfte (die Pfeile senkrecht zu den Sehnen geben an, in welcher Richtung sich die Sehnen mit wachsenden σ -Werten bewegen).

2. σ_i und σ_k werden in gleicher Richtung gezählt, und zwar in Richtung auf denjenigen der beiden Punkte I, K , zu dem das langsamer wachsende σ gehört. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß σ_i langsamer wächst; dann werden sowohl σ_i als auch σ_k in Richtung von K nach I gezählt (Fig. 3) und P ist *Anfangspunkt* eines Kurvenzweiges. Denn vor dem Durchgang durch P ist der Endpunkt der k -Sehne hinter demjenigen der i -Sehne, er holt ihn in K ein und eilt ihm von da ab voraus, so daß sich entsprechende Sehnen vor P außerhalb, nach P innerhalb des Kreises schneiden.

3. σ_i und σ_k werden in entgegengesetzter Richtung gezählt, diesmal aber (im Gegensatz zu 1.) σ_i in Richtung von K nach I und σ_k in Richtung von I nach K (Fig. 4). Der Punkt P ist dann der *Endpunkt* eines Zweiges, denn die vorhergehenden Sehnenpaare schneiden sich im Innern, die nachfolgenden im Äußeren des Kreises. Das geht so lange, bis mindestens eine der beiden Sehnen auf den Endpunkt des zu ihr senkrechten Durchmessers zusammenschrumpft. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß dies die k -Sehne sei. Nach Erreichung des Punktes K be-

wegt sie sich wieder gegen das Innere des Kreises, wobei ihr einer Endpunkt wieder auf dem Sektor $I\hat{K}$ läuft, jetzt aber in entgegengesetzter Richtung wie vorhin, also von K nach I . Der Wert von σ_k hat beim Durchgang durch K ein (ganzzahliges) Vielfaches von π passiert und muß, da σ_k ja ständig wächst, für den Sehnenendpunkt auf dem Sektor $I\hat{K}$ jetzt in entgegengesetzter Richtung wie vorhin gezählt werden. Es gibt nun im ganzen drei Möglichkeiten:

a) Entweder dieser Sehnenendpunkt auf $I\hat{K}$ erreicht den ebenfalls auf dem Sektor $I\hat{K}$ laufenden Endpunkt der i -Sehne, ehe diese auf I zusammenschrumpft. σ_i hat dann in zwischen kein Vielfaches von π passiert, sondern läuft noch im selben Intervall $m\pi < \sigma_i < (m+1)\pi$, in dem es auch für P war und ist deshalb für diesen Sehnenendpunkt im selben Sinn zu zählen wie für P . Der Äquatorpunkt, in dem sich die Endpunkte entsprechender Sehnen schließlich wieder treffen, liegt, ebenso wie P , auf dem Sektor $I\hat{K}$ und ist der *Anfang* eines neuen Zweiges. Denn da dieser Fall a) nur eintreten kann, wenn σ_k schneller wächst als σ_i , liegt für diesen neuen Äquatorpunkt der unter 2. behandelte Fall vor.

b) Oder die i -Sehne schrumpft auf den Punkt I zusammen, ehe der von K nach I laufende Endpunkt der k -Sehne den in derselben Richtung laufenden Endpunkt der i -Sehne eingeholt hat. Von da ab bewegt sich der auf $I\hat{K}$ laufende Endpunkt der i -Sehne in entgegengesetzter Richtung, also von I nach K und läuft infolgedessen dem Endpunkt der k -Sehne entgegen. Wo die beiden Punkte sich treffen, d. h. wo sich die i - und k -Sehne abermals auf dem Äquator schneiden, ist wieder ein Äquatorpunkt der Kurve; dieser ist *Anfangspunkt* eines neuen Kurvenzweiges, denn es liegt für ihn der unter 1. behandelte Fall vor. Da im vorliegenden Fall auch σ_i ein Vielfaches von π passiert hat, muß auch σ_i für diesen neuen Äquatorpunkt in entgegengesetzter Richtung gezählt werden, wie für P .

c) Die dritte Möglichkeit ist der Grenzfall, daß die k -Sehne gerade dann durch I geht, wenn die i -Sehne auf I zusammengeschrumpft ist. Man hat dann den unter 5. näher behandelten Fall.

4. σ_i und σ_k werden wieder in gleicher Richtung gezählt, diesmal aber im Gegensatz zu 2. in Richtung auf denjenigen der beiden Punkte I , K , zu dem das schneller wachsende σ gehört. Wir nehmen, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich ist, an, σ_i wachse schneller, dann wachsen sowohl σ_i als auch σ_k in Richtung von K nach I . Es liegen dann die in Fig. 5 angedeuteten Verhältnisse vor. P ist auch jetzt wieder der *Endpunkt*

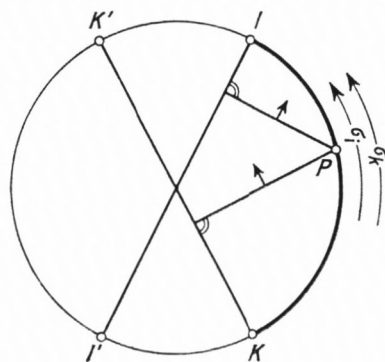


Fig. 5

eines Kurvenzweiges. Denn da σ_i schneller wächst als σ_k , läuft der Endpunkt der i -Sehne schneller, als derjenige der k -Sehne, vor P schneiden sich die beiden Sehnen im Kreisinnern, in P treffen sie sich auf dem Kreis, nach dem Durchgang durch P schneiden sie sich außerhalb des Kreises, denn der Endpunkt der i -Sehne eilt von da ab demjenigen der k -Sehne in Richtung nach I voraus. Die i -Sehne schrumpft schließlich in den Punkt I zusammen, ehe der Endpunkt der k -Sehne dort anlangt und kehrt dann wieder in das Innere des Kreises zurück, wobei ihr einer Endpunkt wieder auf dem Sektor $I\hat{K}$ läuft, jetzt aber in entgegengesetzter Richtung wie vorher, also dem Endpunkt der k -Sehne entgegen. i - und k -Sehne treffen sich abermals auf dem Sektor $I\hat{K}$, es

beginnt in diesem Punkt ein neuer Kurvenzweig, und zwar liegt der unter 1. besprochene Fall vor. Da beim Durchgang durch I das σ_i ein Vielfaches von π überschritten hat, wird

für den neuen Äquatorpunkt σ_i in entgegengesetzter Richtung gezählt wie für P. σ_k dagegen wird für ihn in derselben Richtung gezählt wie für P, denn es hat zwischen diesen beiden Punkten kein Vielfaches von π überschritten.

Mit Ausnahme des Falles, daß P in einem der Fundamentalpunkte liegt, gibt es außer den in 1. bis 4. genannten keine weiteren Möglichkeiten für die Lage eines Kurvenpunktes und die Zählung seiner sphärischen Entfernungen σ_1 und σ_2 auf dem Äquator.

Fällt für ein bestimmtes Wertepaar $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ einer Kurve c der Grundriß nicht außerhalb des Äquators, während für alle Wertepaare σ_1, σ_2 in einer gewissen Umgebung desselben die Grundrißkonstruktion einen Punkt außerhalb des Äquators liefert, so bezeichnen wir den Punkt $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ als *isolierten Kurvenpunkt* oder als *ausgearteten Kurvenzweig*. Er ist zugleich Anfangs- und Endpunkt. Aus der Grundrißkonstruktion erkennt man unmittelbar, daß kein Punkt im Innern des Äquators von dieser Beschaffenheit ist. Und aus den Ausführungen unter 1. bis 4. folgt, daß dies auch für keinen von den Fundamentalpunkten verschiedenen Äquatorpunkt der Fall sein kann.

Wie schon aus den Ausführungen von S. 26 hervorgeht, betrachten wir jedes Kurvenstück des Grundrisses zu dem eine stetige Folge von σ_1 -Werten gehört und das innerhalb des Äquators von einem Äquatorpunkt zum nächsten (nächster in Bezug auf wachsende σ_1 -Werte) führt, als *Zweig der Grundrißkurve* bzw. als *Grundriß eines Kurvenzweiges*. Jeder Kurvenpunkt auf dem Äquator ist demnach Anfangs- oder Endpunkt eines Kurvenzweiges. Ist insbesondere der Endpunkt eines Kurvenzweiges mit den Werten $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ zugleich der Anfangspunkt des nächsten Kurvenzweiges mit denselben Werten $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$, so bezeichnen wir diesen Punkt als *Doppelpunkt*. Aus den Ausführungen unter 1. bis 4. geht hervor, daß kein von den Fundamentalpunkten verschiedener Punkt Doppelpunkt einer Apollonischen Kurve sein kann.

Die isolierten Punkte bzw. ausgearteten Kurvenzweige und die Doppelpunkte fassen wir unter dem Begriff der *singulären Punkte* zusammen; jeden Kurvenpunkt, der nicht singular ist, bezeichnen wir als *regulär*. Mit dieser Ausdrucksweise haben wir den *Hilfssatz*: *Jeder Kurvenpunkt, der nicht mit einem der vier Fundamentalpunkte zusammenfällt, ist regulär.*

5. Nach diesen Vorbereitungen behandeln wir jetzt den in 1. bis 4. ausgeschlossenen Fall, daß der Kurvenpunkt P mit einem der vier Fundamentalpunkte zusammenfällt. Wir nehmen, was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, an, daß er mit I zusammenfällt. Dann liegt der Grenzfall vor, daß die k-Sehne die i-Sehne gerade dann auf dem Äquator schneidet, wenn diese letztere auf den Punkt I zusammengeschrunpft ist, wenn σ_i also gerade ein Vielfaches von π ist. Es gibt nun hier wieder zwei Möglichkeiten:

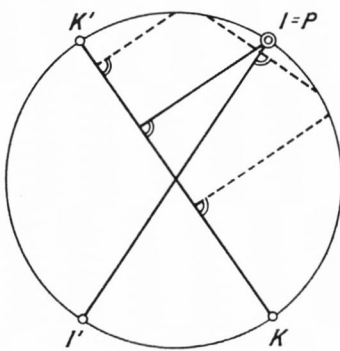


Fig. 6

a) Entweder σ_i wächst langsamer als σ_k . Dann ist vor P, d. h. für kleinere σ -Werte als die zu P gehörigen, der auf I zueilende Endpunkt der k-Sehne weiter entfernt von I als derjenige der i-Sehne, er holt ihn in I ein und entfernt sich dann nach der anderen Seite hin rascher von I, als der auf derselben Seite liegende Endpunkt der i-Sehne. Sowohl vor als auch nach $P = I$ schneiden sich entsprechende Sehnen außerhalb des Kreises (Fig. 6). P ist in diesem Fall also ein auf einen Punkt zusammengeschrunpfter Kurvenzweig ohne kontinuierliche Verbindung mit anderen Kurvenpunkten, es liegt ein *isolierter Punkt* und damit ein *ausgearteter Kurvenzweig* vor.

b) Oder σ_i wächst schneller als σ_k . Dann ist vor P der auf I zulaufende Endpunkt der k-Sehne näher an I als der Endpunkt der i-Sehne, so daß die beiden Sehnen sich jeweils

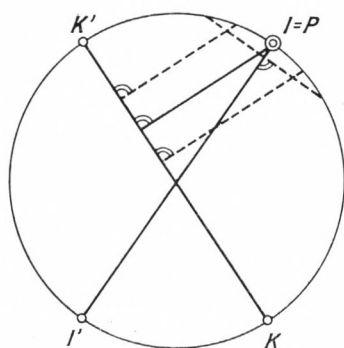


Fig. 7

im Innern des Kreises schneiden (Fig. 7). $P = I$ ist damit der Endpunkt eines Zweiges. Er ist zugleich aber Anfangspunkt eines neuen Kurvenzweiges, der auf der anderen Seite des Durchmessers $I I'$ verläuft. Denn da σ_i schneller wächst als σ_k , bleibt nach Durchlaufen von I der Endpunkt der k-Sehne näher an I als derjenige der i-Sehne, die beiden Sehnen schneiden sich daher wieder im Innern des Äquators. In $I = P$ hängen in diesem Falle zwei aufeinanderfolgende Kurvenzweige zusammen, es liegt ein Doppelpunkt vor.

Für den Punkt $P = I$ selbst liegt sowohl im Fall 5a) als auch 5b) die Richtung, in welcher $\sigma_i = m\pi$ auf dem Äquator zu zählen ist, nicht eindeutig fest, sondern es sind beide Richtungen gleichberechtigt.

Mit 1. bis 5. sind für die Kurven $c \leq 1$ sämtliche Möglichkeiten bezüglich der Lage eines Kurvenpunktes auf dem Äquator in Verbindung mit den Richtungen, in denen seine sphärischen Entfernungen σ_1, σ_2 auf dem Äquator gezählt werden können, erschöpft. In 1. bis 4. ist P jeweils regulärer, in 5. singulärer Kurvenpunkt.

Für $c = 1$ wird wegen $\sigma_1 = \sigma_2$ die Voraussetzung darüber, welche der beiden sphärischen Entfernungen schneller wächst als die andere, gegenstandslos. Doch erkennt man ziemlich unmittelbar, daß die Kurve $c = 1$ sich aus den unendlich oft durchlaufenen Meridianen $\lambda = 0$ und $\lambda = \pi$ zusammensetzt, d. h. aus dem unendlich oft durchlaufenen Großkreis, zu dem die Apollonischen Punkte symmetrisch liegen und daß sie keine singulären Punkte besitzt. Ihr Grundriß ist der ebenfalls unendlich oft durchlaufene Durchmesser auf der x-Achse (die Strecke ou der Figur II 7).

Aus 5. folgt, daß in den Fundamentalpunkten nur singuläre Kurvenpunkte liegen können. Das zusammen mit dem Hilfssatz von S. 31 gibt Satz 1: Die Kurvenpunkte, welche mit einem der Fundamentalpunkte zusammenfallen, sind die singulären Punkte der Apollonischen Kurve.

3. und 4. sind die einzigen Fälle, in denen der Ausgangspunkt P Endpunkt eines Zweiges und regulär ist und, wie die dortigen Ausführungen zeigen, gelten unter der Voraussetzung, daß der Endpunkt eines Kurvenzweiges und der Anfangspunkt des nächsten regulär sind, die folgenden Sätze 2 bis 5.

Satz 2: Endpunkt eines Kurvenzweiges und Anfangspunkt des nächsten liegen im gleichen Sektor und zwar beide im Inneren des Sektors (nicht in einem seiner Endpunkte).

Satz 3: Zwischen dem Endpunkt eines Kurvenzweiges und dem Anfangspunkt des nächsten überschreitet

entweder eine der beiden sphärischen Entfernungen σ_1, σ_2 genau ein Vielfaches von π , d. h. es liegt eines der σ_i für den Endpunkt in einem Intervall $(m-1)\pi < \sigma_i < m\pi$ und für den Anfangspunkt des nächsten Zweiges im Intervall $m\pi < \sigma_i < (m+1)\pi$, während die Entfernung σ_k ($k \neq i$) für die beiden Punkte im gleichen Intervall $(n-1)\pi < \sigma_k < n\pi$ liegt (m und n sind natürliche Zahlen),

oder jede der beiden sphärischen Entfernungen genau ein Vielfaches von π .

Satz 4: Liegt für den Anfangspunkt eines Kurvenzweiges die sphärische Entfernung σ_i ($i = 1, 2$) im gleichen Intervall $(m-1)\pi < \sigma_i < m\pi$ (m natürliche Zahl) wie für den End-

punkt des vorhergehenden Zweiges, so wird sie in beiden Punkten auf dem Äquator in der gleichen Richtung gezählt, überschreitet σ_i dagegen zwischen den beiden Zweigen ein Vielfaches von π , so wird es im Endpunkt des einen Zweiges in entgegengesetzter Richtung gezählt, wie im Anfangspunkt des nächsten.

Satz 5: Im Anfangspunkt eines Kurvenzweiges wird mindestens eine der beiden sphärischen Entfernungen σ_1, σ_2 auf dem Äquator in entgegengesetzter Richtung gemessen, wie im Endpunkt des vorhergehenden.

Es liegt der Gedanke nahe, die entsprechenden Sätze für die Aufeinanderfolge „Anfangspunkt eines Zweiges — Endpunkt desselben Zweiges“ durch Fortsetzung der Überlegungen unter 1. und 2. herzuleiten, in Analogie zu den Ausführungen jeweils im zweiten Teil von 3. und 4. Da hierfür aber die vollständige Fallunterscheidung komplizierter wird als bei 3. und 4., gehen wir einen etwas anderen Weg und formulieren auch die Sätze etwas anders, nämlich so, wie das in den Sätzen 6 bis 9 geschehen ist.

Zunächst gilt **Satz 6:** Auf einem Kurvenzweig mit nur regulären Punkten nimmt keine der beiden sphärischen Entfernungen σ_1, σ_2 ein Vielfaches von π an oder überschreitet es. Mit etwas anderen Worten: Auf einem nur aus regulären Punkten bestehenden Kurvenzweig bleibt σ_i ($i = 1, 2$) ganz im Intervall $(m_i - 1)\pi < \sigma_i < m_i\pi$. (m_i bedeutet dabei eine natürliche Zahl und es kann auch $m_1 \neq m_2$ sein.) Ist nämlich σ_i ein Vielfaches von π , so schrumpft die i -Sehne auf einen der beiden Punkte A_i, B_i zusammen und dieser ist zugleich der zugehörige Kurvenpunkt und nach Satz 1 singulär im Widerspruch zu unserer Voraussetzung nur regulärer Punkte. Also kann σ_i jedenfalls nirgends auf der Kurve ein Vielfaches von π sein und da auf jedem (nicht ausgearteten) Kurvenzweig die σ_i Werte eine stetige Folge bilden, kann σ_i auch kein Vielfaches von π überschreiten, womit Satz 6 bewiesen ist.

Weiter gilt **Satz 7:** Im Endpunkt eines Kurvenzweiges mit nur regulären Punkten wird mindestens eine der beiden sphärischen Entfernungen σ_1, σ_2 auf dem Äquator in entgegengesetzter Richtung gezählt, wie im Anfangspunkt dieses selben Zweiges. Beweis: Verwenden wir, ebenso wie beim ersten Zweig, so jetzt auch bei beliebigen Zweigen, für Anfangs- und Endpunkt ein und desselben Zweiges die Zeichen min und max, so haben wir aufgrund von Satz 6 und der Voraussetzung regulärer Punkte

$$0 < (\sigma_1)_{\max} - (\sigma_1)_{\min} < \pi, \quad 0 < (\sigma_2)_{\max} - (\sigma_2)_{\min} < \pi, \quad (4)$$

woraus durch Addition und Subtraktion folgt

$$\begin{aligned} 0 &< ((\sigma_2)_{\max} + (\sigma_1)_{\max}) - ((\sigma_2)_{\min} + (\sigma_1)_{\min}) < 2\pi, \\ -\pi &< ((\sigma_2)_{\max} - (\sigma_1)_{\max}) - ((\sigma_2)_{\min} - (\sigma_1)_{\min}) < +\pi. \end{aligned} \quad (5)$$

Liegt nun z. B. im Anfangspunkt eines Kurvenzweiges der Fall α_n vor, so hat man für seinen σ_1 -Wert nach (3)

$$(\sigma_1)_{\min} = \frac{2n\pi - 2\omega}{c + 1}. \quad (6)$$

Nimmt man an, daß auch im Endpunkt der Fall α_n eintritt, so findet man für dessen σ_1 -Wert ebenfalls aus (3)

$$(\sigma_1)_{\max} = \frac{2n\pi - 2\omega}{c + 1}, \quad (7)$$

d. h. es wäre $(\sigma_1)_{\min} = (\sigma_1)_{\max}$ im Widerspruch zu (4). Nimmt man aber an, es trete für den Endpunkt der Fall α_{n+k} ($k = 1, 2, 3, \dots$) ein, so hat man, wieder nach (3),

$$(\sigma_2)_{\max} + (\sigma_1)_{\max} = 2(n+k)\pi - 2\omega, \quad (8)$$

während man für den Anfangspunkt mit dem Fall α_n hat

$$(\sigma_2)_{\min} + (\sigma_1)_{\min} = 2n\pi - 2\omega. \quad (9)$$

Aus (8) und (9) folgt durch Subtraktion

$$((\sigma_2)_{\max} + (\sigma_1)_{\max}) - ((\sigma_2)_{\min} + (\sigma_1)_{\min}) = 2k\pi \quad (k \geq 1) \quad (10)$$

und das steht im Widerspruch zu (5). Es kann also nicht auch im Endpunkt ein α -Fall eintreten. Für jeden von einem α -Fall verschiedenen Fall aber (das sind die β -, γ -, δ -Fälle), wird mindestens eine der sphärischen Entfernungen σ_1, σ_2 in entgegengesetzter Richtung gezählt wie für die α -Fälle. Damit ist Satz 7 bewiesen, wenn der Anfangspunkt ein α -Fall ist. Ganz entsprechend verläuft der Beweis für β -, γ - und δ -Fälle im Anfangspunkt.

Aus Satz 6 folgt fast unmittelbar **Satz 8**: *Wird σ_i im Anfangs- und Endpunkt eines nur aus regulären Punkten bestehenden Kurvenzweiges in gleicher Richtung gezählt, so liegen die beiden Punkte auf der gleichen Seite des Durchmessers $A_i B_i$, wird σ_i dagegen im Endpunkt in entgegengesetzter Richtung gezählt wie im Anfangspunkt, so liegen die beiden Punkte auf verschiedenen Seiten des Durchmessers $A_i B_i$.* Andernfalls würde nämlich zwischen dem σ_i -Wert des Anfangspunktes und demjenigen des Endpunktes ein Vielfaches von π liegen.

Aus der Verbindung von Satz 7 und 8 schließlich ergibt sich **Satz 9**: *Anfangs- und Endpunkt eines nur aus regulären Punkten bestehenden Kurvenzweiges liegen in verschiedenen Sektoren (im Innern je eines Sektors).*

Anhand von Satz 1 und den Ausführungen unter 5. läßt sich auch übersehen, wie die Sätze 2 bis 9 zu modifizieren bzw. zu ergänzen wären, für den Fall, daß auch singuläre Punkte zugelassen sind. Wir führen das hier nicht im einzelnen aus.

Für das folgende setzen wir $c > 1$ voraus. Dann wächst σ_2 rascher als σ_1 und infolgedessen ist jetzt bei 5.:

$$\begin{aligned} \text{in a) } & \sigma_i = \sigma_1, & \sigma_k = \sigma_2, \\ \text{in b) } & \sigma_i = \sigma_2, & \sigma_k = \sigma_1 \end{aligned} \quad (11)$$

und die dort gefundenen Resultate ergeben damit **Satz 10**: *Für $c > 1$ liegen isolierte Kurvenpunkte bzw. entartete Kurvenzweige nur im Apollonischen Punkt A_1 oder seinem Gegenpol B_1 und treten Doppelpunkte nur im Apollonischen Punkt A_2 oder seinem Gegenpol B_2 auf.*

Wir wollen noch untersuchen, für welche Werte $c > 1$ überhaupt singuläre Punkte auftreten. Nach 5. a) und (11a) sind für $c > 1$ isolierte Punkte durch die Beziehung

$$\sigma_1 = \mu\pi \quad (\mu = 1, 2, 3, \dots) \quad (12)$$

gekennzeichnet, und zwar fällt für geradzahliges μ der isolierte Punkt in A_1 , für ungeradzahliges μ in B_1 . Aus (3) entnimmt man, daß aus (12)

$$\text{entweder} \quad \sigma_2 = \nu\pi - 2\omega \quad (13)$$

$$\text{oder} \quad \sigma_2 = \nu\pi + 2\omega \quad (14)$$

folgt. Wegen $\sigma_2 = c\sigma_1$ liefern (12) und (13)

$$c\mu\pi = v\pi - 2\omega \quad (15)$$

und (12) und (14)

$$c\mu\pi = v\pi + 2\omega \quad (16)$$

und daraus folgt weiter

$$c = \frac{v\pi - 2\omega}{\mu\pi} \quad (\mu = 1, 2, 3, \dots; \quad v = 3, 4, \dots; \quad v > \mu) \quad (\text{entspricht (13)}) \quad (17)$$

oder

$$c = \frac{v\pi + 2\omega}{\mu\pi} \quad (\mu, v = 1, 2, 3, \dots; \quad v \geq \mu) \quad (\text{entspricht (14)}). \quad (18)$$

Um z. B. einzusehen, daß in (17) $v > \mu$ sein muß und der kleinste zulässige v -Wert 3 ist, ziehen wir (3) α) und γ) heran.

Aus der ersten Gleichung (3) α) folgt

$$\sigma_2 = 2n\pi - \sigma_1 - 2\omega = (2n - \mu)\pi - 2\omega = v\pi - 2\omega \quad (12)$$

mit

$$2n - \mu = v. \quad (a)$$

Wegen $\sigma_2 > \sigma_1 = \mu\pi$, $0 < 2\omega < \pi$ liefert das zunächst

$$v > \mu. \quad (b)$$

(a) und (b) zusammen ergeben die Bedingung

$$\mu < n, \text{ woraus aus (a) weiter folgt } n < v. \quad (c)$$

Nun ist nach (12) der kleinste zulässige μ -Wert 1, daher nach (c) der kleinste zulässige n -Wert 2 und der kleinste zulässige v -Wert 3, und zwar wird dieser auch tatsächlich angenommen, denn mit $\mu = 1$, $n = 2$ bekommt man aus (a) $v = 2 \times 2 - 1 = 3$.

Aus der ersten Gleichung (3) γ) folgt

$$\sigma_2 = 2n\pi + \sigma_1 - 2\omega = (2n + \mu)\pi - 2\omega = v\pi - 2\omega \quad (12)$$

mit

$$v = 2n + \mu. \quad (d)$$

Daraus folgt wegen $\sigma_2 > \sigma_1 = \mu\pi$, $0 < 2\omega < \pi$ wieder die Ungleichung (b). Der kleinste zulässige n -Wert in (3) γ) ist $n = 1$. Nun gibt (d) für $\mu = 1$, $n = 1$ den Wert $v = 2 + 1 = 3 > \mu$, also einen mit (b) verträglichen Wert und alle übrigen zulässigen Werte von μ und n einen Wert $v > 3$.

Dies alles zusammen schließlich liefert die unter (17) angeführten einschränkenden Bedingungen. Ganz ähnlich beweist man auch die Bedingungen in (18), (24) und (25).

Setzt man in (17) und (18) der Reihe nach die sämtlichen angegebenen μ - und v -Werte, so bekommt man die sämtlichen Parameter $c > 1$, für welche die zugehörige Apollonische Kurve einen isolierten Punkt bzw. entarteten Kurvenzweig besitzt. Das zu diesem isolierten Punkt gehörige Wertepaar σ_1, σ_2 bekommt man für (17) aus (12) und (13), für (18) aus (12) und (14).

Für den ausgeschlossenen Wert $\mu = 0$ würde man sowohl aus (17) als auch aus (18) erhalten $c = 1/0$ und für $c \rightarrow \infty$ ziehen sich alle Kurvenzweige auf den einen Punkt A_1 zusammen, weil für jedes endliche σ_2 der Wert $\sigma_1 = \sigma_2/c$ dann gegen Null geht.

Nach 5. b) und (11) sind für $c > 1$ Punkte, in denen zwei aufeinanderfolgende Kurvenzweige zusammenhängen (Doppelpunkte) gekennzeichnet durch

$$\sigma_2 = \nu\pi \quad (\nu = (1), 2, 3, \dots) \quad (19)$$

und zwar liegt für gerades ν der Doppelpunkt in A_2 , für ungerades in B_2 . Wieder aus (3) entnimmt man, daß aus (19)

$$\text{entweder} \quad \sigma_1 = \mu\pi - 2\omega \quad (20)$$

$$\text{oder} \quad \sigma_1 = \mu\pi + 2\omega \quad (21)$$

folgt. Wegen $\sigma_2 = c\sigma_1$ findet man aus (19) und (20)

$$c(\mu\pi - 2\omega) = \nu\pi \quad (22)$$

und aus (19) und (21)

$$c(\mu\pi + 2\omega) = \nu\pi. \quad (23)$$

Daraus folgt weiter

$$c = \frac{\nu\pi}{\mu\pi - 2\omega}, \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, \dots, \quad \mu \leq \nu) \quad (\text{entspricht (20)}) \quad (24)$$

oder

$$c = \frac{\nu\pi}{(\mu\pi + 2\omega)} \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots, \quad \nu = 2, 3, \dots, \quad \mu < \nu) \quad (\text{entspricht (21)}). \quad (25)$$

Setzt man in (24) und (25) der Reihe nach die angegebenen ν - und μ -Werte, so erhält man die sämtlichen Parameter $c > 1$, für welche Apollonische Kurven einen Doppelpunkt, d. h. zwei zusammenhängende Kurvenzweige, besitzen. Das zu diesem Doppelpunkt gehörige Wertepaar σ_1, σ_2 findet man für (24) aus (19) und (20), für (25) aus (19) und (21).

Für $\mu = \nu = 1$ liefert (24) gerade den in Teil II (S. 20 (42)) auftretenden Trennparameter c_t .

Die entsprechenden Ergebnisse für Parameter $c < 1$ findet man aus den vorstehend abgeleiteten, indem man die Indizes 1 und 2, bzw. die Punktepaaire A_1, B_1 und A_2, B_2 vertauscht. (Siehe Teil I, insbesondere die auf S. 7 unter 2. genannte Symmetrieeigenschaft.)

Es kann jetzt wieder $c \leq 1$ sein. Nach unseren bisherigen Ausführungen erfolgt die Grundrißkonstruktion eines Punktes σ_1, σ_2 , indem man auf dem Äquator von A_1 aus σ_1 , von A_2 aus σ_2 abträgt, durch den Endpunkt des Bogens σ_1 die 1-Sehne, durch den Endpunkt des Bogens σ_2 die 2-Sehne zieht und die beiden Sehnen zum Schnitt bringt. Man kann einen bestimmten Zweig dieser Kurve, zu dessen Anfangspunkt das Wertepaar $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ gehören möge, aber auch konstruieren, indem man von diesem Anfangspunkt aus in der dort vorgeschriebenen σ_1 -Richtung Bögen $\Delta\sigma_1$, in der dort vorgeschriebenen σ_2 -Richtung Bögen $\Delta\sigma_2 = c\Delta\sigma_1$ auf dem Äquator abträgt¹⁾ und von den Endpunkten der Bögen $\Delta\sigma_1$ aus die 1-Sehnen, von den Endpunkten der Bögen $\Delta\sigma_2$ aus die 2-Sehnen zieht. Der Schnittpunkt eines solchen Sehnenpaares ist dann der Punkt mit dem Wertepaar $\sigma_1 = \bar{\sigma}_1 + \Delta\sigma_1$, $\sigma_2 = \bar{\sigma}_2 + \Delta\sigma_2 = c\Delta\sigma_1$.

Es ist nützlich sich klar zu machen, daß man diesen selben Kurvenzweig in ganz analoger Weise auch von seinem Endpunkt aus konstruieren kann. Man trägt auf dem Äquator von diesem Endpunkt aus, aber *entgegengesetzt* zu der Richtung¹⁾, in der dort σ_1 gezählt

¹⁾ Die Richtung, in der σ_i in einem Äquatorpunkt gezählt wird, ist nämlich zugleich die Richtung, in der sich die i -Sehne mit wachsendem σ_i bewegt.

wird, einen Bogen $\Delta\sigma'_1$ und *entgegengesetzt* zu der Richtung in der dort σ_2 gezählt wird, den Bogen $\Delta\sigma'_2 = c\Delta\sigma'_1$ ab und zieht vom Endpunkt des Bogens $\Delta\sigma'_1$ aus die 1-Sehne, vom Endpunkt des Bogens $\Delta\sigma'_2$ aus die 2-Sehne. Es sei $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2 = c\bar{\sigma}_1$ das Wertepaar, das zum Endpunkt des Kurvenzweiges gehört; dann ist der Schnitt der beiden Sehnen der Kurvenpunkt mit dem Wertepaar $\sigma_1 = \bar{\sigma}_1 - \Delta\sigma'_1, \sigma_2 = \bar{\sigma}_2 - \Delta\sigma'_2 = c(\bar{\sigma}_1 - \Delta\sigma'_1) = c\sigma_1$. Mit wachsendem $\Delta\sigma'_1, \Delta\sigma'_2$ wird der Zweig von seinem Endpunkt aus in Richtung auf seinen Anfangspunkt hin durchlaufen, also in entgegengesetzter Richtung wie bei der Konstruktion mit wachsenden σ_1, σ_2 -Werten oder der Konstruktion vom Anfangspunkt des Zweiges aus mit wachsenden $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2$ -Werten.

Ab jetzt legen wir unseren Untersuchungen die Voraussetzung

$$c > 1, \text{ im Grenzfall auch } c = 1 \quad (26)$$

zugrunde. Wenn im Einzelfall auch Werte $c < 1$ mit in die Betrachtung eingeschlossen sind, wird das jeweils ausdrücklich bemerkt.

Aufstellung eines Strukturschemas

Um eine Vorstellung von der Lage der einzelnen Zweige einer bestimmten Kurve c zu bekommen, berechnet man zweckmäßigerweise nach (3) ihre Äquatorpunkte, d. h. deren σ_1 -Werte¹⁾ und ordnet diese Punkte dann nach wachsenden σ_1 -Werten. Sollte dabei einer der Fundamentalepunkte A_1, B_1, A_2, B_2 auftreten, so zählt er doppelt (s. S. 31/32). Der erste, dritte, fünfte und allgemein jeder ungeradzahlige in der Reihe der so geordneten Punkte ist der Anfang, der zweite, vierte, sechste und allgemein jeder geradzahlige ist der Endpunkt eines Kurvenzweiges.

Für einen vorgegebenen Winkel 2ω läßt sich auch verhältnismäßig einfach ein Schema aufstellen, aus dem man unmittelbar die Reihenfolge der einzelnen Äquatorpunkte entnehmen kann. Es liefert zugleich einen Überblick über die Struktur der Gesamtheit der Apollonischen Kurven, die zum Winkel 2ω gehören, und wir bezeichnen es als *das Strukturschema für diesen Apollonischen Winkel*.

Der Kürze halber verwenden wir ab jetzt für das σ_1 des Äquatorpunktes in welchem der Fall α_n vorliegt, einfach das Zeichen α_n und eine entsprechende Bezeichnungsweise für alle übrigen Äquatorpunkte.

Aus den Formeln für σ_1 in (3) erkennt man unmittelbar, daß immer gilt

$$\begin{aligned} \alpha_n &< \beta_n < \alpha_{n+1} < \beta_{n+1}, \\ \gamma_n &< \delta_n < \gamma_{n+1} < \delta_{n+1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Die Reihenfolge der α - und β -Fälle unter sich bei Anordnung nach der Größe von σ_1 ist also für jedes c dieselbe, ebenso die Reihenfolge der γ - und δ -Fälle. Dagegen kann, je nach dem Wert von c , die Einordnung der γ - und δ -Fälle in die α - und β -Fälle verschieden sein. Aus (3) erkennt man, daß zwar immer gilt

$$\alpha_n < \gamma_n < \delta_n, \quad \beta_n < \delta_n. \quad (28)$$

¹⁾ Grundsätzlich könnte man ebensogut mit den σ_2 -Werten rechnen. Man erhält dabei dieselbe Reihenfolge der Punkte, weil mit σ_1 auch σ_2 auf der einzelnen Kurve monoton wächst. Doch werden für die σ_2 -Werte die Rechnungen etwas umständlicher.

Es kann also nie γ_n vor α_n und nie δ_n vor β_n kommen, aber es ist je nach dem Wert von c entweder $\beta_n < \gamma_n$ oder $\beta_n > \gamma_n$. Ja, es gibt sogar c -Werte, für welche $\beta_{n+k} < \gamma_n$ ist, wo k eine beliebige natürliche Zahl bedeutet. Um nun für beliebiges c entscheiden zu können, wie die γ - und δ -Fälle in die α - und β -Fälle einzuordnen sind, suchen wir die Parameterwerte, für welche eine der Gleichungen

$$\alpha_{n+k} = \gamma_n, \quad \beta_{n+k} = \gamma_n, \quad \alpha_{n+k} = \delta_n, \quad \beta_{n+k} = \delta_n \quad (29)$$

gilt. Alle c -Werte, die sich aus (29) ergeben, nennen wir *Trennparameter* und verwenden für sie die Zeichen

$$c_t(\alpha_{n+k}, \gamma_n), \quad c_t(\beta_{n+k}, \gamma_n), \quad c_t(\alpha_{n+k}, \delta_n), \quad c_t(\beta_{n+k}, \delta_n). \quad (30)$$

Der Trennparameter c_t von Seite 20 ist ein Sonderfall hiervon, nämlich $c_t(\alpha_1, \delta_0)$. Mit den Formeln für σ_1 von (3) findet man aus (29) für die Trennparameter (30)

$$\begin{aligned} c_t(\alpha_{n+k}, \gamma_n) &= \frac{(2n+k)\pi - 2\omega}{k\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{für } c \geq c_t \text{ ist } \alpha_{n+k} \geq \gamma_n, \\ c_t(\beta_{n+k}, \gamma_n) &= \frac{(2n+k)\pi}{k\pi + 2\omega}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \text{für } c \geq c_t \text{ ist } \beta_{n+k} \geq \gamma_n, \\ c_t(\alpha_{n+k}, \delta_n) &= \frac{(2n+k)\pi}{k\pi - 2\omega}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{für } c \geq c_t \text{ ist } \alpha_{n+k} \geq \delta_n, \\ c_t(\beta_{n+k}, \delta_n) &= \frac{(2n+k)\pi + 2\omega}{k\pi}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{für } c \geq c_t \text{ ist } \beta_{n+k} \geq \delta_n. \end{aligned} \quad (31)$$

Das erste Ungleichungspaar in (31) bestätigt man folgendermaßen: aus (3) findet man durch Differenzieren der Formel für σ_1 im Fall α_{n+k} und γ_n

$$\frac{d\alpha_{n+k}}{dc} = -\frac{2}{(c+1)^2} [(n+k)\pi - \omega] = -\frac{\alpha_{n+k}}{c+1}, \quad (32)$$

$$\frac{d\gamma_n}{dc} = -\frac{2}{(c-1)^2} (n\pi - \omega) = -\frac{\gamma_n}{c-1} \quad (33)$$

und daraus durch Division

$$\frac{d\alpha_{n+k}}{dc} : \frac{d\gamma_n}{dc} = \frac{\alpha_{n+k}}{\gamma_n} \cdot \frac{c-1}{c+1}. \quad (34)$$

Wegen der ersten Gleichung (29) haben wir dann für $c = c_t(\alpha_{n+k}, \gamma_n)$

$$\frac{d\alpha_{n+k}}{dc} : \frac{d\gamma_n}{dc} = \frac{c-1}{c+1} < 1, \text{ aber positiv.} \quad (35)$$

Nun fallen sowohl α_{n+k} als auch γ_n monoton mit wachsendem c (siehe die Gleichungen für σ_1 in (3)), sie sind gleich für $c = c_t(\alpha_{n+k}, \gamma_n)$ und sonst nirgends und (35) bedeutet, daß in der Umgebung von $c = c_t(\alpha_{n+k}, \gamma_n)$ das α_{n+k} langsamer fällt, als das γ_n . Daraus folgt zwangsläufig:

$$\alpha_{n+k} < \gamma_n \text{ für } c < c_t, \quad \alpha_{n+k} > \gamma_n \text{ für } c > c_t. \quad (35)$$

womit das erste Paar von Ungleichungen in (31) bewiesen ist und ganz entsprechend bestätigt man auch die übrigen.

Setzt man in (31)

$$2n + k = \nu, \quad k = \mu, \quad (36)$$

so erkennt man, daß die Parameter der Gleichungen (17), (18), (24) und (25) identisch mit unseren Trennparametern (31) sind. Im einzelnen ergibt sich hierbei durch Vergleich der ersten und letzten Gleichung (31) mit (17) und (18) samt zugehörigem Text, daß zu den Trennparametern $c_t(\alpha_{n+k}, \gamma_n)$ und $c_t(\beta_{n+k}, \delta_n)$ isolierte Punkte gehören, und zwar

$$\begin{aligned} &\text{der Punkt } A_1, \text{ wenn } k \text{ eine gerade Zahl,} \\ &\text{der Punkt } B_1, \text{ wenn } k \text{ eine ungerade Zahl ist,} \end{aligned} \quad (37)$$

und ebenso findet man durch Vergleich der zweiten und dritten Gleichung (31) mit (24) und (25) samt zugehörigem Text, daß zu den Trennparametern $c_t(\beta_{n+k}, \gamma_n)$ und $c_t(\alpha_{n+k}, \delta_n)$ Doppelpunkte gehören, und zwar liegt der Doppelpunkt

$$\begin{aligned} &\text{in } A_2, \text{ wenn } k \text{ eine gerade Zahl,} \\ &\text{in } B_2, \text{ wenn } k \text{ eine ungerade Zahl ist.} \end{aligned} \quad (38)$$

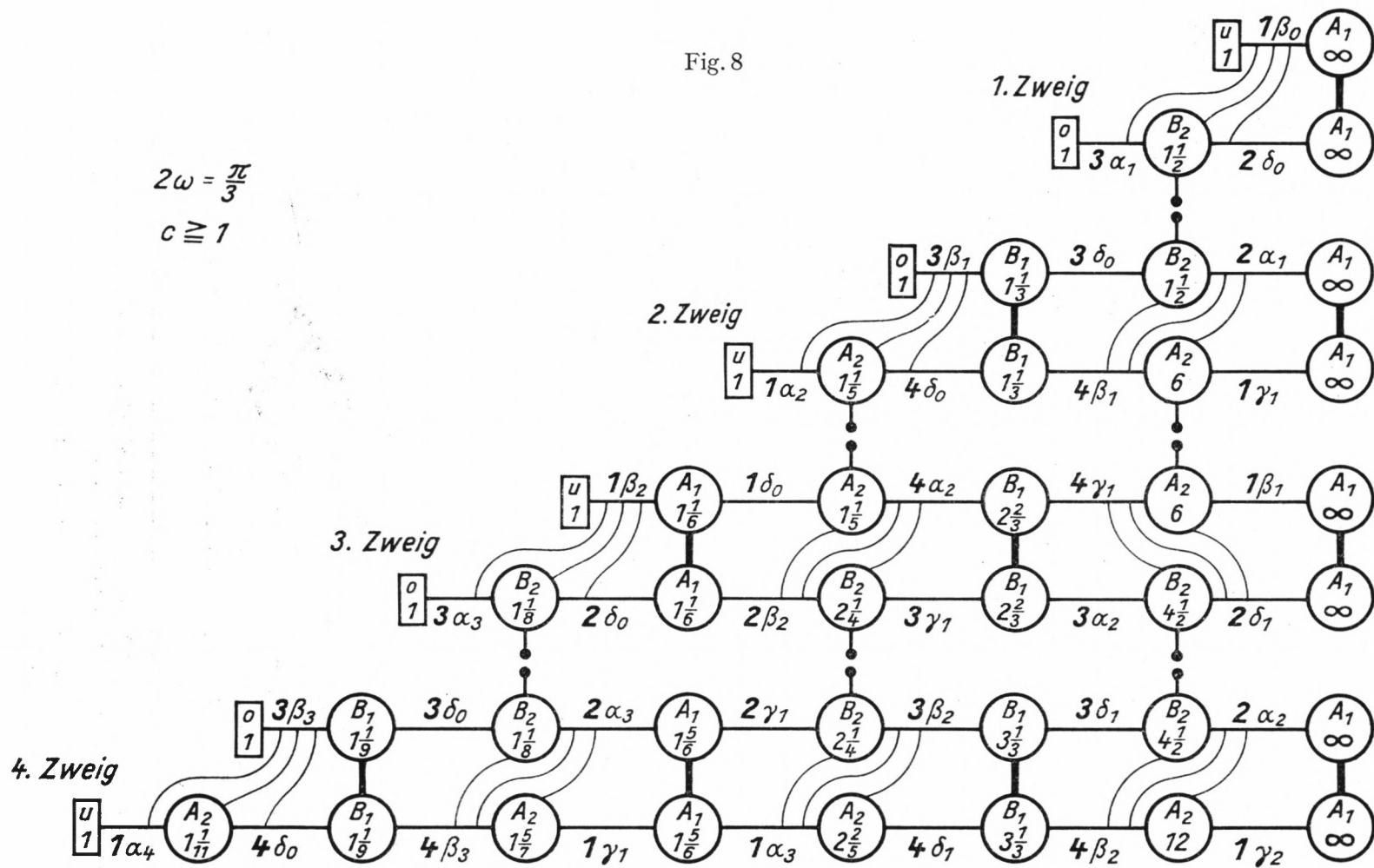
Man kann auch so sagen: Für geradzahliges k liegt ein Punkt A , für ungeradzahliges k ein Punkt B vor, für einen α, γ - oder β, δ -Trennparameter tritt ein Fundamentalpunkt mit dem Index 1, für einen α, δ - oder β, γ -Trennparameter ein solcher mit dem Index 2 auf.

Wir beginnen jetzt mit der Aufstellung des Strukturschemas für den Apollonischen Winkel $2\omega = \pi/3$. Entsprechend (26) beschränken wir uns dabei auf die Parameterwerte $c \geq 1$. Figur 8 zeigt dieses Schema für die ersten vier Zweige. Der Anfangspunkt des ersten Zweiges ist für jede Kurve c (und für jeden Winkel $0 < 2\omega < \pi$) der Punkt P , welcher den sphärischen Abstand 2ω der Apollonischen Punkte im Verhältnis $A_2P : A_1P = c$ teilt, d. h. der Punkt β_0 .¹⁾ Das leuchtet unmittelbar ein, kann aber auch aus den Ungleichungen (27) und (28) in Verbindung mit der Tatsache, daß der Fall α_0 und für $c > 1$ auch der Fall γ_0 nicht existieren (vergleiche (3)) geschlossen werden. Es liegt also der Anfangspunkt des ersten Zweiges im Sektor 1, für $c > 1$ insbesondere auf dem Halbsektor uA_1 .²⁾ Für $c = 1$ fällt er mit u zusammen und rückt mit wachsendem c monoton und stetig gegen A_1 . Im Schema der Figur 8 wird das durch die erste Horizontalreihe (Zeile) dargestellt. Die horizontale Strecke bedeutet den Ort der Anfangspunkte des ersten Zweiges, d. h. den Halbsektor uA_1 , die darüberstehenden Zeichen 1, β_0 geben an, daß sie im Sektor 1 liegen und β_0 -Fälle sind. Das Rechteck am linken Ende (am Anfang) der Strecke symbolisiert den Anfangspunkt dieses Ortes, die darin untereinander stehenden Zeichen $u, 1$ besagen, daß es der Punkt u ist und daß zu ihm der Parameter $c = 1$ gehört. Der Ring am Ende der Horizontalstrecke symbolisiert den Endpunkt dieses Ortes, die darin untereinander stehenden Zeichen A_1, ∞ besagen, daß es der Punkt A_1 ist und daß zu ihm der Parameter $c = \infty$ gehört.

¹⁾ Statt „Punkt, in dem der Fall β_0 vorliegt“ sagen wir kürzer „Punkt β_0 “ und verwenden eine entsprechende Ausdrucksweise auch für die anderen Fälle.

²⁾ Der Punkt u halbiert den Sektor 1, der Punkt o halbiert den Sektor 3 (vgl. z. B. Figur 5 von Seite 15 mit Figur 1 von Seite 28).

Fig. 8



Strukturschema der ersten vier Zweige $c \geq 1$
 für den Apollonischen Winkel $2\omega = \frac{\pi}{3}$

Der Endpunkt des ersten Zweiges steht in der nach wachsenden σ_1 -Werten geordneten Reihe der Äquatorpunkte einer Kurve an der zweiten Stelle. Während es für den ersten Äquatorpunkt nur die eine Möglichkeit β_0 gab, existieren für diesen zweiten Punkt je nach dem Wert von c zwei Möglichkeiten. Entweder der auf β_0 folgende Punkt der α, β -Gruppe, das ist α_1 oder der erste Punkt der γ, δ -Gruppe, das ist δ_0 [siehe (3) und (27)]. Den zugehörigen Trennparameter findet man aus der dritten Gleichung (31) mit $n = 0$, $k = 1$, zu

$$c_t(\alpha_1, \delta_0) = \frac{\pi}{\pi - 2\omega} = \frac{\pi}{\frac{2}{3}\pi} = \frac{3}{2}. \quad (39)$$

Für $c \leq \frac{3}{2}$ ist also $\alpha_1 \leq \delta_0$. (40)

Die α_1 -Fälle liegen im Sektor 3, die δ_0 -Fälle im Sektor 2. Das folgt aus Satz 8 in Verbindung mit (1) und der Tatsache, daß der Anfangspunkt des ersten Zweiges ein β -Fall ist und im Sektor 1 liegt (vergl. auch die Figuren zu (1)). Die beiden Sektoren stoßen in B_2 zusammen. Damit stimmt überein, daß nach (38) zum Trennparameter $c_t(\alpha_1, \delta_0)$ wegen $k = 1 =$ ungerade Zahl der Punkt B_2 gehört und zwar als Doppelpunkt, in dem der erste und der zweite Kurvenzweig der Kurve $c = 1,5$ zusammenhängen. Für $c = 1$ liegt der Endpunkt des ersten Zweiges in o und nach (3) Fall α_n fällt von da ab das $\sigma_1 = \alpha_1$ dieses Endpunktes monoton und stetig, daher wandert der Endpunkt des ersten Zweiges als α_1 für $c = 1$ bis $c = c_t = 1,5$ monoton und stetig von o bis B_2 , beschreibt also die rechte Hälfte des Sektors 3. Von da ab wandert er als δ_0 -Fall monoton und stetig auf dem Sektor 2 nach A_1 , durchläuft also den ganzen Sektor 2. Denn $\sigma_1 = \delta_0$ fällt nach (3) Fall δ_n für $c > 1$ mit wachsendem c monoton und stetig und strebt gegen Null für $c \rightarrow \infty$. Die zweite Zeile des Schemas Figur 8 gibt die eben beschriebenen Verhältnisse für den Endpunkt des ersten Zweiges wieder. Die linke, kürzere Strecke bedeutet den Ort aller α_1 -Fälle, also den rechten Halbsektor 3, was durch die darunterstehenden Zeichen 3, α_1 angedeutet wird. Den Anfang o dieses Ortes versinnbildlicht das kleine Rechteck am Anfang dieser Strecke, die darin stehende Zahl 1 bedeutet, daß zu ihm der Parameter $c = 1$ gehört. Der Ring am Ende dieser Strecke symbolisiert den Punkt B_2 , die ihm eingeschriebene Zahl $1\frac{1}{2}$ gibt den zugehörigen Trennparameter $c_t(\alpha_1, \delta_0)$ an. Die rechts davon liegende horizontale Strecke versinnbildlicht den Ort aller Endpunkte mit $\sigma_1 = \delta_0$ des ersten Zweiges, also den Sektor 2; sie endet mit dem Punkt A_1 , dem der Parameter $c = \infty$ zukommt, so wie das der letzte Ring der zweiten Zeile andeutet.

Die Ergebnisse, die wir mit unserer jetzigen Methode für den ersten Zweig gefunden und in den beiden ersten Zeilen der Figur 8 niedergelegt haben, decken sich mit denjenigen von Abschnitt II, Seite 18 ff. Wir können mit dieser Methode aber auch den zweiten, dritten und überhaupt jeden beliebigen Zweig untersuchen und im Strukturschema darstellen.¹⁾

In diesem Schema gibt die 1-te Zeile die Verhältnisse für den 1-ten Äquatorpunkt. Jeder Ring symbolisiert den ihm eingeschriebenen Fundamentalpunkt, die eingeschriebene Zahl ist der zugehörige Trennparameter. Jede Strecke zwischen zwei benachbarten Ringen bedeutet den Sektor zwischen den entsprechenden Fundamentalpunkten. Die Nummer dieses Sektors und der Fall, welchen der Äquatorpunkt dort annimmt, steht jeweils über oder unter der Strecke (je nach Platz). Alle ganzen Sektoren werden durch gleichlange

¹⁾ Streng genommen müßten wir von der Gesamtheit der ersten Zweige, der Gesamtheit der zweiten Zweige usw. sprechen, werden aber der Kürze halber meist die oben gebrauchte oder eine ähnliche Ausdrucksweise verwenden.

Strecken dargestellt. Jede Zeile beginnt mit $c = 1$ und ist von links nach rechts nach steigenden c -Werten geordnet. Da die Äquatorpunkte der Kurve $c = 1$ sämtlich mit einem der beiden Punkte u oder o zusammenfallen (Seite 32), beginnt deshalb jede Zeile des Schemas mit einem dieser beiden Punkte und an u schließt sich wegen der Stetigkeit von σ_1 ein Halbsektor von $\mathbf{1}$, an o ein Halbsektor von $\mathbf{3}$. Die Punkte u und o symbolisieren wir durch kleine Rechtecke (im Gegensatz zu den Ringen für die Fundamentalpunkte) und schreiben in diese den jeweiligen Buchstaben (u oder o) und die Zahl 1 , um daran zu erinnern, daß der Wert $c = 1$ dazugehört. Den anschließenden Halbsektor stellen wir durch eine etwas kürzere horizontale Strecke dar, als die ganzen Sektoren und schreiben darüber oder darunter (je nach Platz) den Fall, welcher zu dem in Rede stehenden Äquatorpunkt auf diesem Halbsektor gehört.

Weil das Schema von links nach rechts nach wachsenden c -Werten geordnet sein soll, ist bei Auftreten eines neuen Trennparameters von den beiden zur Wahl stehenden Fällen derjenige der α, β -Gruppe links, derjenige der γ, δ -Gruppe rechts von diesem Trennparameter bzw. vom zugehörigen Fundamentalpunkt zu stellen. Das folgt aus den Ungleichungen in (31). In der nächsten Zeile tritt dieser Trennparameter samt zugehörigem Fundamentalpunkt dann abermals auf und dort ist der γ, δ -Fall links, der α, β -Fall rechts zu stellen, die Reihenfolge der zu diesem Trennparameter gehörigen Fälle ist also gegenüber der vorhergehenden Zeile zu vertauschen.

Weil für $c \rightarrow \infty$ sich jeder Zweig auf den Punkt A_1 zusammenzieht (Seite 35), endigt jede Zeile mit A_1 und es erweist sich als zweckmäßig, diese sämtlichen Punkte A_1 untereinander zu schreiben und die Aufstellung jeder Horizontalreihe bei diesem Punkt anzufangen und dann von rechts nach links, also mit fallenden c -Werten fortzuschreiten.¹⁾

Zur Erläuterung des eben Gesagten besprechen wir noch ausführlich die Aufstellung der dritten und vierten Schemazeile. Die dritte Zeile ist die Darstellung des Anfangspunktes des zweiten Zweiges. Für die c -Werte im Sektor $\mathbf{2}$, δ_0 der zweiten Zeile, d. h. für $1,5 < c < \infty$ ist die Reihenfolge der ersten zwei Äquatorpunkte β_0, δ_0 . Für den dritten Äquatorpunkt bieten sich zunächst wieder zwei Möglichkeiten, entweder der nächste Fall der α, β -Gruppe, das ist α_1 , oder der nächste Fall der γ, δ -Gruppe, das ist γ_1 . Nach (28) ist aber immer $\gamma_1 > \alpha_1$, so daß nur α_1 in Frage kommt. Aus Satz 2 wissen wir außerdem, daß für diese c -Werte der Anfangspunkt des zweiten Zweiges ebenfalls im Sektor $\mathbf{2}$ liegt. Die Strecke (bzw. der Sektor) $\mathbf{2}$, δ_0 der zweiten Zeile geht also in die Strecke (bzw. den Sektor) $\mathbf{2}$, α_1 der dritten Zeile über. — Für die α_1 -Fälle der zweiten Zeile, d. h. für die Kurven $1 < c < 1,5$ hat man beim Übergang zur dritten Zeile als Alternative entweder den auf α_1 nächstfolgenden Fall der α, β -Gruppe, das ist β_1 oder den ersten Fall der γ, δ -Gruppe, das ist δ_0 ; Gleichung (28) liefert hier keine Entscheidung, infolgedessen müssen wir den Trennparameter $c_t(\beta_1, \delta_0)$ berechnen. Man findet für ihn aus (31) mit $n = 0, k = 1$,

$$c_t(\beta_1, \delta_0) = \frac{\pi + 2\omega}{\pi} = \frac{\pi + \pi/3}{\pi} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}. \quad (41)$$

¹⁾ Für die Kurven $c < 1$ würde an die Stelle des Punktes A_1 mit dem Parameter ∞ am Ende der Zeile der Punkt A_2 mit dem Parameter $c = 0$ am Anfang der Zeile treten, die Zeilenanfänge kämen untereinander zu stehen und statt von rückwärts herein mit fallenden c -Werten hätte man die Zeilen vom Anfang an und mit steigenden c -Werten aufzubauen. Insofern würde es sich empfehlen, das Strukturschema für die Kurven $c < 1$, statt für diejenigen $c > 1$ zu bilden. Da wir aber bis jetzt den Schwerpunkt unserer Untersuchungen auf die Kurven $c > 1$ gelegt haben, konstruieren wir der Einheitlichkeit halber für diese auch das Strukturschema.

Zum Anfangspunkt des zweiten Zweiges gehört demnach für $1\frac{1}{3} < c < 1\frac{1}{2}$ der Fall δ_0 , für $1 < c < 1\frac{1}{3}$ der Fall β_1 . Nach Satz 2 liegen diese sämtlichen Punkte im Sektor 3; die dritte Zeile beginnt dementsprechend mit dem Punkt o. Wegen $k = 1 =$ ungerade Zahl gehört zum Trennparameter (41) der Punkt B_1 , d. h. der zweite Zweig der Kurve $c = 1\frac{1}{3}$ artet in den isolierten Punkt B_1 aus (siehe (37)). Für die kontinuierliche Folge der Kurven $1 \leq c \leq 1\frac{1}{2}$ durchläuft also der Endpunkt des ersten Zweiges den Halbsektor oB_2 einmal, während der Anfangspunkt des zweiten Zweiges den Halbsektor oB_1 und zusätzlich noch den vollen Sektor B_1B_2 je einmal durchläuft. Wir sagen dafür: Der Halbsektor oB_2 , α_1 der zweiten Zeile wird in der dritten Zeile auseinandergezogen in den Halbsektor oB_2 , β_1 und den Vollsektor B_1B_2 , δ_0 . Demnach enthält die dritte Zeile einen Sektor mehr als die zweite, ebenso wie diese ihrerseits einen Sektor mehr als die erste Zeile enthält.

Jetzt gehen wir zur vierten Zeile über und beginnen wieder von rechts. Für die Kurven, welche in der Strecke 2, α_1 der dritten Zeile gebündelt sind, d. h. für die Kurven $1\frac{1}{2} < c < \infty$ ist die Reihenfolge der ersten drei Äquatorpunkte β_0 , δ_0 , α_1 ; als vierter Äquatorpunkt kommt für sie daher entweder β_1 oder γ_1 in Frage. Der zugehörige Trennparameter ergibt sich aus der zweiten Gleichung (31) mit $n = 1$, $k = 0$ zu

$$c_t(\beta_1, \gamma_1) = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6. \quad (42)$$

Von den in der Strecke 2, α_1 der dritten Zeile gebündelten Kurven haben also die Kurven $c > 6$ als vierten Äquatorpunkt γ_1 , die Kurven $1\frac{1}{2} < c < 6$ als vierten Äquatorpunkt β_1 . Aus Satz 8 in Verbindung mit den Figuren zu (3) folgt daraus weiter, daß die vierten Äquatorpunkte der Kurven $c > 6$ im Sektor 1, die vierten Äquatorpunkte der Kurven $c < 1\frac{1}{2} < 6$ im Sektor 4 liegen. Diese beiden Sektoren stoßen im Punkte A_2 aneinander; damit in Übereinstimmung steht, daß nach (38) zum Trennparameter (42) der Punkt A_2 gehört.

Die Kurven, welche in der Strecke 3, δ_0 der dritten Zeile gebündelt sind, d. h. die Kurven $1\frac{1}{3} < c < 1\frac{1}{2}$ haben als erste drei Äquatorpunkte β_0 , α_1 , δ_0 , also dieselben Fälle, wie oben, nur in anderer Reihenfolge. Wegen $c < c_t(\beta_1, \gamma_1) = 6$ (vergleiche (42)) kommt für sie aber als vierter Äquatorpunkt nur β_1 in Frage. Aus Satz 8 in Verbindung mit den Figuren zu (3) erkennt man wieder, daß diese vierten Äquatorpunkte sämtlich im Sektor 4 liegen.

Die Kurven, die in der Strecke 3, β_1 der dritten Zeile gebündelt sind, haben als erste drei Äquatorpunkte β_0 , α_1 , β_1 . Als vierter Punkt kommt entweder α_2 oder δ_0 in Frage. Als Trennparameter findet man aus der dritten Zeile (31) mit $n = 0$, $k = 2$

$$c_t(\alpha_2, \delta_0) = \frac{2\pi}{2\pi - \pi/3} = \frac{2}{2 - \frac{1}{3}} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}. \quad (43)$$

Demnach ist für $1\frac{1}{5} < c < 1\frac{1}{3}$ der vierte Äquatorpunkt δ_0 und liegt nach Satz 8 im Sektor 4 und ist für $1 < c < 1\frac{1}{5}$ der vierte Äquatorpunkt α_2 und liegt nach Satz 8 im Sektor 1. Die beiden Sektoren 1 und 4 stoßen in A_2 aneinander und damit in Übereinstimmung gehört nach (38) wegen $k = 2 =$ gerade Zahl zum Trennparameter (43) ebenfalls der Punkt A_2 .

Diese ganzen Verhältnisse sind in der vierten Zeile des Schemas dargestellt. Man erkennt, daß der Halbsektor 3, β_1 der dritten Zeile beim Übergang zur vierten Zeile ebenfalls wieder auseinandergezogen wird in einen Halbsektor und einen Vollsektor, ebenso wie der Halbsektor der ersten Zeile beim Übergang zur zweiten und der Halbsektor der zweiten Zeile beim Übergang zur dritten. Dagegen wird das Streckenpaar 3, δ_0 und 2, α_1 der dritten

Zeile in das Streckenpaar $4, \beta_1$ und $1, \gamma_1$ der vierten Zeile übergeführt. Das bedeutet, daß die dritten Äquatorpunkte der Kurven $1\frac{1}{3} < c < \infty$ die beiden Sektoren 2 und 3 , die vierten Äquatorpunkte derselben Kurven die beiden Sektoren 4 und 1 überdecken und zwar schlicht, weil nach (3) mit wachsendem c das σ_1 monoton fällt. Für $c = 1\frac{1}{3}$ ist der zweite Kurvenzweig in den Punkt B_1 , für $c = \infty$ in den Punkt A_1 ausgeartet. Es ist aber nicht so, daß jeder Strecke des einen Paares genau eine Strecke des anderen Paares entspricht, sondern nur ein Teil der Kurven, die in der Strecke $2, \alpha_1$ der dritten Zeile gebündelt sind, ist in der vierten Zeile in der Strecke $1, \gamma_1$ gebündelt, während der Rest, zusammen mit den Kurven, die in der Strecke $3, \delta_0$ der dritten Zeile gebündelt sind, in der vierten Zeile in der Strecke $4, \beta_1$ zusammenkommen. Im Schema haben wir das durch Linien, die zwischen den beiden Streckenpaaren von rechts oben nach links unten verlaufen, gekennzeichnet.

So von Zeile zu Zeile fortschreitend, kann man auf diese Weise das Schema bis zu jedem beliebigen Zweig fortsetzen. Dabei ist es nützlich, sich von vornherein folgendes klar zu machen: Jede horizontale Strecke der l -ten Zeile symbolisiert eine kontinuierliche Folge von l -ten Äquatorpunkten, zu denen sämtliche derselbe Fall gehört und für die ersten l Äquatorpunkte der Kurven, die in dieser Strecke gebündelt sind, treten dieselben Fälle auf, nur unter Umständen in verschiedener Reihenfolge. Gehört nämlich zu dieser Strecke der l -ten Zeile der μ -te Fall der α, β -Gruppe, so sind unter den l ersten Äquatorpunkten dieser sämtlichen Kurven die μ ersten Fälle der α, β -Gruppe und die $l - \mu$ ersten Fälle der γ, δ -Gruppe und keine anderen; gehört zu dieser Strecke der l -ten Zeile aber der ν -te Fall der γ, δ -Gruppe, so befinden sich unter den l ersten Äquatorpunkten aller dieser Kurven, die ν ersten Fälle der γ, δ -Gruppe und die $l - \nu$ ersten Fälle der α, β -Gruppe und keine anderen. Beim Übergang zur $(l + 1)$ -ten Zeile stehen für diese Kurven als nächster Äquatorpunkt zunächst grundsätzlich zwei Möglichkeiten zur Wahl, entweder der erste Fall der α, β -Gruppe oder der erste Fall der γ, δ -Gruppe der unter den l ersten Äquatorpunkten noch nicht auftritt. Gehört zu einer Strecke der l -ten Zeile ein Fall der α, β -Gruppe, so befindet sich der unmittelbar links neben ihr angegebene Fall der γ, δ -Gruppe noch unter den l ersten Punkten, während der unmittelbar rechts von ihr auftretende Fall der γ, δ -Gruppe der erste nicht mehr darunter befindliche ist und demnach beim Übergang zur $(l + 1)$ -ten Zeile mit zur Wahl steht. Gehört zu einer Strecke der l -ten Zeile aber ein Fall der γ, δ -Gruppe, so befindet sich der unmittelbar rechts neben ihr auftretende Fall der α, β -Gruppe noch unter den l ersten Äquatorpunkten, während der unmittelbar links neben ihr stehende der erste nicht mehr darunter befindliche ist, also beim Übergang zur $(l + 1)$ -ten Zeile zur Alternative steht. Das folgt aus der Anordnung unseres Schemas von links nach rechts mit wachsenden c -Werten in Verbindung mit der Tatsache, daß für alle Kurven, deren c kleiner als der fragliche Trennparameter ist, zum Fall der α, β -Gruppe der kleinere σ_1 -Wert gehört, als zum Fall der γ, δ -Gruppe, während für c -Werte die größer sind, als dieser Trennparameter das Umgekehrte der Fall ist (siehe die vier Ungleichungspaare in (31). Vergl. auch S. 48). Es ist nun möglich, daß auf Grund der Ungleichungen (28) unmittelbar feststeht, daß von den beiden zur Wahl stehenden Fällen das σ_1 der α, β -Gruppe das kleinere ist; dann tritt bei der Fortsetzung in die $(l + 1)$ -te Zeile für alle Kurven, die in der betrachteten Strecke der l -ten Zeile gebündelt sind, dieser Fall auf. Ist aber auf Grund der Ungleichungen (28) keine eindeutige Entscheidung möglich, so berechnet man den Trennparameter c_t zwischen den beiden zur Wahl stehenden Fällen. Liegt er zwischen den beiden Trennparametern, welche die Strecke der l -ten Zeile begrenzen, d. h. in dem Intervall, welches dieser Strecke der l -ten Zeile zukommt, so tritt für die Kurven $c < c_t$ dieses Intervalles der Fall der α, β -Gruppe für die Kurven $c > c_t$ der Fall der γ, δ -

Gruppe als $(l + 1)$ -ter Äquatorpunkt auf. Ist der neue Trennparameter c_t dagegen kleiner als die c -Werte dieses Intervalles, so tritt beim Übergang zur $(l + 1)$ -ten Zeile für alle Kurven dieses Intervalles der Fall der γ, δ -Gruppe, ist er größer als die Werte dieses Intervalles, so tritt für alle diese Kurven der Fall der α, β -Gruppe als $(l + 1)$ -ter Äquatorpunkt auf.

Aus dem Schema der Figur 8 findet man fast unmittelbar für jeden Äquatorpunkt der ersten vier Zweige einer vorgegebenen Kurve $c \geq 1$ mit Apollonischem Winkel $2\omega = \pi/3$ den zugehörigen Fall und den Sektor, in dem dieser Punkt liegt.

Um z. B. den Anfangspunkt des vierten Zweiges der Kurve $c = 1,4$, $2\omega = \pi/3$ zu bestimmen, sucht man in der 7. Zeile des Schemas die beiden benachbarten Trennparameter zwischen denen $c = 1,4$ liegt. Es sind das $c_t = 1\frac{1}{8}$ und $c_t = 1\frac{5}{8}$. Der Strecke zwischen ihnen ist der Fall α_3 und der Sektor **2** zugeordnet, infolgedessen ist der Anfangspunkt des vierten Zweiges der Kurve $c = 1,4$ der Fall α_3 und liegt im Sektor **2**. Aus (3) α für $n = 3$ berechnet man den Wert

$$\sigma_1 = \frac{2}{2,4} \left(3\pi - \frac{\pi}{6} \right) = 2,36\pi, \quad (44)$$

trägt ihn von A_1 aus in der aus der Figur zu (3) α ersichtlichen Richtung auf dem Äquator ab und hat damit den gesuchten Anfangspunkt des vierten Zweiges von $c = 1,4$ gezeichnet vorliegen. Zur Kontrolle berechnet man ebenfalls aus (3) α mit $n = 3$ noch

$$\sigma_2 = \frac{2 \times 1,4}{2,4} \left(3\pi - \frac{\pi}{6} \right) = 3,30\pi \quad (45)$$

und trägt es von A_2 aus in der aus der Zeichnung zu (3) α ersichtlichen Richtung auf dem Äquator ab. Die beiden so konstruierten Punkte müssen zusammenfallen und die beiden so berechneten Werte σ_1 und σ_2 müssen die ersten Gleichungen (3) α für $n = 3$, nämlich die Beziehung $\sigma_1 + \sigma_2 = 6\pi - \pi/3$ erfüllen; man erkennt aus (44) und (45), daß sie dies innerhalb der Rechengenauigkeit auch tun. Eine weitere Kontrolle ist, daß der gefundene Punkt im angegebenen Sektor, das ist hier **2**, liegen muß. Aus Figur 9 erkennt man, daß auch dies der Fall ist.

In (46) wurden auf die eben beschriebene Weise für die Anfangs- und Endpunkte der ersten vier Zweige der Kurve $c = 1,4$, $2\omega = \pi/3$ die σ_1 - und σ_2 -Werte berechnet und verprobt. In Figur 9 wurden dann diese σ_1 -Werte auf dem Äquator abgetragen und mit σ_2 verprobt. Damit liegen die Äquatorpunkte der ersten vier Zweige gezeichnet vor.

$$\begin{aligned} 1. \text{ Zweig Anfang } \mathbf{1}, \beta_0, \sigma_1 &= \frac{2}{2,4} \cdot \frac{\pi}{6} = 0,138\pi, \quad \sigma_2 = \frac{2,8}{2,4} \cdot \frac{\pi}{6} = 0,195\pi; \quad \sigma_2 + \sigma_1 = 0,33, \\ \text{Ende } \mathbf{3}, \alpha_1, \sigma_1 &= \frac{2}{2,4} \cdot \frac{5}{6}\pi = 0,692\pi, \quad \sigma_2 = \frac{2,8}{2,4} \cdot \frac{5}{6}\pi = 0,971\pi; \quad \sigma_2 + \sigma_1 = 1,66, \\ 2. \text{ Zweig Anfang } \mathbf{3}, \delta_0, \sigma_1 &= \frac{2}{0,4} \cdot \frac{\pi}{6} = 0,832\pi, \quad \sigma_2 = \frac{2,8}{0,4} \cdot \frac{\pi}{6} = 1,165\pi; \quad \sigma_2 - \sigma_1 = 0,33, \\ \text{Ende } \mathbf{4}, \beta_1, \sigma_1 &= \frac{2}{2,4} \cdot \frac{7}{6}\pi = 0,97\pi, \quad \sigma_2 = \frac{2,8}{2,4} \cdot \frac{7}{6}\pi = 1,36\pi; \quad \sigma_2 + \sigma_1 = 2,33, \end{aligned} \quad (46)$$

3. Zweig Anfang 4, $\alpha_2, \sigma_1 = \frac{2}{2,4} \cdot \frac{11}{6} \pi = 1,53\pi$, $\sigma_2 = \frac{2,8}{2,4} \cdot \frac{11}{6} \pi = 2,14\pi$; $\sigma_2 + \sigma_1 = 3,67$,

Ende 2, $\beta_2, \sigma_1 = \frac{2}{2,4} \cdot \frac{13}{6} \pi = 1,81\pi$, $\sigma_2 = \frac{2,8}{2,4} \cdot \frac{13}{6} \pi = 2,53\pi$; $\sigma_2 + \sigma_1 = 4,34$,

4. Zweig Anfang 2, $\alpha_3, \sigma_1 = \frac{2}{2,4} \cdot \frac{17}{6} \pi = 2,36\pi$, $\sigma_2 = \frac{2,8}{2,4} \cdot \frac{17}{6} \pi = 3,30\pi$; $\sigma_2 + \sigma_1 = 5,66$,

Ende 4, $\beta_3, \sigma_1 = \frac{2}{2,4} \cdot \frac{19}{6} \pi = 2,64\pi$, $\sigma_2 = \frac{2,8}{2,4} \cdot \frac{19}{6} \pi = 3,69\pi$; $\sigma_2 + \sigma_1 = 6,33$.

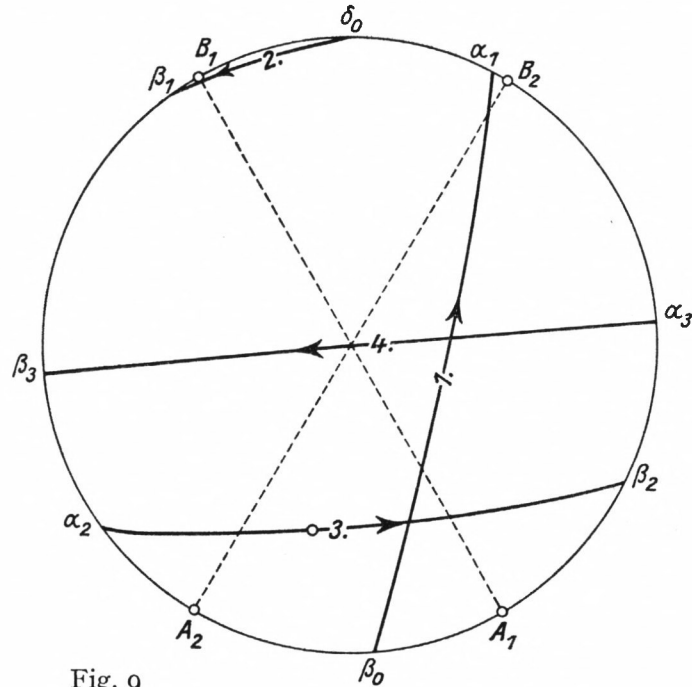


Fig. 9

$$2\omega = \frac{\pi}{3}$$

Die ersten vier Zweige
der Kurve $c=1,4$

Aus der Grundrißkonstruktion erkennt man unmittelbar, daß jeder Zweig ganz zwischen den beiden 1-Sehnen und ebenso ganz zwischen den beiden 2-Sehnen durch seine Äquatorpunkte liegt und die senkrechte Projektion des laufenden Punktes eines solchen Zweiges sowohl auf den Durchmesser A_1B_1 als auf den Durchmesser A_2B_2 nie rückläufig wird. In manchen Fällen genügt dies bereits, um bei gegebenem Anfangs- und Endpunkt den Zweig zu skizzieren. Im allgemeinen aber empfiehlt es sich, in den beiden Äquatorpunkten nach II (34) die Tangente und außerdem nach der ersten und zweiten Gleichung II (32) ein oder zwei Zwischenpunkte zu berechnen; daß diese Formeln auch für beliebige Kurvenzweige gelten, wird auf Seite 70/71 auseinandergesetzt. Man kann sich Zwischenpunkte auch durch Konstruktion vom Anfangs- oder Endpunkt des Zweiges aus (S. 36/37) verschaffen. Der Verlauf der Zweige in Figur 9 wurde auf die eben beschriebene Weise gefunden.

Das allgemeine Strukturschema

Die Anordnung der Fälle und Fundamentalpunkte in dem Schema der Figur 8 folgt einer leicht zu überblickenden Gesetzmäßigkeit. Wir wollen im folgenden zeigen, daß eine derartige Gesetzmäßigkeit aber nicht nur für den Winkel $2\omega = \pi/3$ und die ersten vier Zweige, sondern ganz allgemein für beliebigen Apollonischen Winkel $0 < 2\omega < \pi$ und für beliebige Zweige gilt. Die hierbei auftretenden Überlegungen und Sätze werden übersichtlicher und leichter zu formulieren, wenn man einerseits für die Fälle der α, β -Gruppe, andererseits für die Fälle der γ, δ -Gruppe je einheitlich ein und denselben Buchstaben verwendet. Wir wählen für die α, β -Gruppe den Buchstaben ξ , für die γ, δ -Gruppe den Buchstaben η und ersetzen die Zeichen

$$\beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_\mu, \beta_\mu, \dots \quad (47)$$

in dieser Reihenfolge durch die Zeichen

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \dots, \xi_{2\mu}, \xi_{2\mu+1}$$

und ebenso die Zeichen

$$\delta_0, \gamma_1, \delta_1, \gamma_2, \delta_2, \dots, \gamma_\mu, \delta_\mu, \dots \quad (48)$$

in dieser Reihenfolge durch

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \dots, \eta_{2\mu}, \eta_{2\mu+1}, \dots;$$

es ist also

$$\alpha_\mu \equiv \xi_{2\mu}, \quad \beta_\mu \equiv \xi_{2\mu+1}, \quad \gamma_\mu \equiv \eta_{2\mu}, \quad \delta_\mu \equiv \eta_{2\mu+1}. \quad (49)$$

An Hand der Figuren zu (3) erkennt man, daß σ_1 und σ_2 auf dem Äquator für die ξ -Fälle in entgegengesetzter Richtung, für die η -Fälle gleichsinnig gezählt werden.

Den Ungleichungen (27) und (28) entsprechen mit dieser Bezeichnungsweise die Ungleichungen

$$\xi_\mu < \xi_{\mu+1} \quad \eta_\mu < \eta_{\mu+1}, \quad (50) \text{ (entspricht (27))}$$

$$\xi_\mu < \eta_\mu. \quad (51) \text{ (entspricht (28))}$$

Für den Trennparameter zwischen ξ_v und η_v schreiben wir $c_t(\eta, v)$. Mit dieser Bezeichnungsweise findet man unter Beachtung von (49) die Identitäten

$$\begin{aligned} c_t(\alpha_{n+k}, \gamma_n) &\equiv c_t(2n + 2k, 2n), \\ c_t(\beta_{n+k}, \gamma_n) &\equiv c_t(2n + 2k + 1, 2n), \\ c_t(\alpha_{n+k}, \delta_n) &\equiv c_t(2n + 2k, 2n + 1), \\ c_t(\beta_{n+k}, \delta_n) &\equiv c_t(2n + 2k + 1, 2n + 1) \end{aligned} \quad (52)$$

und (37) und (38) lauten in dieser Bezeichnungsweise: es gehören

$$\text{zum Punkt } A_1 \text{ die Trennparameter } c_t(\rho + 4\tau, \rho), \quad (53)$$

$$\text{zum Punkt } B_1 \text{ die Trennparameter } c_t(\rho + 4\tau + 2, \rho),$$

$$\text{zum Punkt } A_2 \text{ die Trennparameter } c_t(2\rho + 4\tau + 1, 2\rho) \text{ und } c_t(2\rho + 1 + 4\tau + 3, 2\rho + 1),$$

$$\text{zum Punkt } B_2 \text{ die Trennparameter } c_t(2\rho + 4\tau + 3, 2\rho) \text{ und } c_t(2\rho + 1 + 4\tau + 1, 2\rho + 1).$$

ρ und τ sind hier jeweils ganze, nicht negative Zahlen, deren Wertebereich nur dadurch beschränkt ist, daß wegen (51) der zum ξ -Fall gehörende Index (der Index links vom Komma) größer sein muß als der Index des η -Falles (der Index rechts vom Komma) und daß jeder der beiden Indizes eine natürliche Zahl sein muß, da sowohl in der Reihe der ξ -Fälle, als auch in der Reihe der η -Fälle der erste Index 1 ist (siehe (47) und (48)).

Wir geben die Herleitung der vierten Zeile (53). Nach (38) gehören zum Punkt B_2 die Trennparameter

$$c_t(\beta_{n+2\kappa+1}, \gamma_n) \stackrel{(49)}{=} c_t(2n+4\kappa+2+1, 2n) = c_t(2n+4\kappa+3, 2n) \quad (54)$$

und

$$c_t(\alpha_{n+2\kappa+1}, \delta_n) = c_t(2n+4\kappa+2, 2n+1) = c_t(2n+1+4\kappa+1, 2n+1)$$

und wenn man hier n durch ρ und κ durch τ ersetzt, stehen auf der rechten Seite gerade die beiden Trennparameter der vierten Zeile (53). Ganz entsprechend bestätigt man die übrigen Zeilen von (53).

Wegen der Ungleichungen (50) gibt es keine Trennparameter zwischen Fällen ein und derselben Gruppe und da im Strukturschema zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Strecken bzw. Fällen einer Zeile immer ein Trennparameter steht, *treten in keiner Zeile des Schemas zwei Fälle ein und derselben Gruppe unmittelbar nebeneinander auf, sondern es wechseln in jeder Zeile ξ - und η -Fälle ständig miteinander ab.*

In der l -ten Zeile trete der Fall ξ_μ und unmittelbar rechts daneben der Fall η_ν auf



Fig. 10

(Figur 10). Nach (31) sind dann für den zugehörigen Trennparameter $c_t(\xi_\mu, \eta_\nu)$ die beiden σ_1 -Werte ξ_μ und η_ν gleich, während für die c -Werte, die zum ξ_μ -Fall gehören, wegen $c < c_t(\mu, \nu)$ die Ungleichung $\xi_\mu < \eta_\nu$, für die c -Werte, die zum η_ν -Fall gehören, wegen $c > c_t(\mu, \nu)$ die Ungleichung $\xi_\mu > \eta_\nu$ besteht. Daraus in Verbindung mit den Ungleichungen (50) folgt einerseits, daß für die Kurven des ξ_μ -Falles η_ν der erste nicht mehr unter den l ersten Äquatorpunkten vorkommende η -Fall und daher $\nu = l - \mu + 1$ ist und andererseits, daß für die Kurven des η_ν -Falles ξ_μ der erste nicht mehr unter den l ersten Äquatorpunkten vorkommende ξ -Fall und daher $\mu = l - \nu + 1$ ist.

Im Gegensatz zu vorhin trete jetzt in der l -ten Zeile zuerst der Fall η_ν und unmittelbar rechts von ihm der Fall ξ_μ auf (Figur 11). Dann



Fig. 11

gehören zum Fall η_ν Parameterwerte $c < c_t(\mu, \nu)$ und wegen (31) gilt für diese $\xi_\mu < \eta_\nu$, daher ist jetzt ξ_μ noch unter den ersten l Äquatorpunkten dieser Kurven enthalten und zwar als letzter ξ -Fall, es ist $\mu = l - \nu$; zum Fall ξ_μ gehören diesmal Parameterwerte $c > c_t(\mu, \nu)$, für diese ist, wieder nach (31), $\eta_\nu < \xi_\mu$, daher ist jetzt η_ν noch unter den l ersten Äquatorpunkten dieser Kurven und zwar als letzter η -Fall, es ist $\nu = l - \mu$. Daß es sich beidemal um den letzten noch unter den l ersten Äquatorpunkten auftretenden Fall der entsprechenden Gruppe handelt, folgt aus $\xi_\mu = \eta_\nu$ für $c = c_t(\xi_\mu, \eta_\nu)$ in Verbindung mit (50).

Legt man Figur 11 links neben Figur 10, aber so, daß die Strecken ξ_μ sich decken, so erkennt man die Richtigkeit von Satz 11a: *In der l -ten Zeile des Strukturschemas kommt unmittelbar links von ξ_μ der Fall $\eta_{l-\mu}$ und unmittelbar rechts von ξ_μ der Fall $\eta_{l-\mu+1}$, man hat die Folge $\eta_{l-\mu}, \xi_\mu, \eta_{l-\mu+1}$.*

Legt man Figur 11 rechts neben Figur 10, aber so, daß die Strecken η_ν sich decken, so erkennt man die Richtigkeit von Satz 11b: *In der l -ten Zeile des Strukturschemas kommt unmittelbar links von η_ν der Fall $\xi_{l-\nu+1}$, unmittelbar rechts von η_ν der Fall $\xi_{l-\nu}$, man hat die Folge $\xi_{l-\nu+1}, \eta_\nu, \xi_{l-\nu}$.*

Aus den Sätzen 11a und 11b folgt Satz 12: *In jeder Zeile wechseln ξ - und η -Fälle ständig miteinander ab und beim Fortschreiten von links nach rechts nimmt der Index der ξ -Fälle jeweils um 1 ab, der Index der η -Fälle jeweils um 1 zu.*

Die Äquatorpunkte der Kurve $c = 1$ sind die Punkte o und u (siehe z. B. Figur II 7). Für diese müssen immer σ_1 und σ_2 in entgegengesetzter Richtung auf dem Äquator gezählt werden, bei gleichsinniger Zählung nämlich könnte das von A_1 aus gezählte σ_1 niemals gleich dem von A_2 aus gezählten σ_2 sein. Daher besitzt die Kurve $c = 1$ nur ξ -Fälle (siehe den Text nach (49)) und wegen der ersten Ungleichung (50) ist ihr 1-ter Fall ξ_1 . Die 1-te Zeile beginnt deshalb mit ξ_1 . Nach Figur 10 ist der Index des η -Falles, der in der 1-ten Zeile unmittelbar rechts auf ξ_1 folgt $1 - 1 + 1 = 1$. Unmittelbar rechts neben dem ξ_1 der 1-ten Zeile kommt daher η_1 und wir haben Satz 13: *Die 1-te Zeile beginnt mit ξ_1, η_1 .*¹⁾

u liegt im Sektor $\mathbf{1}$, o liegt im Sektor $\mathbf{3}$, die beiden Punkte liegen also in verschiedenen Sektoren. Wie wir bereits aus Teil II S. 18 wissen, fällt für die Kurve $c = 1$ der erste Äquatorpunkt (Anfang des ersten Zweiges) in u ; daraus folgt nach Satz 9, daß der zweite Äquatorpunkt (Endpunkt des ersten Zweiges) in o liegt, daraus folgt nach Satz 2, daß der dritte Äquatorpunkt (Anfang des zweiten Zweiges) ebenfalls in o liegt, daraus folgt nach Satz 9, daß der vierte Äquatorpunkt (Ende des zweiten Zweiges) in u liegt, daraus folgt nach Satz 2, daß der fünfte Äquatorpunkt (Anfang des dritten Zweiges) ebenfalls in u liegt und so fortfahrend bzw. durch Schluß von q auf $q + 1$ bestätigt man Satz 14: *Die $(4q + 1)$ -te und die $(4q + 4)$ -te Zeile beginnen mit $u, \mathbf{1}$, die $(4q + 2)$ -te und die $(4q + 3)$ -te Zeile beginnen mit $o, \mathbf{3}$.*

Für alle Kurven $c > c_t (i + 1, i)$ gilt $\xi_{i+1} > \eta_i$, d. h. es kommt bei ihnen der Äquatorpunkt η_i vor dem Äquatorpunkt ξ_{i+1} . Für jede endliche Zahl i ist $c_t (i + 1, i)$ ebenfalls endlich. Denn die Trennparameter (31) sind endlich, falls die Indizes der darin auftretenden α -, $-\beta$ -, γ - und δ -Fälle endlich sind und diese ihrerseits sind nach (49) endlich, wenn die entsprechenden ξ - und η -Fälle endlichen Index besitzen. C sei die obere Schranke der Trennparameter $c_t (i + 1, i)$, wo i die Werte $1, 2, \dots, n$ durchläuft und n eine endliche ganze Zahl bedeutet. Nach dem eben Gesagten ist C dann endlich und für alle Kurven $c > C$ kommt der Äquatorpunkt η_i vor dem Äquatorpunkt ξ_{i+1} , wegen (51) aber nach ξ_i . Es wechseln also für alle Kurven $c > C$ und damit auch für $c \rightarrow \infty$, in der Reihe der Äquatorpunkte ξ - und η -Fälle ständig miteinander ab, die $2n$ ersten Äquatorpunkte haben für alle diese Kurven die Reihenfolge

$$\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_{i-1}, \eta_{i-1}, \xi_i, \eta_i, \xi_{i+1}, \eta_{i+1}, \dots, \xi_n, \eta_n. \quad (55)$$

Da im Strukturschema für das Ende jeder Zeile $c \rightarrow \infty$ geht, gibt (55) die Reihenfolge der letzten Fälle der $2n$ ersten Zeilen, die Folge (55) tritt – senkrecht untereinander geschrieben – in der letzten Spalte der $2n$ ersten Zeilen auf und wir haben Satz 15: *Der letzte (der am weitesten rechts gelegene) Fall der 1-ten Zeile ist für gerades $l = 2p$ der Fall η_p , für ungerades $l = 2p - 1$ der Fall ξ_p .*

Die $2p$ -te Zeile beginnt mit ξ_{2p}, η_1 (Satz 13) und endet mit η_p (Satz 15). Zwischen η_1 und η_p treten wegen Satz 12 (Zunahme des Index von η um jeweils 1) alle η -Fälle auf, deren Index zwischen 1 und p liegt und sonst keiner. Im ganzen sind es demzufolge genau p -Fälle η . Zwischen je 2 derselben liegt genau ein ξ -Fall (Satz 12) das sind $p - 1$ Fälle ξ und dazu kommt noch das ξ_{2p} am Zeilenanfang, so daß es auch genau p Fälle ξ sind. Im ganzen treten in der $2p$ -ten Zeile also $p + p = 2p$ Fälle auf. — Die $(2p - 1)$ -te Zeile beginnt mit ξ_{2p-1} und endet mit ξ_p . Dazwischen liegen genau die ξ -Fälle, deren Index

¹⁾ Streng genommen müßte es heißen „beginnt bezüglich der ξ - und η -Fälle mit ξ_1, η_1 “. Wir verwenden im allgemeinen die obige kürzere Ausdrucksweise und eine entsprechende auch für die Zeilenenden.

zwischen $2p-1$ und p liegt, im ganzen treten also genau p Fälle ξ auf. Zwischen je 2 derselben liegt genau ein η -Fall, das gibt $p-1$ Fälle η . Im ganzen haben wir also in der $(2p-1)$ -ten Zeile $p + p-1 = 2p-1$ Fälle. Diese beiden Ergebnisse zusammen liefern Satz 16: *In der 1-ten Zeile des Strukturschemas treten genau 1 Fälle und damit auch 1 Strecken auf.*

Unter Heranziehung der Sätze 11a bis 16 schließlich findet man Satz 17. (abgedruckt auf dem gegenüberstehenden Blatt)

Anfang und Ende jeder der Zeilen (56) bis (59) und die Reihenfolge der ξ - und η -Fälle ergibt sich aus den Sätzen 11a bis 16. Wir müssen jetzt noch zeigen, wie man die Fundamentalpunkte zwischen den einzelnen Strecken einer Zeile feststellt. Aus Satz 12 wissen wir, daß längs jeder Zeile beim Fortschreiten von links nach rechts für die dabei auftretenden Trennparameter $c_t(\mu, \nu)$ die Differenz $\mu - \nu$ um 1 abnimmt. Demzufolge ist $\mu - \nu$ für jeden zweiten (d. h. für einen über den anderen) Trennparameter eine gerade Zahl und ebenso für jeden zweiten Trennparameter eine ungerade Zahl. Diese Feststellung für gerades $\mu - \nu$ zusammen mit den vier Zeilen (53) liefert Satz 18: *In ein und derselben Zeile des Strukturschemas ist jeder zweite Punkt und sonst keiner ein Fundamentalpunkt mit dem Index 1 und zwar wechseln in dieser Zeile die Fundamentalpunkte A_1 und B_1 dauernd miteinander ab.* Weiter findet man mit Hilfe der obigen Feststellung für ungerades $\mu - \nu$ Satz 19: *In ein- und derselben Zeile des Strukturschemas tritt niemals sowohl A_2 als auch B_2 auf, sondern entweder enthält diese Zeile von den beiden Punkten A_2, B_2 nur A_2 oder nur B_2 .*

Tritt nämlich in einer Zeile an einer bestimmten Stelle der Trennparameter

$$c_t(2\rho + 4\tau + 1, 2\rho) \quad (60)$$

auf, so ist auf Grund von Satz 12 der übernächste Trennparameter rechts von ihm

$$c_t(2\rho + 4\tau, 2\rho + 1) = c_t(2\rho + 1 + 4\tau - 1, 2\rho + 1) = c_t(2\rho + 1 + 4\kappa + 3, 2\rho + 1) \quad (\text{mit } \kappa = \tau - 1) \quad (61a)$$

und der hierauf übernächste Trennparameter nach rechts ist

$$c_t(2\rho + 1 + 4\kappa + 2, 2\rho + 2) = c_t(2\rho + 2 + 4\kappa + 1, 2\rho + 2) = c_t(2r + 4\kappa + 1, 2r) \quad (\text{mit } 2r = 2\rho + 2). \quad (61b)$$

Wegen der dritten Zeile (53), erster dortiger Trennparameter, gehört zum Trennparameter (60) der Punkt A_2 und wegen der dritten Zeile (53), zweiter dortiger Trennparameter, gehört zum Trennparameter (61a) ebenfalls A_2 ; weiter ist der Trennparameter (61b) vom selben Typ wie der erste Trennparameter in der dritten Zeile (53) und damit vom selben Typ wie (60), so daß auf ihn wieder ein Trennparameter vom Typ des zweiten Parameters in der dritten Zeile (53) und damit vom selben Typ wie (61a) folgt usw. Infolgedessen tritt in der betrachteten Zeile beim Trennparameter (60) und rechts von ihm von den Fundamentalpunkten mit dem Index 2 nur A_2 auf. Ebenso zeigt man, daß in dieser Zeile dann auch links davon und damit in der ganzen Zeile B_2 nicht auftritt. Ganz entsprechend bestätigt man, daß in einer Zeile A_2 nicht auftreten kann, wenn sie auch nur einen Punkt B_2 enthält, womit Satz 19 vollständig bewiesen ist.

Nun beginnt die $(4q+1)$ -te Zeile mit den Fällen $\xi_{4q+1}, \eta_1, \xi_{4q}$. Aus der ersten Zeile (53) folgt mit $\rho = 1, \tau = q$, daß zum Trennparameter $c_t(4q+1, 1) = c_t(1+4q, 1)$ der Punkt

Satz 17: Unabhängig vom Apollonischen Winkel $0 < 2\omega < \pi$ lautet im Strukturschema

die $(4q + 1)$ -te Zeile $((4q + 1)$ -ter Äquatorpunkt, Anfangspunkt des $(2q + 1)$ -ten Zweiges)

$$\begin{array}{c} \boxed{u} \\ \boxed{1} \end{array} \xrightarrow{\xi_{4q+1}} A_1 \xrightarrow{\eta_1} A_2 \xrightarrow{\xi_{4q}} B_1 \xrightarrow{\eta_2} A_2 \xrightarrow{\xi_{4q-1}} A_1 \dots A_2 \xrightarrow{\xi_{2q+1}} A_1 \quad (56)$$

q Folgen $A_1 \xrightarrow{\eta} A_2 \xrightarrow{\xi} B_1 \xrightarrow{\eta} A_2 \xrightarrow{\xi}$

die $(4q + 2)$ -te Zeile $((4q + 2)$ -ter Äquatorpunkt, Endpunkt des $(2q + 1)$ -ten Zweiges)

$$\begin{array}{c} \boxed{o} \\ \boxed{1} \end{array} \xrightarrow{\xi_{4q+2}} B_2 \xrightarrow{\eta_1} A_1 \xrightarrow{\xi_{4q+1}} B_2 \xrightarrow{\eta_2} B_1 \xrightarrow{\xi_{4q}} B_2 \xrightarrow{\eta_3} A_1 \dots B_2 \xrightarrow{\eta_{2q+2}} A_1 \quad (57)$$

q Folgen $A_1 \xrightarrow{\xi} B_2 \xrightarrow{\eta} B_1 \xrightarrow{\xi} B_2 \xrightarrow{\eta}$

die $(4q + 3)$ -te Zeile $((4q + 3)$ -ter Äquatorpunkt, Anfangspunkt des $(2q + 2)$ -ten Zweiges)

$$\begin{array}{c} \boxed{o} \\ \boxed{1} \end{array} \xrightarrow{\xi_{4q+3}} B_1 \xrightarrow{\eta_1} B_2 \xrightarrow{\xi_{4q+2}} A_1 \xrightarrow{\eta_2} B_2 \xrightarrow{\xi_{4q+1}} B_1 \xrightarrow{\eta_3} B_2 \xrightarrow{\xi_{4q}} A_1 \dots B_2 \xrightarrow{\xi_{2q+2}} A_1 \quad (58)$$

q Folgen $A_1 \xrightarrow{\eta} B_2 \xrightarrow{\xi} B_1 \xrightarrow{\eta} B_2 \xrightarrow{\xi}$

die $(4q + 4)$ -te Zeile $((4q + 4)$ -ter Äquatorpunkt, Endpunkt des $(2q + 2)$ -ten Zweiges)

$$\begin{array}{c} \boxed{u} \\ \boxed{1} \end{array} \xrightarrow{\xi_{4q+4}} A_2 \xrightarrow{\eta_1} B_1 \xrightarrow{\xi_{4q+3}} A_2 \xrightarrow{\eta_2} A_1 \xrightarrow{\xi_{4q+2}} A_2 \xrightarrow{\eta_3} B_1 \xrightarrow{\xi_{4q+1}} A_2 \xrightarrow{\eta_4} A_1 \dots A_2 \xrightarrow{\eta_{2q+2}} A_1 \quad (59)$$

q Folgen $A_1 \xrightarrow{\xi} A_2 \xrightarrow{\eta} B_1 \xrightarrow{\xi} A_2 \xrightarrow{\eta}$

In den vier Zeilen (56) bis (59) ist zu setzen $q = 0, 1, 2, \dots$, und sowohl in den q Folgen $A_1-A_2-B_1-A_2$ -, die in (56) und in (59) durch die geschweifte Klammer zusammengefaßt sind, als auch in den q Folgen $A_1-B_2-B_1-B_2$ -, die in (57) und in (58) in der geschweiften Klammer zusammengefaßt sind, nimmt von links nach rechts der Index von ξ je um 1 ab, der Index von η je um 1 zu.

A_1 gehört; aus der dritten Zeile (53) folgt mit $\rho = 0$, $\tau = \bar{q}$, daß zum Trennparameter $c_t(4q, 1) = c_t(1 + 4q - 1, 1) = c_t(1 + 4\bar{q} + 3, 1)$ der Punkt A_2 gehört, so daß in der $(4q + 1)$ -ten Zeile die Folge der Fundamentalpunkte mit A_1, A_2 beginnt. Aus den Sätzen 18 und 19 findet man dann die übrigen Punkte dieser Zeile, so wie sie in (56) angegeben sind. Daß in der dortigen geschweiften Klammer gerade q Folgen der angegebenen Art zusammengefaßt sind, folgt aus Satz 16. — Ganz entsprechend, wie es hier für die $(4q + 1)$ -te Zeile ausführlich besprochen wurde, findet man auch die Fundamentalpunkte der Zeilen (57), (58) und (59).

Zu jeder Strecke des Strukturschemas gehört der Sektor, der von denselben Fundamentalpunkten begrenzt wird, wie diese Strecke. Man kann ihn anhand von Figur 1 (Seite 28) leicht bestimmen.

Damit ist die Aufstellung der Zeilen (56) bis (59) vollständig erledigt und Satz 17 bewiesen.

Als nächstes bringen wir Satz 20: *Für den p-ten Zweig einer beliebigen Apollonischen Kurve $c \geq 1$ liegen sämtliche σ_2 -Werte im Intervall*

$$(p - 1)\pi \leq \sigma_2 \leq p\pi. \quad (62)$$

Die σ_1 -Werte dagegen nehmen von $c = 1$ an mit wachsendem c für den Anfangspunkt des p -ten Zweiges monoton und stetig von $(p - 1)\pi + \omega$ bis Null, für den Endpunkt des p -ten Zweiges monoton und stetig von $p\pi - \omega$ bis Null ab. Beweis: Für $c=1$ gehört zum Anfangspunkt des p -ten Zweiges der Fall $\xi_{2p-1} = \beta_{p-1}$, zum Endpunkt des p -ten Zweiges der Fall $\xi_{2p} = \alpha_p$ (Satz 13 für $l = 2p - 1$ und $l = 2p$; siehe außerdem (49)). Setzt man in (3) beim β -Fall $n = p - 1$, so erhält man für den Anfangspunkt des p -ten Zweiges der Kurve $c = 1$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = (p - 1)\pi + \omega; \quad (63)$$

setzt man in (3) beim α -Fall $n = p$, so erhält man für den Endpunkt des p -ten Zweiges der Kurve $c = 1$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = p\pi - \omega. \quad (64)$$

Nun schließen innerhalb jeder Zeile die σ_1 -Werte ($i = 1, 2$) auch in den Fundamentalpunkten bzw. Trennparametern stetig aneinander und nach (3) nimmt σ_1 für jeden der vier Fälle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit wachsendem c monoton und stetig ab und strebt für $c \rightarrow \infty$ gegen Null. Damit ist die Aussage von Satz 20 bezüglich σ_1 bewiesen. — Wieder aus (3) erkennt man, daß von $c = 1$ ab σ_2 mit wachsendem c für jeden ξ -Fall (α - oder β -Fall) monoton und stetig steigt, für jeden η -Fall (γ - oder δ -Fall) monoton und stetig fällt. Da nun bei jedem Trennparameter ein Fall der ξ - und ein Fall der η -Gruppe miteinander abwechseln (Satz 12), ändert bei jedem Trennparameter innerhalb ein und derselben Zeile des Schemas σ_2 den Sinn seiner Steigung, ist es vorher monoton gefallen, so steigt es danach monoton und umgekehrt. Außerdem wird σ_2 nur für Trennparameter ein Vielfaches von π (Seite 36). Infolgedessen kann längs keiner Zeile σ_2 aus dem Intervall $n\pi \leq \sigma_2 \leq (n + 1)\pi$ heraus, in dem es für den Anfang dieser Zeile, d. h. für $c = 1$, liegt. Auf Grund der Voraussetzung $0 < \omega < \pi/2$ ist das für den Anfangspunkt des p -ten Zweiges wegen (63) und für den Endpunkt des p -ten Zweiges wegen (64) das Intervall

$$(p - 1)\pi \leq \sigma_2 \leq p\pi. \quad (65)$$

Dann liegen auch alle übrigen Punkte des p -ten Zweiges im Intervall (65), womit wir Satz 20 vollständig bewiesen haben.

Schreibt man die einzelnen in Satz 17 auftretenden Zeilen für $q = 0, 1, 2, \dots$ in ihrer natürlichen Reihenfolge so an, daß jeweils die Enden A_1, ∞ senkrecht untereinander zu stehen kommen, so erhält man das allgemeine Strukturschema, dessen erste acht Zeilen Figur 12 wiedergibt.

Diskussion des allgemeinen Strukturschemas

Jede ungerade numerierte Zeile des Strukturschemas und die unmittelbar darauffolgende, also die nächste gerade numerierte Zeile geben Anfangs- und Endpunkt ein und desselben Zweiges. Bei jedem solchen Zeilenpaar, das einen Zweig darstellt, steht unter jedem Punkt A_1 wieder ein Punkt A_1 , zu den beiden Punkten A_1 gehört derselbe Trennparameter und für diesen Trennparameter artet der in Rede stehende Zweig in den Punkt A_1 aus. Entsprechendes gilt für B_1 . In der Darstellung des p -ten Zweiges gehöre zu einem solchen untereinanderstehenden Paar A_1 der Trennparameter c_A , zum nächsten rechts davon auftretenden untereinanderstehenden Paar B_1 der Trennparameter c_B . Zwischen den beiden Punkten A_1 und B_1 liegt in der Zeile für den Anfangspunkt des p -ten Zweiges einer der beiden Punkte A_2, B_2 , wir nennen ihn I , in der Zeile für den Endpunkt des p -ten Zweiges der andere, wir nennen ihn I' . Dann artet der p -te Zweig für $c = c_A$ in den Punkt A_1 , für $c = c_B$ in den Punkt B_1 aus (Satz 10) und für die dazwischen liegenden Kurven

$$c_A < c < c_B \quad (66)$$

durchläuft mit wachsendem c der Anfangspunkt des p -ten Zweiges den Halbkreis $A_1 I B_1$, der Endpunkt des p -ten Zweiges den Halbkreis $A_1 I' B_1$, beide in Richtung von A_1 nach B_1 ; denn nach (3) ändert sich mit c auch σ_1 monoton und stetig.

Es liegt nach dem eben Gesagten die Vermutung nahe, daß die p -ten Zweige der Kurven

$$c_A \leq c \leq c_B \quad (67)$$

die Äquatorkreisfläche¹⁾ schlicht überdecken. Wir wollen jetzt zeigen, daß dem tatsächlich so ist.

Weil nach Satz 20 in jeder Zeile die σ_1 -Werte mit wachsendem c monoton und stetig abnehmen und weil σ_1 ein Vielfaches von π in den beiden Punkten A_1 und B_1 und nur in diesen annimmt, liegen für die Anfangspunkte der p -ten Zweige (67) die σ_1 -Werte sämtlich in ein und demselben Intervall $(m-1)\pi \leq \sigma_1 \leq m\pi$ (m natürliche Zahl), während sie für die p -ten Zweige aller übrigen Kurven c außerhalb dieses Intervalles liegen. Nach Satz 20 und Satz 6 sind infolgedessen die p -ten Zweige (67) durch die beiden Bedingungen

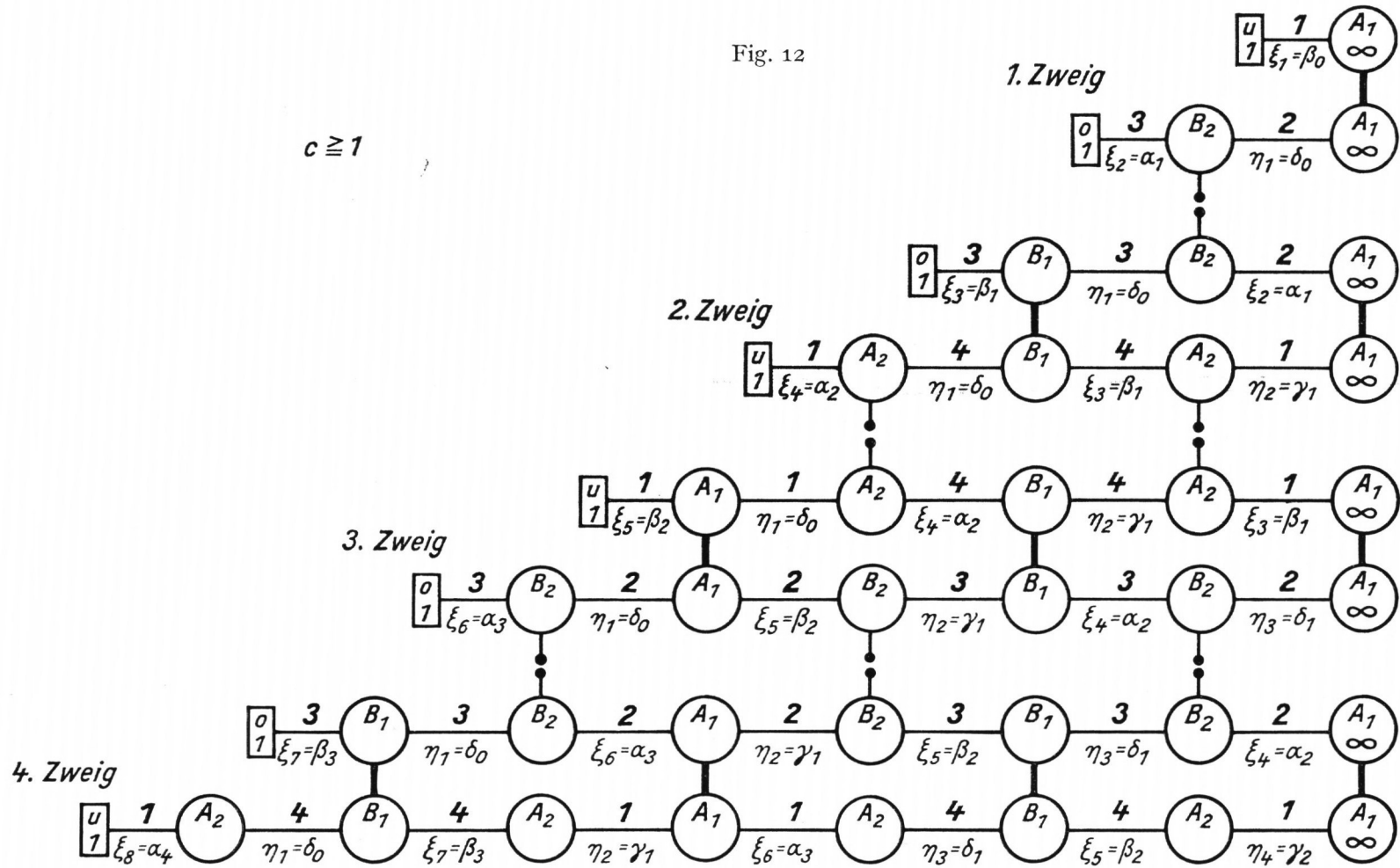
$$(m-1)\pi \leq \sigma_1 \leq m\pi, \quad (m \text{ und } p \text{ natürliche Zahlen}) \quad (68)$$

$$(p-1)\pi \leq \sigma_2 \leq p\pi \quad (69)$$

gekennzeichnet.

¹⁾ Unter der Äquatorkreisfläche verstehen wir die Kreisfläche der Grundrißebene, die vom Äquator begrenzt wird, einschließlich des Äquators selbst.

Fig. 12



Allgemeines Strukturschema der ersten vier Zweige
für $c \geq 1$

Satz 6 setzt Zweige mit nur regulären Punkten voraus, das sind in unserem Fall alle p -ten Zweige (67) mit Ausnahme der ausgearteten Zweige $c = c_A$, $c = c_B$ und der p -ten Zweige durch A_2 und B_2 bzw. durch I und I' . Er liefert für diese Zweige mit nur regulären Punkten die Bedingungen (68) und (69) ohne die Gleichheitszeichen.

Für den ausgearteten Zweig $c = c_A$ hat man $\sigma_1 = m\pi$, für den ausgearteten Zweig $c = c_B$ hat man $\sigma_1 = (m-1)\pi$ und für beide gilt (69) ohne Gleichheitszeichen. Für den einen der Punkte A_2 , B_2 gilt $\sigma_2 = (p-1)\pi$, für den anderen gilt $\sigma_2 = p\pi$, für beide gilt (68) ohne Gleichheitszeichen und für alle übrigen Punkte der beiden p -ten Zweige durch A_2 und B_2 gilt sowohl (68) als auch (69) ohne die Gleichheitszeichen.

Das alles zusammen schließlich liefert die Bedingungen (68), (69), so wie sie dastehen, zur Charakterisierung der p -ten Zweige 67.

Da die i -Sehne ($i = 1, 2$) sich mit zunehmendem σ_i stets in der gleichen Richtung bewegt, d. h. nicht rückläufig wird, solange σ_i kein Vielfaches von π überschreitet, folgt aus (68) und (69), daß für die p -ten Zweige (67) zu verschiedenen σ_1 -Werten auch verschiedene, d. h. nicht zusammenfallende 1-Sehnen, zu verschiedenen σ_2 -Werten auch verschiedene 2-Sehnen gehören und deshalb Punkte mit verschiedenen σ_1, σ_2 -Werte-Paaren nicht zusammenfallen. Also haben zwei p -te Zweige (67) niemals einen Punkt gemeinsam, sie können sich weder schneiden noch berühren, es geht durch jeden Punkt der Äquatorkreisfläche höchstens ein p -ter Zweig.

Es ist jetzt noch zu zeigen, daß durch jeden Punkt auch tatsächlich einer dieser Zweige geht. Wir tun dies ausführlich für den Fall, daß p eine ungerade Zahl ist, $p = 2q + 1$. Nach Satz 17, Zeile (56) und (57) ist dann $I = A_2$, $I' = B_2$, wir haben die Anordnung der Figur 13 und die Bedingung (69) lautet jetzt

$$2q\pi \leq \sigma_2 \leq (2q+1)\pi. \quad (70)$$

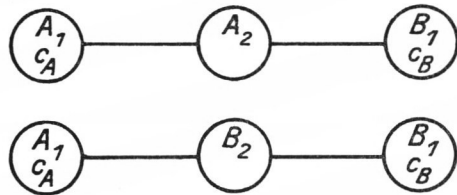


Fig. 13

Zu $\sigma_2 = 2q\pi$ gehört A_2 , zu $\sigma_2 = (2q+1)\pi$ gehört B_2 und deshalb gehört im Intervall (70) zu einer 2-Sehne ein um so kleinerer σ_2 -Wert, je näher sie an A_2 liegt, mit wachsendem σ_2 bewegt sich die 2-Sehne monoton und stetig von A_2 nach B_2 . — Nun sei P ein beliebiger Punkt im Inneren der Äquatorkreisfläche. Die 1-Sehne durch ihn, s_1 , treffe den Halbkreis $A_1 A_2 B_1$ in Q_I , den Halbkreis

$A_1 B_2 B_1$ in Q_{II} (Figur 14). c_I sei der Parameter des $(2q+1)$ -ten Zweiges (67), dessen Anfangspunkt mit Q_I zusammenfällt, c_{II} sei der Parameter des $(2q+1)$ -ten Zweiges (67), dessen Endpunkt mit Q_{II} zusammenfällt. Dann gilt

$$c_A < c_I < c_B, \quad c_A < c_{II} < c_B. \quad (71)$$

Im Intervall (70) gehöre zur 2-Sehne durch Q_I der Wert $(\sigma_2)_I$, zur 2-Sehne durch Q_{II} der Wert $(\sigma_2)_{II}$, zur 2-Sehne durch P der Wert $(\sigma_2)_P$. Weil die 2-Sehne durch P einerseits weiter weg von A_2 ist als die 2-Sehne durch Q_I , andererseits näher an A_2 ist, als die 2-Sehne durch Q_{II} (siehe Figur 14), haben wir unter Berufung auf das im Anschluß an (70) Gesagte

$$(\sigma_2)_I < (\sigma_2)_P < (\sigma_2)_{II}. \quad (72)$$

Daß ganz allgemein die 2-Sehne durch Q_I näher an A_2 liegt, als die 2-Sehne durch Q_{II} , überlegt man sich an Hand von Figur 14 folgendermaßen: Bei der von uns gewählten Lage der Apollonischen Punkte

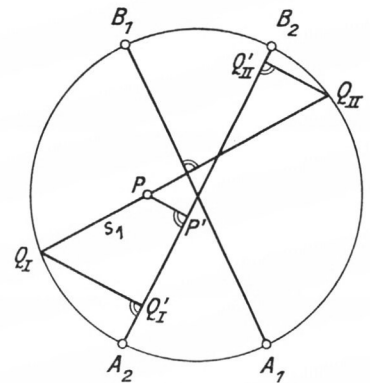


Fig. 14

verläuft für $0 < 2\omega < \pi$ sowohl die gerichtete Strecke $\overrightarrow{A_2 B_2}$ als auch die gerichtete Strecke $\overrightarrow{Q_I Q_{II}}$ von links unten nach rechts oben, die beiden Richtungen schließen also einen spitzen Winkel ein. Infolgedessen läuft auch die senkrechte Projektion der Strecke $\overrightarrow{Q_I Q_{II}}$ auf den Durchmesser $A_2 B_2$ von links unten nach rechts oben. Außerdem liegt sie ganz innerhalb des Kreises, d. h. zwischen A_2 und B_2 und aus diesen beiden Tatsachen folgt, daß Q'_I näher an A_2 liegt als Q'_{II} . Die entsprechende Behauptung für P ergibt sich dann aus der Tatsache, daß P zwischen Q_I und Q_{II} , demnach P' zwischen Q'_I und Q'_{II} liegt.

$(\sigma_1)_P$ sei der σ_1 -Wert, welcher der Sehne s_1 und damit den drei Punkten P , Q_I und Q_{II} im Intervall (68) zukommt. Dann gilt

$$c_I = \frac{(\sigma_2)_I}{(\sigma_1)_P}, \quad c_{II} = \frac{(\sigma_2)_{II}}{(\sigma_1)_P}; \quad (73)$$

weiter setzen wir

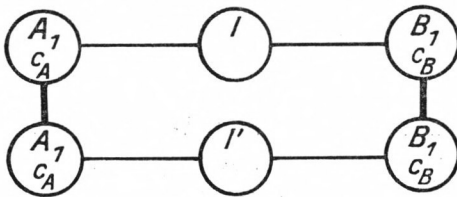
$$c_P = \frac{(\sigma_2)_P}{(\sigma_1)_P}. \quad (74)$$

Wegen (72) gilt dann

$$c_I < c_P < c_{II}. \quad (75)$$

c_P liegt also zwischen zwei Parametern c_I und c_{II} des Intervalles (67) (vergleiche (71)) und damit selbst im Intervall (67). Das bedeutet, daß durch P eine Kurve des Intervalles (67), nämlich die Kurve mit dem Parameter c_P geht, und zwar ihr $(2q+1)$ -ter Zweig, denn $(\sigma_2)_P$ liegt nach Voraussetzung im Intervall (70). Es geht also im Fall $p = 2q+1$ durch jeden inneren Punkt der Äquatorkreisfläche tatsächlich ein p -ter Zweig (67). Der Beweis für $p = 2q$ verläuft ganz entsprechend, nur daß dabei A_2 und B_2 ihre Rollen vertauschen. Daß jeder Punkt des Äquators selbst auf einem solchen Zweig liegt, haben wir uns bereits auf Seite 52 überlegt, sodaß also tatsächlich jeder Punkt der Äquatorkreisfläche auf einem p -ten Zweig (67) liegt. Damit ist vollständig bewiesen, daß die p -ten Zweige (67) die Äquatorkreisfläche schlicht überdecken.

Geht man vom Grundriß zu den Kurven auf der Kugel selbst über, so liefern die obigen Überlegungen und Resultate den Satz 21: *In dem Zeilenpaar, das im Strukturschema für $c \geq 1$ den p -ten Zweig darstellt, bedeutet jede Konfiguration*

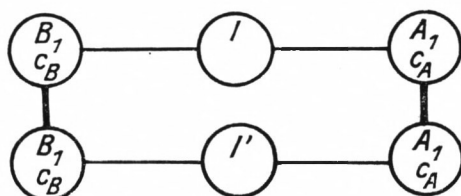


I ist einer der Punkte A_2, B_2 , $(76)^1$
 I' ist der andere

eine kontinuierliche Folge von p -ten Zweigen, welche die Kugeloberfläche schlicht überdecken. Diese Folge beginnt mit dem in den Punkt A_1 ausgearteten p -ten Zweig der Kurve $c = c_A$, von A_1 aus überstreicht der p -te Zweig mit wachsendem c die Kugeloberfläche in Richtung auf B_1 hin und artet für $c = c_B$ in den Punkt B_1 aus. Zwischen $c = c_A$ und $c = c_B$ liegt kein weiterer ausgearteter p -ter Zweig.

Das Gegenstück zu Satz 21 ist Satz 22: *In dem Zeilenpaar, das im Strukturschema für $c \geq 1$ den p -ten Zweig darstellt, bedeutet jede Konfiguration*

¹⁾ Im allgemeinen Strukturschema sind keine Trennparameter angegeben, da man deren numerische Werte nicht kennt. Wir verwenden hier die Zeichen c_A und c_B nur, um uns besser verständlich machen zu können.

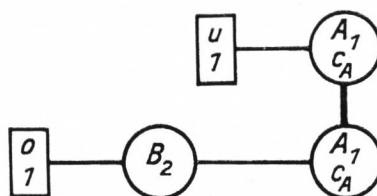


I ist einer der Punkt A_2, B_2 ,
I' ist der andere

(77)

eine kontinuierliche Folge von p -ten Zweigen, welche die Kugeloberfläche schlicht überdecken. Diese Folge beginnt mit dem in B_1 ausgearteten p -ten Zweig der Kurve $c = c_B$, von B_1 aus überstreicht der p -te Zweig mit wachsendem c die Kugeloberfläche in Richtung auf A_1 hin und artet für $c = c_A$ in den Punkt A_1 aus. Zwischen $c = c_B$ und $c = c_A$ liegt kein weiterer ausgearteter p -ter Zweig. Der Beweis von Satz 22 erfolgt genau so, wie der von uns ausführlich besprochene Beweis von Satz 21, wobei aber A_1 und B_1 und damit c_A und c_B ihre Rollen vertauschen.

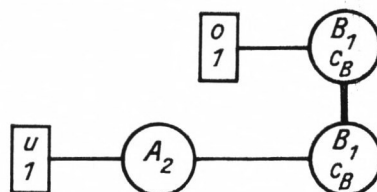
Weiter gilt Satz 23: Die Konfiguration



(78)

mit welcher im Strukturschema für $c \geq 1$ der $(2q + 1)$ -te Zweig beginnt, bedeutet eine kontinuierliche Folge von $(2q + 1)$ -ten Zweigen, welche die rechte¹⁾ Hälfte der Kugel schlicht überdecken. Diese Folge beginnt bei $c=1$ mit dem Großkreis, zu dem die beiden Apollonischen Punkte symmetrisch liegen (er bildet sich im Grundriß als der senkrechte Durchmesser o u ab, siehe Figur II 7), von da ab überstreicht der $(2q + 1)$ -te Zweig mit wachsendem c die rechte Kugelhälfte in Richtung auf A_1 hin und artet für $c = c_A$ in den Punkt A_1 aus.

Die Konfiguration



(79)

mit welcher der $(2q + 2)$ -te Zweig²⁾ beginnt, bedeutet eine kontinuierliche Folge von $(2q + 2)$ -ten Zweigen, welche die linke Kugelhälfte schlicht überdecken. Diese Folge beginnt ebenfalls bei $c=1$ mit dem Großkreis, zu dem die Apollonischen Punkte symmetrisch liegen, von da ab überstreicht der $(2q + 2)$ -te Zweig mit wachsendem c die linke Kugelhälfte in Richtung auf B_1 hin und artet schließlich für $c = c_B$ in den Punkt B_1 aus. Der Beweis von Satz 23 erfolgt ganz ähnlich, wie derjenige von Satz 21. Doch tritt dabei an die Stelle des Halbkreises $A_1 A_2 B_1$, auf dem die Anfangspunkte der in Rede stehenden Zweige und damit der Punkt

¹⁾ „Rechte Kugelhälfte“ im Sinn der Figur II 1; d. h. von den beiden Hälften, in welche die Kugel durch die x, z -Ebene geteilt wird, bezeichnen wir als die rechte diejenige, auf welcher die Punkte A_1 und B_2 liegen. Entsprechend ist der Ausdruck „linke Kugelhälfte“ im zweiten Teil des Satzes zu verstehen.

²⁾ Wir setzen hier $p = 2q + 2$ und nicht einfach $p = 2q$, um in Übereinstimmung mit der Bezeichnungsweise von Satz 17 zu bleiben.

Q_1 liegen (siehe Figur 14) der entsprechende Zweig der Kurve $c = 1$, d. h. der Durchmesser ou , so daß von vornherein $c_1 = 1$ ist.

Satz 1 von Teil II ist der Spezialfall des ersten Teils von Satz 23 für $q = 0$.

Die Schalenflächen der einzelnen Zweige und die Apollonische Schalenfläche

Die Konfiguration (78) am Anfang des Zeilenpaares (56), (57) bedeutet nach Satz 23 eine Folge von $(2q + 1)$ -ten Zweigen, welche beginnend bei $c = 1$ mit wachsendem c die rechte Kugelhälfte überstreicht und in A_1 endigt. Die q Folgen $A_1 - A_2 - B_1 - A_2$ der Zeile (56) und die darunter stehenden q Folgen $A_1 - B_2 - B_1 - B_2$ der Zeile (57) bedeuten nach Satz (21) und (22) eine daran anschließende kontinuierliche Folge von $(2q + 1)$ -ten Zweigen, welche mit wachsendem c sich q -mal von A_1 nach B_1 und wieder zurückbewegen und dabei die Kugeloberfläche im ganzen $2q$ -mal überstreichen. Damit sind die $(2q + 1)$ -ten Zweige der Kurve $c \geq 1$ erschöpft. Weil die Kurve $1/c$ aus der Kurve c durch Spiegelung an der x, z -Ebene entsteht, folgt daraus weiter, daß von $c = 1$ aus mit abnehmendem c die $(2q + 1)$ -ten Zweige zunächst die linke Kugelhälfte in Richtung auf A_2 hin überstreichen bis schließlich ein Zweig in den Punkt A_2 zusammenschrumpft und von da ab auf der Kugel q -mal von A_2 nach B_2 und wieder zurückwandern, wobei sie die Kugeloberfläche $2q$ -mal überstreichen bis zu $c = 0$, wofür der $(2q + 1)$ -te Zweig in A_2 ausartet.

Die $(2q + 1)$ -ten Zweige zerfallen also in $2(2q) + 1 = 4q + 1$ kontinuierliche Folgen, deren jede die Kugeloberfläche schlicht überdeckt und zwischen zwei aufeinanderfolgenden ausgearteten Zweigen liegt. Wir ordnen nach Art der Riemannschen Flächen jeder solchen Folge eine eigene Kugelfläche (*Kugelschale*) zu, numerieren die Schalen, beginnend bei $c = 0$, mit wachsendem Parameter c und bezeichnen die Gesamtheit dieser $4q + 1$ Kugelschalen als die *Schalenfläche* des $(2q + 1)$ -ten Zweiges. Der Zweig $c = 0$ fällt mit dem Punkt A_2 der ersten Schale zusammen, die erste Schale hängt mit der zweiten im Punkt B_2 zusammen, die zweite mit der dritten im Punkt A_2 und so hängen bis zur $(2q + 1)$ -ten Schale je zwei aufeinanderfolgende Schalen abwechselnd einmal in B_2 , einmal in A_2 zusammen. Die $2q$ -te Schale hängt mit der $(2q + 1)$ -ten, das ist der mittleren Schale, welche $c = 1$ enthält, in A_2 zusammen, diese $(2q + 1)$ -te hängt mit der nächsten in A_1 zusammen und von da ab hängen je zwei aufeinanderfolgende Schalen abwechselnd einmal in B_1 , einmal in A_1 zusammen. Der Zweig $c = \infty$ schließlich liegt im Punkt A_1 der letzten Kugelschale.

Ebenso zeigt man an Hand der Zeilen (58) und (59) und unter Heranziehung der Sätze 21 bis 23, daß die $(2q + 2)$ -ten Zweige in $2(2q + 1) + 1 = 4q + 3$ kontinuierliche Folgen zerfallen, deren jede die Kugelfläche schlicht überdeckt und zwischen zwei aufeinanderfolgenden ausgearteten Zweigen liegt. Wir ordnen auch diesmal jeder solchen Folge eine eigene Kugelschale zu, numerieren die Schalen mit wachsendem Parameter c und bezeichnen die Gesamtheit dieser $4q + 3$ Schalen als die *Schalenfläche* des $(2q + 2)$ -ten Zweiges. Sie wird von den $(2q + 2)$ -ten Zweigen schlicht überdeckt. Auch diesmal fällt der Zweig $c = 0$ in den Punkt A_2 der ersten Schale und hängen zwei aufeinanderfolgende Schalen abwechselnd einmal in B_2 , einmal in A_2 zusammen bis zur mittleren, das ist hier die $(2q + 2)$ -te. Sie hängt mit der ihr vorangehenden diesmal in B_2 , mit der nachfolgenden in B_1 zusammen und von da ab hängen je zwei aufeinanderfolgende Schalen wieder abwechselnd einmal in A_1 , einmal in B_1 zusammen. Der Zweig $c = \infty$ schließlich liegt auch jetzt wieder im Punkt A_1 der letzten Schale.

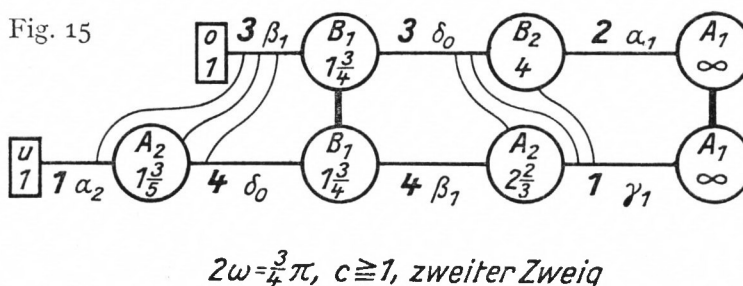
Die Schalenfläche des p -ten Zweiges besteht nach Obigem für $p = 2q + 1$ aus $4q + 1 = 2p - 1$ Schalen, für $p = 2q + 2$ aus $4q + 3 = 2p - 1$ Schalen. Das gibt Satz 24:

Die Schalenfläche des p -ten Zweiges besteht aus $2p - 1$ Kugelschalen oder mit etwas anderen Worten: Der p -te Zweig überstreicht die Kugelschale $(2p - 1)$ -mal.

Die Gesamtheit der Schalenflächen der einzelnen Zweige bezeichnen wir als *Apollonische Schalenfläche*. Sie besteht aus unendlich vielen Schalen und wird von der Gesamtheit der Apollonischen Kurven, die zu ein und demselben Apollonischen Winkel $0 < 2\omega < \pi$ gehören, schlicht überdeckt.

Während die einzelnen Schalen innerhalb der Schalenfläche ein und desselben Zweiges in den ausgearteten Zweigen (isolierten Punkten, Seite 31) zusammenhängen, tun die Schalenflächen je zweier aufeinanderfolgender Zweige dies in den Doppelpunkten, das ist in den Punkten, die Endpunkt eines Zweiges und zugleich Anfangspunkt des nächsten Zweiges ein und derselben Kurve c sind (Seite 31). Es hängt also die Schalenfläche des $(2q + 1)$ -ten Zweiges mit derjenigen des $(2q + 2)$ -ten Zweiges für $c < 1$ in den Punkten B_1 , für $c > 1$ in den Punkten B_2 , die Schalenfläche des $(2q + 2)$ -ten Zweiges mit derjenigen des $(2q + 3)$ -ten Zweiges für $c < 1$ in den Punkten A_1 , für $c > 1$ in den Punkten A_2 zusammen. In den Figuren 8 und 12 ist dieses Zusammenhängen zweier aufeinanderfolgender Zweige jeweils durch das Zeichen $\dagger$ angedeutet.

Aus dem allgemeinen Strukturschema der Figur 12 entsteht dasjenige für einen bestimmten Apollonischen Winkel 2ω , indem man die Trennparameter (31) für diesen Wert von 2ω berechnet und sie in die entsprechenden Ringe zu den Fundamentalpunkten schreibt. Erst wenn man die numerischen Werte dieser Trennparameter kennt, kann man entscheiden, in welcher Richtung die Linien zwischen den Zeilen für Anfangs- und Endpunkt ein und desselben Zweiges verlaufen, ob von rechts oben nach links unten oder von links oben nach rechts unten (als Beispiel siehe Figur 8). Daraus ergibt sich dann auch für jede einzelne Kugelschale, ob die beiden Zweige durch die Fundamentalpunkte A_2 und B_2 ($c > 1$) in der Umgebung dieser Punkte auf derselben Seite des Durchmessers A_2B_2 verlaufen, auf welcher der andere Äquatorpunkt dieses Zweiges liegt oder nicht. Für $2\omega = \frac{3}{4}\pi$ z. B. ist die Darstellung des zweiten Zweiges im Strukturschema für $c \geq 1$ so, wie Figur 15 das zeigt



und die Apollonischen Kurven, bzw. ihre Grundrisse, auf den drei Kugelschalen dieses zweiten Zweiges ($0 \leq c \leq \infty$) haben den in Figur 16 skizzierten Verlauf.¹⁾

Für $2\omega = \pi/3$ dagegen ergibt sich aus der Darstellung des zweiten Zweiges im Schema der Figur 8 für die drei Kugelschalen des zweiten Zweiges das in Figur 17 skizzierte Bild.

Sowohl für Figur 16 als auch für Figur 17 wurde zunächst der Kurvenverlauf auf der dritten Schale und der linken Hälfte der zweiten Schale gefunden, teilweise durch Rechnung, teilweise durch Konstruktion (vgl. Seite 46) und daraus dann durch Spiegelung an $c = 1$ die erste Schale und die rechte Hälfte der zweiten Schale gewonnen.

In Figur 17 ($2\omega = \pi/3$), dritte Schale, liegt sowohl beim Zweig durch A_2 als auch beim Zweig durch B_2 Anfang und Ende jeweils auf der gleichen Seite des Durchmessers A_2B_2 ,

¹⁾ Figur 16 und 17 sind auf der Tafel am Schluß des Heftes.

in Figur 16 ($2\omega = \frac{3}{4}\pi$), dritte Schale, dagegen auf entgegengesetzten Seiten dieses Durchmessers. Daß dem so sein muß, kann man auf Grund der folgenden Überlegung einsehen. In den Punkten A_2 und B_2 ist σ_2 ein ganzzahliges Vielfaches von π , daher $\sin \sigma_2 = 0$. Die Gleichungen II (34) und II (33), die nach Seite 71 auch für beliebige Zweige gelten, vereinfachen sich deshalb für den vorliegenden Fall zu

$$\operatorname{tg} \mu = \operatorname{ctg} \omega, \quad (80)$$

$$\frac{dx}{d\sigma_1} = -\frac{\sin \sigma_1}{2 \cos \omega}, \quad \frac{dy}{d\sigma_1} = -\frac{\sin \sigma_1}{2 \sin \omega}. \quad (81)$$

(80) besagt, daß in den Punkten A_2 und B_2 der Zweig den Kreis berührt, aus (81) entnimmt man, daß in der Umgebung dieser Punkte mit wachsendem σ_1 sowohl x als auch y abnehmen, wenn $\sin \sigma_1 > 0$ ist, daß sie zunehmen, wenn dort $\sin \sigma_1 < 0$ ist. Man kann statt dessen auch sagen: In A_2 und B_2 läuft die positive Tangentenrichtung von rechts unten nach links oben, wenn σ_1 in einem Intervall

$$(2k + 1)\pi > \sigma_1 > 2k\pi \quad (82)^1$$

liegt, sie läuft von links oben nach rechts unten, wenn σ_1 in einem Intervall

$$2k\pi > \sigma_1 > (2k - 1)\pi \quad (83)$$

liegt. Vorausgesetzt ist dabei, daß die Fundamentalpunkte so liegen, wie wir das immer angenommen haben und wie es auch in Figur 16 und 17 der Fall ist und daß ebenso wie in Teil II die $+x$ -Achse nach unten, die $+y$ -Achse nach rechts läuft. Nun ist σ_1 in A_1 ein geradzahliges Vielfaches, in B_1 ein ungeradzahliges Vielfaches von π . Daher liegt für alle Kugelschalen, die im Strukturschema durch eine Konfiguration der Form (76), durch eine Konfiguration also, die links mit A_1 beginnt und rechts mit B_1 endet, σ_1 stets in einem Intervall (83), dagegen für alle Kugelschalen, die durch eine Konfiguration der Form (77) dargestellt werden, also B_1 links, A_1 rechts, σ_1 in einem Intervall (82) liegt. Damit haben wir zunächst ganz allgemein gefunden: Die positive Tangentenrichtung in A_2 und B_2 verläuft auf Schalen, die durch eine Konfiguration (76) dargestellt werden, von links oben nach rechts unten, auf Schalen, die durch eine Konfiguration (77) dargestellt werden, von rechts unten nach links oben.

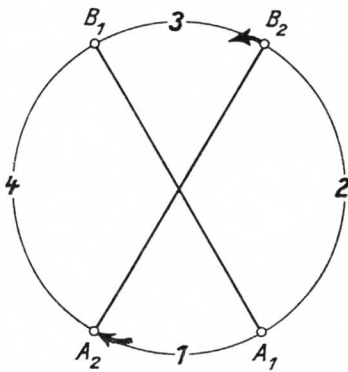


Fig. 18

Nun wird die dritte Schale des zweiten Zweiges durch eine Konfiguration (77) dargestellt, also geht in A_2 und B_2 die positive Tangente von rechts unten nach links oben. B_2 ist auf dieser Schale Anfang eines Zweiges, A_2 Endpunkt eines Zweiges. Die beiden Zweige durch diese Punkte verlaufen deshalb in deren Umgebung so, wie Figur 18 das andeutet, bei A_2 unterhalb, bei B_2 oberhalb des Durchmessers A_2B_2 und für $2\omega = \pi/3$ liegt nach Figur 8 der Endpunkt des Zweiges durch B_2 im Sektor 4, also auf derselben Seite von A_2B_2 wie der Anfang dieses Zweiges und der Anfangspunkt des Zweiges durch A_2 im Sektor 2, also auf derselben Seite von A_2B_2 , wie das Ende dieses Zweiges. Für $2\omega = \frac{3}{4}\pi$ dagegen liegt nach Figur 15 der Endpunkt des Zweiges durch B_2 im Sektor 1,

¹⁾ Wir schreiben die beiden Intervalle (82) und (83) so an, daß von links nach rechts die σ_1 -Werte fallen, weil auch im Strukturschema und damit in den Konfigurationen (76) und (77) σ_1 von links nach rechts abnimmt.

also auf der entgegengesetzten Seite von A_2B_2 wie der Anfang dieses Zweiges und der Anfang des Zweiges durch A_2 im Sektor 3, also ebenfalls auf der entgegengesetzten Seite von A_2B_2 , wie das Ende dieses Zweiges. Dem entspricht der verschiedene Charakter des Kurvenverlaufes auf den dritten Schalen in Figur (17) und (16).

Bestimmung von Äquatorpunkten nach Satz 17

Wir zeigen jetzt, wie man sich für einen beliebigen Zweig einer Kurve mit vorgegebenem Parameter c und vorgegebenem Apollonischen Winkel 2ω Anfangs- und Endpunkt verschaffen kann. Man braucht dazu gar nicht das Strukturschema selbst, sondern entnimmt die beiden fraglichen Zeilen aus Satz 17 unmittelbar und berechnet nach (31) die nötigen Trennparameter. Wir nehmen als Beispiel den 7. Zweig der Kurve $c = 1,5$ mit dem Apollonischen Winkel $2\omega = \frac{2}{3}\pi$. Sein Anfang ist der 13., sein Ende der 14. Äquatorpunkt. Wir setzen $13 = 4q + 1$, $14 = 4q + 2$ mit $q = 3$.

Anfangspunkt: Aus Satz 17, Zeile (56) mit $q = 3$ und unter Heranziehung von (49) entnimmt man für den 13. Äquatorpunkt die folgende Fall- und Sektorenfolge

$$\begin{array}{cccccccc} \beta_6 & \delta_0 & \alpha_6 & \gamma_1 & \beta_5 & \delta_1 & \alpha_5 & \gamma_2 & \dots \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \end{array} \quad (84)$$

und berechnet zur Orientierung nach (31) ein oder zwei Trennparameter, die schätzungsweise in der Nähe des Wertes $c = 1,5$ liegen. Wir berechnen zu diesem Zwecke

$$\begin{aligned} c_t(\beta_5, \gamma_1) &= \frac{2 + 4}{4 + 2/3} = 1\frac{2}{7} < 1\frac{1}{2}, \\ c_t(\alpha_5, \delta_1) &= \frac{2 + 4}{4 - 2/3} = 1\frac{4}{5} > 1\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (85)$$

und tragen sie zwischen die entsprechenden Fälle ein. Die Folge

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma_1 & 1\frac{2}{7} & \beta_5 & & \delta_1 & 1\frac{4}{5} & \alpha_5 \\ \mathbf{4} & & \mathbf{I} & & \mathbf{I} & & \mathbf{4} \end{array} \quad (86)$$

zeigt, daß wir nur noch den Trennparameter $c_t(\beta_5, \delta_1)$ brauchen. Man findet für ihn aus (31)

$$c_t(\beta_5, \delta_1) = \frac{2 + 4 + 2/3}{4} = 1\frac{3}{8} > 1\frac{1}{2}, \quad (87)$$

hat damit die Folge

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma_1 & 1\frac{2}{7} & \beta_5 & 1\frac{3}{8} & \delta_1 & & \\ & & \mathbf{I} & & & & \end{array} \quad (88)$$

und erkennt, daß der Anfangspunkt des 7. Zweiges der Fall β_5 ist und im Sektor $\mathbf{I}$ liegt. Für seine σ -Werte findet man aus (3) Fall β mit $n = 5$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2,5} (10 + \frac{2}{3}) \pi = 4\frac{4}{15} \pi, \quad \sigma_2 = \frac{3}{2} \times \frac{64}{15} \pi = 6\frac{2}{5} \pi. \quad (89)$$

Probe: $4\frac{4}{15} + 6\frac{2}{5} = 10\frac{2}{3}$; $\sigma_1 + \sigma_2 = 10\frac{2}{3} \pi$ in Übereinstimmung mit der ersten Gleichung (3) β .

Endpunkt: Aus Zeile (57) von Satz 17 und wieder unter Heranziehung von (49) entnehmen wir die Folge

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha_7 & \delta_0 & \beta_6 & \gamma_1 & \alpha_6 & \delta_1 & 1\frac{2}{3} & \beta_5 & \dots \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \end{array} \quad (90)$$

Den Trennparameter $c_t (\beta_5, \delta_1) > 1,5$ kennen wir bereits aus (87) und haben ihn deshalb gleich in (90) eingeschrieben. Wir berechnen jetzt noch

$$c_t (\alpha_6, \delta_1) = \frac{2 + 5}{5 - 2/3} = 1\frac{8}{13} > 1\frac{1}{2}, \quad (91)$$

$$c_t (\alpha_6, \gamma_1) = \frac{2 + 5 - 2/3}{5} = 1\frac{4}{15} < 1\frac{1}{2}$$

und aus der Folge

$$\gamma_1 \ 1\frac{4}{15} \quad \alpha_6 \ 1\frac{8}{13} \ \delta_1 \quad (92)$$

erkennt man, daß der Endpunkt des 7. Zweiges der Kurve $c = 1,5$ der Fall α_6 ist und im Sektor 3 liegt. Aus (3) Fall α) für $n = 6$ findet man für seine σ -Werte

$$\sigma_1 = \frac{1}{2,5} (12 - \frac{2}{3}) \pi = 4\frac{8}{15} \pi, \quad \sigma_2 = \frac{3}{2} \times \frac{68}{15} \pi = 6\frac{4}{5} \pi. \quad (93)$$

Probe: $4\frac{8}{15} + 6\frac{4}{5} = 11\frac{1}{3}$; $\sigma_1 + \sigma_2 = 11\frac{1}{3} \pi$ in Übereinstimmung mit der ersten Gleichung (3) α).

Figur 19 zeigt den 7. Zweig der Kurve $c = 1,5$, $2\omega = \frac{2}{3}\pi$. Um ihn skizzieren zu können, wurden zunächst mit den σ -Werten (89) und (93) Anfangs- und Endpunkt eingezeichnet und nach II (34) die zugehörigen Tangenten berechnet; es ergab sich für den Anfangspunkt $\operatorname{tg} \mu = -0,182$, für den Endpunkt $\operatorname{tg} \mu = +0,034$. Schließlich wurden durch Konstruktion vom Anfang des Zweiges aus (S. 36) noch zwei Zwischenpunkte gewonnen, womit die Gestalt des Zweiges genügend genau festlag.

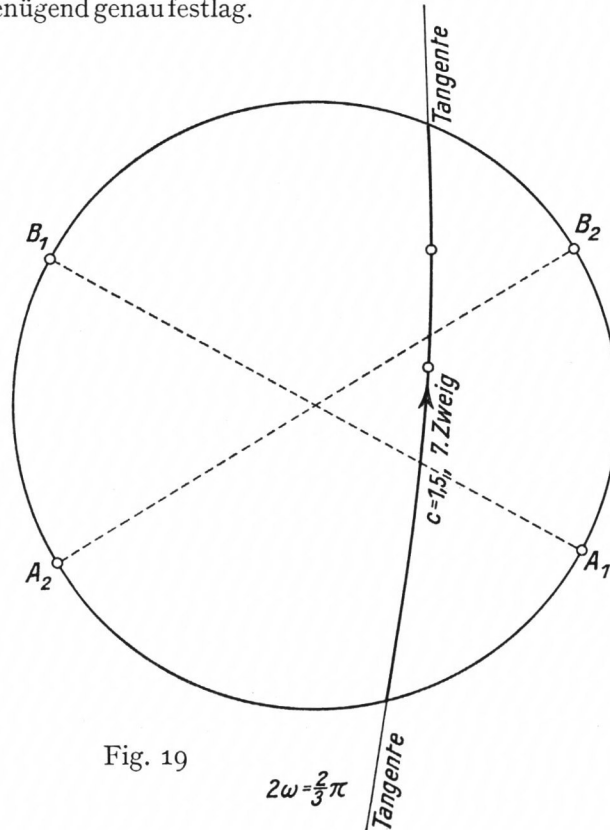


Fig. 19

Zusatz: Aus Satz 25 ergibt sich, daß dieser 7. Zweig der Kurve $c=1,5=\frac{3}{2}$ mit dem ersten Zweig dieser selben Kurve zusammen fällt und auch in gleicher Richtung durchlaufen wird.

Kurven mit rationalem c

Der Parameter sei jetzt eine rationale Zahl

$$c = \frac{p}{q} \geq 1, \quad (94)$$

wo p und q ganze, teilerfremde Zahlen bedeuten. Es ist dann

$$p = cq, \quad 2p\pi = 2cq\pi. \quad (95)$$

σ'_1, σ'_2 sei ein Wertepaar, das zu einem Punkt der Kurve c gehört. Dann gilt

$$\sigma'_2 = c\sigma'_1 \quad (96)$$

und es genügt auch das Wertepaar

$$\sigma''_1 = \sigma'_1 + 2q\pi, \quad \sigma''_2 = \sigma'_2 + 2p\pi \quad (97)$$

der Gleichung

$$\sigma''_2 = c\sigma''_1. \quad (98)$$

Denn wegen (95) und (96) gilt

$$\sigma'_2 + 2p\pi = c(\sigma'_1 + 2q\pi). \quad (99)$$

Weil σ'_1 und σ''_1 sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, gehört zu ihnen beiden die gleiche 1-Sehne und aus demselben Grund gehört zu σ'_2 und σ''_2 dieselbe 2-Sehne. Aus der Grundrißkonstruktion folgt damit, daß der Punkt σ''_1, σ''_2 mit dem Punkt σ'_1, σ'_2 zusammenfällt. Versteht man unter σ'_1, σ'_2 den laufenden Punkt des ersten Zweiges, so bedeutet demnach σ''_1, σ''_2 den laufenden Punkt eines Kurvenzweiges, der mit dem ersten zusammenfällt und in gleicher Richtung durchlaufen wird, wie dieser. Da für den ersten Kurvenzweig σ'_2 im Intervall $0 \leq \sigma'_2 \leq \pi$ liegt, verläuft das zugehörige σ''_2 nach (97) im Intervall $2p\pi \leq \sigma''_2 \leq (2p+1)\pi$ und es handelt sich deshalb bei diesem mit dem ersten zusammenfallenden um den $(2p+1)$ -ten Kurvenzweig (Satz 20). Ebenso überlegt man sich, daß der $(2p+2)$ -te Zweig mit dem zweiten und allgemein der $(2p+\rho)$ -te Zweig (ρ natürliche Zahl) mit dem ρ -ten Zweig zusammenfällt und in gleicher Richtung durchlaufen wird, wie dieser. Das kommt darauf hinaus, daß der Anfangspunkt des $(2p+1)$ -ten Zweiges mit dem Anfangspunkt des ersten zusammenfällt und von da ab die ganze Konfiguration der ersten $2p$ Zweige wieder von vorne beginnt. Der Endpunkt des $4p$ -ten Zweiges insbesondere fällt mit dem Endpunkt des $2p$ -ten zusammen. Ganz ebenso überlegt man sich, daß der Anfangspunkt des $(2lp+1)$ -ten Zweiges (l natürliche Zahl) mit dem Anfangspunkt des ersten zusammenfällt und von da ab wieder die Konfiguration der ersten $2p$ Zweige von neuem beginnt, wobei jeweils der $(2lp+\rho)$ -te Zweig ($\rho = 1, 2, \dots, 2p$) mit dem ρ -ten zusammenfällt und in gleicher Richtung durchlaufen wird wie dieser.

Wir wollen im folgenden zwei Kurvenzweige nur dann als *gleich* bezeichnen, wenn sie *zusammenfallen und in gleicher Richtung durchlaufen werden, und in konsequenter Fortsetzung dieser Ausdrucksweise bezeichnen wir zwei ausgeartete Zweige, die in denselben Fundamentalpunkt zusammenfallen nur dann als gleich, wenn in ihnen σ_2 (der Abstand, der kein Vielfaches von π ist) in gleicher Richtung gezählt wird.* Dann sind nach dem eben Gesagten der ρ -te und der $(2lp+\rho)$ -te Kurvenzweig gleich, es gibt höchstens $2p$ voneinander verschiedene Kurvenzweige, und diese werden bereits durch die $2p$ ersten Zweige repräsentiert. Wir wollen jetzt zeigen, daß die $2p$ ersten Zweige sämtlich in dem eben definierten Sinn von-

einander verschieden sind, so daß also nicht höchstens, sondern *genau* $2p$ voneinander verschiedene Kurvenzweige existieren. Dabei setzen wir voraus

$$p > 1, \quad (100)$$

womit wir die Kurve $p : q = 1 : 1$ bzw. das Gleichheitszeichen in (94) ausschließen.

$\sigma'_1, \sigma'_2 = c\sigma'_1$ sei ein Äquatorpunkt des ersten Zweiges der Kurve c und der Punkt $\sigma''_1, \sigma''_2 = c\sigma''_1$ derselben Kurve c falle mit ihm zusammen. Zunächst setzen wir voraus, daß weder σ'_1 noch σ'_2 ein Vielfaches von π ist. Sollen die beiden zusammenfallenden Äquatorpunkte zu Zweigen gehören, die gleich sind im Sinne unserer obigen Definition, so müssen sowohl für $i = 1$, als auch für $i = 2$ die sphärischen Abstände σ'_i und σ''_i in gleicher Richtung gezählt werden, woraus unmittelbar folgt, daß σ'_i und σ''_i sich je um ein Vielfaches von 2π unterscheiden müssen. Würden nämlich σ'_1 und σ''_1 und zugleich σ'_2 und σ''_2 in entgegengesetzter Richtung gezählt, so würden die beiden Zweige in entgegengesetzter Richtung durchlaufen (vgl. den Hilfssatz auf S. 64), wäre nur für ein Paar σ'_i, σ''_i der Richtungssinn verschieden, so gehörten in der Umgebung des Äquatorpunktes zu gleichen k -Sehnen ($k \neq i$) verschiedene i -Sehnen und die beiden Zweige würden gar nicht zusammenfallen.

Sei nun

$$\sigma''_2 = \sigma'_2 + 2\rho\pi \quad \text{mit } 0 < \rho < p \quad (\rho \text{ ganze Zahl}); \quad (101)$$

dann ist

$$\sigma''_1 = \frac{1}{c}(\sigma'_2 + 2\rho\pi) = \sigma'_1 + \frac{\rho}{c}2\pi \stackrel{(94)}{=} \sigma'_1 + \frac{\rho q}{p}2\pi \neq \sigma'_1 + 2\mu\pi, \quad (102)$$

wo μ eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Denn wegen der Voraussetzung $p > 1$ und p und q teilerfremd, kann der Bruch $\rho q/p$ für $0 < \rho < p$ nicht ganzzahlig sein. Da der Punkt σ'_1, σ'_2 ein Punkt des ersten Zweiges ist, liegt wegen (101) in Verbindung mit Satz 20 der Punkt σ''_1, σ''_2 auf dem $(2\rho + 1)$ -ten Zweig und deshalb besagt die Ungleichung in (102), daß für $\rho < p$ der erste und der $(2\rho + 1)$ -te Zweig nicht gleich sind.

Jetzt betrachten wir den vorhin ausgeschlossenen Fall, daß entweder σ'_1 oder σ'_2 ein Vielfaches von π ist. Der Punkt σ'_1, σ'_2 fällt dann in einen der Fundamentalpunkte.

Ist σ'_2 ein Vielfaches von π , so ist es gleichgültig, in welcher Richtung σ'_2 und σ''_2 gezählt werden, ihr Unterschied muß aber trotzdem ein Vielfaches von 2π sein, und zwar ist das in diesem Fall nötig, damit die beiden Punkte überhaupt zusammenfallen. σ'_1, σ'_2 ist jetzt ein Doppelpunkt (Satz 10), in dem der erste und der zweite Zweig zusammenhängen. Soll der $(2\rho + 1)$ -te Zweig in der Umgebung dieses Punktes in derselben Richtung durchlaufen werden wie der erste, so müssen σ'_1 und σ''_1 in gleicher Richtung gezählt werden, deshalb müssen sie sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden. Aus dem allen erkennt man, daß (102) und die daraus gezogenen Folgerungen unverändert auch in diesem Fall ihre Gültigkeit behalten.

Ist σ'_1 ein Vielfaches von π , so ist es gleichgültig, in welchem Sinne man σ'_1 und σ''_1 zählt, aber ihr Unterschied muß auch jetzt wieder ein Vielfaches von 2π sein, damit die beiden Punkte σ'_1, σ'_2 und σ''_1, σ''_2 überhaupt zusammenfallen. Es handelt sich jetzt um einen ausgearteten Kurvenzweig (Satz 10) und auf Grund unserer Verabredung über die Gleichheit derartiger Zweige (Seite 62) muß auch jetzt (101) gelten, womit dann ebenfalls wieder (102) und die daraus gezogene Folgerung gilt.

Bedenkt man noch, daß die Kurven c und $1/c$ durch Spiegelung auseinander hervorgehen, so hat man auf Grund der bisherigen Untersuchungen den folgenden für beliebige c -Werte¹⁾

¹⁾ Wegen $c = 1$ siehe den Text zwischen Satz 26 und 27.

gültigen Satz 25: Die Kurve $c = p/q$ (p und q teilerfremde, natürliche Zahlen) besitzt genau $2p$ voneinander verschiedene Zweige, d. h. Zweige, die entweder nicht zusammenfallen oder wenn sie zusammenfallen, in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden. Die ersten $2p$ Zweige stellen bereits ein solches $2p$ -tupel voneinander verschiedener Zweige dar. Der Anfangspunkt des $(2p + 1)$ -ten Zweiges fällt wieder mit dem Anfangspunkt des ersten Zweiges zusammen und es beginnt mit ihm die ganze Konfiguration von vorne. Allgemein fällt der Anfangspunkt des $(2lp + 1)$ -ten Zweiges (l natürliche Zahl) mit dem Anfangspunkt des ersten Zweiges zusammen und es beginnt mit ihm die Konfiguration der ersten $2p$ Zweige von neuem.

Für das folgende brauchen wir den Hilfssatz: Fallen die beiden Äquatorpunkte σ'_1, σ'_2 und σ''_1, σ''_2 ein und derselben Kurve c zusammen und wird σ'_1 in entgegengesetzter Richtung wie σ''_1 gezählt, σ'_2 in entgegengesetzter Richtung wie σ''_2 , so ist der eine der beiden Punkte Anfangspunkt eines Zweiges Z_I , der andere Endpunkt eines Zweiges Z_{II} und die beiden Zweige fallen zusammen, werden aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Beweis: Die Konstruktion des Zweiges Z_I von seinem Anfangspunkt aus ist im vorliegenden Fall identisch mit der Konstruktion des Zweiges Z_{II} von seinem Endpunkt aus (vgl. S. 36/37).

$\sigma'_1, \sigma'_2 = c\sigma'_1$ sei wieder ein Äquatorpunkt einer Kurve (94). Mit diesem fällt der Punkt

$$\sigma''_1 = 2q\pi - \sigma'_1, \quad (103)$$

$$\sigma''_2 = 2p\pi - \sigma'_2 \stackrel{(95)}{=} c(2q\pi - \sigma'_1) = c\sigma''_1 \quad (104)$$

zusammen, für den σ''_1 in entgegengesetzter Richtung wie σ'_1 gezählt wird und σ''_2 in entgegengesetzter Richtung wie σ'_2 . Trägt man nämlich auf dem Äquator von A_1 aus den Bogen σ'_1 in der einen, den Bogen σ''_1 in der anderen Richtung ab, so fallen wegen $\sigma'_1 + \sigma''_1 = 2q\pi$ die Enden dieser beiden Bögen zusammen und Entsprechendes gilt wegen $\sigma'_2 + \sigma''_2 = 2p\pi$ auch für die Bögen σ'_2 und σ''_2 .

σ'_1, σ'_2 und σ''_1, σ''_2 stellen also zwei zusammenfallende Äquatorpunkte ein und derselben Kurve c dar und gehören deshalb nach dem Hilfssatz zu zwei Kurvenzweigen, die zusammenfallen, aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden.

σ'_2 liege nun im Intervall

$$(\rho - 1)\pi \leq \sigma'_2 \leq \rho\pi, \quad (\rho \text{ natürliche Zahl}); \quad (105)$$

dann liegt wegen der ersten Gleichung (104) σ''_2 im Intervall

$$(2p - \rho)\pi \leq \sigma''_2 \leq (2p - \rho + 1)\pi \quad (106)$$

und gehört nach Satz 20 der Punkt σ'_1, σ'_2 dem ρ -ten, der Punkt σ''_1, σ''_2 dem $(2p - \rho + 1)$ -ten Kurvenzweig an und das bedeutet, daß der ρ -te und der $(2p - \rho + 1)$ -te Kurvenzweig zusammenfallen, aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden. In Verbindung

mit Satz 25 folgt daraus Satz 26: Die Kurve $c = \frac{p}{q}$ ($0 \leq c \leq \infty$; p, q teilerfremde, natürliche Zahlen) besteht aus genau p nicht zusammenfallenden Kurvenzweigen. Die p ersten Zweige bilden bereits ein derartiges p -tupel nicht zusammenfallender Zweige; jeder weitere

Zweig fällt mit einem der p ersten Zweige zusammen, und zwar wird die Konfiguration dieser p Zweige immer abwechselnd einmal in derselben Reihenfolge und Richtung wie die ersten p Zweige, dann in umgekehrter Reihenfolge und Richtung wie diese durchlaufen. Insbesondere fällt der Endpunkt des p -ten mit dem Anfangspunkt des $(p + 1)$ -ten Zweiges und der Endpunkt des $2p$ -ten und der Anfangspunkt des $(2p + 1)$ -ten Zweiges mit dem Anfang des ersten

zusammen. Der obige Beweis von Satz 26 setzt $c > 1$ voraus. Seine Richtigkeit auch für $c < 1$ folgt dann durch Spiegelung an der x -Achse. Daß er auch für $c = 1$ gilt, erkennt man unmittelbar. In diesem Fall ist zu setzen $c = \frac{1}{1}$, also $p = 1$ und die Kurve $c = 1$ besteht bekanntlich aus dem unendlich oft überdeckten Durchmesser der x -Achse und zwar wird dieser immer abwechselnd einmal von u nach o , einmal von o nach u durchlaufen.

Für ganzzahliges $c = n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) wird $p = n$ und man erhält als Sonderfall von Satz 26 den Satz 27: *Die Kurve $c = n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) besitzt genau n nicht zusammenfallende Zweige*. Dasselbe gilt wegen der Symmetrieeigenschaft 2. von Seite 7 auch für die Kurve $c = 1/n$.

Kurven, deren c -Wert nahe an 1 liegt

Je näher bei festgehaltenem Winkel 2ω der Wert von c an 1 liegt, desto länger treten unter den Äquatorpunkten der Kurve c nur ξ -Fälle auf und desto seltener schiebt sich zwischen die ξ -Fälle ein η -Fall ein. Man kann das an Hand der Formeln (31) bestätigen, doch ist es einfacher, unmittelbar auf (3) zurückzugreifen, so wie wir das im folgenden tun.

Wir suchen zunächst den letzten α -Fall einer Kurve $c > 1$ mit Apollonischem Winkel 2ω , dessen σ_1 noch kleiner ist als der n -te γ -Fall, oder etwas anders ausgedrückt, wir suchen den letzten ganzzahligen Wert von r , für welchen gilt $\alpha_r < \gamma_n$, wobei n im Einzelfall eine fest vorgegebene ganze Zahl bedeutet. Aus der Gleichung für σ_1 in (3) α) entnehmen wir für ganzzahliges r

$$\alpha_r = \frac{1}{c+1} (2r\pi - 2\omega), \quad (107)$$

aus (3) γ) entnehmen wir

$$\gamma_n = \frac{1}{c-1} (2n\pi - 2\omega). \quad (108)$$

Vorübergehend fassen wir r als kontinuierliche Variable auf, die also nicht nur ganzzahliger Werte fähig ist und suchen den r -Wert, für welchen gilt

$$\alpha_r = \gamma_n. \quad (109)$$

Durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (107) und (108) erhält man für ihn die Gleichung

$$\frac{1}{c+1} (2r\pi - 2\omega) = \frac{1}{c-1} (2n\pi - 2\omega) \quad (110)$$

oder

$$2r\pi = \frac{c+1}{c-1} (2n\pi - 2\omega) + 2\omega. \quad (111)$$

Nun setzen wir

$$c = 1 + \Delta, \text{ woraus folgt } \frac{c+1}{c-1} = 1 + \frac{2}{\Delta} \quad (112)$$

und

$$\frac{\omega}{\pi} = \tau, \text{ woraus folgt } 2\omega = 2\tau\pi. \quad (113)$$

Damit formen wir (111) um in

$$2r\pi = \left(1 + \frac{2}{\Delta}\right) (2n\pi - 2\tau\pi) + 2\tau\pi = 2n\pi + \frac{4n\pi - 4\tau\pi}{\Delta}$$

und erhalten daraus schließlich als Wert r_n , welcher die Gleichung (109) erfüllt

$$r_n = n + \frac{2n - 2\tau}{\Delta}. \quad (114)$$

Für $r < r_n$ ist in (110) die linke Seite kleiner als die rechte, für $r > r_n$ ist es umgekehrt. Daraus folgt weiter (siehe (109))

$$\text{für } r \gtrless r_n \quad \text{ist} \quad \alpha_r \gtrless \gamma_n. \quad (115)$$

Auf ganz dieselbe Weise findet man aus (3) auch die Werte r_n für die Kombinationen β, γ ; α, δ und β, δ und hat damit im ganzen die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha, \gamma: \quad r_n &= n + \frac{2n - 2\tau}{\Delta}, \\ \beta, \gamma: \quad r_n &= n - 2\tau + \frac{2n - 2\tau}{\Delta}, \\ \alpha, \delta: \quad r_n &= n + 2\tau + \frac{2n + 2\tau}{\Delta}, \\ \beta, \delta: \quad r_n &= n + \frac{2n + 2\tau}{\Delta}. \end{aligned} \quad (116)$$

Dabei besagt z. B. die dritte Zeile (116), das ist die Zeile, die mit α, δ beginnt: Für ganzzahliges $r < r_n$ ist $\alpha_r < \delta_n$, für ganzzahliges $r > r_n$ ist $\alpha_r > \delta_n$. Die Bedeutung von Δ und τ ist aus (112) und (113) zu entnehmen.

Wie man sich leicht überzeugt, gilt in allen vier Fällen (116)

$$r_{n+1} = r_n + 1 + \frac{2}{\Delta}. \quad (117)$$

(116) und (117) bestätigen unsere zu Beginn aufgestellte Behauptung, daß unter der Voraussetzung gleichen Apollonischen Winkels 2ω unter den Äquatorpunkten um so länger nur ξ -Fälle auftreten und sich die η -Fälle in um so größeren Abständen einschieben, je näher c an 1 liegt, d. h. je kleiner Δ ist.

Als Beispiel für die Anwendung der Formeln (116) und (117) bringen wir die Kurve

$$c = 1,1 = \frac{11}{10}; \quad 2\omega = \pi/3. \quad (118)$$

Nach (112) und (113) haben wir hier

$$\Delta = \frac{1}{10}, \quad 2\tau = \frac{1}{3}. \quad (119)$$

Der erste η -Fall ist der Fall δ_0 . Wir finden für ihn aus der dritten und vierten Zeile (116) mit $n = 0$

$$\begin{aligned} \alpha, \delta_0: \quad r_0 &= \frac{1}{3} + \frac{10}{3} = 3\frac{2}{3}, \\ \beta, \delta_0: \quad r_0 &= \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (120)$$

Aus der ersten Gleichung (120) folgt $\alpha_3 < \delta_0 < \alpha_4$, aus der zweiten Gleichung (120) folgt $\beta_3 < \delta_0 < \beta_4$ und das zusammen gibt

$$\beta_3 < \delta_0 < \alpha_4, \quad (121)$$

d. h. die ersten sieben Äquatorpunkte sind ξ -Fälle, nämlich $\beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3 = \xi_7$, der achte Äquatorpunkt ist δ_0 , dann geht es, beginnend mit $\alpha_4 = \xi_8$ mit ξ -Fällen so lange weiter, bis der Fall $\gamma_2 = \gamma_1$ auftritt. Um festzustellen, der wievielte Äquatorpunkt das ist, berechnen wir aus der ersten und zweiten Gleichung (116) mit $n = 1$

$$\begin{aligned} \alpha, \gamma_1: \quad r_1 &= 1 + 10 \left(2 - \frac{1}{3}\right) = 17\frac{2}{3}, \\ \beta, \gamma_1: \quad r_1 &= 1 - \frac{1}{3} + 10 \left(2 - \frac{1}{3}\right) = 17\frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (122)$$

Aus der ersten Zeile (122) folgt $\alpha_{17} < \gamma_1 < \alpha_{18}$, aus der zweiten folgt $\beta_{17} < \gamma_1 < \beta_{18}$. Beides zusammen ergibt

$$\beta_{17} < \gamma_1 < \alpha_{18}, \quad (123)$$

d. h. auf β_{17} folgt γ_1 . Von $\alpha_4 = \xi_8$ bis $\beta_{17} = \xi_{35}$ treten also ununterbrochen nur ξ -Fälle auf. Mit

$$1 + \frac{2}{\Delta} = 21 \quad (124)$$

erhält man aus (117) und (120)

$$\begin{aligned} \alpha, \delta_1: \quad r_1 &= r_0 + 21 = 24\frac{2}{3}, \\ \beta, \delta_1: \quad r_1 &= r_0 + 21 = 24\frac{1}{3} \end{aligned} \quad (125)$$

und daraus weiter

$$\beta_{24} < \delta_1 < \alpha_{25}. \quad (126)$$

Nachdem im vorliegenden Fall der Zuschlag $r_{n+1} - r_n = 21$ eine ganze Zahl ist, würde es genügen, diese einfach zu den Indizes von β und α in (121) zu addieren. Man kommt so zu (126) ohne den Umweg über (125). Im allgemeinen, d. h. für beliebige c -Werte, wird aber der Zuschlag $1 + \frac{2}{\Delta}$ nicht ganzzahlig sein; dann muß man so vorgehen, wie wir das hier getan haben, man bildet die (125) entsprechenden Gleichungen und kann erst hieraus den fraglichen Index als die nächstkleinere bzw. nächstgrößere ganze Zahl bestimmen.

Ebenso findet man mit (124) aus (117) und (122) bzw. (123)

$$\beta_{38} < \gamma_2 < \alpha_{39}. \quad (127)$$

Da es sich in unserem Beispiel (118) um eine Kurve mit rationalem c handelt, können wir als Probe Satz 26 heranziehen. Mit der dortigen Bezeichnungsweise haben wir $p = 11$, die ersten 11 Zweige der Kurve fallen demnach nicht zusammen, während der 12. bis 22. Zweig mit dem 11. bis 1. zusammenfällt, und zwar jeweils der $(23 - \rho)$ -te mit dem ρ -ten Zweig, wobei der Anfangspunkt des einen sich mit dem Endpunkt des anderen deckt und umgekehrt und sowohl σ_1 als auch σ_2 für die beiden aufeinanderliegenden Äquatorpunkte in entgegengesetzter Richtung gezählt werden. Nun ist nach (121) samt zugehörigem Text β_3 der 7. und δ_0 der 8. Äquatorpunkt unserer Kurve $c = 1,1$, d. h. der Anfangspunkt des 4. Zweiges ist ein β -Fall, der Endpunkt ein δ -Fall. Nach dem eben Gesagten muß dann der Anfang des $(23 - 4)$ -ten = 19. Zweiges ein Fall γ , das Ende des

19. Zweiges ein Fall α sein. Man erkennt leicht, daß dem tatsächlich so ist. α_{18} nämlich ist der 36. ξ -Fall, vor ihm kommen bei der Kurve $c = 1,1$ wegen (121), (123) und (126) genau zwei η -Fälle, nämlich δ_0 und γ_1 ; infolgedessen ist α_{18} der 38. Äquatorpunkt, d. h. der Endpunkt des 19. Zweiges und der ihm auf Grund von (123) unmittelbar vorhergehende Fall γ_1 der Anfang des 19. Zweiges. — Mit dem 23. Zweig beginnt gemäß Satz 25 die Konfiguration der ersten 22 Zweige wieder von vorne. Infolgedessen muß der Anfang des $(22 + 4)$ -ten = 26. Zweiges ein Fall β , sein Ende ein Fall δ sein. An Hand von (126) erkennt man, daß dies auch tatsächlich zutrifft. Denn β_{24} ist der 49. Fall ξ , vor ihm kommen bei der Kurve $c = 1,1$ noch genau zwei η -Fälle, nämlich δ_0 und γ_1 , so daß β_{24} der 51. Äquatorpunkt und damit der Anfang des 26. Zweiges ist. Nach (126) folgt unmittelbar auf ihn δ_1 als Ende des 26. Zweiges. Entsprechend findet man aus (127), daß der 41. Zweig mit γ_2 beginnt und mit α_{39} endet, in Übereinstimmung mit Satz 26 bzw. Satz 25.

Figur 20 gibt die ersten 11 Zweige der Kurve $c = 1,1$, $2\omega = \pi/3$ samt Durchlaufungssinn und Fälle der Äquatorpunkte. Auf Grund des oben Gesagten bzw. von Satz 26 hat man damit bereits jeden beliebigen Zweig samt Durchlaufungssinn. Die Fälle der Äquatorpunkte eines solchen beliebigen Zweiges kann man aus den in Figur 20 angegebenen Fällen dann so feststellen, wie das oben für den 19. und 26. Zweig geschehen ist.

Für die α -Fälle wird sowohl σ_1 als auch σ_2 in entgegengesetzter Richtung gezählt, wie für die β -Fälle. Ist von den beiden Äquatorpunkten eines Zweiges der eine ein α -, der andere ein β -Fall, so führt der Zweig demnach von einem Sektor zu dem ihm gegenüber-

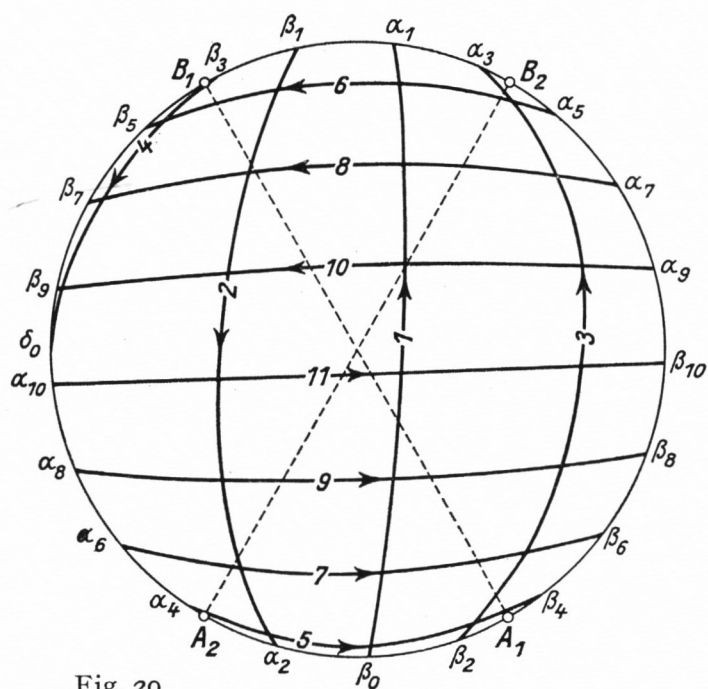


Fig. 20

$$2\omega = \frac{\pi}{3}, c = 1,1$$

liegenden (Satz 8) und eine Folge von ξ -Fällen ohne einen η -Fall dazwischen bedeutet demnach eine Folge von ungefähr halb so viel Zweigen, die sämtlich zwischen den beiden gleichen gegenüberliegenden Sektoren, entweder zwischen 1 und 3 oder zwischen 2 und 4

hin und herpendeln. Weil die Kurven $c \sim 1$ dadurch gekennzeichnet sind, daß die einzelnen η -Fälle sich nur in größeren Abständen zwischen die ξ -Fälle einschieben, springt bei ihnen, beginnend mit dem Sektor 1, erst eine Anzahl von Zweigen zwischen den Sektoren 1 und 3, dann eine Anzahl von Zweigen zwischen den Sektoren 2 und 4, dann wieder eine Anzahl von Zweigen zwischen den Sektoren 1 und 3 hin und her usw. Zwischen je einer solchen Folge von Zweigen zwischen 1 und 3 und einer solchen zwischen 2 und 4 oder auch umgekehrt, kommt jeweils ein Zweig, der von einem Sektor zu einem benachbarten führt, nämlich der Zweig, bei dem der η -Fall auftritt. Denn der eine Äquatorpunkt dieses Zweiges ist ein ξ -Fall, der andere ein η -Fall, so daß im Endpunkt dieses Zweiges nur einer der beiden sphärischen Abstände σ_1, σ_2 in entgegengesetzter Richtung auf dem Äquator gezählt wird, wie im Anfangspunkt und infolgedessen überspringt dieser Zweig nur einen der beiden Halbmesser A_1B_1 und A_2B_2 (siehe die Figuren zu (3) und Satz 8). Bei der Kurve $c = 1,1$ z. B. haben wir festgestellt, daß der erste η -Fall der Endpunkt des 4. Zweiges, der zweite η -Fall der Anfang des 19. Zweiges, der dritte η -Fall der Endpunkt des 26. Zweiges und der vierte η -Fall der Anfang des 41. Zweiges ist. (Für das Folgende siehe Figur 20.) Dementsprechend verlaufen ihre ersten 3 Zweige zwischen den Sektoren 1 und 3, der 4. Zweig führt von 3 nach 4, die nächsten 14 Zweige springen zwischen den Sektoren 2 und 4 hin und her, der 19. Zweig führt von 4 nach 3, die nächsten 6 Zweige springen wieder zwischen 1 und 3 hin und her, der 26. Zweig führt von 3 nach 4, die nächsten 14 Zweige pendeln wieder zwischen 2 und 4 hin und her, der 41. Zweig führt von 4 nach 3 usw., immer 6 Zweige zwischen 1 und 3, 14 Zweige zwischen 2 und 4 und dazwischen jeweils 1 Zweig der von 3 nach 4 oder von 4 nach 3 führt.

Bei einer Kurve $c \sim 1$ mit irrationalem c sind keine zwei Zweige gleich und man kann deshalb aus einer endlichen Anzahl von Zweigen am Anfang der Kurve nicht so einfach, wie das für $c = 1,1$ geschehen ist, auf den genauen Verlauf der übrigen Zweige schließen. Doch bleibt auch in diesem Fall als wesentliches Merkmal, daß die Kurve sich aus Folgen von Zweigen zusammensetzt, die zwischen zwei gegenüberliegenden Sektoren hin- und herlaufen und daß zwischen je zwei solchen Folgen ein Zweig auftritt, der von einem Sektor zu einem ihm benachbarten führt.

Wir haben die Untersuchungen unter der Voraussetzung $c > 1$ geführt. Aus der Symmetrieeigenschaft 2. von S. 7 erkennt man, daß der eben beschriebene Kurvenverlauf aber auch für nahe an 1 gelegene Werte $c < 1$ charakteristisch ist.

Die Kurven $c \gg 1$ und $c \sim 0$

Für großes $c = \sigma_2 : \sigma_1$, wir schreiben dafür $c \gg 1$, bewegt sich die 2-Sehne wesentlich schneller als die 1-Sehne, so daß die 1-Sehne ihre Lage nur wenig ändert, wenn die 2-Sehne die gesamte Kreisfläche von A_2 bis B_2 oder umgekehrt völlig überstreicht. Daraus folgt, daß die einzelnen Zweige einer Kurve $c \gg 1$ sämtlich innerhalb schmaler Streifen verlaufen, die von je zwei nahe beisammen gelegenen 1-Sehnen begrenzt werden. In Figur 21, welche die ersten 9 Zweige der Kurve $c = 9$ gibt, ist das bereits deutlich erkennbar. — Je größer c ist, desto schmaler sind die Streifen, welche die 1-Sehne überstreicht, während die 2-Sehne über die ganze Kreisfläche gleitet, desto mehr ähneln infolgedessen die einzelnen Zweige Sehnen, die ungefähr senkrecht zum Durchmesser A_1B_1 verlaufen und desto geringer ist der Abstand zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Zweigen.

Aus der Symmetrieeigenschaft 2. von Seite 7 folgt daraus weiter, daß für sehr kleine

c-Werte, wir schreiben dafür $c \sim 0$, die einzelnen Kurvenzweige ungefähr wie Sehnen senkrecht zum Durchmesser A_2B_2 aussehen und die Zweige um so dichter aufeinanderfolgen, je näher c an Null liegt.

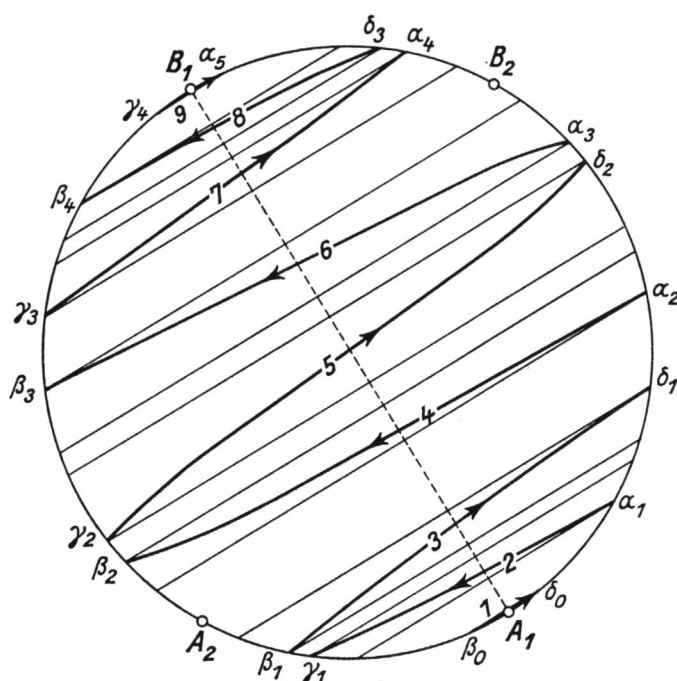


Fig. 21

$$2\omega = \frac{\pi}{3}, c = 9$$

Zusatz zu Figur 21: Nach Satz 27 hat man mit den 9 Zweigen der Figur 21 bereits sämtliche Zweige der Kurve $c = 9$, wobei allerdings für jeden späteren als den 9. Zweig der Durchlaufungssinn erst noch nach Satz 26 zu bestimmen ist und die in Figur 21 bei den Äquatorpunkten angeschriebenen Fälle nur für die ersten 9 Zweige zutreffen.

Rechnerische Behandlung beliebiger Kurvenzweige

Die Gleichungen II (2) wurden auf Seite 8 unter der Voraussetzung $0 \leq \sigma_i \leq \pi$ ($i = 1, 2$) aufgestellt. Im Gegensatz dazu nehmen wir jetzt zunächst an, der sphärische Abstand σ_i des Punktes P liege im Intervall $\pi \leq \sigma_i \leq 2\pi$. In Figur II 1 verläuft dann σ_i von A_i aus auf der unteren Halbkugel nach B_i und von da ab auf der oberen Halbkugel nach P und in dem Eulerschen sphärischen Dreieck NA_iP der Figur II 1 ist in diesem Fall σ_i durch $2\pi - \sigma_i$ zu ersetzen. Durch Anwendung des Kosinussatzes auf dieses Dreieck, in Verbindung mit der Beziehung $\cos(2\pi - \sigma_i) = \cos \sigma_i$, erkennt man, daß die Gleichungen II (2) auch für σ_i -Werte zwischen π und 2π richtig bleiben. Nun kann man jeden Fall $\sigma_i > 2\pi$ durch Subtraktion eines geeigneten Vielfachen von 2π auf den Fall $0 \leq \sigma_i \leq 2\pi$ zurückführen, zu dem dasselbe Dreieck PA_iN und damit auch dieselbe Gleichung II (2) gehört, und deshalb gelten die Gleichungen II (2) ganz allgemein auch für beliebige Kurvenzweige.

Bei der Berechnung von λ und ψ aus σ_1 und σ_2 und bei der Herleitung der Parameterdarstellung der Kurve c in kartesischen Koordinaten (S. 9 unten bis S. 13, mit Ausnahme des Textes nach (24)) wurde nirgends eine einschränkende Annahme über die Größe von σ_1 und σ_2 gemacht und da II (2) für beliebige Kurvenzweige gilt, behalten auch die dortigen Ergebnisse für den allgemeinen Fall ihre Gültigkeit. Insbesondere gelten also auch für beliebige Kurvenzweige die Gleichungen II (22) und II (23) zur Berechnung von $\cos^2 \psi$ und $\operatorname{tg} \lambda$, die Bedingung II (24), daß ein Wertepaar σ_1, σ_2 tatsächlich einen (reellen) Kurvenpunkt liefert, die Parameterdarstellung II (32) der Kurve c in kartesischen Koordinaten und bezüglich der Grundrißkurve die beiden ersten Gleichungen II (32) sowie II (33) und II (34).

Aus II (34) entnimmt man ziemlich unmittelbar, daß jeder Zweig durch einen der Punkte A_2 oder B_2 den Äquatorkreis dort berührt (vgl. (80) und den Text nach (81)).

An die Stelle von II (4) tritt für beliebige Kurvenzweige die Beziehung

$$\arccos(\cos \psi \cos(\lambda + \omega)) - c \arccos(\cos \psi \cos(\lambda - \omega)) = 0. \quad (128)$$

Behandelt man diese Gleichung ebenso, wie II (4) behandelt wurde um zu II (9) zu kommen, so erhält man zunächst zwei Gleichungen, die sich von den Gleichungen II (7) und II (8) höchstens im Vorzeichen der Wurzeln unterscheiden und die wir als (7') und (8') bezeichnen. Die Wurzeln in den ersten Brüchen der Gleichungen (7') und (8') haben immer gleiches Vorzeichen und ebenso auch die Wurzeln in den zweiten Brüchen dieser beiden Gleichungen; und zwar haben die beiden Wurzeln derselben Gleichung (und damit alle vier Wurzeln) gleiches Vorzeichen, wenn entweder

$$2m\pi < \sigma_1 < (2m + 1)\pi \quad \text{und zugleich} \quad 2n\pi < \sigma_2 < (2n + 1)\pi \quad (129 \text{ a})$$

oder

$$(2m - 1)\pi < \sigma_1 < 2m\pi \quad \text{und zugleich} \quad (2n - 1)\pi < \sigma_2 < 2n\pi \quad (129 \text{ b})$$

gilt, sie haben entgegengesetztes Vorzeichen wenn entweder

$$2m\pi < \sigma_1 < (2m + 1)\pi \quad \text{und zugleich} \quad (2n - 1)\pi < \sigma_2 < 2n\pi \quad (130 \text{ a})$$

oder

$$(2m - 1)\pi < \sigma_1 < 2m\pi \quad \text{und zugleich} \quad 2n\pi < \sigma_2 < (2n + 1)\pi \quad (130 \text{ b})$$

gilt. m und n sind hierbei ganze Zahlen, es kann $m = n$ oder auch $m \neq n$ sein. Denn für

$$\begin{aligned} 2k\pi < \sigma_1 < (2k + 1)\pi & \text{ fällt die Ableitung der } \arccos\text{-Funktion,} \\ \text{für } (2k - 1)\pi < \sigma_1 < 2k\pi & \text{ steigt die Ableitung der } \arccos\text{-Funktion.} \end{aligned} \quad (131)$$

An die Stelle von II (9) tritt infolgedessen zur Berechnung des Azimutes für beliebige Zweige die Beziehung

$$\operatorname{tg} \alpha = -\sin \psi \frac{\cos(\lambda + \omega) \sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2(\lambda - \omega)} \mp c \cos(\lambda - \omega) \sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2(\lambda + \omega)}}{\sin(\lambda + \omega) \sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2(\lambda - \omega)} \mp c \sin(\lambda - \omega) \sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2(\lambda + \omega)}}, \quad (132)$$

an die Stelle von II (10) tritt der Ausdruck

$$(1 \mp c) \sin(\lambda - \omega) \sin(\lambda + \omega). \quad (133)$$

Dabei hat man in (132) und (133) das obere Vorzeichen zu nehmen, wenn entweder der Fall (129 a) oder der Fall (129 b) vorliegt, man hat das untere Vorzeichen zu nehmen, wenn entweder der Fall (130 a) oder der Fall (130 b) vorliegt. Aus (132) und (133) kann

man durch eine entsprechende Schlußweise wie nach II (9) folgern, daß der Äquator auch von beliebigen Zweigen senkrecht geschnitten wird, außer eventuell in den vier Fundamentalpunkten. Daß jeder der Zweige von $c = 1$ senkrecht auf dem Äquator steht, folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß diese Kurve aus zwei unendlich oft durchlaufenen Meridianen, nämlich $\lambda = 0$ und $\lambda = \pi$ besteht.

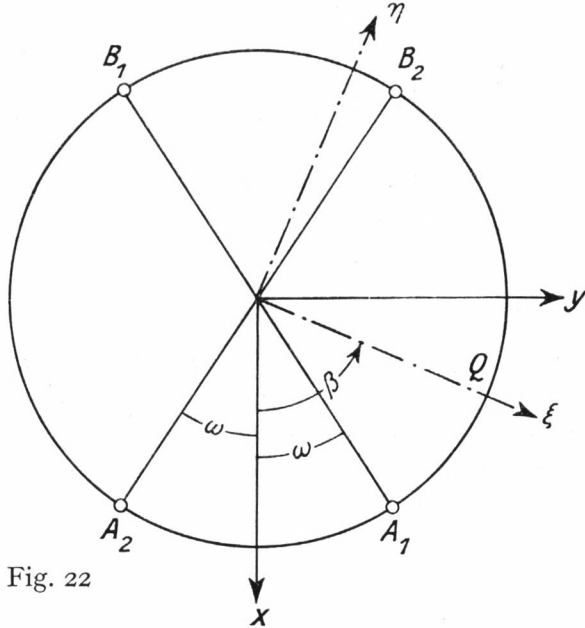


Fig. 22

Anschließend wollen wir das Verhalten der Apollonischen Kurven in der Nähe des Äquators und insbesondere in der Umgebung der Fundamentalpunkte noch genauer verfolgen. Figur 22 zeigt die Äquatorebene mit dem schon auf Seite 12 eingeführten x, y -System (s. auch Figur II 3). Q sei ein Äquatorpunkt der Apollonischen Kurve c . Wir zählen den Winkel β , den der Radius durch Q mit der positiven x -Achse einschließt, im positiven Sinn der x, y -Ebene und legen durch Q die Abszissenachse eines neuen rechtwinklig-kartesischen Systems ξ, η mit dem Ursprung im Kreismittelpunkt¹⁾. Die Transformationsformeln zwischen x, y und ξ, η lauten

$$\xi = x \cos \beta + y \sin \beta, \quad \eta = -x \sin \beta + y \cos \beta. \quad (134)$$

Vermittels der Gleichungen II (29), welche nach S. 71 auch für beliebige Kurvenzweige gelten, eliminieren wir in (134) die Koordinaten x, y und erhalten zur Berechnung der Koordinaten ξ, η eines beliebigen Kurvenpunktes aus σ_1 und σ_2 die Formeln

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\cos \beta}{2 \cos \omega} (\cos \sigma_1 + \cos \sigma_2) + \frac{\sin \beta}{2 \sin \omega} (\cos \sigma_1 - \cos \sigma_2), \\ \eta &= -\frac{\sin \beta}{2 \cos \omega} (\cos \sigma_1 + \cos \sigma_2) + \frac{\cos \beta}{2 \sin \omega} (\cos \sigma_1 - \cos \sigma_2). \end{aligned} \quad (135)$$

$\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2 = c \bar{\sigma}_1$ seien die σ -Werte des Äquatorpunktes Q der Figur 22. Aus den Gleichungen für $\sigma_2 + \sigma_1$ und $\sigma_2 - \sigma_1$ in (3) ergibt sich für sie

$$\bar{\sigma}_2 = \pm (\bar{\sigma}_1 \pm 2\omega) + 2n\pi, \quad (136)$$

oberes Vorzeichen vor der Klammer in γ - und δ -Fällen,
unteres Vorzeichen vor der Klammer in α - und β -Fällen; (136 a)

oberes Vorzeichen vor 2ω in α - und δ -Fällen,
unteres Vorzeichen vor 2ω in β - und γ -Fällen. (136 b)

¹⁾ Die Zeichen ξ und η haben hier nichts mit den auf Seite 47 eingeführten ξ - und η -Fällen zu tun sondern bedeuten kartesische Koordinaten.

$\sigma_1, \sigma_2 = c\sigma_1$ sei ein zum Äquatorpunkt Q benachbarter Punkt der Kurve c . Wir setzen

$$\sigma_1 = \bar{\sigma}_1 + \Delta \sigma_1, \quad \sigma_2 = \bar{\sigma}_2 + \Delta \sigma_2, \quad (137)$$

mit

$$\Delta \sigma_2 = c \Delta \sigma_1 \quad (138)$$

und bekommen durch Taylorentwicklung unter Vernachlässigung von Gliedern dritter Ordnung

$$\cos \sigma_1 = \cos (\bar{\sigma}_1 + \Delta \sigma_1) = \cos \bar{\sigma}_1 - \Delta \sigma_1 \sin \bar{\sigma}_1 - \frac{(\Delta \sigma_1)^2}{2} \cos \bar{\sigma}_1 \quad (139)$$

$$\begin{aligned} \cos \sigma_2 &= \cos (\pm (\bar{\sigma}_1 \pm 2\omega) + c \Delta \sigma_1) \\ &= \cos (\bar{\sigma}_1 \pm 2\omega) \mp c \Delta \sigma_1 \sin (\bar{\sigma}_1 \pm 2\omega) - c^2 \frac{(\Delta \sigma_1)^2}{2} \cos (\bar{\sigma}_1 \pm 2\omega). \end{aligned} \quad (140)$$

$$\begin{aligned} &\text{oberes Vorzeichen vor } c \text{ in } \gamma\text{- und } \delta\text{-Fällen,} \\ &\text{unteres Vorzeichen vor } c \text{ in } \alpha\text{- und } \beta\text{-Fällen;} \end{aligned} \quad (140 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} &\text{oberes Vorzeichen vor } 2\omega \text{ in } \alpha\text{- und } \delta\text{-Fällen,} \\ &\text{unteres Vorzeichen vor } 2\omega \text{ in } \beta\text{- und } \gamma\text{-Fällen.} \end{aligned} \quad (140 \text{ b})$$

(140 a) und (140 b) folgen unmittelbar aus (136 a) und (136 b).

Der Einfachheit halber schreiben wir im folgenden

$$\text{statt } \bar{\sigma}_1 \text{ nur } \sigma, \quad \text{statt } \Delta \sigma_1 \text{ nur } \Delta \sigma. \quad (141)$$

Aus (139) und (140) bilden wir

$$\begin{aligned} \cos \sigma_1 + \cos \sigma_2 &= \cos \sigma + \cos (\sigma \pm 2\omega) - \Delta \sigma \left\{ \sin \sigma \pm c \sin (\sigma \pm 2\omega) \right\} \\ &\quad - \frac{(\Delta \sigma)^2}{2} \left\{ \cos \sigma + c^2 \cos (\sigma \pm 2\omega) \right\}, \end{aligned} \quad (142)$$

$$\begin{aligned} \cos \sigma_1 - \cos \sigma_2 &= \cos \sigma - \cos (\sigma \pm 2\omega) - \Delta \sigma \left\{ \sin \sigma \mp c \sin (\sigma \pm 2\omega) \right\} \\ &\quad - \frac{(\Delta \sigma)^2}{2} \left\{ \cos \sigma - c^2 \cos (\sigma \pm 2\omega) \right\}. \end{aligned} \quad (143)$$

Für die Wahl der Vorzeichen gilt (140 a) und (140 b).

Aus Figur 22 lesen wir ab

$$\beta = \pm \sigma + \omega + 2k\pi; \quad (k = \text{ganze Zahl}) \quad (144)$$

oberes Vorzeichen, wenn $\bar{\sigma}_1 \equiv \sigma$ im positiven Drehsinn der x, y -Ebene gezählt wird

$$(\alpha\text{- und } \delta\text{-Fälle}), \quad (144 \text{ a})$$

unteres Vorzeichen, wenn $\bar{\sigma}_1 \equiv \sigma$ im negativen Drehsinn der x, y -Ebene gezählt wird

$$(\beta\text{- und } \gamma\text{-Fälle}).$$

Man beachte, daß in (144) vor $\sigma \equiv \bar{\sigma}_1$ immer dasselbe Vorzeichen zu nehmen ist, wie in (140), (142) und (143) vor 2ω ; das folgt durch Vergleich von (144 a) mit (140 b).

Mit (142), (143), (144) und den Beziehungen

$$\cos \sigma + \cos (\sigma \pm 2\omega) = 2 \cos \frac{\sigma + \sigma \pm 2\omega}{2} \cos \frac{\sigma - (\sigma \pm 2\omega)}{2} = 2 \cos (\sigma \pm \omega) \cos \omega, \quad (145)$$

$$\begin{aligned} \cos \sigma - \cos (\sigma \pm 2\omega) &= -2 \sin \frac{\sigma + \sigma \pm 2\omega}{2} \sin \frac{\sigma - (\sigma \pm 2\omega)}{2} = -2 \sin (\sigma \pm \omega) \sin (\mp \omega) \\ &= 2 \sin (\sigma \pm \omega) \sin (\pm \omega) = 2 \sin (\omega \pm \sigma) \sin \omega \end{aligned} \quad (146)$$

formen wir die Gleichungen (135) folgendermaßen um

$$\xi = \frac{\cos(\pm\sigma + \omega)}{2 \cos \omega} \left\{ 2 \cos(\sigma \pm \omega) \cos \omega - \Delta\sigma (\sin \sigma \pm c \sin(\sigma \pm 2\omega)) - \frac{(\Delta\sigma)^2}{2} (\cos \sigma + c^2 \cos(\sigma \pm 2\omega)) \right\} \quad (147)$$

$$+ \frac{\sin(\pm\sigma + \omega)}{2 \sin \omega} \left\{ 2 \sin(\omega \pm \sigma) \sin \omega - \Delta\sigma (\sin \sigma \mp c \sin(\sigma \pm 2\omega)) - \frac{(\Delta\sigma)^2}{2} (\cos \sigma - c^2 \cos(\sigma \pm 2\omega)) \right\};$$

$$\eta = -\frac{\sin(\pm\sigma + \omega)}{2 \cos \omega} \left\{ 2 \cos(\sigma \pm \omega) \cos \omega - \Delta\sigma (\sin \sigma \pm c \sin(\sigma \pm 2\omega)) - \frac{(\Delta\sigma)^2}{2} (\cos \sigma + c^2 \cos(\sigma \pm 2\omega)) \right\} \quad (148)$$

$$+ \frac{\cos(\pm\sigma + \omega)}{2 \sin \omega} \left\{ 2 \sin(\omega \pm \sigma) \sin \omega - \Delta\sigma (\sin \sigma \mp c \sin(\sigma \pm 2\omega)) - \frac{(\Delta\sigma)^2}{2} (\cos \sigma - c^2 \cos(\sigma \pm 2\omega)) \right\}.$$

In (145) bis (148) gilt:

oberes Vorzeichen vor c in γ - und δ -Fällen, (149 a)

unteres Vorzeichen vor c in α - und β -Fällen;

oberes Vorzeichen im Argument in α - und δ -Fällen, (149 b)

unteres Vorzeichen im Argument in β - und γ -Fällen.

(149 a) und (149 b) folgen aus (140 a), (140 b) und (144 a).

In (147) und (148) fassen wir nach Potenzen von $\Delta\sigma$ zusammen und erhalten

$$\xi = 1 - \frac{\Delta\sigma}{\sin 2\omega} (1 \mp c) \sin \sigma \sin(\pm\sigma + 2\omega) - \frac{(\Delta\sigma)^2}{2 \sin 2\omega} \left\{ \cos \sigma \sin(\pm\sigma + 2\omega) - c^2 \cos(\sigma \pm 2\omega) \sin(\pm\sigma) \right\}; \quad (150)$$

$$\eta = -\frac{\Delta\sigma}{\sin 2\omega} \left\{ \sin \sigma \cos(\sigma \pm 2\omega) \mp c \cos \sigma \sin(\sigma \pm 2\omega) \right\} - \frac{(\Delta\sigma)^2}{2 \sin 2\omega} (1 - c^2) \cos \sigma \cos(\sigma \pm 2\omega). \quad (151)$$

Für die Vorzeichenwahl in (150) und (151) gelten (149 a) und (149 b).

Der Übergang von (147) und (148) zu (150) und (151) erfolgt durch elementare trigonometrische Umformungen, wobei lediglich die richtige Mitnahme der doppelten Vorzeichen einige Aufmerksamkeit erfordert. Als Beispiel, wie das zu geschehen hat, bringen wir ausführlich die Berechnung des linearen Gliedes in (150). Aus (147) findet man

lineares Glied von $\xi =$

$$\frac{-\Delta\sigma}{2 \sin \omega \cos \omega} \left\{ \cos(\pm\sigma + \omega) \sin \sigma \sin \omega + \sin(\pm\sigma + \omega) \sin \sigma \cos \omega \pm c [\cos(\pm\sigma + \omega) \sin(\sigma \pm 2\omega) \sin \omega - \sin(\pm\sigma + \omega) \sin(\sigma \pm 2\omega) \cos \omega] \right\}. \quad (152)$$

$$\begin{aligned}
\text{Nun ist} \quad & \sin \sigma [\cos (\pm \sigma + \omega) \sin \omega + \sin (\pm \sigma + \omega) \cos \omega] = \\
& \sin \sigma \frac{[\cos (\sigma + \omega) \sin \omega + \sin (\sigma + \omega) \cos \omega]}{[\cos (-\sigma + \omega) \sin \omega + \sin (-\sigma + \omega) \cos \omega]} = \sin \sigma \frac{\sin (\sigma + 2\omega)}{\sin (-\sigma + 2\omega)} \quad (153)^1) \\
& = \sin \sigma \sin (\pm \sigma + 2\omega); \\
& \pm c \sin (\sigma \pm 2\omega) [\cos (\pm \sigma + \omega) \sin \omega - \sin (\pm \sigma + \omega) \cos \omega] = \\
& \pm c \frac{\sin (\sigma + 2\omega) [\cos (\sigma + \omega) \sin \omega - \sin (\sigma + \omega) \cos \omega]}{\sin (\sigma - 2\omega) [\cos (-\sigma + \omega) \sin \omega - \sin (-\sigma + \omega) \cos \omega]} = \mp c \frac{\sin (\sigma + 2\omega) \sin \sigma}{\sin (-\sigma + 2\omega) \sin \sigma} \\
& = \mp c \sin \sigma \sin (\pm \sigma + 2\omega). \quad (154)
\end{aligned}$$

(153) und (154) eingesetzt in (152) geben gerade das in $\Delta\sigma$ lineare Glied von (150).

Fällt der Äquatorpunkt Q der Kurve c mit keinem der vier Fundamentalpunkte zusammen, so ist weder $\bar{\sigma}_1$ noch $\bar{\sigma}_2$, d. h. weder σ noch $\pm \sigma + 2\omega$ (vergleiche (136) und (141)) Null oder ein Vielfaches von π , so daß in der Gleichung (150) für ξ der Faktor von $\Delta\sigma$ von Null verschieden wird.²⁾ Bedeutet z die zur x, y - bzw. ξ, η -Ebene senkrechte Koordinate, so wie schon auf Seite 12, so erhält man infolgedessen in diesem Fall unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung aus (150) und (151)

$$z^2 = 1 - (\xi^2 + \eta^2) = \Delta\sigma \frac{2}{\sin 2\omega} (1 \mp c) \sin \sigma \sin (\pm \sigma + 2\omega). \quad (155)$$

Aus (150) und (151) findet man als Projektion der Apollonischen Kurve in die ξ, η -Ebene (Äquatorebene) in der Umgebung des Äquatorpunktes Q in erster Näherung die Gerade

$$\eta = \frac{\sin \sigma \cos (\sigma \pm 2\omega) \mp c \cos \sigma \sin (\sigma \pm 2\omega)}{(1 \mp c) \sin \sigma \sin (\pm \sigma + 2\omega)} (\xi - 1) = (\xi - 1) \operatorname{tg} \nu; \quad (156)$$

ν ist hier der Winkel zwischen dieser Geraden und der ξ -Achse, d. h. zwischen der Kurventangente und dem Radius durch Q (vgl. Figur 22) und man liest für ihn aus (156) ab

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\sin \sigma \cos (\sigma \pm 2\omega) \mp c \cos \sigma \sin (\sigma \pm 2\omega)}{(1 \mp c) \sin \sigma \sin (\pm \sigma + 2\omega)}; \quad (157)$$

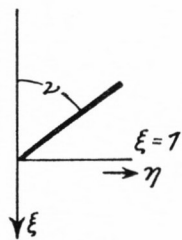


Fig. 23a

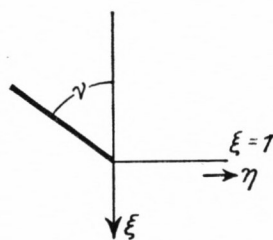


Fig. 23b

Figur 23 a gibt die Projektion (156) für $\operatorname{tg} \nu > 0$, Figur 23 b für $\operatorname{tg} \nu < 0$.

Aus (151) und (155) findet man als Projektion der Apollonischen Kurve in die η, z -Ebene bzw. in die dazu parallele Tangentialebene an die Kugel in Q in der Umgebung des Äquatorpunktes Q in erster Näherung die Parabel

¹⁾ Die obere Zeile bedeutet den Faktor von $\sin \sigma$ bei Wahl des oberen Vorzeichens im Argument, die untere Zeile bei Wahl des unteren Vorzeichens. Entsprechendes gilt für den Faktor von c in (154).

²⁾ Der an sich naheliegende Schluß „Für $c = 1$ ist wegen $c - 1 = 0$ der Faktor von $\Delta\sigma$ in (150) Null“ wäre falsch. Denn die Kurve $c = 1$ enthält nur α - und β -Fälle und für diese ist stets das untere Vorzeichen vor c zu wählen (149 a).

$$z^2 = - \frac{2(1 \mp c) \sin \sigma \sin (\pm \sigma + 2\omega)}{\sin \sigma \cos (\sigma \pm 2\omega) \mp c \cos \sigma \sin (\sigma \pm 2\omega)} \quad \eta = 2p\eta \quad (158)$$

mit dem Scheitel in Q und dem Parabelparameter

$$p = - \frac{(1 \mp c) \sin \sigma \sin (\pm \sigma + 2\omega)}{\sin \sigma \cos (\sigma \pm 2\omega) \mp c \cos \sigma \sin (\sigma \pm 2\omega)}. \quad (159)$$

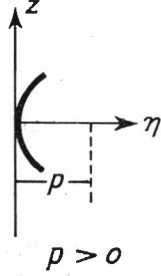


Fig. 24a

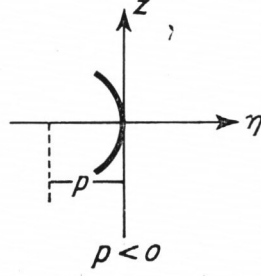


Fig. 24b

Figur 24 a gibt eine solche Parabel (158) für $p > 0$, Figur 24 b für $p < 0$.

Für die Vorzeichenwahl in den Gleichungen (155) bis (159) gilt wieder (149 a) und (149 b).

Bekanntlich ist der Scheitelkrümmungsradius ρ der Parabel (158) gleich $|p|$. Durch Vergleich von (157) und (159) findet man für ihn

$$\rho = |p| = |\operatorname{ctg} \nu|. \quad (160)$$

Je größer ρ , desto kleiner ist also $\operatorname{tg} \nu$, je schwächer gekrümmt die Parabel (158) der η, z -Ebene im Scheitel Q, desto kleiner der Winkel zwischen der Geraden (156) der ξ, η -Ebene und dem Radius durch Q.

Weil alle Kurvenpunkte auf der Einheitskugel liegen, gilt stets $\xi - 1 \leq 0$. Damit folgt aus (150)

$$\Delta\sigma (1 \mp c) \sin \sigma \sin (\pm \sigma + 2\omega) \geq 0. \quad (161)$$

Ist hier der Faktor von $\Delta\sigma$ positiv, so kommen nur positive $\Delta\sigma$ -Werte in Frage, d. h. Q ist Anfangspunkt eines Kurvenzweiges; ist der Faktor von $\Delta\sigma$ negativ, so kommen nur negative $\Delta\sigma$ -Werte in Frage, Q ist Endpunkt eines Kurvenzweiges. Es sind demnach

$$\begin{aligned} \text{die Anfangspunkte durch } (1 \mp c) \sin \sigma \sin (\pm \sigma + 2\omega) &> 0, \\ \text{die Endpunkte durch } (1 \mp c) \sin \sigma \sin (\pm \sigma + 2\omega) &< 0 \end{aligned} \quad (162)^1$$

gekennzeichnet.

Zur Kontrolle wenden wir unsere Formeln auf die Kurve $c = 1$ an. Sie enthält nur α - und β -Fälle, weshalb bei dem doppelten Vorzeichen vor c jeweils das untere zu nehmen ist (siehe (149 a)) und schneidet den Äquator nur in den Punkten $\lambda = 0$ und $\lambda = \pi$, d. h. in u und o. Für diese sämtlichen Fälle ist in (157) der Zähler Null, der Nenner von Null verschieden. Denn es gilt (für das folgende s. (3) und (149 b)) im α -Fall

wegen $\sigma = n\pi - \omega$, im Argument oberes Vorzeichen, $\sigma + 2\omega = n\pi + \omega$:

$$\begin{aligned} \text{Zähler in (157)} &= \sin (n\pi - \omega) \cos (n\pi + \omega) + \cos (n\pi - \omega) \sin (n\pi + \omega) = \\ &= \sin 2n\pi = 0, \end{aligned} \quad (163)$$

$$\text{Nenner in (157)} = 2 \sin (n\pi - \omega) \sin (n\pi + \omega) = -2 \sin^2 \omega < 0,$$

und es geht im β -Fall

wegen $\sigma = n\pi + \omega$, im Argument unteres Vorzeichen, $\sigma - 2\omega = n\pi - \omega$, $-\sigma + 2\omega = -n\pi + \omega$:

¹⁾ Für Fundamentalpunkte und nur für diese würde in (162) beidmal das Gleichheitszeichen auftreten (vgl. den Text zwischen (154) und (155)). Es wären für sie beide Gleichungen (162) zugleich erfüllt, in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß jeder singuläre Punkt sowohl als Anfangs- als auch als Endpunkt eines Zweiges aufgefaßt werden kann.

$$\begin{aligned} \text{Zähler in (157)} &= \sin(n\pi + \omega) \cos(n\pi - \omega) + \cos(n\pi + \omega) \sin(n\pi - \omega) = \\ &= \sin 2n\pi = 0, \end{aligned} \quad (164)$$

$$\text{Nenner in (157)} = 2 \sin(n\pi + \omega) \sin(-n\pi + \omega) = 2 \sin^2 \omega > 0.$$

In jedem Äquatorpunkt der Kurve $c = 1$ gilt also $\operatorname{tg} \nu = 0$, d. h. die Projektion (156) der Kurve in die Äquatorebene fällt auf die ξ -Achse, also auf den Radius durch diesen Punkt; mit (160) erkennt man weiter, daß die Krümmung der Projektion (158) in die η, z -Ebene, das ist hier die y, z -Ebene, den Betrag $\frac{1}{\rho} = |\operatorname{tg} \mu| = 0$ hat, also in die z -Achse ausartet. Damit stimmt überein, daß die Kurve $c = 1$ sich aus den Meridianen $\lambda = 0$ und $\lambda = \pi$ zusammensetzt.

Liegt ein Äquatorpunkt einer Kurve $c \neq 1$ nahe an einem der Punkte A_1 oder B_1 , so ist $\sigma \equiv \bar{\sigma}_1$ nahezu ein Vielfaches von π und wir setzen

$$\sigma = n\pi + d\sigma. \quad (165)$$

$d\sigma$ ist der Unterschied zwischen dem σ_1 -Wert des Äquatorpunktes und dem nächstgelegenen Vielfachen von π ; man darf es nicht mit $\Delta\sigma$ verwechseln, welches den Unterschied des σ_1 -Wertes eines nicht auf dem Äquator gelegenen Kurvenpunktes gegenüber dem σ_1 -Wert des nächstgelegenen Äquatorpunktes der Kurve gibt (vgl. (137) und (141)).

Für den Betrag des Nenners in (157) erhält man dann unter Vernachlässigung von Gliedern, die klein sind wie $(d\sigma)^2$

$$|(1 \mp c) d\sigma \sin 2\omega|. \quad (166)$$

Liegt ein Äquatorpunkt einer Kurve $c \neq 1$ nahe an A_2 oder B_2 , so schreiben wir

$$\sigma = n\pi \mp 2\omega + d\sigma \quad (167)$$

oberes Vorzeichen, wenn σ_1 im positiven Sinn der x, y -Ebene gezählt wird, also

für α - und δ -Fälle, (167a)

unteres Vorzeichen, wenn σ_1 im negativen Sinn der x, y -Ebene gezählt wird,
also für β - und γ -Fälle.

Wir setzen jetzt in (157) für σ den Wert (167). Dabei gibt es nur die beiden folgenden Vorzeichenkombinationen: entweder sowohl in (157) im Argument als auch in (167) das obere Vorzeichen, oder sowohl in (157) im Argument als auch in (167) das untere Vorzeichen. Das folgt aus Vergleich von (167a) mit (149b). Für den Betrag des Nenners von (157) erhalten wir auf diese Weise unter Vernachlässigung von Gliedern, die klein wie $(d\sigma)^2$ sind, bei Wahl des oberen Vorzeichens

$$|(1 \mp c) \sin(n\pi - 2\omega + d\sigma) \sin(n\pi + d\sigma)| = |(1 \mp c) \sin 2\omega d\sigma|, \quad (168)$$

bei Wahl des unteren Vorzeichens

$$|(1 \mp c) \sin(n\pi + 2\omega + d\sigma) \sin(-n\pi - d\sigma)| = |(1 \mp c) \sin 2\omega d\sigma|. \quad (169)$$

(166), (168) und (169) zeigen, daß für einen Äquatorpunkt in der Nähe eines der Fundamentalpunkte der Nenner von (157) klein wird wie der Abstand $d\sigma$ des Äquatorpunktes von diesem Fundamentalpunkt. Weiter überzeugt man sich durch Einsetzen von (165) und (167) in den Zähler von (157), daß dieser in allen diesen Fällen endlich bleibt. Infolgedessen ist für einen Äquatorpunkt in der Nachbarschaft eines Fundamentalpunktes

tg ν groß wie $1/d\sigma$, d. h. die Projektion (156) der Kurve in die ξ, η -Ebene (Äquatorebene) fällt fast mit der Kreistangente in diesem Punkt zusammen und der Scheitelkrümmungsradius ρ der Parabel (158) der η, z -Ebene wird klein wie $d\sigma$ (vergl. (160)).

Fällt ein Kurvenpunkt mit A_1 oder B_1 zusammen, so ist $\sigma \equiv \bar{\sigma}_1 = n\pi$, fällt er mit A_2 oder B_2 zusammen, so ist $\sigma \equiv \bar{\sigma}_1 = n\pi \mp 2\omega$ (für die Vorzeichenwahl gilt hier (167a), für die Vorzeichenwahl in (150) gilt (149b)). In allen diesen Fällen ist der Faktor von $\Delta\sigma$ in (150) streng Null und wir müssen deshalb zur Untersuchung der Kurve in der Umgebung dieses Fundamentalpunktes das Glied zweiter Ordnung von ξ heranziehen. In η (siehe (151)) dagegen kommen wir mit dem Glied erster Ordnung aus, da dessen Faktor für Fundamentalpunkte nicht verschwindet.

Fällt ein Kurvenpunkt mit A_1 oder B_1 zusammen, so findet man wegen $\sigma = n\pi$ aus (150) und (151)

$$\xi = 1 - \frac{(\Delta\sigma)^2}{2 \sin 2\omega} \cos n\pi \sin (\pm n\pi + 2\omega) = 1 - \frac{(\Delta\sigma)^2}{2 \sin 2\omega} (-1)^n \left\{ (-1)^n \sin 2\omega \right\}, \quad (170)$$

also

$$\xi = 1 - \frac{(\Delta\sigma)^2}{2}; \quad (171)$$

$$\eta^2 = \left(\frac{\Delta\sigma}{\sin 2\omega} \right)^2 \left\{ c \cos n\pi \sin (n\pi \pm 2\omega) \right\}^2 = c^2 (\Delta\sigma)^2. \quad (172)$$

Aus (171) und (172) bilden wir

$$\xi^2 + \eta^2 = 1 - (\Delta\sigma)^2 + c^2 (\Delta\sigma)^2 = 1 + (\Delta\sigma)^2 (c^2 - 1).$$

Jeder Kurvenpunkt liegt auf der Einheitskugel, weshalb für ihn gilt $\xi^2 + \eta^2 \leq 1$. Diese Bedingung ist für $c > 1$ im Reellen nur für $\Delta\sigma = 0$ erfüllt. Das bedeutet aber, daß jeder Punkt einer Kurve $c > 1$, der mit A_1 oder B_1 zusammenfällt, ein isolierter Punkt ist, in Übereinstimmung mit Satz 10 von Seite 34.

Fällt ein Kurvenpunkt mit A_2 oder B_2 zusammen, so findet man wegen

$$\sigma = n\pi \mp 2\omega \quad (173)$$

(Vorzeichenwahl nach (167a)) aus (150) und (151) (Vorzeichenwahl nach (149a) und (149b))

$$\begin{aligned} \xi &= 1 + \frac{(\Delta\sigma)^2}{2 \sin 2\omega} c^2 \cos n\pi \sin \pm (n\pi \mp 2\omega) = \\ &1 + \frac{(\Delta\sigma)^2}{2 \sin 2\omega} c^2 (-1)^n \sin (\pm n\pi - 2\omega) = 1 + \frac{(\Delta\sigma)^2}{2 \sin 2\omega} c^2 (-1)^{2n+1} \sin 2\omega \end{aligned} \quad (174)$$

also

$$\xi = 1 - c^2 \frac{(\Delta\sigma)^2}{2}; \quad (175)$$

und

$$\begin{aligned} \eta &= - \frac{\Delta\sigma}{\sin 2\omega} \sin (n\pi \mp 2\omega) \cos (n\pi \mp 2\omega \pm 2\omega) = \\ &= - \frac{\Delta\sigma}{\sin 2\omega} (-1)^n \left\{ (-1)^n \sin (\mp 2\omega) \right\} = \frac{\Delta\sigma}{\sin 2\omega} \sin (\pm 2\omega), \end{aligned} \quad (176)$$

also

$$\eta = \pm \Delta\sigma; \quad (177)$$

oberes Vorzeichen in α - und δ -Fällen;
 unteres Vorzeichen in β - und γ -Fällen
 Mit (175) und (177) bilden wir weiter

(177a).

$$z^2 = 1 - (\xi^2 + \eta^2) = 1 - (1 - c^2 (\Delta\sigma)^2 + (\Delta\sigma)^2) = (\Delta\sigma)^2 (c^2 - 1). \quad (178)$$

Als Projektion der Kurve in die ξ, η -Ebene bekommen wir für die Umgebung des Fundamentalpunktes mit dem Index 2 aus (175) und (177)

$$\eta^2 = \frac{2}{c^2} (1 - \xi). \quad (179)$$

Das ist eine Parabel mit dem Scheitel im Fundamentalpunkt und dem Krümmungsradius $\rho = \frac{1}{c^2} < 1$. Sie berührt im Scheitel den Äquator und ist nach dem Inneren des Äquators zu geöffnet (Figur 25).

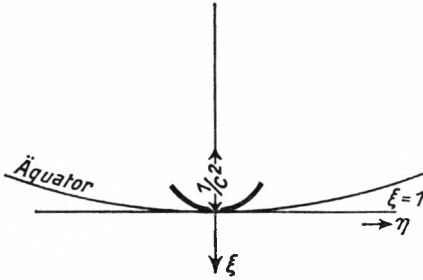


Fig. 25

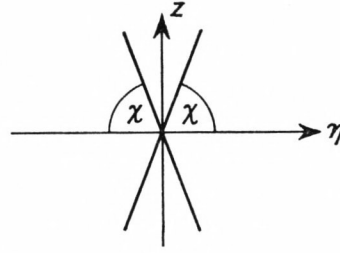


Fig. 26

Als Projektion der Kurve in die η, z -Ebene in der Umgebung des Fundamentalpunktes findet man aus (177) und (178) das Geradenpaar

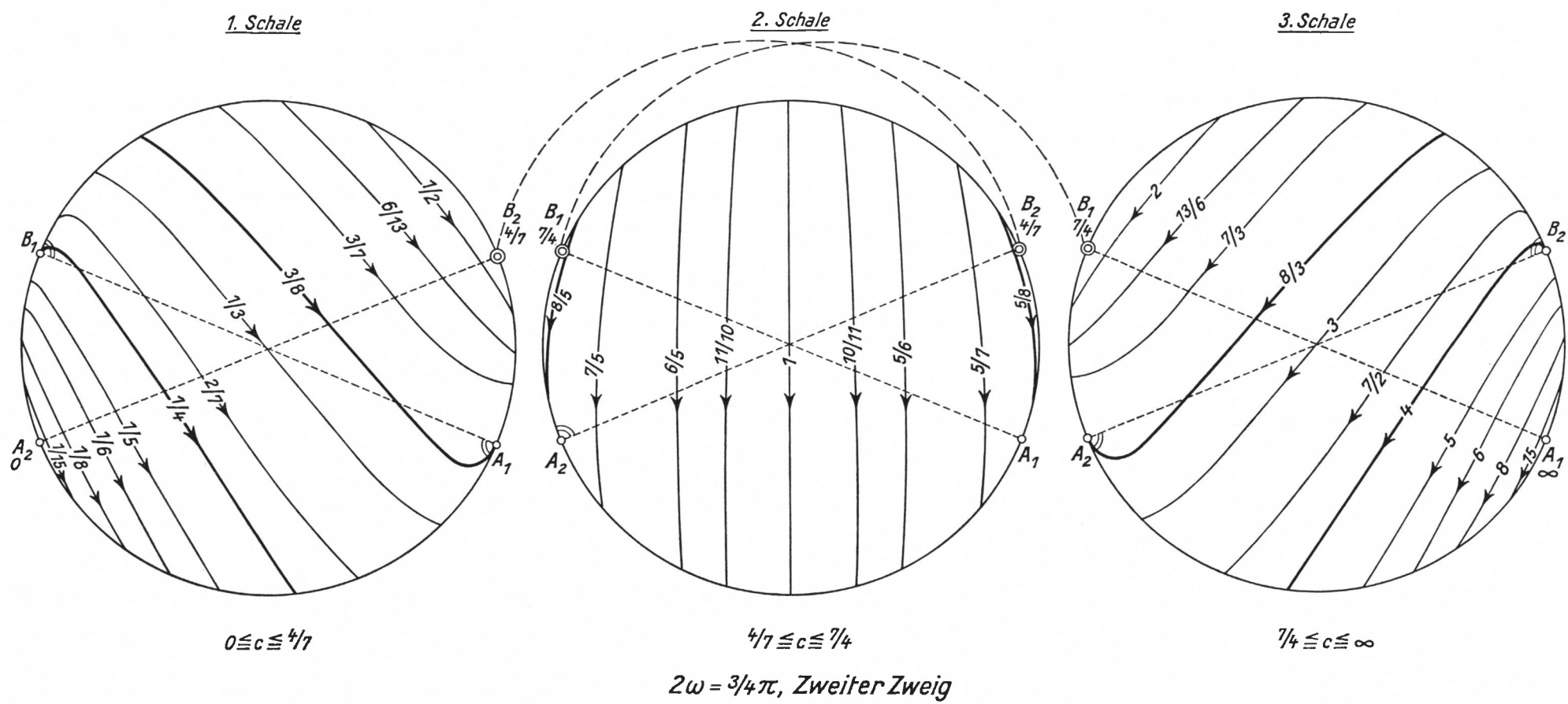
$$z^2 = (c^2 - 1)\eta^2 \quad (180)$$

(Figur 26). Der Winkel, den die beiden Geraden mit der η -Achse einschließen, habe den Betrag χ . Dann ist

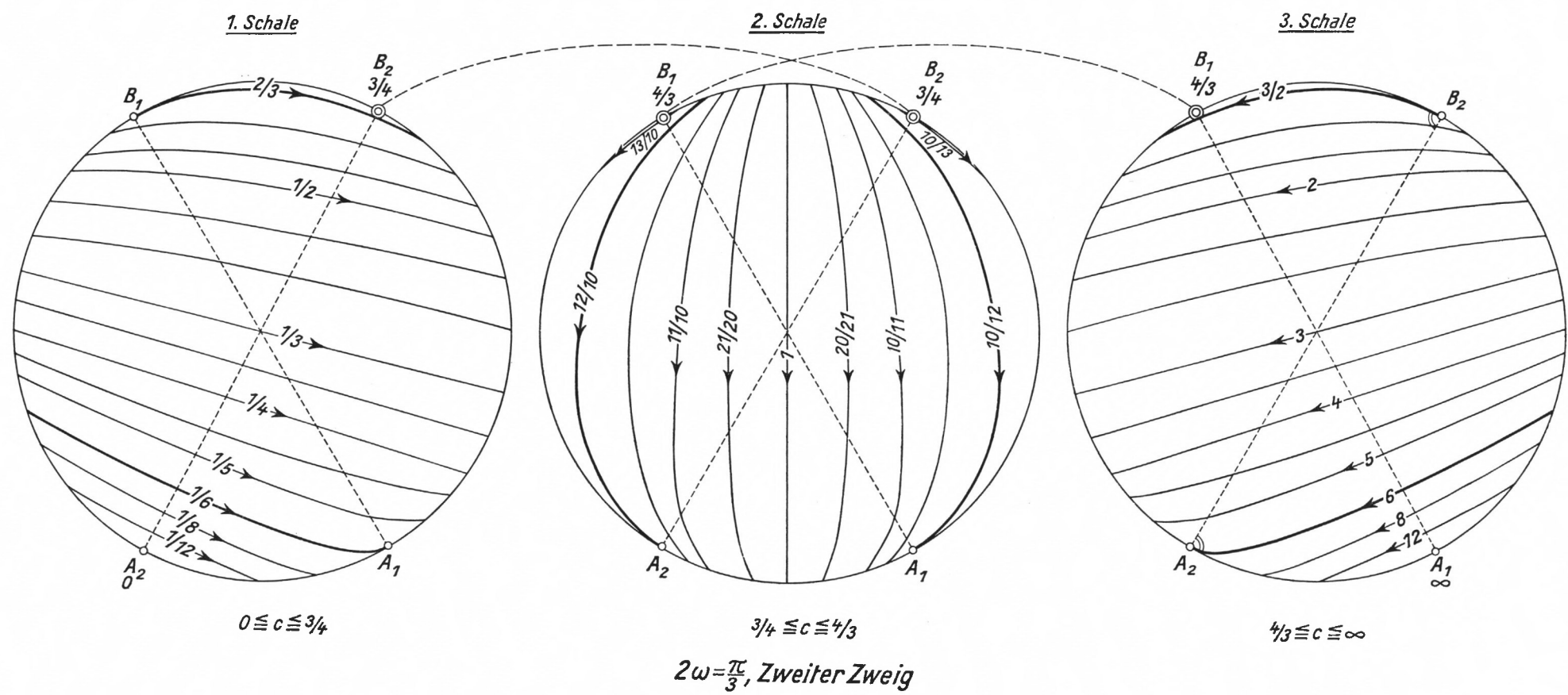
$$\operatorname{tg} \chi = \sqrt{c^2 - 1}. \quad (181)$$

Für Kurvenpunkte, die mit A_2 oder B_2 zusammenfallen, tritt also an die Stelle der Geraden (156) die Parabel (179), an die Stelle der Parabel (158) das Geradenpaar (180), an die Stelle der Figuren 23 und 24 die Figuren 25 und 26.

Die Gleichungen (175) bis (178) liefern sowohl für positive als auch für negative $\Delta\sigma$ -Werte reelle Punkte der Einheitskugel. Das bedeutet, daß jeder Punkt einer Kurve $c > 1$, der mit einem der Punkte A_2 oder B_2 zusammenfällt, Endpunkt eines Kurvenzweiges und zugleich Anfangspunkt des nächsten Kurvenzweiges ist, daß in ihm also zwei Kurvenzweige zusammenhängen (vgl. Satz 10 S. 34). Die in Figur 25 rechts der ξ -Achse liegende Parabelhälfte und der in Figur 26 rechts der z -Achse liegende Teil des Geradenpaares sind die Projektionen des einen Kurvenzweiges, die links davon liegenden Teile sind die Projektionen des anderen Kurvenzweiges. Denn wie (177) zeigt, ändert mit $\Delta\sigma$ auch η sein Vorzeichen.



Figur 16



Figur 17