DGK Veröffentlichungen der DGK

Ausschuss Geodäsie der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Reihe C | Dissertationen | Heft Nr. 799

Phillip Brieden

Validierung von GOCE-Gravitationsgradienten in Kreuzungspunkten und Zukunftsperspektiven der Satellitengradiometrie

München 2017

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

ISSN 0065-5325 | ISBN 978-3-7696-5211 6

Diese Arbeit ist gleichzeitig veröffentlicht in:
Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik der Leibniz Universität Hannover
ISSN 0174-1454, Nr. 332, Hannover 2017

Veröffentlichungen der DGK

Ausschuss Geodäsie der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Reihe C | Dissertationen | Heft Nr. 799

Validierung von GOCE-Gravitationsgradienten in Kreuzungspunkten und Zukunftsperspektiven der Satellitengradiometrie

Von der Fakultät für Bauingenieurwesen und Geodäsie
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing. Phillip Brieden

geboren am 06. Juni 1984 in Brilon

München 2017

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

ISSN 0065-5325 ISBN 978-3-7696-5211 6

Diese Arbeit ist gleichzeitig veröffentlicht in:
Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik der Leibniz Universität Hannover
ISSN 0174-1454, Nr. 332, Hannover 2017

Adresse der DGK:

Ausschuss Geodäsie der Bayerischen Akademie der Wissenschaften (DGK)

Alfons-Goppel-Straße 11 ● D – 80 539 München

Telefon +49 – 89 – 23 031 1113 ● Telefax +49 – 89 – 23 031 - 1283 / - 1100

e-mail dgk-post@dgk.badw.de ● http://www.dgk.badw.de

Prüfungskommission:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. habil. Christian Heipke

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. Jürgen Müller

1. Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Nicolaas Sneeuw (Universität Stuttgart)

2. Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Ingo Neumann

Tag der mündlichen Prüfung: 21.02.2017

© 2017 Bayerische Akademie der Wissenschaften, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet,
die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen

ISSN 0065-5325 ISBN 978-3-7696-5211 6

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Validierung von GOCE-Gravitationsgradienten in Kreuzungspunkten der Satellitenspuren, der Kreuzungspunktanalyse. In einem zweiten Teil werden perspektivisch neuartige Gradiometriekonzepte für zukünftige Schwerefeld-Satellitenmissionen diskutiert.

Nach einer Einleitung, u.a. zu methodischen Grundlagen der Kreuzungspunktanalyse, werden im Vorfeld der eigentlichen Validierung Fehlergrenzen für die Datenverarbeitung definiert. Alle Algorithmen und Datenoperationen werden so entwickelt, dass durch sie induzierte Fehler Gradientenfehler von weniger als 0.7 mE verursachen.

Die Bestimmung der Kreuzungspunktpositionen und der Kreuzungszeitpunkte erfolgt in einer gemeinsamen Ausgleichung. Die Interpolation weiterer Datenprodukte im Kreuzungspunkt (*cross-over*, XO) gelingt in Abhängigkeit der Zeit. Einen entscheidenden Schritt umfasst die Berücksichtigung von Gradientenunterschieden im XO, die sich aufgrund unterschiedlicher Höhen und Orientierungen der Beobachtungssysteme ergeben. Da der Vergleich zweier Gravitationsgradiententensoren im identischen Koordinatensystem erfolgen muss, wird einer der Tensoren in das Koordinatensystem des anderen transformiert. Aufgrund der langwelligen Ungenauigkeiten der GOCE-Gradienten und der schlechteren Tensorkomponenten V_{xy} und V_{yz} werden alle weniger genauen Anteile des Gradiententensors durch Modellgradienten einer bereits bekannten Schwerefeldlösung ersetzt. Auch für den Translationsschritt (Höhenreduktion) wird Modellinformation genutzt. Nach der Transformation erfolgt die Differenzenbildung der Gradienten im XO.

Die verbleibenden Residuen der Gravitationsgradienten werden in drei Kategorien untersucht: **(1) Qualität des Gesamtdatensatzes** Die Residuen aller Tensorkomponenten sind normalverteilt und führen entlang auf- oder absteigender Bahnen zu statistisch identischen Ergebnissen. Die Residuen von $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ weisen einen RMS von etwa 4 mE auf; die von $\boldsymbol{V}_{zz}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ liegen mit 9 mE und 8 mE etwa doppelt so hoch. Korrelationen zu Parametern wie der Höhendifferenz im XO zeigen sich nicht. **(2) Regionale Untersuchungen** Die Residuen werden auf regionale Häufungen hin analysiert. Solche Muster zeigen sich ausschließlich in $\boldsymbol{V}_{yy}$ in Bereichen südlich von Australien sowie - weniger stark ausgeprägt - im nördlichen Kanada. **(3) Identifikation lokaler Artefakte** Einzelne Ausreißer in den Gradientenzeitreihen lassen sich in Polnähe (große Anzahl an Kreuzungspunkten) sehr gut und im Bereich um den Äquator (weniger Kreuzungspunkte) weniger gut in den XO-Residuen identifizieren. Sequentielle Ausreißer (beeinflussen die Zeitreihe bis zu einigen Minuten) bilden sich in den XO-Residuen äußerst präzise ab. Dies ist eine besondere Stärke der Methode und ein Alleinstellungsmerkmal gegenüber anderen Validierungsansätzen.

Die Kreuzungspunktanalyse bestätigt die Präzision der Gradienten-Residuen von $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ auf dem erwarteten Niveau; $\boldsymbol{V}_{zz}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ zeigen ein um etwa einen Faktor 2 höheres Rauschen und liegen damit oberhalb der Erwartungen. Die Zeitreihen einzelner Gradientenkomponenten enthalten einzelne, lokale und zeitlich begrenzte Artefakte, deren Identifikation mit der Kreuzungspunktanalyse hervorragend gelingt.

Im zweiten Teil dieser Arbeit werden neue Gradiometriekonzepte für zukünftige Schwerefeld-Satellitenmissionen analysiert. Neben Verbesserungen, wie der Ladungskontrolle der Testmasse mittels ultraviolettem Licht, stellen vor allem die Nutzung von Laserinterferometern zur Bestimmung der Lage einer festen Testmasse sowie die Verwendung von Atominterferometern äußerst vielversprechende Technologien dar. Deren Einsatz soll im Vergleich zum GOCE-Gradiometer eine Sensitivitätsteigerung des Instrumentes ermöglichen und dessen Fehlerniveau speziell im unteren Frequenzbereich (langwellige Anteile) erheblich verbessern. Damit würde auch die Messung zeitvariabler Anteile des Gravitationspotentials möglich werden. Außerdem wurden auch hybride Missionen vorgeschlagen, bei denen z.B. die Beobachtung von Entfernungsänderungen zwischen Satelliten und die Satellitengradiometrie kombiniert werden, um vollen Nutzen aus den Vorteilen beider Verfahren zu ziehen. Diese neuen Technologien (niedriges, nahezu weißes Rauschen in entscheidenden Frequenzbändern) haben das Potential, die Gravitationsfeldbestimmung der Zukunft zu bestimmen.

Schlagwörter: Validierung, GOCE, Gravitationsgradienten, Kreuzungspunkte, Qualitätsbeurteilung, Gradientenfilterung, Tensorrotation

Abstract

The present work covers with the validation of GOCE gravitational gradients in satellite track cross-overs, the cross-over analysis. A second part gives a perspective for future gravity field satellite missions discussing novel gradiometric concepts.

Following an introduction partly addressing the methodical fundamentals of the cross-over analysis, error limits for data processing are defined previously to the actual validation. All algorithms and data operations are developed to only cause errors on gradient level of less than 0.7 mE.

The determination of the cross-over positions and the crossing times is carried out in a joined adjustment. Further data products are interpolated in the cross-over (XO) as a function of time. An essential step is the consideration of differences in attitude and altitude between the observation systems in order to reduce related gradient differences. Since the comparison of two gravitational gradient tensors has to be performed in the identical coordinate system, one of the tensors is transformed into the coordinate system of the other. Due to long-wavelength inaccuracies of the GOCE gradients and the lower quality of the tensor components V_{xy} and V_{yz}, all the less accurate parts of the gradient tensor are replaced by model gradients derived from an existing gravity field model. Also for the translation step (height reduction), model information is used. After the transformation, the residuals of the gradient tensors in the XO are formed.

The remaining gradient residuals (= gradient differences) are examined in three categories: **(1) Quality of the complete data set** The residuals of all tensor components are normally distributed and lead to statistically identical results along ascending or descending tracks. The gradient differences of $\boldsymbol{V}_{xx}$ and $\boldsymbol{V}_{yy}$ have an RMS of about 4 mE; the RMS of $\boldsymbol{V}_{zz}$ and $\boldsymbol{V}_{xz}$ are about twice as large with values of 9 mE and 8 mE. The residuals do not show any correlations to parameters such as the height difference in the XO. **(2) Regional analysis** The gradient differences are analyzed in terms of regional accumulations. Such patterns are only found in $\boldsymbol{V}_{yy}$ covering areas south of Australia, and less obvious in northern Canada. **(3) Identification of local artefacts** Individual outliers in the gradient time series can be identified in the XO residuals very well close to the poles (large number of cross-overs) and suboptimal in the region around the equator (less cross-overs). Sequential outliers (affecting the time series up to a few minutes) are represented in the XO residuals very precisely. This is a particular advantage of this method and an unique feature against other validation approaches.

The cross-over analysis confirms the precision of the gradient residuals at the expected level for $\boldsymbol{V}_{xx}$ and $\boldsymbol{V}_{yy}$; $\boldsymbol{V}_{zz}$ and $\boldsymbol{V}_{xz}$ show a noise level which is about a factor of two higher than expected. The time series of the individual gradient components contain single, local and temporary artefacts which can be excellently identified with the help of the cross-over analysis.

In the second part of this thesis, new gradiometric concepts are analyzed to be used for future gravity field satellite missions. In addition to improvements, such as the charge control of the test mass by means of ultraviolet light, the use of laser interferometers to determine the position of a test mass and the use of atom interferometers are very promising technologies. It is expected that their use will increase the sensitivity of the instrument compared to the GOCE gradiometer and to reduce its error level, especially in the lower frequency range (long-wavelength components). This would allow to monitor also time-variable components of the gravitational potential. In addition, hybrid missions have been proposed combining the observation of range rates between satellites and satellite gradiometry to fully benefit from the advantages of both methods. These new technologies (almost white noise at a low level in the frequency bands of interest) have the potential to dominate the gravity field determination of the future.

Keywords: Validation, GOCE, gravitational gradients, cross-overs, quality assessment, gradient filtering, tensor rotation

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**
1.1 Motivation . . . 1
1.2 Stand der Forschung . . . 2
1.3 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit . . . 4

2 Grundlagen **7**
2.1 Grundlagen der physikalischen Geodäsie . . . 7
2.1.1 Das Schwerefeld der Erde . . . 8
2.1.2 Gravitationspotential - Kugelfunktionsentwicklung und Fehler . . . 10
2.1.3 Ableitungen des Gravitationspotentials . . . 14
2.1.4 Satellitengradiometrie . . . 16
2.1.5 Zeiten . . . 17
2.2 Ausgewählte Grundlagen der Statistik und digitalen Signalverarbeitung . . . 21
2.2.1 Deskriptive Statistik . . . 21
2.2.2 Aspekte der digitalen Signalverarbeitung . . . 24
2.2.3 Filterung . . . 26
2.2.4 Spektralschätzung . . . 28
2.3 Drehmatrizen, Eulerwinkel und Quaternionen . . . 29
2.4 Methodische Grundlagen der Kreuzungspunktanalyse . . . 32
2.4.1 Bestimmung von Kreuzungspunkten . . . 33
2.4.2 Kreuzungspunktposition und Interpolationen . . . 40

3 Die GOCE-Mission **43**
3.1 Wahl des GOCE-Orbits . . . 45
3.2 Gradiometer und Gravitationsgradienten . . . 47
3.2.1 Gradiometeraufbau und Beschleunigungsmesser . . . 47
3.2.2 Gravitationsgradienten aus Beschleunigungsdifferenzen . . . 49
3.2.3 Einschränkungen und Fehler des Gradiometers . . . 50
3.3 Weiteres Instrumentarium im GOCE-Satelliten . . . 51
3.4 Koordinatensysteme und Transformationen . . . 54
3.4.1 GOCE-relevante Koordinatensysteme . . . 55
3.4.2 Transformationen zwischen Koordinatensystemen . . . 57
3.5 Datenprodukte und deren Genauigkeiten . . . 59

4 Genauigkeitsanforderungen an Datenprodukte und Rechenoperationen **65**
4.1 Analyse der GOCE-Gravitationsgradienten . . . 66
4.1.1 Gradienten und Fehler in Zeit- und Frequenzbereich . . . 66
4.1.2 Vergleich der Gradienten mit globalen Gravitationsfeldmodellen . . . 70
4.2 Abschätzung der Genauigkeit der Gravitationsgradienten . . . 77
4.3 Bestimmung der Genauigkeitsanforderungen . . . 80

5 Methodik zur Gradienten-Validierung in Kreuzungspunkten **85**
5.1 Übersicht zum Ablauf der Validierung . . . 85
5.2 Kreuzungspunktbestimmung . . . 89
5.2.1 Ziele und Methodik . . . 89
5.2.2 Beschreibung des Algorithmus und Implementierung . . . 94
5.3 Interpolation der Beobachtungsgrößen . . . 101
5.3.1 Interpolation der reduziert-dynamischen Positionen . . . 102
5.3.2 Interpolation der finalen Kreuzungspunktpositionen . . . 103
5.3.3 Interpolation weiterer Datenprodukte im Kreuzungspunkt . . . 107
5.4 Vergleichskoordinatensystem . . . 113
5.5 Transformation des Tensors der GOCE-Gravitationsgradienten . . . 114
5.5.1 Rotation des GOCE-GGT (Einfügen modellbasierter V_{ij}, Filterung) . . . 115
5.5.2 Translation des Tensors der GOCE-Gravitationsgradienten . . . 134
5.5.3 Transformation und Diskussion . . . 138

5.6 Closed-Loop-Test 139

6 Analyse der Kreuzungspunktdifferenzen 141
6.1 Einleitung 141
6.2 Qualität des Gesamtdatensatzes 142
6.2.1 Statistische Parameter 143
6.2.2 Korrelationen und Abhängigkeiten 147
6.3 Regionale Untersuchungen 149
6.4 Lokale Artefakte mit zeitlich begrenztem Einfluss auf die Gradienten 155
6.5 Zusammenfassung und Diskussion 159

7 Gradiometerkonzepte zukünftiger Schwerefeld-Satellitenmissionen 161
7.1 Missionsplanung und bisherige Studien 162
7.2 Gradiometriekonzepte und Technologien 164
7.2.1 Feste Testmassen und deren Lagebestimmung sowie Lageregelung 165
7.2.2 Atominterferometrie auf Basis kalter Atome 169
7.3 Kombinierte Beobachtungskonzepte und Bestimmung dritter Ableitungen . . . 173
7.4 Zusammenfassung 176

8 Zusammenfassung und Ausblick 179

Abkürzungsverzeichnis 187

Literaturverzeichnis 189

Miß' alles, was sich messen läßt
und mach alles messbar,
was sich nicht messen läßt.

Galileo Galilei

1 Einleitung

1.1 Motivation

Die Erde bildet die existentielle Grundlage allen Lebens. Zahlreiche Prozesse im System Erde beeinflussen alle Lebensbedingungen wie z.B. den menschlichen Alltag. Hoch- und Tiefdruckgebiete bestimmen das Wetter, Erdbeben verändern innerhalb kürzester Zeit ganze Landstriche, Gletscher schmelzen und der Meeresspiegelanstieg hat Einfluss auf das Leben in Küstennähe. Alle diese Ereignisse bewirken Massenverlagerungen im System Erde oder lassen sich durch Massenverlagerungen beschreiben. Aufgrund der gravitativen Anziehung von Massen eignet sich das Gravitationsfeld bzw. (unter Berücksichtigung zentrifugaler Beschleunigungen) das Schwerefeld zur Beschreibung ihrer Verteilung. Das Schwerefeld sowie seine zeitlichen Veränderungen sind daher von grundlegender Bedeutung für viele Disziplinen der Erdsystemforschung.

Die Bestimmung globaler Schwerefelder sowie deren zeitlichen Veränderungen gelingt unter vertretbarem Aufwand ausschließlich mit Satellitenmissionen. Die Serie bisheriger Schwerefeld-Satellitenmissionen umfasst die Missionen CHAMP (**CHA**llenging **M**inisatellite **P**ayload, 2000 - 2010), GRACE (**G**ravity **R**ecovery **A**nd **C**limate **E**xperiment, 2002 - heute) und GOCE (**G**ravity Field and Steady-State **O**cean **C**irculation **E**xplorer, 2009 - 2013). Alle Missionen haben zur Bestimmung des Erdgravitationsfeldes beigetragen, wobei sie sich in Zielsetzung sowie Instrumentenkonzept unterscheiden: CHAMP wurde als 'Testmasse im Gravitationsfeld' betrachtet, dessen Bahn über GNSS beobachtet wurde. Nicht-gravitative Beschleunigungen, die auf den Satelliten wirkten, wurden über einen Beschleunigungsmesser im Zentrum des Satelliten gemessen. Zusätzlich zu diesen Komponenten zur Gravitationsfeldbestimmung wurden Komponenten des Erdmagnetfeldes beobachtet sowie Radio-Okkultations-Beobachtungen zur Bestimmung der Atmosphäre durchgeführt (Reigber et al., 2006, 2005). Zweifellos wurde mit der CHAMP-Mission ein ganz entscheidender Schritt in Richtung der globalen Gravitationsfeldbestimmung getan.

Einen Meilenstein für die Gravitationsfeldbeobachtung setzte die GRACE-Mission (Tapley et al., 2004). GRACE besteht aus zwei baugleichen Satelliten, die auf einer annähernd identischen Bahn im Abstand von etwa 200 km die Erde umkreisen. Die Hauptmessgröße zur Gravitationsfeldbestimmung bilden die Abstandsänderungen zwischen den Satelliten (low-low satellite-to-satellite-tracking, ll-SST), die sich in Abhängigkeit von der Gravitation überquerter Massen verändert. Für die Auswertung müssen die gemessenen Abstandsänderungen einerseits auf die Verbindungslinie zwischen den Massenmittelpunkten der Satelliten projiziert und andererseits um nicht-gravitative Beschleunigungen korrigiert werden, die unterschiedlich auf beide Satelliten wirken. Damit gelingt die 'Beobachtung' rein gravitativer Entfernungsänderungen zwischen zwei Punktmassen, aus der sich Gravitationsfeldmodelle ableiten lassen. Der Schwerpunkt der GRACE-Mission liegt auf der Bestimmung zeitvariabler Anteile des Gravitationsfeldes. Die größten zeitvariablen Signale bilden sich in langwelligen Signalanteilen ab, für die die ll-SST Beobachtungen besonders sensitiv sind.

Die Krönung der Serie der Gravitationsfeld-Missionen bildete die GOCE-Mission. Dessen Hauptinstrument war das Gravitationsgradiometer, das aus sechs Beschleunigungsmessern in Diamantkonfiguration (jeweils zwei entlang jeder Raumachse, angeordnet um den Massenmittelpunkt des Satelliten) bestand. Die Differenzen zwischen zwei Beschleunigungen, die

im Abstand von etwa 0.5 m gemessen wurden, erlauben eine 'direkte' Bestimmung zweiter Ableitungen des Gravitationspotentials der Erde. GOCE bewegte sich auf einer niedrigen Umlaufbahn von nur etwa 250 km um die Erde, wodurch die Beobachtung sehr feiner Strukturen des Gravitationsfeldes gelang. Um den Absturz des Satelliten zu verhindern und die Sensitivität des Gradiometers zu erhöhen, wurde der Satellit mit einem drag-free System (Ionentriebwerk) versehen, das nicht-gravitative Beschleunigungen in Richtung der Längsachse des Satelliten weitestgehend kompensierte. Das Ziel der GOCE-Mission oder schlicht GOCE war die Vermessung des statischen Gravitationsfeldes der Erde in zuvor nicht verfügbarer Qualität und räumlicher Auflösung. Die Mission sollte eine Genauigkeit für Schwereanomalien von $1-2$ mGal (1 mGal= 10^{-5} m s^{-2}) und eine radiale Genauigkeit von $1-2$ cm für das Geoid erreichen, beides bei einer globalen räumlichen Auflösung von 100 km oder besser (Drinkwater et al., 2007). Dies wurde in exzellenter Weise erreicht (siehe Brockmann et al., 2014).

Jede der Satellitenmissionen sammelte bzw. sammelt unzählige Daten, mit deren Hilfe und durch deren bestmögliche Kombination Gravitationsfeldmodelle berechnet werden können. Bevor die Daten in die Gravitationsfeldbestimmung einfließen, ist ihre Qualität zu prüfen. In diesem Zusammenhang sollten einzelne und kleinere Gruppen von Ausreißern sowie Gebiete mit Ausreißer in den Daten identifiziert werden, um diese von der Gravitationsfeldprozessierung ausschließen oder herabgewichten zu können. Dieser Schritt ist entscheidend, denn enthaltene Ausreißer im Datensatz können die Lösung deutlich verschlechtern.

Eine entsprechende Prüfung der Daten wird auch als *Validierung* bezeichnet, die nach CEOS/WGCV (2015) "den Prozess der unabhängigen Beurteilung der Qualität eines Datenproduktes abgeleitet aus einer Systemausgabe"[1] beschreibt.

Für die genannten Schwerefeld-Satellitenmissionen wurden verschiedenste Methoden entwickelt, mit denen entweder eine Validierung derer Beobachtungen durchgeführt werden kann oder die Validierung berechneter Gravitationsfeldmodelle gelingt. Einige Beispiele für GRACE sind z.B. in Flechtner (2010) oder Crossley et al. (2009) zu finden. Für ausgewählte Beispiele der GOCE-Mission wird auf Mayrhofer et al. (2010), Šprlák et al. (2015), Voigt (2013) und Voigt und Denker (2015) verwiesen.

In dieser Arbeit wird eine Methode zur Validierung von GOCE-Gravitationsgradienten in Bahnhöhe vorgestellt und im Detail untersucht: Der Vergleich der Gradienten in Satellitenspur-Kreuzungspunkten.

1.2 Stand der Forschung

In diesem Abschnitt werden bedeutsame wissenschaftliche Entwicklungen der Validierung in Kreuzungspunkten erläutert. Da bereits Jarecki (2010) diesen Ansatz bezüglich der Validierung von Gravitationsgradienten im Vorfeld der GOCE-Mission untersuchte, werden die wesentlichen Unterschiede beider Ansätze kurz beschrieben und notwendige Modifikationen dargestellt.

Die Validierung von Beobachtungen in Kreuzungspunkten, auch Kreuzungspunktanalyse genannt, basiert auf der Annahme, dass ortsabhängige Größen beobachtet werden, die sich zu verschiedenen Zeiten an identischen Orten gleich darstellen bzw. deren Veränderungen (z.B. aufgrund von Gezeiten) bekannt sind und beschrieben werden können. Die Methoden basieren auf einem relativen Vergleich von Messungen, wobei im Falle *eines* Residuums im Kreuzungspunkt keine Aussage darüber möglich ist, welche der beiden beteiligten Beobachtungen fehlerhaft ist. Dies impliziert die Annahme, ein Großteil der Beobachtungen sei fehlerfrei.

Das Verfahren der Kreuzungspunktanalyse wird angewandt, um Beobachtungen entlang sich kreuzender Profile zu verbessern und eine Fehlerabschätzung der Datensätze durchzuführen (Bosch, 2007). Typische Anwendungsfelder sind die Schiffs- und Fluggravimetrie sowie

[1] Originalzitat in englisch: "Validation [...] is the process of assessing, by independent means, the quality of the data products derived from the system outputs." (CEOS/WGCV, 2015).

die Satellitenaltimetrie. Die genannten Verfahren nutzen den Vergleich der Beobachtungen in Kreuzungspunkten, um vor allem Instrumenten- bzw. Beobachtungsfehler zu minimieren. Im Falle der Schiffs- und Fluggravimetrie wird das interessierende Gebiet in der Regel entlang parallel verlaufender Routen erfasst (Forsberg et al., 2012). Um eine Qualitätsbeurteilung der Messwerte zu erlauben, werden meist zusätzliche Messungen entlang kreuzender Spuren durchgeführt. Die entstehenden Spur-Kreuzungspunkte werden zur Validierung der Beobachtungen genutzt. Unter Validierung ist in diesem Zusammenhang keine vollständig umfassende Validierung im Sinne des Vergleichs gegen einen Referenzwert zu verstehen. Eher handelt es sich um einen Daten-internen Vergleich, eine interne Validierung, mit Hilfe derer die Präzision der Gradienten bestimmt werden kann.

In der Praxis wird die Kreuzungspunktanalyse bis heute sehr geschätzt, um eine realistische Abschätzung der Messgenauigkeit z.B. im Bereich der Satellitenaltimetrie oder der Fluggravimetrie zu ermöglichen (Forsberg und Olesen, 2010). Die Kreuzungspunktanalyse wird vereinzelt nicht mehr zur Verbesserung von Beobachtungen eingesetzt, da aufgrund der technischen Entwicklung des beteiligten Instrumentariums, der sehr präzisen Positions- und Orientierungsbestimmung und der weiterentwickelten Algorithmen zur Auswertung der Messungen keine weiteren Verbesserungen der Beobachtungen erreicht werden (Bsp. Fluggravimetrie, Olesen et al., 2000). Werden Kreuzungspunkte nicht mehr zur Verbesserung der Beobachtungen benötigt, sondern 'nur noch' für Fehlerstudien eingesetzt, wird sowohl die Notwendigkeit geschlossener, kreuzender Flugpfade begrenzt, als auch inhärentes Aliasing von Fehlern bei der Verteilung der Kreuzungspunktdifferenzen im Zuge der Ausgleichung minimiert, eine bisher schwer handhabbare Fehlerquelle im Zuge der Geoidbestimmung (Forsberg und Olesen, 2010).

Vor dem Hintergrund immer genauerer Positionierungssysteme gelingt es, Kreuzungspunktdifferenzen von Altimetersatelliten auch zur Beurteilung von Ozeangezeitenmodellen (Empirical Ocean Tide Models, EOT) zu nutzen (Savcenko und Bosch, 2012). Dahinter verbirgt sich der einfache Gedanke, dass die altimetrischen Höhenbeobachtungen gezeitenabhängig sind. Werden die Gezeiteneinflüsse mit Hilfe der EOT korrigiert und vermindert sich dabei die Differenz der Beobachtungen im Kreuzungspunkt, so ist dies ein valides Indiz für die Qualität der EOT.

Das Verfahren der Kreuzungspunktanalyse zur Validierung satellitengradiometrischer Messungen wurde von Albertella et al. (2000) vorgeschlagen und von Müller et al. (2003) grundlegend formuliert. Es beinhalten den Vergleich zweier Tensoren von Gravitationsgradienten, also zweiter Ableitungen des Gravitationspotentials der Erde, wie sie 'direkt' aus den differentiellen Beschleunigungen des Gradiometers abgeleitet werden können. Jarecki (2010) untersucht die Kreuzungspunktanalyse für das Gradiometriekonzept der GOCE-Mission, wobei die Ergebnisse auf Simulationsdatensätzen aus der Zeit vor der GOCE-Mission beruhen. Der Einsatz der Kreuzungspunktanalyse zur Validierung *realer* GOCE-Gradiometriebeobachtungen hat gezeigt, dass eine in Teilen grundlegende Änderung der Analyse notwendig ist.

Kernpunkt der Unterschiede zwischen beiden Ansätzen ist der Umgang mit Höhen- und Orientierungsunterschieden, unter denen sich die Kreuzung ergibt. Aufgrund einer geringen Exzentrizität der GOCE-Bahn sowie der nur in erster Näherung erdgerichteten Orientierung des Satelliten treten Höhen- und Orientierungsunterschiede zwischen den satellitenfesten Koordinatensystemen im Kreuzungspunkt auf, in denen die Gradienten bestimmt werden. Da die Tensoren der Gravitationsgradienten sensitiv gegenüber Höhen- und Orientierungen sind, hat eine Berücksichtigung der Höhenunterschied- und Orientierungsunterschied-bedingten Tensordifferenzen im Kreuzungspunkt zu erfolgen. Jarecki (2010) sieht vor, diesen Gradientenunterschieden mit der Differenz zweier Modellgradienten zu begegnen, die aus einem Gravitationsfeldmodell abgeleitet werden. Im Zuge der Realdatenanalyse wurde deutlich, dass eine abweichende Behandlung der Höhenunterschied- und Orientierungsunterschied-bedingten Gradientendifferenzen notwendig wird: Da der Vergleich im Kreuzungspunkt in *einem* Koordinatensystem ausgeführt werden muss, wird einer der Tensoren in das Koordinatensystem des jeweils anderen transformiert. Die notwendige Anpassung der Orientierung geschieht durch Drehung der Tensoren (Rotation), die Berücksichtigung der Höhendifferenz (Translation) gelingt - entsprechend dem Ansatz von Jarecki (2010) - weiterhin mittels der Differenz zweier Modellgradiententensoren.

Da die Gradienten ein farbiges Rauschverhalten zeigen und zwei der sechs unabhängigen Komponenten eine deutlich verminderte Qualität aufweisen, würde eine direkte Drehung der Tensoren die Qualität aller Tensorelemente reduzieren. Daher sieht der neue Ansatz eine Filterung der Gradientenzeitreihen vor, wobei der Einsatz weiterer Modellinformation notwendig wird.

Die Anteile der Kreuzungspunktanalyse zur Validierung der GOCE-Gravitationsgradienten, die für die Analyse aus Jarecki (2010) entnommen wurden, werden im Grundlagenkapitel (Kap. 2) beschrieben. Eine detaillierte Beschreibung des neuen Ansatzes ist im Methodikkapitel (Kap. 5) dargestellt.

Im Hinblick auf zukünftige Schwerefeld-Satellitenmissionen wird neben einigen ll-SST Konzepten auch an Technologien für 'Satellitengradiometer der nächsten Generation' geforscht. Dabei werden sowohl testmassenbasierte Systeme weiterentwickelt, als auch der Einsatz neuartiger Technologien wie Atominterferometern untersucht, bei denen eine Wolke kalter Atome die 'Testmasse' darstellt (Carraz et al., 2015). Verbesserungen testmassenbasierter Systeme sehen z.B. den Einsatz ultravioletten Lichtes zur Ladungskontrolle der Testmasse vor (Gerardi et al., 2014) oder bauen auf den Einsatz von Laserinterferometern zur Lagebestimmung der Testmasse. Da aktuelle Nutzeranforderungen auf die Beobachtung zeitvariabler Anteile des Gravitationsfeldes fokussieren, wird versucht, auch aktuelle Gradiometriekonzepte darauf auszurichten. Die neuen Technologien bieten dazu vielversprechendes Potential.

1.3 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

Zielsetzung

Das wesentliche Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung und der Einsatz der Kreuzungspunktanalyse zur Validierung realer GOCE-Gravitationsgradienten. Aufbauend auf den Vorarbeiten von Jarecki (2010) wurde der Ansatz für die Validierung von Realdaten überarbeitet und in großen Teilen neu entwickelt. Die Zielsetzung dieser Arbeit umfasst die Beantwortung folgender Forschungsfragen:

1. Sind gegenüber dem Ansatz von Jarecki (2010) methodische Anpassungen der Kreuzungspunktanalyse zur Validierung realer GOCE-Gravitationsgradienten notwendig?
2. In welchem Frequenzbereich erlaubt die Kreuzungspunktanalyse eine Qualitätsbeurteilung der GOCE-Gradienten?
3. Welche Aussagen zur Qualität der Gradienten sind auf Basis der Kreuzungspunktdifferenzen möglich?
4. Welche Fehlerarten in den Gradientenzeitreihen können mit Hilfe der Kreuzungspunktanalyse identifiziert werden?

Im Hinblick auf zukünftige Missionskonzepte beim Einsatz von Gravitationsgradiometern werden in einem zweiten (kurzen) Teil dieser Arbeit (Kap. 7) potentiell geeignete aktuelle Technologien diskutiert. Dazu ergeben sich die Fragestellungen:

5. Welche aktuellen Technologieentwicklungen eignen sich für den Einsatz in Satellitengradiometern?
6. In welchen Bereichen sind vor dem Hintergrund des GOCE-Gradiometers Verbesserungen durch den Einsatz neuer Technologien zu erwarten?

Antworten auf die gestellten Fragen werden in dieser Arbeit (zusammengefasst in Kapitel 8) gegeben.

Aufbau der Arbeit

Diese Arbeit lässt sich thematisch in zwei Teile gliedern: 1. Die Validierung realer GOCE-Gravitationsgradienten mit Hilfe der Kreuzungspunktanalyse, die einen Großteil der Arbeit ausmacht (Kap. 2-6). 2. Die Diskussion von Gradiometerkonzepten für zukünftige Schwerefeld-Satellitenmissionen (Kap. 7).

Zunächst werden in Kapitel 2 einige Grundlagen der physikalischen Geodäsie sowie der Statistik und digitalen Signalverarbeitung vorgestellt. Diese beinhalten u.a. einführende Erläuterungen zum Gravitationsfeld, seiner Darstellung sowie seiner Bestimmung aus satellitengradiometrischen Beobachtungen. Außerdem werden die Grundlagen der mathematischen Darstellung von Orientierungen und der Kreuzungspunktanalyse beschrieben, die im Wesentlichen die Bestimmung der Kreuzungspunktpositionen sowie Ansätze zur Interpolation der Beobachtungen im Kreuzungspunkt enthalten.

Kapitel 3 gibt einen Einblick in die GOCE-Mission und deren Datenprodukte. Dabei werden die Satellitenbahn beschrieben, die wichtigsten Instrumente vorgestellt sowie beteiligte Koordinatensysteme erläutert. Schwerpunkte des Kapitels werden auf die Beschreibung des Gradiometers und die Bestimmung von Gravitationsgradienten auf Basis differentieller Beschleunigungen gelegt (Abs. 3.2.1). Außerdem wird beschrieben, was der Ursprung der Drehinformationen zur Transformation zwischen den beteiligten Koordinatensystemen ist und wie diese kombiniert werden. Das Kapitel schließt mit einer Übersicht über die Datenprodukte, die für die Kreuzungspunktanalyse benötigt werden (Abs. 3.5).

Im Zuge der Kreuzungspunktanalyse beeinflussen verschiedenste Algorithmen und mathematische Operationen die Gravitationsgradienten sowie weitere an der Validierung beteiligte Datenprodukte. Um sicherstellen zu können, dass die Qualität der Gradienten nicht durch vorherige Datenverarbeitungsschritte gemindert wird, ist das 'Genauigkeitsniveau' der Gradienten bereits vor der eigentlichen Qualitätsbeurteilung (durch die Kreuzungspunktanalyse) zu ermitteln. Darauf basierend, können geeignete Algorithmen und Datenoperationen für die Kreuzungspunktanalyse ausgewählt werden. Die Bestimmung des Genauigkeitsniveaus der Gradienten erfolgt realdatenbasiert in Kapitel 4. Dieses umfasst die Analyse der Gradienten im Zeit- und Frequenzbereich, die Genauigkeitsabschätzung der Gradienten sowie, darauf aufbauend, die Bestimmung von Genauigkeitsanforderungen an die Datenverarbeitung.

Kapitel 5 beinhaltet eine umfangreiche Beschreibung der Methodik der Kreuzungspunktanalyse im Hinblick auf die Validierung von GOCE-Gravitationsgradienten. Es werden die Bestimmung der Kreuzungspunkte und die Interpolation aller sonstigen im Kreuzungspunkt benötigten Datenprodukte erläutert. Im Anschluss an die Wahl des Koordinatensystems, in dem der Vergleich im Kreuzungspunkt stattfindet, folgt einer der Kernpunkte des Ansatzes: Die Transformation der Gradiententensoren in das Vergleichskoordinatensystems. Alle notwendigen Schritte werden im Detail beschrieben. Das Kapitel wird mit einem 'Closed-Loop-Test' der Methode abgeschlossen.

In Kapitel 6 werden die Kreuzungspunktdifferenzen analysiert. Die Untersuchungen beinhalten Aussagen über die Qualität des Gesamtdatensatzes, wobei neben einer statistischen Analyse auch Tests über Abhängigkeiten der Residuen zu Einflussgrößen wie der Höhendifferenz zwischen den beteiligten Bahnbögen im Kreuzungspunkt dargestellt werden. Es folgen regionale Untersuchungen der Residuen sowie die Identifikation zeitlich lokaler Artefakte (u.a. Ausreißer) in den Residuenzeitreihen. Das Kapitel schließt mit einer Beurteilung der Ergebnisse und einer Diskussion des Potentials der Kreuzungspunktmethode zur Validierung von GOCE-Gravitationsgradienten.

Kapitel 7 bildet den zweiten (kleineren) Teil dieser Arbeit und befasst sich mit Gradiometerkonzepten für zukünftige Schwerefeld-Satellitenmissionen. Nach einer kurzen allgemeinen Darstellung einer Missionsplanung werden Technologien vorgestellt, die derzeit für den Einsatz in Gradiometern zukünftiger Mission diskutiert werden. Gradiometer ergeben sich - wie im Falle von GOCE - weiterhin aus einer Kombination von Beschleunigungsmessern. Es werden sowohl verbesserte Konzepte elektrostatischer Beschleunigungsmesser mit einer festen Testmasse vorgestellt, die beispielsweise auf dem Einsatz von Laserinterferometern zur Lagebe-

stimmung der Testmasse beruhen, als auch der Einsatz von Atomgradiometern diskutiert, bei denen eine Wolke kalter Atome die 'Testmasse' darstellt. Ebenfalls interessant sind hybride Systeme, bei denen verschiedene Technologien gemeinsam genutzt werden, um deren Vorteile zu verbinden oder eine neue Technologie zur Demonstration ihrer Tauglichkeit Anwendung findet (z.B. ll-SST Laserinterferometer bei GRACE Follow-on).

Das Kapitel 8 beschließt die Arbeit mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf zukünftige Arbeiten, die zur Anwendung der Kreuzungspunktanalyse sowie im Hinblick auf zukünftige Gradiometrie-Missionskonzepte notwendig sind.

2
Grundlagen

Dieses Kapitel erläutert allgemeine Grundlagen für das Verständnis der Validierung von GOCE-Gravitationsgradienten in Satellitenspurkreuzungspunkten. Abschnitt 2.1 beginnt mit der Beschreibung des Erdgravitationsfeldes sowie dessen mathematischer Darstellung und erläutert die Vorgehensweise zur Ableitung von Gravitationsgradiententensoren aus Gradiometriebeobachtungen. Es folgen einige ausgewählte Grundlagen zur Statistik und digitalen Signalverarbeitung (Abschnitt 2.2), wobei u.a. auf die Filterung von Zeitreihen eingegangen wird. Abschnitt 2.3 gibt grundlegende Hinweise zu Rotationsinformationen und zur Tensoranalysis. Das Kapitel schließt mit Erläuterungen der methodischen Grundlagen der Kreuzungspunktanalyse (Abschnitt 2.4). Für spezielle Grundlagen, die die GOCE-Mission betreffen, wird auf Kapitel 3 verwiesen.

2.1 Grundlagen der physikalischen Geodäsie

Die physikalische Geodäsie hat nach einer aktuellen Definition von Torge und Müller (2012) die Aufgabe, die Figur und das äußere Schwerefeld der Erde sowie deren Orientierung im Raum als eine Funktion der Zeit aus Messungen auf und außerhalb der Erdoberfläche zu ermitteln[1]. Die genannten Elemente werden auch als die drei Säulen der Geodäsie bezeichnet und stellen die zentralen Aufgaben der Geodäsie dar:

- **Figur der Erde**: Es geht um die Bestimmung der Geometrie der Erde, worunter sowohl die physische und mathematische Erdoberfläche als auch ein geodätisches Referenzmodell zu verstehen sind (Moritz, 1990).
- **Orientierung der Erde**: Eine zentrale Aufgabe der Geodäsie beinhaltet die Erfassung der Orientierung der Erde im Raum. Diese bildet die Grundlage für die Verknüpfung zälestischer (raumfester) und terrestrischer (erdfester) Bezugssysteme - das Fundament zur Nutzung geodätischer Raumbeobachtungen.
- **Schwerefeld der Erde**: Das Schwerefeld der Erde ist ein Kraftfeld, das aus der Gravitation der Erdmassen und der Zentrifugalkräfte aufgrund der Erdrotation resultiert. Da sich das Schwerefeld einerseits durch Massenverlagerungen (meist) in der Erde verändert und es andererseits auch die Richtungen der Bewegung von (z.B. Wasser-) Massen maßgeblich beeinflusst, bildet es eine wichtige Säule der Geodäsie.

Die GOCE-Mission ist explizit für die Vermessung des statischen Erdschwerefeldes konzipiert worden. Daher werden grundlegende Erläuterungen zur 'Säule Schwerefeld' in Abschnitt 2.1.1 weiter vertieft. Abschnitt 2.1.2 beschreibt das Gravitationspotential und seine Fehler. In Abschnitt 2.1.3 wird genauer auf dessen zweite und dritte Ableitungen eingegangen wird. Eine Einführung in die Grundlagen der Satellitengradiometrie gibt Abschnitt 2.1.4, wobei für einen tieferen Einblick in die Berechnungen zweiter Ableitungen des Gravitationspoten-

[1] Originalzitat: "The objective of geodesy is to determine the figure and external gravity field of the Earth, as well as its orientation in space, as a function of time, from measurements on and exterior to the Earth's surface." (Torge und Müller, 2012, S. 2)

tials aus differentiellen Beschleunigungen auf Abschnitt 3.2.2 verwiesen wird. Abschnitt 2.1.5 beschäftigt sich mit den für diese Arbeit wichtigen Zeitsystemen und schließt das Kapitel ab.

2.1.1 Das Schwerefeld der Erde

Die Argumentationskette dieses Kapitels basiert im Wesentlichen auf Torge und Müller (2012).

Das Schwerefeld der Erde stellt sich als Kombination aus der Gravitation der Erdmassen und der Erdrotation dar. Letztere bewirkt eine Zentrifugalbeschleunigung in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit der Erde, die mit zunehmender Entfernung von der Erdrotationsachse ansteigt. Dieser Anteil wird von Erdsatelliten nicht beobachtet, da sie nicht an der Erdrotation teilnehmen. Erstere, die Gravitation, wird von Erdsatelliten beobachtet und kann mit Hilfe des Newton'schen Gravitationsgesetzes erklärt werden, nach dem zwischen zwei Punktmassen m und M die Gravitationskraft

$$\mathbf{F} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{2.1}$$

wirkt. Dabei ist $G = 6,673 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2} die Gravitationskonstante, $\mathbf{r}$ der Abstandsvektor zwischen den Punktmassen m und M, und $r = |\mathbf{r}|$ deren Abstand. Befindet sich die Masse m auf der Erdoberfläche, so erfährt diese gemäß dem 2. Newton'schen Gesetz eine Beschleunigung $\mathbf{a}$, die der Gravitationsbeschleunigung $\mathbf{g}$ entspricht,

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} = m \cdot \mathbf{g}. \tag{2.2}$$

Die resultierende Kraft $\mathbf{F}$ entspricht dann der Gravitationskraft aus Gleichung (2.1). Mit einer Masse m auf der Erdoberfläche und der Masse der Erde $M_\oplus$ sowie dem Positionsvektor $\mathbf{r}$ der Masse m im erdfesten Koordinatensystem und dem Erdradius $R_\oplus = |\mathbf{r}|$, ergibt sich aus der Kombination der Gleichungen (2.1) und (2.2)

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{g} = G \cdot \frac{m \cdot M_\oplus}{R_\oplus^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{R_\oplus}. \tag{2.3}$$

Aus Gleichung (2.3) wird deutlich, dass sich die Gravitationsbeschleunigung $\mathbf{g}$ auf der Erdoberfläche wie folgt beschreiben lässt:

$$\mathbf{g} = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{R_\oplus}. \tag{2.4}$$

Wird für das Gravitationsfeld und für die Gravitationsbeschleunigung nun von der Vektorgröße auf eine skalare Größe übergegangen, vereinfacht sich (2.4) zu

$$g = |\mathbf{g}| = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}. \tag{2.5}$$

Werden hier Parameter des *Geodätischen Referenzsystems 1980* (GRS80), nach Moritz (2000), in Form der Geozentrischen Gravitationskonstante der Erde $GM_\oplus = 398600,5 \cdot 10^9$ m^{3}s^{-2} und des Erdradius $R_\oplus = 6378,137$ km eingesetzt, ergibt sich die bekannte mittlere Erdbeschleunigung von $9,8$ m/s^2.

In der physikalischen Literatur wird die Gravitationsbeschleunigung $\mathbf{g}$ oftmals als Gravitationsfeldstärke bezeichnet, wodurch der direkte Bezug zum Gravitationsfeld noch deutlicher wird. Die skalare Größe g (Gl. (2.5)) wird auch als Fallbeschleunigung bezeichnet.

Zur Vereinfachung der Zusammenhänge kann von der Vektorgröße *Beschleunigung* auf die skalare Größe *Potential* übergegangen werden. Aufgrund der Wirbelfreiheit der Gravitationsfeldes (rot $\mathbf{g} = \mathbf{0}$) lässt sich $\mathbf{g}$ als Gradient des Potentials V darstellen,

$$\mathbf{g} = \operatorname{grad}(V) \tag{2.6}$$

und es gilt allgemein (losgelöst von der Erde) für eine Punktmasse m im Abstand r,

$$V = \frac{Gm}{r}. \tag{2.7}$$

Die vorangegangenen Überlegungen sind Torge und Müller (2012) und Hilst (2004) entnommen und basieren auf vereinfachten Annahmen, wie der Betrachtung nur zweier Massen sowie deren Konzentration in Punkten.

Geht man von der Punktmasse auf eine Kugel über, die aus unendlich vielen Massenelementen dm aufgebaut ist, lässt sich deren Potential durch Integration über alle Massenelemente im Abstand r zu deren Mittelpunkt beschreiben:

$$V = G \iiint\limits_{Erde} \frac{dm}{r}. \tag{2.8}$$

Die Erde lässt sich in erster Näherung gut durch eine Kugel mit Radius R approximieren, die aus Kugelschalen konstanter Dichte aufgebaut ist. Zur Berechnung des Potentials der Erde nach (2.8) ist es für die Integration besonders entscheidend, ob der sogenannte Aufpunkt (Ort an dem V bestimmt werden soll, im Abstand r_A vom Erdmittelpunkt) innerhalb ($r_A < R$) oder außerhalb ($r_A > R$) der Kugel liegt. Dabei wird die Masse der Atmosphäre vernachlässigt und die Erdoberfläche als Randfläche zwischen dem Erdkörper und dem massefreien Außenraum betrachtet.

Für den Fall, dass der Aufpunkt außerhalb der Kugelerde liegt ($r_A > R$), errechnet sich das Gravitationspotential der Erde $V_\oplus$ zu

$$V_\oplus = G \iiint\limits_{Erde} \frac{dm}{r} = \frac{GM_\oplus}{r_\oplus}, \tag{2.9}$$

und entspricht damit dem Potential einer Punktmasse (Erdmasse $M_\oplus$ konzentriert im Erdmittelpunkt), siehe Gleichung (2.7). Dies gilt auch für die Gravitationsbeschleunigung, die sich im Außenraum der Kugelerde entsprechend Gleichung (2.5) ergibt.

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich Satellitenbeobachtungen in Bahn-Höhe untersucht und verarbeitet. Diese befinden sich zweifelsohne im Außenraum der Erde. Daher wird hier nur dieser Fall beleuchtet und für den Fall eines Aufpunktes innerhalb der Kugelerde ($r_A < R$) sowie für eine detaillierte Herleitung beider Fälle auf Torge und Müller (2012) verwiesen.

Laplace-Gleichung

Die Gravitationsbeschleunigung ergibt sich entsprechend der Gleichung (2.6) als Gradient des Gravitationspotentials. Betrachtet man die Ableitungen von Gleichung (2.8) bzw. (2.9) in einem terrestrischen kartesischen (x, y, z) - System, erhält man diese nach Torge und Müller (2012) beispielhaft für die x-Komponente als

- erste Ableitung

$$\frac{\partial V}{\partial x} = V_x = -G \iiint\limits_{Erde} \frac{x - x'}{r^3} dm, \tag{2.10}$$

- zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = V_{xx} = -G \iiint\limits_{Erde} \frac{dm}{r^3} + 3G \iiint\limits_{Erde} \frac{(x - x')^2}{r^5} dm. \tag{2.11}$$

Für Satellitenbeobachtungen im Außenraum (der Erde) kann $r > 0$ garantiert werden und der Fall $r \to 0$ wird hier nicht weiter untersucht. Unter Anwendung des Laplace-Operators $\Delta V = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(V)) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ auf das Gravitationspotential V, ergibt sich im (x, y, z) - System

$$\Delta V = \nabla^2 V = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz}. \tag{2.12}$$

Werden in Gleichung (2.12) die entsprechenden zweiten Ableitungen gemäß (2.11) eingesetzt, heben sich deren Anteile gegenseitig auf und man erhält die Laplacesche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \tag{2.13}$$

im Folgenden auch als *Laplace-Gleichung* bezeichnet. Diese beherrscht das äußere Gravitationsfeld. Eine Darstellung in Abhängigkeit sphärischer Koordinaten (r, λ, θ) ergibt sich in Anlehnung an Wermuth (2009) zu

$$r^2 \Delta V = r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0, \tag{2.14}$$

mit r dem radialen Abstand zum Geozentrum, λ der geozentrischen Länge (longitude) und $\theta = 90° - \varphi$ der Poldistanz (Kobreite, co-latitude).

Es zeigt sich, dass das Gravitationspotential V (Gl. (2.8)) sowie dessen erste (Gl. (2.10)) und zweite Ableitungen (2.11) eindeutige, endliche und stetige Funktionen sind, die im Unendlichen verschwinden. Da das Gravitationspotential außerdem die Laplace Gleichung (2.13) erfüllt, handelt es sich bei deren Lösungen um harmonische Funktionen. Diese sind interessant, da ihre Gradientenfelder $\mathbf{g} = \mathrm{grad}\,(V)$ die Eigenschaften aufweisen,

quellenfrei

$$\mathrm{div}(\mathbf{g}) = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,(V)) = \Delta V = 0 \tag{2.15}$$

und *wirbelfrei*

$$\mathrm{rot}(\mathbf{g}) = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,(V)) = \mathbf{0} \tag{2.16}$$

zu sein (Merziger und Wirth, 2002). Harmonische Funktionen lassen sich außerdem in andere harmonische Funktionen zerlegen und so approximieren.

In der Vektoranalysis spricht man bei Wirbelfreiheit (Gl. (2.16)) von einem konservativen Vektorfeld. Das Gravitationsfeld stellt ein solches konservatives Vektorfeld dar, das mit Hilfe der Gravitationsbeschleunigung $\mathbf{g}$ beschrieben wird. In einem konservativen Kraftfeld (auch Gradientenfeld) ist die verrichtete Arbeit zum Bewegen eines Probekörpers nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängig und nicht vom zurückgelegten Weg. Bezogen auf das Gravitationsfeld kann ein Probekörper auf einer Niveaufläche bewegt werden ohne Arbeit zu verrichten. Wird er auf eine andere Niveaufläche bewegt, ist die benötigte Arbeit ausschließlich von der Komponente der Verschiebung in Richtung der Gravitationskraft abhängig.

Beim Gravitationspotential V der Erde handelt es sich um ein Skalarfeld. Der Gradient des Gravitationspotentials gibt Richtung und Betrag der Steigung des Skalarfeldes an.

2.1.2 Gravitationspotential - Kugelfunktionsentwicklung und Fehler

Wird vom Gravitationspotential der Kugelerde auf jenes der realen Erde übergegangen, stellt die Kugelfunktionsentwicklung eine geeignete mathematische Darstellung zu dessen Beschreibung dar (Heiskanen und Moritz, 1967 oder Müller, 2001)

$$V\,(r, \lambda, \theta) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\cos\theta)\,(c_{nm}\cos(m\lambda) + s_{nm}\sin(m\lambda))\,. \tag{2.17}$$

Dabei sind n und m Grad und Ordnung der sphärisch harmonischen Entwicklung; r, λ und θ (Radius, Länge und Co-Breite) die sphärischen (Kugel-) Koordinaten des Aufpunktes[2]. GM ist das Produkt aus Newton'scher Gravitationskonstante G und Masse M der Erde, R der mittlere Erdradius. c_{nm} und s_{nm} sind die Kugelfunktionskoeffizienten (auch Stokes Koeffizienten oder Potentialkoeffizienten), die zur Beschreibung eines Gravitationspotential-Modells genutzt werden. $P_{nm}(\cos\theta)$ sind die zugehörigen Legendre-Funktionen erster Art. Diese sind breitenabhängig und lassen sich nach Torge und Müller (2012, S. 68-72) mit der Substitution $t = \cos\theta$ bestimmen zu

$$P_{nm}(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t). \tag{2.18}$$

Dabei sind $P_n(t)$ die Legendreschen Polynome (auch zonale Kugelfunktionen):

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \times n!} \times \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n. \tag{2.19}$$

Berechnungen im Gravitationsfeld lassen sich durch die Einführung (vollständig) normierter Kugelfunktionen vereinfachen (Torge und Müller, 2012 oder Wermuth, 2009). Sie ergeben sich aus den konventionellen Kugelfunktionen (Gl. (2.18) und 2.19) nach

$$\bar{P}_{nm}(t) = \sqrt{k(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_{nm}(t), \quad k = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0 \\ 2 & \text{für } m \neq 0 \end{cases}. \tag{2.20}$$

Vollständig normierte Kugelfunktionskoeffizienten ergeben sich mit Gleichung (2.20) zu

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{k(2n+1)(n-m)!}} \begin{Bmatrix} c_{nm} \\ s_{nm} \end{Bmatrix}, \quad k = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0 \\ 2 & \text{für } m \neq 0 \end{cases}. \tag{2.21}$$

Zur effizienten Berechnung der Legendreschen Polynome (Gl. (2.19)) sowie der normierten Kugelfunktionen (Gl. (2.20)) stehen in Wenzel (1985), Torge und Müller (2012) oder Jarecki (2010) Rekursionsformeln sowie zugehörige Startwerte zur Verfügung.

Unter Berücksichtigung der Normierungen in Gleichungen (2.20) und (2.21) stellt sich das Gravitationspotential (Gl. (2.17)) auf und außerhalb der Erde leicht modifiziert dar zu

$$V(r,\lambda,\theta) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \left(\bar{C}_{nm}\cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm}\sin(m\lambda)\right). \tag{2.22}$$

Außerdem wurde im Vergleich zu Gleichung (2.17) der Endwert der ersten Summe von ∞ auf $n_{\max}$ reduziert. Mit Hilfe der Gleichung (2.17) ist theoretisch eine beliebig detaillierte Beschreibung des Gravitationspotentials möglich. In der Praxis wird die Entwicklung bei einem maximalen Entwicklungsgrad $n_{\max}$ abgebrochen. Diese sollte im Zuge der Gravitationsfeldbestimmung in Abhängigkeit der Datenbasis derart gewählt werden, dass alle Koeffizienten signifikant bestimmt werden können.

Fehler des Gravitationspotentials

Eine Beschreibung des Gravitationspotentials kann allgemein nur mit einer bestimmten Genauigkeit erfolgen. Um die Genauigkeiten eines Erdgravitationsfeldes bzw. dessen Beschreibung in Form eines Erdgravitationsmodell [*Earth's Gravitational Model*] (EGM) abzuschätzen, stehen verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung. Die folgenden Ausführungen basieren auf Müller (2001, S. 10-11), der drei Varianten zur Abschätzung der Genauigkeiten vorstellt:

[2] Aufpunkt $P(r,\lambda,\theta)$ liegt auf oder außerhalb der Erdoberfläche (z.B. eine Satellitenposition); Gleichung (2.17) ist damit nur gültig für die Bedingung $r \geq R$.

1. Vergleich der Kugelfunktionskoeffizienten und ihrer Fehler mit aktuellen Gravitationsfeldmodellen,
2. Berechnung kumulativer Geoid- und Schwereanomaliefehler, oder
3. Bestimmung räumlicher Geoid- und Schwereanomaliefehler durch Fehlerfortpflanzung.

An dieser Stelle soll nur auf Variante 2 etwas genauer eingegangen werden. Basierend auf den Fehlern $\sigma_{C_{nm}}, \sigma_{S_{nm}}$ der Kugelfunktionskoeffizienten lassen sich kumulative Geoid- und Schwereanomaliefehler ableiten. Man unterscheidet Messfehler und spektrale Abbruchfehler, die im internationalen Sprachgebrauch als *commission error* bzw. *omission error* bezeichnet werden. Beide hängen maßgeblich vom maximalen Entwicklungsgrad $n_{\max}$ des Gravitationsfeldmodells ab.

Der **Commission Error** σ^2_{com} enthält die Fehleranteile der tatsächlich berücksichtigten Koeffizienten und lässt sich bestimmen nach

$$\sigma^2_{\text{com}} = \sum_{n=2}^{n_{\max}} \sigma_n^2 \lambda_n^2 \tag{2.23}$$

mit den Fehlergradvarianzen

$$\sigma_n^2 = \sum_{m=0}^{n} \left(\sigma^2_{C_{nm}} + \sigma^2_{S_{nm}} \right) \tag{2.24}$$

und den jeweiligen sphärischen Faktoren

$$\lambda_n = \begin{cases} R & \text{Geoid} \\ \frac{GM}{R^2}(n-1) & \text{Schwereanomalie} \end{cases}. \tag{2.25}$$

Der **Omission Error** σ^2_{om} beschreibt den Fehleranteil der im Modell vernachlässigten Koeffizienten $n_{\max} + 1 ... \infty$ und berechnet sich nach

$$\sigma^2_{\text{om}} = \sum_{n=n_{\max}+1}^{\infty} \sigma_n^2 \lambda_n^2. \tag{2.26}$$

Die Gradvarianzen σ_n^2 ergeben sich nach KAULAs Regel (Kaula, 1966) zu

$$\sigma_n^2 = \frac{1.6 \cdot 10^{-10}}{n^3}. \tag{2.27}$$

Sie beschreiben die Gesetzmäßigkeit des Signalabfalls mit zunehmendem Grad (auch Kaulasche Faustregel).

Die obigen Ausführungen sind sinnvoll, solange die Signalgradvarianzen bis zum Grad $n_{\max}$ die Fehlergradvarianzen übersteigen. Liegt das Signal-Rausch-Verhältnis [*Signal-to-Noise Ratio*] (SNR) bereits bei einem Grad $n < n_{\max}$ unter 1, ist die Grenze der Summen in Gleichungen (2.23) und (2.26) auf den Grad anzupassen, bei dem sich ein SNR=1 einstellt.

Zusammenhang zwischen Sensorfrequenz, Kugelfunktionsgrad und räumlicher Auflösung

Heutzutage werden meist Satellitenbeobachtungen zur globalen Gravitationsfeldbestimmung herangezogen, da diese flächendeckend und in homogener Qualität zur Verfügung stehen. Deren Analyse erfolgt häufig im Frequenzbereich, da die verwandten Sensoren oftmals frequenzabhängige Genauigkeiten aufweisen und deren Daten nur in bestimmten Frequenzbändern einen signifikanten Beitrag zum Ergebnis leisten.

Gleichung (2.22) entspricht einer zweidimensionalen Fourier-Reihe auf einer Kugel (Wermuth, 2009), in der jeder Kugelfunktionskoeffizient $(\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm})$ als Amplitude einer Frequenzreihe interpretiert werden kann (Müller, 2001).

Soll nun ein Zusammenhang zwischen sphärisch harmonischen (SH) Koeffizienten n und einer den Satellitenbeobachtungen zugehörigen Frequenz f hergestellt werden, gelingt dies über die Orbitfrequenz (auch Umlauffrequenz) f_0. Diese ergibt sich aus dem Reziproken der Orbitperiode T (entspricht der Umlaufzeit) zu

$$f_0 = \frac{1}{T}. \tag{2.28}$$

Typischerweise ergibt sich im Falle von LEO-Satelliten (Low Earth Orbit) - wie GOCE - mit einer Orbitperiode $T \approx 5400$ s eine Orbitfrequenz von $f_0 = \frac{1}{5400\text{s}} \approx 1.85 \cdot 10^{-4}$ Hz. Die gesuchte Verknüpfung des sphärisch harmonischen Grades der Kugelfunktionsentwicklung n und einer Frequenz f der Satellitenbeobachtungen ist

$$n \approx \frac{f}{f_0}. \tag{2.29}$$

Dieser Zusammenhang ermöglicht eine Abschätzung welche die höchste für die Analyse wichtige Frequenz ist. Soll z.B. ein Gravitationsfeld bis Grad n = 300 entwickelt werden, sollte das Instrumentarium mindestens bis zu einer Frequenz $f \approx n \cdot f_0 \approx 0,056$ Hz hochwertige Informationen liefern[3].

Gleichung (2.29) darf jedoch nicht derart verstanden werden, dass sich der Informationsgehalt einer Frequenz auf genau einen Kugelfunktionsgrad abbildet. Die Kugelfunktionskoeffizienten der sphärisch harmonischen Entwicklung werden in einer Ausgleichung aus den Sensorbeobachtungen bestimmt, wobei der Informationsgehalt einer (Sensor-)Frequenz auf mehrere (meist 'benachbarte') Koeffizienten 'verteilt' wird. Damit enthält jeder Koeffizient Informationen aus verschiedenen Frequenzen und umgekehrt ist in jeder Frequenz der Informationsgehalt für verschiedene Koeffizienten enthalten.

Für die Bestimmung von Modellgradienten auf Basis eines Gravitationsfeldmodells lässt sich daraus der Schluss ziehen, dass Gleichung (2.22) bis zum maximalen Entwicklungsgrad $n_{\max}$ des Modells gelöst und nicht bei einem niedrigeren Grad $n < n_{\max}$ abgebrochen werden sollte. Nur so kann ein Verlust von Informationen, die sich in andere Frequenzen verschoben haben könnten, sicher ausgeschlossen werden.

Wie eingangs bereits erwähnt, kann die Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationspotentials auch als spektrale Zerlegung des Gravitationsfeldes in Strukturen der Wellenlängen $360°/n$ betrachtet werden.

Eine einfache Abschätzung des kleinsten darstellbaren Merkmals oder entsprechend der kürzesten halben Wellenlänge die mit einem Modell bis Grad $n_{\max}$ aufgelöst werden kann, erlaubt $l_{\text{res}}(n_{\max}) \approx (360°/2)/n_{\max} = 180°/n_{\max}$. Diese Abschätzung basiert auf der Anzahl möglicher Nulldurchgänge am Äquator (Barthelmes, 2009). l_{res} wird als räumliche Auflösung an der Erdoberfläche (auch Bodenauflösung) bezeichnet und lässt sich allgemein schreiben zu $l_{\text{res}} \approx 180°/n$. Mit einem Erdumfang U von etwa 40.000 km ($\hat{=}$ 360°) ergibt sich der Zusammenhang zwischen räumlicher Auflösung an der Erdoberfläche l_{res} und dem Kugelfunktionsgrad n zu

$$l_{\text{res}} \approx \frac{U/2}{n} = \frac{40.000 \text{ km}/2}{n} = \frac{20.000 \text{ km}}{n}. \tag{2.30}$$

Mit einem Kugelfunktionsgrad $n = 300$ können danach Strukturen mit einer räumlichen Auflösung von etwa 67 km beschrieben werden. Um eine Vorstellung von dem Zusammenhang

[3]Das GOCE-Gradiometer weist eine frequenzabhängige Genauigkeit auf. Es wurde in der Messbandbreite (MBW = Measurement Bandwidth) $f_{\text{MBW}} = 0.005 \ldots 0.1$ Hz qualitätsoptimiert (siehe auch Abs. 3.2). Mit Hilfe von Gleichung (2.29) lässt sich abschätzen, dass das Gradiometer damit im Bereich der Kugelfunktionskoeffizienten $n_{\text{MBW}} = 27 \ldots 540$ zur Gravitationsfeldbestimmung beitragen kann. In der Praxis werden GOCE-basierte Lösungen bis zu einem maximalen Entwicklungsgrad von $n_{\max} = 210...300$ entwickelt. Das Signal in Satellitenhöhe ist sehr klein und das Signal-zu-Rausch Verhältnis für diese Feinstrukturen des Gravitationsfeldes liegt unter 1.

Tabelle 2.1: Zusammenhang zwischen sphärisch harmonischem (SH) Kugelfunktionsgrad n, Sensorfrequenz f und räumlicher Auflösung l_{res} am Beispiel einiger für die GOCE-Mission sowie diese Arbeit interessanter Parametersätze. In Anlehnung an Barthelmes (2009, Tab. 1, S. 20).

SH Grad n	f [Hz]	l_{res} [km]	Bemerkungen
27	**0.005**	741	untere Grenze GOCE MBW
180	0.033	111	typisches $n_{\max}$ für GRACE-only Modelle
200	0.037	**100**	anvisierte räuml. Bodenauflösung GOCE
210	0.039	95	$n_{\max}$ der 1. Generation der GOCE-Modelle
224	0.041	89	
240	0.044	83	
250	0.046	80	
280	0.052	71	
300	0.056	67	größtes $n_{\max}$ der 5. GOCE-Modellgeneration
360	0.067	56	$n_{\max}$ EGM96
540	**0.1**	37	obere Grenze GOCE MBW
2190	0.406	9	$n_{\max}$ EGM2008

zwischen Sensorfrequenzen, Kugelfunktionsgrad und räumlicher Auflösung zu bekommen, veranschaulicht Tabelle 2.1 einige im Zusammenhang mit der GOCE-Mission sowie dieser Arbeit interessante Parametersätze.

2.1.3 Ableitungen des Gravitationspotentials

Aus den Beobachtungen des GOCE-Gradiometers werden direkt zweite räumliche Ableitungen des Gravitationspotentials V der Erde bestimmt (siehe auch Abs. 3.2.2). Diese werden als Gravitationsgradienten oder kurz Gradienten bezeichnet und ergeben sich entlang der Achsen $i, j \in \{x, y, z\}$ zu

$$V_{ij} = \text{grad}(\text{grad}(V)) = \frac{\partial^2 V}{\partial i \partial j} = \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Die kartesischen Koordinaten (x, y, z) beziehen sich auf ein Koordinatensystem, das im Massenmittelpunkt des Satelliten gelagert ist. Die Ausrichtung der Koordinatenachsen erfolgt je nach Anwendung in einem der in Abschnitt 3.4 erläuterten Koordinatensysteme. Für die meisten Anwendungen werden Gradienten im Gradiometer Reference Frame (GRF) oder dem Local North Oriented Frame (LNOF) genutzt.

Die Zusammenfassung aller zweiten Ableitungen (Gl. (2.31)) bilden einen Tensor zweiter Stufe, der auch als Marussi-Tensor bezeichnet wird (Hofmann-Wellenhof und Moritz, 2006 oder Grombein et al., 2010). Als Synonyme für den genannten Tensor werden äquivalent die Bezeichnungen *Gradiententensor* sowie *Gravitationsgradiententensor* benutzt.

Aufgrund der Wirbelfreiheit des Gravitationsfeldes (Gl. (2.16)) hat der Tensor die Eigenschaft symmetrisch zu sein. Damit gilt: $V_{xy} = V_{yx}$, $V_{xz} = V_{zx}$ und $V_{yz} = V_{zy}$. Die Anzahl der unabhängigen Tensorelemente reduziert sich somit von neun auf sechs. Da das Potential V außerdem die Laplace-Gleichung (Gl. (2.13)) erfüllt, besteht eine lineare Beziehung zwischen den Hauptdiagonalelementen V_{xx}, V_{yy} und V_{zz} und die Anzahl unabhängiger Tensorelemente verringert sich auf fünf (Rummel, 1986).

Die SI-Einheit der Tensorelemente ist $\frac{1}{\text{s}^2} = \text{s}^{-2}$. In der Satellitengradiometrie ist die Einheit Eötvös ($1\ \text{E} = 10^{-9}\ \text{s}^{-2}$) gebräuchlich. Speziell für Genauigkeits- bzw. Fehlerbetrachtungen ist auch milli-Eötvös ($1\ \text{mE} = 10^{-3}\ \text{E} = 10^{-12}\ \text{s}^{-2}$) verbreitet.

Das Gravitationspotential und dessen ersten und zweiten Ableitungen lassen sich durch partielle Ableitungen von Gleichung (2.22) bestimmen. In Abhängigkeit sphärischer Kugelko-

Tabelle 2.2: Substitutionsparameter zur Bestimmung partieller Ableitungen des Gravitationspotentials V nach den Kugelkoordinaten (r, θ, λ) gemäß Gleichung (2.32).

Ableitung nach	λ_{ij}	p	α	β
$-$	1	$\bar{P}_{nm}$	$\bar{C}_{nm}$	$\bar{S}_{nm}$
r	$-\frac{(n+1)}{r}$	$\bar{P}_{nm}$	$\bar{C}_{nm}$	$\bar{S}_{nm}$
θ	1	$\bar{P}'_{nm}$	$\bar{C}_{nm}$	$\bar{S}_{nm}$
λ	1	$m\bar{P}_{nm}$	$\bar{S}_{nm}$	$-\bar{C}_{nm}$
rr	$\frac{(n+1)(n+2)}{r^2}$	$\bar{P}_{nm}$	$\bar{C}_{nm}$	$\bar{S}_{nm}$
$r\theta$	$-\frac{(n+1)}{r}$	$\bar{P}'_{nm}$	$\bar{C}_{nm}$	$\bar{S}_{nm}$
$r\lambda$	$-\frac{(n+1)}{r}$	$m\bar{P}_{nm}$	$\bar{S}_{nm}$	$-\bar{C}_{nm}$
$\theta\theta$	1	$\bar{P}''_{nm}$	$\bar{C}_{nm}$	$\bar{S}_{nm}$
$\theta\lambda$	1	$m\bar{P}'_{nm}$	$\bar{S}_{nm}$	$-\bar{C}_{nm}$
$\lambda\lambda$	-1	$m^2\bar{P}_{nm}$	$\bar{C}_{nm}$	$\bar{S}_{nm}$

ordinaten (r, θ, λ) und unter Nutzung der Substitutionen λ_{ij} (mit $i, j \in \{r, \theta, \lambda\}$) p, α und β gemäß Tabelle 2.2 gelingt die kompakte und übersichtliche Darstellung

$$V_{ij} = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \lambda_{ij} \left(\frac{R}{r}\right)^{(n+1)} \sum_{m=0}^{n} p \left(\alpha \cos(m\lambda) + \beta \sin(m\lambda)\right). \tag{2.32}$$

Diese derart substituierte Form der ersten und zweiten Ableitungen wurde in Koop (1993) und Wermuth (2009) aufgegriffen und eignet sich sehr gut für die Implementierung der Modellgradientenbestimmung aus Potentialmodellen.

Der Gradiententensor V_{ij} (Gl. (2.32)) kann nun in kartesische Koordinaten transformiert werden. Das Zielsystem für Vergleiche zwischen Modellgradienten und aus Realbeobachtungen abgeleiteten Gradienten sollte das GRF sein. Als 'Zwischensystem', das sich auch für geophysikalische Vergleiche großer Beliebtheit erfreut, wird das topozentrische LNOF genutzt. Dessen x-Achse weist nach Norden, die y-Achse nach Westen und die z-Achse komplettiert das Rechtssystem und zeigt radial nach außen (Gruber et al., 2014c). Der Gradiententensor V_{ij} ergibt sich im LNOF zu

$$\begin{aligned}
V_{xx} &= \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\theta\theta} \\
V_{xy} &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} V_{\lambda\theta} - \frac{\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta} V_\lambda \\
V_{xz} &= \frac{1}{r^2} V_\theta - \frac{1}{r} V_{r\theta} \\
V_{yy} &= \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2 \tan\theta} V_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} V_{\lambda\lambda} \\
V_{yz} &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} V_\lambda - \frac{1}{r \sin\theta} V_{r\lambda} \\
V_{zz} &= V_{rr}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Die Transformation vom LNOF ins GRF erfolgt über die in Abschnitt 3.4 beschriebenen Transformationsvorschriften.

Im Hinblick auf Fehlerbetrachtungen sowie für die Analyse derer Nutzbarkeit in zukünftigen Missionskonzepten sind auch dritte räumliche Ableitungen des Gravitationspotentials der Erde V_{ijk} (mit $i, j, k \in \{x, y, z\}$) von Interesse. Diese ergeben sich äquivalent zu Gleichung (2.31) zu

$$V_{ijk} = \mathrm{grad}(\mathrm{grad}(\mathrm{grad}(V))) = \frac{\partial^3 V}{\partial i \partial j \partial k} = \begin{pmatrix} V_{xjk} & V_{yjk} & V_{zjk} \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

mit

$$V_{xjk} = \begin{pmatrix} V_{xxx} & V_{xxy} & V_{xxz} \\ V_{xyx} & V_{xyy} & V_{xyz} \\ V_{xzx} & V_{xzy} & V_{xzz} \end{pmatrix};\ V_{yjk} = \begin{pmatrix} V_{yxx} & V_{yxy} & V_{yxz} \\ V_{yyx} & V_{yyy} & V_{yyz} \\ V_{yzx} & V_{yzy} & V_{yzz} \end{pmatrix};\ V_{zjk} = \begin{pmatrix} V_{zxx} & V_{zxy} & V_{zxz} \\ V_{zyx} & V_{zyy} & V_{zyz} \\ V_{zzx} & V_{zzy} & V_{zzz} \end{pmatrix}.$$

Ein solcher Tensor dritter Ordnung besteht allgemein aus insgesamt 27 Elementen. Aufgrund der Wirbelfreiheit des Gravitationsfeldes entstehen auch hier Symmetrien zwischen den Tensorkomponenten bezüglich der Index-Paare (i, j), (j, k) und (i, k), sodass z.B. gilt: $V_{ijk} = V_{jik}$, $V_{ijk} = V_{ikj}$ und $V_{ijk} = V_{kji}$ (Šprlák und Novák, 2014; Tóth, 2005). Damit reduziert sich die Anzahl unabhängiger Komponenten auf zehn. Da im massefreien Außenraum der Erde außerdem die Laplace-Gleichung (Gl. (2.13)) gilt, die sich für dritte Ableitungen nach Šprlák und Novák (2014) darstellt zu

$$V_{xxm} + V_{yym} + V_{zzm} = 0,\ m \in \{x, y, z\}, \tag{2.35}$$

reduziert sich die Anzahl unabhängiger Komponenten auf sieben (Casotto und Fantino, 2008).

Die SI-Einheit der Elemente des Tensors dritter Ordnung ist $\frac{1}{\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{m}} = \mathrm{s}^{-2}\mathrm{m}^{-1}$. Die radiale Komponente V_{rrr} bzw. V_{zzz} enthält die stärksten Signale und erreicht in einer mittleren Höhe von 250 km über der Erdoberfläche eine Größenordnung von $V_{zzz} = 1.2548 \pm 0.0066$ mE m^{-1}. Aufgrund der geringen Größe der dritten Ableitungen erscheint hier die Einführung des Präfix Micro sinnvoll: Micro-Eötvös (μE). Damit ergibt sich als Einheit der dritten Ableitungen 1 μE/m=10^{-3} mE/m=10^{-6} E/m=10^{-15} s^{-2}m^{-1}.

Für eine ausführliche Darstellung dritter Ableitungen in Kugelkoordinaten (λ, ϕ, r) sowie kartesischen Koordinaten (x, y, z) wird auf Tóth (2005), Casotto und Fantino (2008) sowie Šprlák und Novák (2014) verwiesen.

Aktuelle Veröffentlichungen (Hamáčková et al., 2016) beschäftigen sich mit der Lösungen von Singularitäten, die bei der Bestimmung zweiter und dritter Ableitungen in Polnähe auftreten können. Aufgrund des Polarlochs in der Projektion der GOCE-Satellitenbahnen auf die Erdoberfläche (Poldistanz ca. 6°) entfallen derartige Probleme bei der Bestimmung von Modellgradienten für GOCE jedoch (Eshagh, 2010).

2.1.4 Satellitengradiometrie

Die Grundlagen der folgenden Ausführungen sind im Wesentlichen Müller (2001) und Rummel (1986) entnommen.

Die Satellitengradiometrie bezeichnet eine Methode zur Bestimmung zweiter Ableitungen des Gravitationspotentials V auf Basis von Beobachtungen eines Satellitengradiometers (Torge und Müller, 2012). Die zweiten Ableitungen werden typischerweise im Marussi-Tensor (siehe Gl. (2.31)) zusammengefasst. Dabei bezeichnen $\{x, y, z\}$ die Koordinatenachsen des Satellitengradiometers in einem lokalen satellitenfesten Koordinatensystem, bei GOCE entsprechend dem GRF. Dessen x-Achse weist in etwa in Flugrichtung, die y-Achse orthogonal zur Orbitebene und die z-Achse radial in Richtung Erdmittelpunkt.

Die Beobachtungen des Gradiometers werden im sensor- und damit in einem satellitenfesten Koordinatensystem erfasst. Da der Satellit - eine 'bewegte Plattform' - ständig seine Orientierung im Raum ändert[4], erfährt der Satellit selbst, genau wie sein Instrumentarium, Einflüsse von Trägheitskräften. Die aus Gradiometerbeobachtungen abgeleitete Größe $\boldsymbol{\Gamma}$ beinhaltet daher eine Kombination aus dem gesuchten Gravitationsgradiententensor $\boldsymbol{V}$ und dem Einfluss der Trägheitskräfte $\boldsymbol{\Omega\Omega}$ und $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ gemäß

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Omega\Omega} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}. \tag{2.36}$$

[4]Die größte ständige Orientierungsänderung ergibt sich aus der erdgerichteten Ausrichtung des Satelliten und stellt sich als Rotation von 360°/5400 s (1 Umlauf) um die y-Achse dar.

Die Trägheitskräfte umfassen einen Zentrifugalanteil $\boldsymbol{\Omega\Omega}$ mit

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

sowie einen Anteil der Eulerbeschleunigung

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\omega}_z & \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z & 0 & -\dot{\omega}_x \\ -\dot{\omega}_y & \dot{\omega}_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

Diese lassen sich über die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ um die x, y und z-Achse sowie deren erste zeitliche Ableitungen $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$ (Winkelbeschleunigungen) beschreiben. Coriolis-Terme können hier (Gl. (2.36)) vernachlässigt werden, da die Testmassen des GOCE-Gradiometers ständig im Schwebezustand gehalten werden und sich praktisch 'nicht' bewegen.

Nach Einsetzen von Gleichungen (2.37) und (2.38) in (2.36) ergibt sich deren rechte Seite zu

$$\begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega_y^2 - \omega_z^2 & \omega_x\omega_y & \omega_x\omega_z \\ & -\omega_x^2 - \omega_z^2 & \omega_y\omega_z \\ symm. & & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\omega}_z & \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z & 0 & -\dot{\omega}_x \\ -\dot{\omega}_y & \dot{\omega}_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

Bei $\boldsymbol{\Omega}$ und $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ handelt es sich um antisymmetrische Matrizen, wohingegen $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{\Omega\Omega}$ symmetrisch sind. Diese Eigenschaft macht man sich zur Trennung der Anteile in $\boldsymbol{\Gamma}$ zu Nutze (Stummer, 2013):

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Gamma} - \boldsymbol{\Gamma}^T\right) \tag{2.40a}$$

$$\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Omega\Omega} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\Gamma}^T\right). \tag{2.40b}$$

Mit Gleichung (2.40a) gelingt die Abspaltung der Winkelbeschleunigungen in $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$, aus denen durch Integration die Winkelgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\Omega}$ abgeleitet werden können. Auf diese Weise sind auch die Elemente von $\boldsymbol{\Omega\Omega}$ bekannt und mittels Gleichung (2.40b) können die Elemente des Gravitationsgradiententensors $\boldsymbol{V}$ bestimmt werden.

In der Praxis werden die Winkelgeschwindigkeiten aus einer Kombination der Winkelbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ und aus Sternsensoren abgeleiteten Winkelgeschwindigkeiten bestimmt (Stummer, 2013).

Die vorangegangenen Zusammenhänge in diesem Kapitel gelten im Falle eines fehlerfreien Gradiometers, dessen dreiachsige Beschleunigungsmesser über den gesamten Frequenzbereich gleich genaue Beobachtungen in allen Achsen liefern. Im Hinblick auf die GOCE-Mission wurde das Gradiometerdesign auf einige Randbedingungen hin angepasst. Dies hat entscheidenden Einfluss auf die Qualität der abgeleiteten Gravitationsgradienten. In Abschnitt 3.2.1 wird die Ableitung von Gravitationsgradienten aus Beschleunigungsdifferenzen erläutert und die Folgen des speziellen GOCE-Gradiometerdesigns thematisiert.

2.1.5 Zeiten

Die Grundlagen dieses Abschnitts basieren im Wesentlichen auf Torge und Müller (2012).

Die Zeit als vierte Dimension spielt in der Erdbeobachtung und in der gesamten Geodäsie eine zentrale Rolle. Einerseits aufgrund der Tatsache, dass viele Messverfahren auf Laufzeit- oder Frequenzmessungen basieren und eine gleichförmige Zeitskala zur Modellierung der Bewegung künstlicher Satelliten erforderlich ist; andererseits bilden Zeitsysteme die Grundlage

zur Beschreibung und Verknüpfung des erdfesten und inertialen Raums und sind essentiell für die Datierung von Messungen und Ergebnissen.

Die Beschreibung eines Zeitsystems gelingt grundsätzlich anhand zweier Parameter:

- Einheit des Zeitintervalls sowie
- Festlegung eines Zeitpunktes (Epoche).

Im Folgenden werden die im Zusammenhang mit Satellitenbeobachtungen wichtigsten Zeitsysteme kurz beschrieben, bevor auf die im Zusammenhang mit der GOCE-Mission und deren Datenauswertung interessierenden Zeitsysteme und deren Beziehungen eingegangen wird.

Internationale Atomzeit (Temps Atomique International, TAI)

Die Internationale Atomzeit (TAI)stellt ein gleichförmiges Zeitmaß dar, das durch ein Netz von derzeit mehr als 350 global verteilten Atomuhren realisiert wird. Die Atomzeitsekunde entspricht der SI-Sekunde, die laut der Sekundendefinition von 1967 definiert ist als "... das 9 192 631 770 - fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung." (PTB, 2016a).

Der Ursprung der TAI wurde so festgelegt, dass er am 01. Januar 1958, 0 Uhr mit dem entsprechenden Zeitpunkt der Weltzeit UT1 übereinstimmt. Ein TAI-Tag enthält 86 400 s und das Julianische Jahrhundert besteht aus 36 525 Tagen.

Weltzeit UT (Universal Time)

Die Weltzeit UT ist ein natürliches Zeitmaß, das an die Erdrotation gekoppelt ist. Als deren Zeiteinheit wird der mittlere Sonnentag definiert. Dabei handelt es sich um das Intervall zwischen zwei Durchgängen einer fiktiven Sonne durch den mittleren Meridian von Greenwich. Diese fiktive Sonne wurde derart definiert, sich mit konstanter Geschwindigkeit am Äquator zu bewegen, anders als die wahre Sonne, deren Bewegungen Ungleichmäßigkeiten aufweist. Mittlere und wahre Sonne bleiben dabei insofern gekoppelt, als dass sie zur gleichen Zeit durch den Frühlingspunkt gehen. Die mittlere Sonnenzeit ergibt sich aus dem Stundenwinkel der mittleren Sonne plus 12 Stunden. Die mittlere Sonnenzeit bezogen auf den mittleren astronomischen Meridian von Greenwich wird als Weltzeit UT (Universal Time) bezeichnet.

Weltzeit UT1

Die Weltzeit UT wird praktisch durch eine Vielzahl geodätischer Stationen im Stationsnetz des International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS) bestimmt, wobei die entscheidenden Beiträge aus der Very Long Basline Interferometry (VLBI) stammen. Aus den Beobachtungen an jeder Station wird eine Universalzeit UT0 abgeleitet, die noch den Einfluss der Polbewegung enthält. Um eine Vergleichbarkeit der einzelnen Stationsbeobachtungen zu ermöglichen, werden die Beobachtungen auf den Conventional Terrestrial Pole reduziert. Die Reduktion der Polbewegung in der astronomischen Länge $\Delta\Lambda_P$ entspricht einer Zeitreduktion. Die Überführung der Weltzeit UT0 auf die Weltzeit im konventionellen terrestrischen System UT1 gelingt schließlich über

$$\mathrm{UT1} = \mathrm{UT0} + \Delta\Lambda_P. \tag{2.41}$$

UT1 wird auch als astronomische Zeit bezeichnet, bei der es sich - genau wie bei UT - um eine Sonnenzeit handelt. Sie enthält noch sämtliche Rotationsschwankungen der Erde und stellt daher kein streng gleichförmiges Zeitmaß dar (Seeber, 1989).

Koordinierte Weltzeit (Coordinated Universal Time, UTC)

Die Koordinierte Weltzeit (UTC) stellt das meist gebrauchte und praktisch verwendete Zeitsystem der Erde dar. Es erfüllt die beiden wichtigen Eigenschaften einer 1. gleichförmigen Zeitskala, die 2. eng mit UT1 und damit mit der Erdrotation verknüpft ist. Bei UTC handelt es sich um eine Atomzeitskala, die sich mit einer ganzzahligen Anzahl an Schaltsekunden von TAI unterscheidet. Das Zeitintervall von UTC ist die SI-Sekunde. Um den Bezug zur Erdrotation zu ermöglichen, wird durch Einführen von Schaltsekunden dafür gesorgt, dass die Epoche von UTC sich um weniger als 0,9 s von UT1 unterscheidet:

$$|\Delta\mathrm{UT}| = |\mathrm{UT1} - \mathrm{UTC}| < 0,9 \text{ s}. \tag{2.42}$$

Die UTC wurde am 01. Januar 1972 mit der Differenz TAI-UTC von 10 Sekunden festgesetzt (PTB, 2016b). Seither wurden immer wieder (positive) Schaltsekunden in UTC eingeführt, um die Bedingung in Gleichung (2.42) zu erfüllen. Seit dem 01. Juli 2015 gilt (IERS, 2016)

$$\mathrm{TAI} = \mathrm{UTC} + 36 \text{ s}. \tag{2.43}$$

Praktisch bedeutet die Einführung positiver Schaltsekunden, dass jeder Sonnentag etwas länger ist als ein 'SI-Tag' mit 86 400 SI-Sekunden. Kurz nach Einführung der Schaltsekunden wurde beinahe jährlich eine Schaltsekunde eingefügt, wohingegen in den vergangenen Jahren jeweils mindestens 3 Jahre zwischen deren Einführung vergingen (IERS, 2016). Daraus lässt sich ableiten, dass die Erdrotationsgeschwindigkeit in den letzten Jahren leicht zugenommen hat. Auch wenn der Sonnentag noch immer länger als 86 400 SI-Sekunden ist, verkürzt er sich derzeit 'in Richtung' des SI-Tages.

GPS-Zeit

Die GPS-Zeit ist die Systemzeit des Global Positioning System (GPS). Ihrer Natur nach ist die GPS-Zeit eine Atomzeit, deren Realisierung auf den Systemuhren von GPS beruht (Seeber, 1989). Zur Epoche 06. Januar 1980, 0 Uhr, stimmte die GPS-Zeit mit UTC überein. Da in die GPS-Zeit keine Schaltsekunden eingefügt werden, verändert sich die Differenz zu UTC mit Einführen jeder Schaltsekunde (in UTC). Seit dem 01. Juli 2015 unterscheiden sich beide Zeitskalen um

$$\text{GPS-Zeit} - \mathrm{UTC} = 17 \text{ s}. \tag{2.44}$$

Obwohl GPS-Zeit und UTC beides Atomzeitskalen sind, werden sie jedoch auf unterschiedliche Netze von Atomuhren referenziert, so dass - über die Schaltsekunden hinaus - Schwankungen in deren Differenz auftreten können. Diese können das Niveau einiger 10er Nanosekunden erreichen (McCarthy und Klepczynski, 1999) und fallen damit für die allermeisten Anwendungen nicht ins Gewicht.

Die Differenz zwischen GPS-Zeit und TAI ist in den genannten Grenzen konstant:

$$\text{GPS-Zeit} = \mathrm{TAI} - 19 \text{ s}. \tag{2.45}$$

Durch Kombination von Gleichungen (2.44) und (2.45) ergibt sich erneut die Anzahl der Schaltsekunden zwischen TAI und UTC gemäß Gleichung (2.43).

Die Angabe der GPS-Zeit erfolgt häufig in Form einer Wochennummer und der Zahl der Sekunden innerhalb dieser Woche (Seeber, 1989). Die Zählung der sogenannten GPS-Woche begann am Sonntag, den 06. Januar 1980 mit der Nummer 1. Eine neue GPS-Woche beginnt jeden Sonntag um 00:00 Uhr UT. Zu diesem Zeitpunkt wird die Wochennummer inkrementell (um 1) erhöht und die Sekundenzählung startet bei Null. Beispielhaft ergeben sich für Dienstag, den 01. Dezember 2009, um 00:00:00 Uhr die GPS-Wochennummer 1560 und die GPS-Sekunde 172800.

Tabelle 2.3: Formate und Nullepochen interessierender Zeiten bei der GOCE-Datenauswertung.

Zeit	**Format** zum Beispielzeitpunkt 2009.12.01 00:00:00 UTC	**Nullepoche** der Zeitskala	**Bemerkungen**
UTC	[**bürgerliches Datum**] (gregorianischer Kalender) **2009.12.01 00:00:00,0**	0000.00.00 00:00:00,0 Weltzeit seit 1972	• enthält Schaltsekunden zur Einhaltung der Bedingung in Gl. (2.42)
GPS-Zeit	[**s.dezimal**] seit 1980.01.06 00:00:00,0 **943 660 815.0 s**	1980.01.06 00:00:00,0	• Atomzeitskala • gleich zu UTC am 1980.01.06 00:00:00,0
Matlab-Systemzeit	[**Tage.dezimal**] seit 0000.00.00 00:00:00,0 **734 108.0 Tage**	0000.00.00 00:00:00,0	• abgesehen von Zeitzone und Sommer-/ Winterzeit gleich UTC • enthält Schaltsekunden gemäß UTC

Zeiten in der GOCE-Datenauswertung und deren Beziehungen

Im Zuge der GOCE-Datenauswertung müssen Beziehungen zwischen verschiedenen Datums- und Zeitformaten geknüpft werden: Sämtliche GOCE-Datensätze werden mittels GPS-Zeit [s] zeitlich referenziert. Die Benennung der Datenfiles beruht auf UTC in Form des bürgerlichen Datums. Da die Datenanalyse sämtlicher in dieser Arbeit präsentierten Ergebnisse in Matlab erfolgte, wird außerdem die Beziehungen zur Matlab-Systemzeit erläutert.

Bei der Matlab-Systemzeit handelt es sich um die lokale Computerzeit. Da diese nicht langzeitstabil ist, empfiehlt es sich eine Internetzeitsynchronisation zu nutzen, bei der die lokale Computerzeit und damit die Matlab-Systemzeit zu einem Zeitserver synchronisiert werden[5]. Die Computerzeit wird dabei auf UTC synchronisiert, wobei Zeitzone und Sommer- bzw. Winterzeit des Standortes berücksichtigt werden[6]. Damit entspricht die Matlab-Systemzeit der MEZ, die sich von UTC um 1 (Winterzeit) bzw. um 2 Stunden (Sommerzeit) unterscheidet.

Bei der GOCE-Datenverarbeitung wird ausschließlich die Matlab-Systemzeit genutzt: Anzahl der Tage seit dem Jahre Null. Damit können Matlab-eigene Funktionen zur einfachen Darstellung und Umwandlung der Datums- und Zeitformate genutzt und zu Kontrollzwecken eingesetzt werden.

Zusammengefasst kommen also die Zeiten UTC und GPS und die Matlab-Systemzeit bei der GOCE-Datenauswertung zum Einsatz. Tabelle 2.3 gibt einen Überblick. Entscheidend ist, dass jede der drei Zeiten jeweils nur in einem Format genutzt wird: UTC in Form des bürgerlichen Datums [Jahr.Monat.Tag Stunden:Minuten:Sekunden], GPS-Zeit in Form von Sekunden seit dem 06. Januar 1980 [Sekunden.Sekundenbruchteile] und Matlab-Systemzeit(format) in Form von Tagen seit dem Jahre Null [Tage.Tagesbruchteile].

Die numerische Zeitangabe der GPS-Zeit (Sekunden seit 06. Januar 1980) eignet sich aufgrund ihrer Gleichförmigkeit besonders zum Zwecke der Datenregistrierung und -verarbeitung. Aufgrund der unterschiedlichen Datenformate von UTC und GPS-Zeit und der Notwendigkeit der Berücksichtigung von Schaltsekunden bei deren gegenseitiger Überführung, hat sich in der praktischen Anwendung das Format der Matlab-Systemzeit als sinnvoll erwiesen.

---

[5] Es stehen eine Vielzahl an Internetzeitservern zur Verfügung. Ideal geeignet sind Zeitserver 'in der Nähe' des aktuellen Ortes. An der Leibniz Universität Hannover eignen sich z.B. der Server "time2.rrzn.uni-hannover.de" des Leibniz Universität IT Service (LUIS) oder der Zeitserver der Physikalisch Technischen Bundesanstalt (PTB) in Braunschweig "ptbtime1.ptb.de".

[6] Die Ortszeit Hannovers entspricht der Mitteleuropäischen Zeit (MEZ) und ergibt sich zur Winterzeit zu UTC +01:00, sowie zur mitteleuropäischen Sommerzeit (MESZ) zu UTC +02:00.

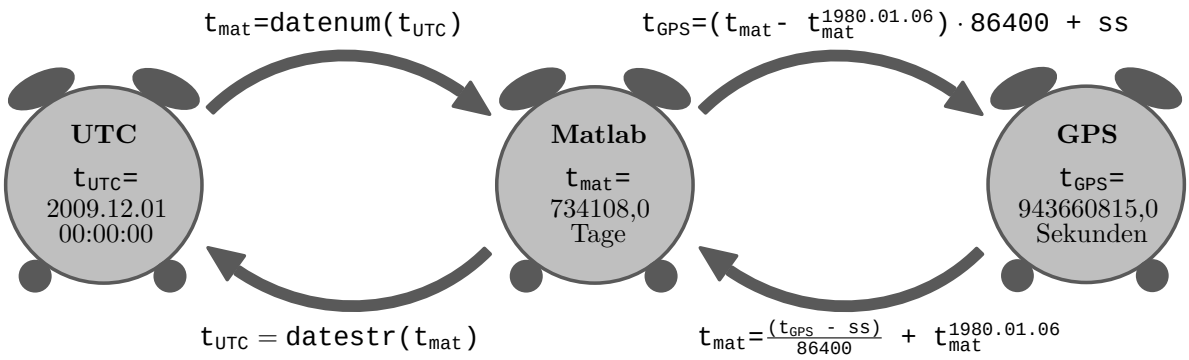


Abbildung 2.1: Gegenseitige Überführung der drei Zeiten bei der GOCE-Auswertung in MATLAB-Notation. Dazu werden benötigt: Die Schaltsekunden `ss` = 15 s am 01. Dezember 2009, die Matlab-Systemzeit zur Nullepoche der GPS-Zeit $t_{mat}^{1980.01.06}$ = `datenum('1980.01.06 00:00:00')` sowie die Länge eines (mittleren Sonnen-)Tages mit 24 h = 86400 s. Die Zeitangaben in Mitte der 'Uhren' geben - im jeweiligen Format - die Zeit zum bürgerlichen Datum 01. Dezember 2009 um 00:00:00 Uhr UTC an.

Das **Matlab-Systemzeit-Format** erfüllt zwei wichtige Funktionen

1. es übernimmt eine wichtige Zwischenfunktionen bei der Überführung UTC $\leftrightarrow$ GPS-Zeit (siehe Abbildung 2.1), und
2. es ermöglicht eine Überführung in ein bürgerliches Datum mit den Matlab-eigenen Funktionen `datenum` und `datestr`, mit Hilfe derer Zeiten aller Formate 'lesbar' gemacht werden können.

Abbildung 2.1 stellt die Überführung der genannten Zeiten ineinander dar, wobei eine Matlab-typische Notation gewählt wurde.

2.2 Ausgewählte Grundlagen der Statistik und digitalen Signalverarbeitung

2.2.1 Deskriptive Statistik

Die deskriptive oder beschreibende Statistik ist ein Bereich der Statistik, der sich mit der Untersuchung und Beschreibung unübersichtlichen und umfangreichen Datenmaterials beschäftigt. Die folgenden Ausführungen orientieren sich an (Benning, 2011).

Grundlage statistischer Untersuchungen ist eine Beobachtungsreihe aus n Merkmalswerten x_i mit $i = 1, ..., n$ (z.B. Messwerte oder Gradientenresiduen), die die möglichen Ausprägungen $x_1^*, ..., x_j^*, ..., x_m^*$ des Merkmals X annehmen können.

Um sich einen ersten Überblick zu verschaffen, wie viele Merkmalswerte x_i welche Merkmalsausprägung x_j^* aufweisen, werden die Merkmalswerte x_i der Größe nach sortiert und deren *absolute Häufigkeit* $h(x_j^*)$ bestimmt ('Strichliste' wie oft Ausprägung x_j^* in den x_i vorkommt). Die Summe aller absoluten Häufigkeiten ergibt die Anzahl der Merkmalswerte (Beobachtungen): $\sum_{j=1}^{m} h(x_j^*) = n$. Werden die absoluten Häufigkeiten durch die Anzahl der Beobachtungen n geteilt, ergeben sich die relativen Häufigkeiten $f(x_j^*)$ nach Benning (2011, Gl. (3.1)) zu

$$f(x_j^*) = \frac{h(x_j^*)}{n} \qquad \text{mit} \quad 0 \leq f(x_j^*) \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{m} f(x_j^*) = 1. \tag{2.46}$$

Relative Häufigkeiten lassen sich mit $f(x_j^*) \cdot 100$ auch in [%] angeben.

Im Falle von Messwerten oder Gradientenresiduen können diese Merkmalswerte beliebig viele Werte annehmen und kaum ein Wert würde mehrfach vorkommen. Daher erscheint eine Einteilung in Merkmalsausprägungen in der oben beschriebenen Form nicht sinnvoll. In solchen Fällen eignet sich die Einteilung der Merkmalswerte in *Klassen* (auch *Gruppen* genannt).

Jede Klasse ist definiert durch Klassenmitte und Klassenbreite oder durch ihre beiden Klassengrenzen. Absolute und relative Klassengrenzen lassen sich äquivalent zu Gleichung (2.46) bestimmen. Um die Verteilung der Merkmalswerte grafisch darzustellen, eignen sich verschiedenste Darstellungsformen. Im Verlauf dieser Arbeit wird zur Darstellung von Verteilungen das *Histogramm* genutzt. Darin wird die Häufigkeit in Form einer Säule über der Werteklasse in einem Koordinatensystem dargestellt. Der Flächeninhalt der Säule ist proportional zur Häufigkeit ('flächenproportional'). Die Breiten der Säulen geben die Klassenbreiten an. Die Ränder der Säulen im Koordinatensystem entsprechen den Klassengrenzen. Bei den Histogrammen in dieser Arbeit wurde auf variierenden Klassenbreiten (äquivalent Säulenbreiten) verzichtet. Damit sind die Klassenbreiten zwar erkennbar, diese jedoch gleich und nur die Höhen der Säulen entscheidend (man spricht von 'höhenproportionaler' Darstellung).

Über die grafische Darstellung hinaus, werden zur Beschreibung von Verteilungen (meist von Kreuzungspunktresiduen) im Folgenden einige statistische Kenngrößen oder Maßzahlen genutzt, die sich in die Gruppen *Lage-* und *Streuungsparameter* einteilen lassen. Die folgenden Ausführungen widmen sich deren Beschreibung und orientieren sich an Benning (2011) und Niemeier (2008).

Lageparameter

Lageparameter geben 'Mittelwerte' der Daten an. Sie unterscheiden sich untereinander durch ihre Eigenschaften (z.B. Robustheit gegenüber Ausreißern).

Arithmetisches Mittel

Das arithmetische Mittel $\bar{x}$ wird im Folgenden vereinfacht als Mittelwert bezeichnet. Dieser ergibt sich aus n Beobachtungen x_i nach

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{2.47}$$

Für eine anschauliche Beschreibung der (Werte-)Verteilung eignen sich sogenannte **Quantile**, die als Schwellwerte zu verstehen sind. Jedes Quantil Q_p mit $0 \leq p \leq 1$ gibt einen Wert Q im Wertebereich der Messdaten $\min(X)...Q...\max(X)$ an, der von einem Anteil von p Werten unterschritten und von einem Anteil von $1-p$ überschritten wird. In der Praxis werden für feste Werte von p oftmals spezielle Werte oder Größen genutzt. Die wichtigsten sind Median und Perzentil.

Median

Der Median x_{median} entspricht dem Quantil $Q_{0.5}$ und lässt sich je nach gerader oder ungerader Anzahl an Messwerten gemäß Gleichung (2.48) bestimmen. Als erster Schritt sind die Messwerte x_i (mit $i = 1, ..., n$) der Größe nach zu sortieren: $X^{\text{sort}} = [x_1^{\text{sort}}, x_2^{\text{sort}}, x_3^{\text{sort}}, ..., x_n^{\text{sort}}]$.

$$x_{\text{median}} = \begin{cases} x^{\text{sort}}_{\frac{n+1}{2}} & \text{wenn } n \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{2}(x^{\text{sort}}_{\frac{n}{2}} + x^{\text{sort}}_{\frac{n+2}{2}}) & \text{bei } n \text{ gerade} \end{cases} \tag{2.48}$$

Perzentil

Wird der p-Wert des Quantils Q_p in Prozent angegeben, so spricht man von Perzentil. Das Perzentil $p95$ entspricht also dem Wert, den 95% (0.95) aller Messwerte unterschreiten und $100\% - 95\% = 5\%$ der Werte überschreiten. Das Perzentil $p50$ entspricht dem Median.

Im Gegensatz zum Mittelwert, sind Quantilwerte unempfindlich gegenüber Ausreißern, was man sich bei der Beschreibung der Kreuzungspunkt-Residuen in Kapitel 6 zunutze macht.

Streuungsparameter

Die Gruppe der Streuungsparameter ermöglicht die Beschreibung der Streuung um ein Zentrum der Merkmalswerte. Als Zentrum werden Mittelwert $\bar{x}$, Median x_{median} oder auch Null verwendet.

Empirische Varianz und empirische Standardabweichung

Die empirische Varianz s_0^2 (auch Moment 2. Ordnung) sowie die empirische Standardabweichung s_0 ergeben sich zu

$$\begin{aligned} s_0^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \,, \\ \sigma_0 = s_0 &= \sqrt{s_0^2}. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Beide beziehen sich auf den mittleren Abstand der Merkmalswerte vom Mittelwert $\bar{x}$ und sind häufig gebrauchte Maße für die Genauigkeit bzw. Präzision.

Die Standardabweichung wird auch als σ_0 geschrieben und eignet sich zur einfachen **Identifikation grob falscher Beobachtungen ('Ausreißer')** im Datenmaterial: Je nach Datensatz gelingt deren Identifikation mit Hilfe der (3-5)σ-Regel (Niemeier, 2008, S. 9). Alle Merkmalswerte, die größer sind als (3-5)σ werden als Ausreißer betrachtet.

Mittlere absolute Abweichung

Die mittlere absolute Abweichung d beruht auf dem mittleren Abstand der Merkmalswerte zum Mittelwert $\bar{x}$ und wird auf Basis der Messwerten x_i mit $i = 1, ..., n$ berechnet nach

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| \,. \tag{2.50}$$

Spannweite

Die Spannweite $R(X)$ gibt die Wert-Spanne zwischen dem kleinsten Messwert mit $\min(X)$ und dem größten Messwert mit $\max(X)$ der Wertemenge X an:

$$R(X) = \max(X) - \min(X). \tag{2.51}$$

Mittlere quadratische Abweichung, Root-Mean-Square (RMS)

Die mittlere quadratische Abweichung (auch quadratischer Mittelwert) wird im internationalen Sprachgebrauch auch als Root-Mean-Square (RMS) bezeichnet. Sie ist ein Maß für die Streuung der Messwerte um Null und berechnet sich zu

$$\bar{x}_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{2.52}$$

Aufgrund der 2-er Potenz in Gleichung (2.52) wird das Vorzeichen von x_i unerheblich und es gilt $s_0 \leq \bar{x}_{\text{RMS}}$. Im Falle eines Mittelwertes von $\bar{x} = 0$, sind Standardabweichung (Gl. (2.49)) und RMS identisch $s_0 = \bar{x}_{\text{RMS}}$.

Der Großteil der vorgestellten Lage- und Streuungsparameter werden in Kapitel 6 verwendet, um Datensätze und Kreuzungspunkt-Residuen zu beschreiben.

2.2.2 Aspekte der digitalen Signalverarbeitung

Die Digitale Signalverarbeitung stellt die Grundlage der Verarbeitung und Untersuchung digitaler Signale dar und ist Grundlage aller Ingenieurswissenschaften. Allgemein betrachtet, dient sie der "Umformung von Zahlenfolgen durch digitale Techniken" (Kammeyer und Kroschel, 2009, S. 5). Aufgrund ihrer Vielfältigkeit wird hier ausschließlich auf - für die vorliegende Arbeit - relevante Bereiche der digitalen Signalverarbeitung eingegangen. Für eine umfassende Darstellung der verschiedenen Bereiche der digitalen Signalverarbeitung werden Smith (1999), Oppenheim et al. (2004) sowie Kammeyer und Kroschel (2009) empfohlen.

Die folgenden Ausführungen beruhen auf den genannten Quellen, wobei sich vorwiegend an Kammeyer und Kroschel (2009) orientiert wird.

2.2.2.1 Zeitdiskrete Signale und Systeme

Aufgrund der Zielsetzung dieser Arbeit, der Analyse *realer* GOCE-Daten, stehen ausschließlich diskrete Signale zu diskreten Zeitpunkten zur Verfügung. Die Grundlagen fokussieren daher auf zeitdiskrete Signale. In allgemeiner Form bildet die Summe aller Operationen oder Umformungen ein *digitales System*. Abbildung 2.2 illustriert wie Eingangssignale $x(k)$ digitale Systeme $H\{\cdot\}$ durchlaufen, von diesen verändert werden und in Ausgangssignalen $y(k)$ resultieren. k bezeichnet den Index der Elemente der untersuchten Zeitreihe.

Zur Beschreibung der Eigenschaften (digitaler) Systeme werden oftmals einfache 'elementare Signale' als Eingangssignal verwendet. Diese regen das System an und auf Grundlage des Verhaltens des Ausgangssignals lässt sich das Systems charakterisieren. An dieser Stelle werden die Impulsfunktion (auch Impulsfolge) sowie die Sprungfunktion (auch Sprungfolge) kurz erläutert. Für weitere elementare Signale wird auf (Kammeyer und Kroschel, 2009, Abs. 2.1) verwiesen.

Die Impulsfunktion $\delta(k)$ stellt das zeitdiskrete Pendant des Dirac-Impulses zeitkontinuierlicher Signale dar und ergibt sich zu

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}. \tag{2.53}$$

$\delta(k)$ wird im Folgenden als *Dirac-Funktion* bezeichnet. Ein weiteres elementares Signal stellt die Sprungfunktion (engl. step function) dar:

$$\epsilon(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}. \tag{2.54}$$

Beide Funktionen dienen als Eingangssignal $x(k)$ zur Anregung eines Systems $H\{\cdot\}$ gemäß Abbildung 2.2. Die Charakterisierung der Systemeigenschaften erfolgt auf Basis der Ausgangssignale $y(k)$ in Form der Impulsantwort bzw. Sprungantwort. Sie wird im Weiteren zur Beschreibung der Eigenschaften digitaler Filter verwendet.

Die Impulsantwort $h(k)$ ergibt sich beispielhaft durch Anregung des Systems mit der Dirac-Funktion (Impulsfunktion) $\delta(k)$ zu

$$h(k) = H\{\delta(k)\}. \tag{2.55}$$

Sind entsprechende Systeme $H\{\cdot\}$ linear und zeitinvariant, so spricht man auch von linearen zeitinvarianten Systemen (LTI-Systeme, von engl. Linear-Time-Invariant). Erfolgt eine

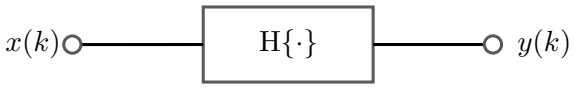


Abbildung 2.2: Wirkungsweise eines Systems (in Anlehnung an Kammeyer und Kroschel (2009, Bild 2.2.1)).

Anregung von LTI-Systemen mit einem beliebigen Signal $x(k)$, resultiert

$$y(k) = H\{x(k)\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)H\{\delta(k-i)\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(k-i) =: x(k) * h(k). \tag{2.56}$$

Diese Operation wird als diskrete Faltung (auch Faltungssumme) bezeichnet. Sie stellt gemäß Gleichung (2.56) eine Operation im Zeitbereich - in Abhängigkeit vom Zeitparameter k - dar.

Zur Analyse des Systems im Frequenzbereich erfolgt eine Anregung des Systems mit der komplexen Exponentialfolge

$$x(k) = e^{j\omega Tk} = e^{j\Omega k}, \tag{2.57}$$

mit der Kreisfrequenz ω sowie der durch die Abtastfrequenz $f_A = 1/\Delta t = 1/T$ normierten Kreisfrequenz $\Omega = \omega/f_A = \omega T$. Nach diskreter Faltung von $x(k)$ gemäß Gleichung (2.56) ergibt sich

$$y(k) = h(k) * x(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)e^{-j\Omega(k-i)} = e^{j\Omega k} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)e^{-j\Omega i}. \tag{2.58}$$

Der zeitabhängige Anteil (mit Zeitparameter k) lässt sich abspalten. Es zeigen sich typische Eigenschaften linearer Systeme: $y(k)$ stellt sich als komplexe Exponentialfolge dar, deren Frequenz der des Eingangssignals $x(k)$ entspricht. Ebenfalls entscheidend ist, dass Amplitude und Phase des Signals durch die Faltung verändert werden. Der zeitinvariante Anteil

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega k} \tag{2.59}$$

wird als Übertragungsfunktion (oder Frequenzgang) des Systems mit der Impulsantwort $h(k)$ bezeichnet und ist in der Regel komplex. Sie ist periodisch (mit $\Omega = 2\pi$) und lässt sich daher auch als Fourier-Reihe darstellen. Für diskrete Signale $x(k)$ ergibt sich darüber die zeitdiskrete Fourier-Transformation (engl. Discrete-Time Fourier Transform, DTFT) zu

$$\mathrm{DTFT}\{x(k)\} = X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\Omega k}. \tag{2.60}$$

Sie stellt die Fourier-Transformierte von $x(k)$ dar. Die DTFT ist ein wichtiges Werkzeug in der digitalen Signalverarbeitung. Für eine Beschreibung derer Eigenschaften wird auf Kammeyer und Kroschel (2009, S. 18-20) verwiesen.

2.2.2.2 z-Transformation

Eine Verallgemeinerung der Fourier-Transformation stellt die z-Transformation dar. Sie ist hilfreich, da Fourier-Transformierte nicht für alle Eingangssignale konvergiert. Außerdem ist die Notation der z-Transformation in vielen analytischen Aufgabenstellungen anschaulicher und bequemer als die Fourier-Transformation.

Die z-Transformierte des diskreten Signals $x(k)$ ist - als Pendant zu Gleichung (2.60) - definiert als

$$H(z) = Z\{x(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k}. \tag{2.61}$$

z ist eine komplexe Variabel. Wird $z = r \cdot e^{j\omega T} = r \cdot e^{j\Omega}$ gesetzt, ergibt sich

$$X(r \cdot e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)r^{-k}e^{-j\Omega k} \tag{2.62}$$

und damit nach Gleichung (2.60) die zeitdiskrete Fourier-Transformierte des mit r^{-k} multiplizierten diskreten Signals. Für $r = 1$ geht die zeitdiskrete Fourier-Transformation in die z-Transformation über.

Die z-Transformation der diskreten Faltung stellt sich gemäß Gleichung (2.56) dar zu

$$Z\{h(k) * x(k)\} = H(z) * X(z) = Y(z). \tag{2.63}$$

Daraus lässt sich die z-Übertragungsfunktion $H(z)$ ableiten:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \text{mit} \quad H(z) = Z\{h(k)\}. \tag{2.64}$$

Kammeyer und Kroschel (2009) zeigen, dass sich lineare, zeitinvariante, diskrete Systeme durch Differenzengleichungen beschreiben lassen. Im Hinblick auf Differenzengleichungen lässt sich die z-Übertragungsfunktion (Gl. (2.64)) umformulieren zu

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{z^{-m}\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu z^{m-\mu}}{z^{-n}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^{n-\nu}} = z^{n-m} \cdot \frac{\sum_{\mu=0}^{m} b_{m-\mu} z^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu} z^{\nu}} = z^{n-m} \cdot \frac{P_b(z)}{P_a(z)}. \tag{2.65}$$

Die z-Übertragungsfunktion lässt sich - abgesehen von dem Faktor z^{n-m} - über die Nullstellen der Polynome $P_b(z)$ und $P_a(z)$ beschreiben. Die Polynom-Koeffizienten $b_{m-\mu}$ und $a_{n-\nu}$ definieren die Polynome $P_b(z)$ und $P_a(z)$ und bilden beispielsweise das Ergebnis einer Filterdefinition. Dazu werden m Nullstellen $z_{0\mu}$ ($\mu = 1, ..., m$) und n Pole $z_{\infty\nu}$ ($\nu = 1, ..., n$) benötigt. Der Faktor z^{n-m} führt im Falle von $m > n$ zu einem $(m-n)$-fachen Pol und im Falle von $n > m$ zu einer $(n-m)$-fachen Nullstelle im Ursprung der z-Ebene. Er bewirkt eine zeitliche Verschiebung um eine ganzzahlige Anzahl an Abtastwerten am Systemausgang (Oppenheim et al., 2004, Abs. 3.4). Dies kann hilfreich sein, um Systemzusammenhänge vereinfacht darstellen zu können (Kammeyer und Kroschel, 2009, Abs. 3.5.1). Damit lässt sich Gleichung (2.65) auch schreiben zu

$$H(z) = z^{n-m} \cdot b_0 \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^{m}(z - z_{0\mu})}{\prod_{\nu=1}^{n}(z - z_{0\nu})}. \tag{2.66}$$

Die z-Übertragungsfunktion in Form von Gleichung (2.66) wird im Folgenden genutzt, um über ihre Pole $z_{0\mu}$ und Nullstellen $z_{0\nu}$ digitale Filter zu beschreiben.

2.2.3 Filterung

Sofern nicht anders angegeben, beruhen die Grundlagen dieses Abschnitts auf Oppenheim et al. (2004) und Kammeyer und Kroschel (2009).

In der digitalen Signalverarbeitung wurden vielfältige Arten von Filtern entwickelt, die unterschiedliche Eigenschaften besitzen. Man unterscheidet beispielsweise die beiden Grundstrukturen *rekursiver* und *nicht-rekursiver* digitaler Filter sowie die Grundformen *Hochpass*, *Tiefpass*, *Bandpass* und *Bandsperre*. Digitale Filter sind als Übertragungsfunktion eines Systems anzusehen und beispielsweise in der Form von Gleichung (2.66) darstellbar.

In Abbildung 2.3 werden am Beispiel seines rekursiven Tiefpass-Filters Durchlass- Übergangs- und Sperrbereich beschrieben. Im Hinblick auf den Entwurf (auch Design) des Filters ist zu spezifizieren wie das Eingangssignal in welchen Bereichen erhalten bleiben soll. Ein möglicher Satz an Filterentwurfsparametern wird in Abbildung 2.3 erläutert. Die Parameter sind anwendungsbezogen zu wählen. Für geeignete Filterentwurfsverfahren wird auf die eingangs genannten Quellen verwiesen.

Rekursive Filter werden auch als IIR (Infinite-Impulse-Response) Filter bezeichnet. Wie der englische Name bereits andeutet, weisen diese eine unbegrenzte Impulsantwort auf. Durchläuft eines der Eingangs von Abschnitt 2.2.2.1 genannten elementaren Signale (z.B. die Dirac-Funktion) das System eines IIR-Filters, so wird das gesamte Ausgangssignal durch die Filterung verändert; der Filtereinfluss ist also unendlich weit. Dieser Einfluss sinkt - je nach Filter - mit steigendem Abstand von der Stelle des Dirac-Impulses auf ein geringes Niveau, ist aber dennoch in der gesamten Zeitreihe vorhanden.

IIR Filter haben die Eigenschaft, bereits bei niedriger Filterordnung einen starken Signalabfall nahe der Grenzfrequenz (auch cut-off oder roll-off Frequenz) hervorzurufen. Die Grenzfrequenz liegt - je nach Filter - an den Rändern oder innerhalb des Übergangsbereichs. Am Beispiel eines Butterworth-Filters, gibt die Grenzfrequenz diejenige Frequenz an, bei der die Amplitudenantwort des Filters bei $\sqrt{1/2}$ liegt. IIR Filter weisen außerdem eine nicht-lineare Phase auf.

Demgegenüber haben nicht-rekursive Filter, auch FIR (Finite-Impulse-Response) Filter genannt, einen endlich langen Einfluss auf das Ausgangssignal. Um mit FIR Filtern einen steilen Signalabfall zu erreichen, ist eine (sehr) hohe Filterordnung notwendig. Die Ordnung des Filters entspricht dessen Einflussbereich. FIR Filter können mit linearer Phase realisiert werden. Eine Filter-bedingte lineare Signalverschiebung lässt sich einfach durch einen entsprechenden Signalversatz korrigieren.

Für weitere Details die beiden Filtergruppen IIR und FIR betreffend, wird auf (Oppenheim et al., 2004, Kap. 6) verwiesen.

Um den Einfluss eines Filters mit nicht-linearer Phase auf das Ausgangssignal zu korrigieren, kann die **Vorwärts-Rückwärts-Filterung** angewendet werden. Das Eingangssignal wird dabei zuerst 'normal' in Richtung fortschreitender Zeit - vorwärts - gefiltert, das erste Ausgangssignal anschließend 'umgedreht', so dass das (zeitlich) letzte Element das erste wird, das vorletzte das zweite u.s.w. und dann die Filterung erneut durchgeführt. In z-Notation beschreibt $H(z)$ die Übertragungsfunktion für den vorwärts-Fall und $H(z^{-1})$ die Übertragungsfunktion für den Rückwärtsfall. Die Vorwärts-Rückwärts-Filterung lässt sich damit darstellen zu

$$Y(z) = H(z^{-1}) * [H(z) * X(z)] \,. \tag{2.67}$$

Das Ausgangssignal $Y(z)$ der 'doppelten Faltung' weist einen linearen Phasengang auf. Durch die Vorwärts-Rückwärts-Filterung verdoppelt sich die Filterordnung. In Matlab ist diese in der Funktion `filtfilt` implementiert.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass es keine idealen Filter gibt. So ist es beispielsweise nicht möglich, einen Tiefpassfilter zu realisieren, der keinen Einfluss auf die Signalanteile im Durchlassbereich hat, keinen Übergangsbereich aufweist und gar kein Signal im Sperrbereich 'passieren' lässt. In der praktischen Anwendung ist daher derjenige Filter zu wählen, dessen Nachteile keinen entscheidenden Einfluss auf das Ausgangssignal bzw. die weitere Analyse haben.

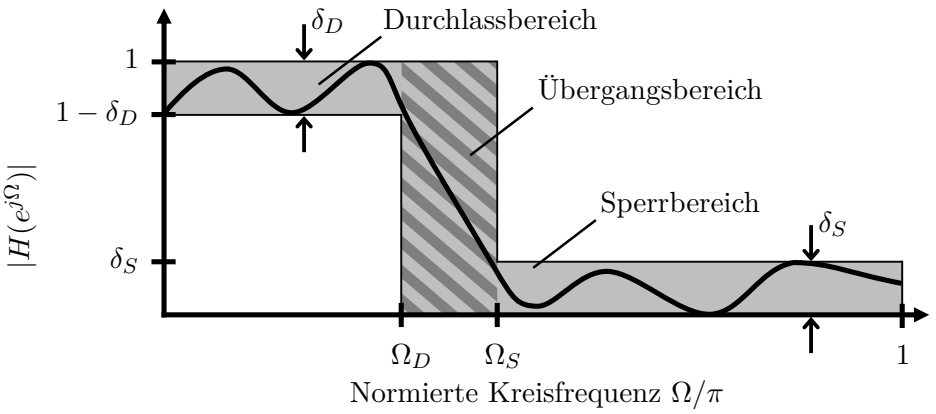


Abbildung 2.3: Amplitudengang $|H(e^{j\Omega})|$ (Betrag der Übertragungsfunktion) eines IIR Tiefpass-Filters und Erklärung von Durchlass-, Übergangs- und Sperrbereich. Parameter für den Filterentwurf: normierte Durchlasskreisfrequenz Ω_D, normierte Sperrkreisfrequenz Ω_S, Durchlasstoleranz δ_D und Sperrtoleranz δ_S (in Anlehnung an Werner, 2012, Bild 12-2).

2.2.4 Spektralschätzung

In dieser Arbeit werden vor allem Zufallssignale (Rauschen) in Form der Fehler der Gravitationsgradienten analysiert. Für die Darstellung im Frequenzbereich sollte daher das Signal*dichte*spektrum gewählt werden (Meyer, 2014). Da das Spektrum dieser Zufallssignale nicht direkt gemessen werden kann, spricht man auch von einer Schätzung des Spektrums.

Um ein Signal in den Frequenzbereich zu transformieren bzw. dessen Spektrum zu schätzen, wurden verschiedene Methoden entwickelt, von denen einige in Kammeyer und Kroschel (2009, Kap. 9-11) vorgestellt werden.

Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt die Spektralschätzung periodogrammbasiert nach der Methode von Welch (1967). Diese wird auch als WOSA-Methode (*Windowed Overlapped Segmented Average*) bezeichnet und setzt einen stationären Zufallsprozess voraus. Dabei wird die zu transformierende Zeitreihe $x(k)$ mit $k = 0, ..., N-1$ in S gleichlange Segmente der Länge L eingeteilt, so dass die Segmente einander um meist 50 % überlappen. Jedes Segment $X_s(j) = x(k)$ mit $j = 0, ..., L-1$ wird um seinen Mittelwert reduziert und mit einer Fensterfunktion $W(j)$ multipliziert, um dessen Endlichkeit zu berücksichtigen und Leakage-Effekten vorzubeugen. Für die Beschreibung geeignete Fensterfunktionen und ihre Einflüsse auf die Spektralschätzung wird Heinzel et al. (2002) empfohlen. Die gefensterten Segmente werden jeweils mittels der Diskreten Fourier Transformation (DFT), die sich nach Welch (1967) angeben lässt zu

$$A_s(n) = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{L-1} X_s(j) W(j) e^{-2sijn/L}, \tag{2.68}$$

in den Frequenzbereich überführt. Das Periodogramm $I_s(f_n)$ ergibt sich zu

$$I_s(f_n) = \frac{L}{U} \left| A_s(n) \right|^2, \qquad s = 1, 2, ..., S \tag{2.69}$$

mit der Frequenz $f_n = n/L$ (mit $n = 0, ..., L/2$) und dem Faktor $U = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{L-1} W^2(j)$ zur Berücksichtigung der Signalunterdrückung durch die Filterfunktion. Die Spektralschätzung $\hat{P}(f_n)$ ergibt sich über die Mittlung der Periodogramme $I_s(f_n)$ der einzelnen Segmente:

$$\hat{P}(f_n) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} I_s(f_n). \tag{2.70}$$

Sie wird als Leistungsdichtespektrum [*Power Spectral Density*] (PSD) bezeichnet und lässt sich in Matlab unter Anwendung der Funktion `pwelch` bestimmen. In einer typischen doppelt-logarithmischen Darstellung wird allerdings i.d.R. das Amplitudendichtespektrum [*Amplitude Spectral Density*] (ASD) geplottet, das sich als Wurzeln des PSD nach

$$\text{ASD} = \sqrt{\text{PSD}} \tag{2.71}$$

ergibt. In sämtlichen Frequenzabbildungen in dieser Arbeit werden ASDs gezeigt. Einzelne Darstellungen enthalten auch das sogenannte Logarithmisches Amplitudendichtespektrum [*Logarithmic Amplitude Spectral Density*] (LASD). Dieses ist das Ergebnis eines, auf der WOSA-Methode beruhenden ASD-Algorithmus, der von Tröbs und Heinzel (2006) vorgestellt wurde. Die Motivation für eine Modifikation der WOSA-Methode war deren Eigenschaft, Signaldichten zu gleichabständigen Frequenzen und unter gleicher Frequenzauflösung für jede Fourier-Frequenz zu bestimmen. Bei der doppelt-logarithmischen Darstellung führt dies - aufgrund der sehr hohen Frequenzauflösung im oberen Frequenzbereich - oftmals zu 'stark verrauschten' Spektraldichten.

Der **LASD**-Algorithmus (Tröbs und Heinzel, 2006) beinhaltet eine frequenzabhängig Wahl der Auflösungsbandbreite, wobei die Frequenzauflösung jeder Fourier-Frequenz f_{fourier} individuell angepasst wird. Die Wahl der Frequenzen f_{fourier} wird auf die doppelt-logarithmische Darstellung optimiert. Durch die Anpassung der Frequenzauflösung gelingt es, das Rauschen der Spektraldichten zu senken und den Signalgehalt des Signals präzise (und unverrauscht) darzustellen.

Bestimmung der Leistung eines Signals im Frequenzbereich

Die PSD spiegelt allgemein die Verteilung der Leistung des Signals im Frequenzbereich wider. Ist man an der Gesamtleistung eines Signals oder dessen Leistung in einem ausgewählten Frequenzbereich interessiert, gelingt ihre Bestimmung durch Integration der Fläche unterhalb der PSD. Auf Basis des Wiener-Chintschin-Theorems (auch Wiener-Khintchin-Gleichung) lässt sich ableiten, dass die Fläche dabei proportional zur mittlere Leistung des betrachteten Frequenzbandes ist (Werner, 2012). Diese entspricht der Varianz des Signals.

Allgemein lässt sich der Flächeninhalt unterhalb einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ durch Integration gemäß Gleichung (2.72)(links) bestimmen. Steht in der Praxis keine analytische Beschreibung der Funktion zur Verfügung, eignet sich beispielsweise die Trapezformel (auch Trapezregel oder Trapezmethode), mit deren Hilfe die Fläche unterhalb der Funktion mit Trapezen angenähert wird. Die Trapezformel ergibt sich in allgemeiner Form für eine Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ zu

$$\int_b^a f(x)dx = \sum_{n=1}^{N}(x_{n+1} - x_n)\frac{f(x_n) + f(x_{n+1})}{2}. \tag{2.72}$$

Die Gleichsetzung der linken und rechten Seite ist für den praktischen Fall zu betrachten, bei dem der 'Funktionsverlauf' ausschließlich durch diskrete Werte beschrieben wird. Allgemein gilt die Gleichsetzung nur im Grenzfall der gegen unendlich strebenden Anzahl an Intervallen $N \to \infty$, für den die Varianz des Signals gegen ihren wahren Wert strebt.

Sind in der Praxis wenige Stützstellen der PSD (im Frequenzbereich) gegeben, kann außerdem eine Interpolation der PSD-Werte sinnvoll sein. Dies trifft zum Beispiel für den Fall der Spur-Requirements (gradiometer performance requirements) zu, der nur durch vier Stützstellen beschrieben wird.

2.3 Drehmatrizen, Eulerwinkel und Quaternionen

Die Beschreibung von Lage und Orientierung von Objekten im Raum ist die Grundlage vieler Ingenieurswissenschaften. Im Bereich der Computer Vision müssen Elemente komplexer graphischer Darstellungen beschrieben und immerfort an Interaktionen und Perspektivenwechsel angepasst werden. Roboter haben bereits in einfachsten Ausführungen mehrere Gelenkarme, deren Lage und Orientierung sehr präzise bekannt sein muss, um Arbeiten an der richtigen Stelle zu verrichten. In Erde-bezogenen Wissenschaften kommen oftmals Instrumente zum Einsatz, deren Orientierung von essentieller Bedeutung ist. Dies gilt auch für die Orientierung von Satelliten bzw. dessen Instrumenten im Bezug zur Erde oder anderen Körpern. In den beispielhaft genannten, sowie vielen weiteren Fällen ist die Beschreibung der Orientierung von Objekten im Raum notwendig.

Zur Parametrisierung einer Orientierung wurden verschiedene Darstellungsformen entwickelt. Nach Diebel (2006) sind die Gebräuchlichsten Drehmatrizen, Eulerwinkel und Quaternionen. Alle drei werden im Folgenden kurz beschrieben und deren Eigenschaften diskutiert.

Drehmatrix

Eine Drehmatrix oder Rotationsmatrix ist in der Mathematik eine Matrix, die eine Drehung im euklidischen Raum beschreibt. Im dreidimensionalen Raum sind Drehmatrizen $\boldsymbol{R} = (r_{ij})$ von der Dimension 3×3 (drei Zeilen i, drei Spalten j) und bestehen somit aus neun Elementen.

Sie bilden einen Vektor oder eine Matrix linear vom $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ab:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'_B &= \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_B = \boldsymbol{R}_{B\leftarrow A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_A = \boldsymbol{R}_{B\leftarrow A} \cdot \boldsymbol{x}_A \\ \boldsymbol{X}'_B &= \begin{pmatrix} xx' & xy' & xz' \\ yx' & yy' & yz' \\ zx' & zy' & zz' \end{pmatrix}_B = \boldsymbol{R}_{B\leftarrow A} \cdot \begin{pmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{pmatrix}_A \cdot \boldsymbol{R}'_{B\leftarrow A} = \boldsymbol{R}_{B\leftarrow A} \cdot \boldsymbol{X}_A \cdot \boldsymbol{R}'_{B\leftarrow A} \end{aligned} \tag{2.73}$$

Durch Multiplikation der Drehmatrix mit einem Vektor $\boldsymbol{x}$ bzw. der 'doppelten' Multiplikation der Drehmatrix mit einer Matrix $\boldsymbol{X}$ (Tensor 2. Stufe) werden Vektor bzw. Matrix von System A in das System B überführt. Um eine lineare und unverzerrte Abbildung zwischen zwei Systemen sicherzustellen, müssen einige **Eigenschaften von Drehmatrizen** erfüllt sein (Merziger und Wirth, 2002). $\boldsymbol{R}$ muss eine orthogonale Matrix sein, wobei das Produkt aus $\boldsymbol{R}$ und deren Transponierten $\boldsymbol{R}^T$ die Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}$ ergibt:

$$\boldsymbol{R}^T \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} \qquad \text{sowie} \qquad \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{I}. \tag{2.74}$$

Die Spalten r_i (sowie die Zeilen r_j) von $\boldsymbol{R}$ sind orthonormal, d.h. orthogonal und normiert (Merziger und Wirth, 2002). Gleichermaßen gilt für das Verhältnis von Transponierten $\boldsymbol{R}^T$ und Inversen $\boldsymbol{R}^{-1}$

$$\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}^{-1} \tag{2.75}$$

sowie für die Determinante

$$\det \boldsymbol{R} = \pm 1. \tag{2.76}$$

Orthogonale Matrizen $\boldsymbol{R}$ mit der Determinanten $\det \boldsymbol{R} = +1$ heißen Drehmatrizen (Merziger und Wirth, 2002). In der Praxis gibt die Determinante Aufschluss über die Orthogonalität der Drehmatrix und damit direkt verbunden über die Linearität der Abbildung. Wie in Abschnitten 3.4.2 sowie 5.5 gezeigt wird, ist bei der GOCE-Datenverarbeitung die Kombination unterschiedlicher Drehmatrizen notwendig. Diese gelingt allgemein durch Multiplikation beispielsweise dreier Drehmatrizen $\boldsymbol{R}_{B\leftarrow A}, \boldsymbol{R}_{C\leftarrow B}, \boldsymbol{R}_{D\leftarrow C}$ nach

$$\boldsymbol{R}_{D\leftarrow A} = \boldsymbol{R}_{D\leftarrow C} \cdot \boldsymbol{R}_{C\leftarrow B} \cdot \boldsymbol{R}_{B\leftarrow A}, \tag{2.77}$$

und resultiert in einer Drehmatrix $\boldsymbol{R}_{D\leftarrow A}$, deren Determinante ebenfalls $\det \boldsymbol{R}_{D\leftarrow A} = +1$ ist und die eine direkte Überführung zwischen Systemen A und D erlaubt. Um sicherzustellen, dass auch kleinere Rechenfehler - induziert durch Rundungsfehler und begrenzte Genauigkeiten der Computer-basierten Berechnungen - nicht zur Verzerrung der Abbildung führen, eignet sich als geeignetes Prüfkriterium die Determinante. Auch wenn eine Prüfung hier grundsätzlich empfohlen wird, zeigen praktische Erfahrungen im Umgang mit Drehmatrizen im Zusammenhang mit der GOCE-Mission, dass alle kombinierten Drehmatrizen die geforderten Eigenschaften erfüllen und damit lineare Abbildungen beschreiben.

Eulerwinkel

Orientierungen werden häufig in Form von Winkel-Sätzen beschrieben. Basierend auf drei aufeinander folgenden Drehungen lässt sich jede Orientierung im Raum durchführen. Die Drehungen werden durch drei unabhängige Winkel - die sogenannten Eulerwinkel (auch Eulersche Winkel) - beschrieben, die jeweils Drehungen um Koordinatenachsen charakterisieren. Dabei ist entscheidend, in welcher Abfolge die drei Drehungen um welche Achsen ausgeführt werden. Jeder Satz an Eulerwinkeln passt nur zu genau einer Abfolge von Drehungen. Um die Orientierung von Vektoren oder Matrizen gemäß der Eulerwinkel zu verändern, werden diese meist in Drehmatrizen umgesetzt und die Drehung gemäß Gleichung (2.73) vollzogen. Je nach Abfolge und Achsen ergeben sich bis zu 12 verschiedene Formen der Parametrisierung (Diebel, 2006).

Beispielhaft wird hier kurz die Abfolge $(3, 1, 3)$ beschrieben. Äquivalent spricht man auch von der Abfolge (z'', x', z), wobei die Drehungen entsprechen der Multiplikationsreihenfolge

von Matrizen von rechts nach links zu lesen sind: Die erste Drehung erfolgt um die z-Achse, gefolgt von einer Drehung um die bereits gedrehte x'-Achse und einer abschließenden Drehung um die gedrehte z''-Achse. Mit Hilfe trigonometrischer Funktionen ergibt sich die Drehmatrix $\boldsymbol{R}_{313}(\phi, \theta, \psi)$ aus den drei Drehmatrizen $\boldsymbol{R}_3(\phi), \boldsymbol{R}_1(\theta)$ und $\boldsymbol{R}_3(\psi)$ zu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{313}(\phi,\theta,\psi) &= \boldsymbol{R}_3(\phi)\cdot\boldsymbol{R}_1(\theta)\cdot\boldsymbol{R}_3(\psi) = \boldsymbol{R}_{z''}(\phi)\cdot\boldsymbol{R}_{x'}(\theta)\cdot\boldsymbol{R}_z(\psi)\\ &= \begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos\phi\cos\psi-\sin\phi\cos\theta\sin\psi & \cos\phi\sin\psi+\sin\phi\cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta\\ -\sin\phi\cos\psi-\cos\phi\cos\theta\sin\psi & -\sin\phi\sin\psi+\cos\phi\cos\theta\cos\psi & \cos\phi\sin\theta\\ \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi & \cos\theta\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{2.78}$$

Vorteile der Parametrisierung der Orientierung mittels Eulerwinkeln liegen in der Anschaulichkeit der Drehungen und der einfachen mathematischen Beschreibung mit Hilfe von trigonometrischen Funktionen. Der entscheidende **Nachteil der Eulerwinkel** wird als kardanische Blockade bzw. im englischen Sprachgebrauch als *gimble lock* bezeichnet (Diebel, 2006). Darunter versteht man das Auftreten von Singularitäten in den Darstellungen der Eulerwinkeln: Diese treten auf, wenn ein und dieselbe Orientierung durch zwei unterschiedliche Sätze an Eulerwinkeln beschreiben werden kann, oder wenn beispielsweise der Winkel der zweiten Drehung einen kritischen Wert erreicht, so dass Winkel der ersten und dritten Drehungen kaum zu unterscheiden sind. Am Beispiel der Abfolge oben $\boldsymbol{R}_{313}(\phi, \theta, \psi)$ würde eine kardanische Blockade mit $\sin\theta = 0$ auftreten.

Um kardanische Blockaden und damit mehrdeutige Sätze von Eulerwinkeln zu umgehen, wird empfohlen, Orientierungen mit Hilfe von Quaternionen zu beschreiben. Diese wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

Quaternionen

Quaternionen wurden von William Rowan Hamilton (1805-1865) im Jahre 1843 entwickelt und beschreiben einen eigenen Zahlenbereich - die Hamilton-Zahlen $\mathbb{H}$ -, der ähnlich den komplexen Zahlen eine Erweiterung der reelen Zahlen darstellt. Ihnen muss mit speziellen Rechenregeln begegnet werden, da beispielsweise die Multiplikation nicht kommutativ ist. Hilfreiche Beschreibungen der Quaternionen sind in Beutelspacher (2014), Gruber et al. (2014c) oder Diebel (2006) zu finden, die auch die Basis für die folgenden Erläuterungen bilden.

Ein Quaternion $\boldsymbol{q}$ ist definiert als

$$\boldsymbol{q} = a + ib + jc + kd. \tag{2.79}$$

mit den drei imaginären Einheiten i, j, k, für die gilt

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1. \tag{2.80}$$

Das Quaternion besteht aus den Elementen $\boldsymbol{q} = [a\ b\ c\ d]^T$, die die Orientierungsinformation tragen. Dabei wird a als Realteil oder Skalar bezeichnet und $[b, c, d]$ bzw. $ib + jc + kd$ als Imaginärteil bzw. Vektorteil. Im Falle der GOCE-Realdaten entspricht das letzte Element des Quaternions dem Realteil, so dass gilt

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix}a & b & c & d\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}q_4 & q_1 & q_2 & q_3\end{bmatrix}^T_{\mathrm{GOCE}}. \tag{2.81}$$

Zur Beschreibung jeder beliebigen Drehung ist nur ein Winkel α und ein geeigneter Einheitsvektor $\boldsymbol{n}$ notwendig, um den die Drehung erfolgt. Eine vergleichbare Vorstellung der Drehung beschreiben die Quaternionen. Mit den Elementen des Einheitsvektors $\boldsymbol{n} = [n_1, n_2, n_3]$ lassen

sich die Elemente des Quaternions $\boldsymbol{q}$ darstellen als

$$\boldsymbol{q}(\alpha, \boldsymbol{n}) = \begin{bmatrix} \cos\alpha/2 \\ n_1 \cdot \sin\alpha/2 \\ n_2 \cdot \sin\alpha/2 \\ n_3 \cdot \sin\alpha/2. \end{bmatrix}. \tag{2.82}$$

Die Bestimmung der Rotationsmatrix $\boldsymbol{R}_q$ zur Drehung gemäß Gleichung (2.73) erfolgt auf Basis eines Quaternions $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ nach allgemeiner Vorschrift gemäß

$$\boldsymbol{R}_q = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix}. \tag{2.83}$$

Dabei ist entscheidend, dass es sich - wie bereits angemerkt - im Falle der GOCE-Realdaten bei q_4 um den Realteil und bei q_1, q_2, q_3 um die drei Imaginärteile des Quaternions handelt. Diese Reihenfolge der Quaternionen-Elemente gilt sowohl für die $\boldsymbol{q}_{\mathrm{IAQ}}$ (Inertial Attitude Quaternions) als auch die $\boldsymbol{q}_{\mathrm{EOQ}}$ (Earth Orientation Quaternions), siehe auch Tabelle 3.1 (S. 58).

Neben der Nutzung von Drehmatrizen besteht mittels der Quaternionen auch eine direkte Möglichkeit, die Orientierung eines Vektors zu verändern. Dazu wird auf Gruber et al. (2014c, Abs. 4.4.2.1) verwiesen.

Bei der Analyse der GOCE-Gradienten müssen Orientierungsinformationen aus verschiedenen Quellen miteinander kombiniert werden (siehe Abs. 3.4.2 sowie Tab. 3.1, S. 58). Einige davon sind direkt als Elemente von Drehmatrizen definiert, so dass die weitere Kombination auf der Ebene von Drehmatrizen gemäß Gleichung (2.77) vollzogen wird.

Zusammenfassend werden zur Beschreibung von Orientierungen Quaternionen empfohlen. Verarbeitungsschritte wie Interpolationen sollten auf Ebene von Quaternionen erfolgen. Aus praktischen Gründen wird - wie beschrieben - die Kombination der verschiedenen Orientierungen Drehmatrix-basiert vollzogen. Zur Umformung zwischen Eulerwinkeln, Quaternionen und Drehmatrizen wird auf Diebel (2006) verwiesen, der alle Zusammenhänge für die praktische Anwendung beschreibt.

2.4 Methodische Grundlagen der Kreuzungspunktanalyse

Das Verfahren der Kreuzungspunktanalyse wird angewandt, um Beobachtungen entlang sich kreuzender Profile zu verbessern und eine Fehlerabschätzung der Beobachtungen durchzuführen (Bosch, 2007). Typische Anwendungsfelder sind die Schiffs- und Fluggravimetrie sowie die Satellitenaltimetrie. Sie haben gemein, dass deren Plattformen und damit die beteiligten Instrumente entlang ihrer Kurse zu unterschiedlichen Zeitpunkten identische Punkte auf der Erdoberfläche überqueren. Dabei ist zu beachten, dass Schnittpunkte i.d.R. nicht im Dreidimensionalen auftreten. Schnittpunkte ergeben sich jeweils in der zweidimensionalen Projektion der beteiligten (beiden) Kurse auf einer geeigneten Referenzfläche. Da die genannten Verfahren erdgebundene Parameter beobachten, werden Schnittpunkte zumeist auf Ebene geodätischer (Ellipsoid) oder geozentrischer (Kugel) Flächenkoordinaten identifiziert. Die Messgrößen beider Kurse werden im Kreuzungspunkt miteinander verglichen und die Residuen zur Ausgleichung der Beobachtungen sowie zur Qualitätsanalyse eingesetzt.

Das Verfahren der Kreuzungspunktanalyse zur Validierung satellitengradiometrischer Messungen wurde von Jarecki (2010) genauer untersucht und im Hinblick auf das Gradiometriekonzept der GOCE-Mission grundlegend aufgearbeitet. Die Untersuchungen von Jarecki (2010) konnten zum Abschluss der Arbeit ausschließlich auf Simulationsdatensätzen beruhen. Der Einsatz der Kreuzungspunktanalyse zur Validierung realer GOCE-Gradiometriebeobachtungen hat gezeigt, dass eine in Teilen grundlegende Überarbeitung der Methode (Änderung der Analyse) notwendig und sinnvoll ist. Diese Änderungen stellen einen Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit dar und werden in Kapitel 5 detailliert erläutert.

Viele der in Jarecki (2010) entwickelten Bausteine der Kreuzungspunktanalyse stellen Grundlagen für die vorliegende Arbeit dar und werden im Folgenden aufgegriffen und erläutert. Abschnitt 2.4.1 beschreibt die Bestimmung von Spur-Kreuzungspunkten auf Basis von Positionsinformationen der GOCE-Mission. Da Beobachtungen i.d.R. nicht exakt im Kreuzungspunkt vorliegen, müssen diese entlang der Bahn interpoliert werden (Abs. 2.4.2).

Die im Kreuzungspunkt interpolierten Beobachtungen weisen Höhen und Orientierungsunterschiede auf, die bei der Bestimmung der Kreuzungspunktresiduen berücksichtigt werden müssen. Da diese von sehr entscheidender Bedeutung für die Analyse sind und hier eine von Jarecki (2010) abweichende Behandlung der Unterschiede realisiert wurde, wird für weitere Details auf die Ausführungen in Kapitel 5 verwiesen.

2.4.1 Bestimmung von Kreuzungspunkten

Die Bestimmung von Kreuzungspunkten umfasst sowohl die Kreuzungspunktsuche, also die Klärung welche Bahnabschnitte einander kreuzen und zwischen welchen Stützpunkten der Datenzeitreihe die Kreuzung erfolgt, als auch die (lineare) Interpolation genäherter Kreuzungspunktpositionen.

Wie eingangs erwähnt, ergeben sich Kreuzungspunkte zwischen Satellitenbahnen i.d.R. nicht im Dreidimensionalen, sondern treten in der Projektion der Satellitenbahnen auf eine geeignete Referenzfläche auf. Man spricht daher von der Kreuzung von ***Bahnspuren***, wodurch die Aufgabe der Kreuzungspunktbestimmung zu einem zweidimensionalen Problem im $\mathbb{R}^2$ wird. Im Hinblick auf die Bestimmung von Kreuzungspunkten ist oftmals eine Aufteilung der Satellitenumläufe in *Halbumläufe*, sogenannte ***Bahnbögen***, sinnvoll, die mit minimalen (maximalen) Breiten beginnen und mit maximalen (minimalen) Breiten enden. Der Bahnbogen mit zunehmender Breite wird als *aufsteigend* (*engl. ascending*), der mit abnehmender Breite als *absteigend* (*engl. descending*) bezeichnet. Diese Benennung wurde entsprechend der Festlegungen in Bosch (1998) gewählt.

Jarecki (2010) wählt als Referenzfläche zur Validierung der (schwerefeldbezogenen) GOCE-Gradienten die λ, φ - Ebene geozentrischer Kugelkoordinaten (λ, φ, r). Diese ergeben sich aus erdfesten Satellitenpositionen (x, y, z) nach

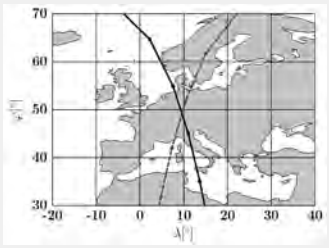
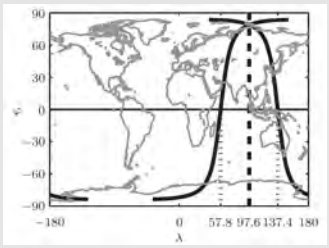
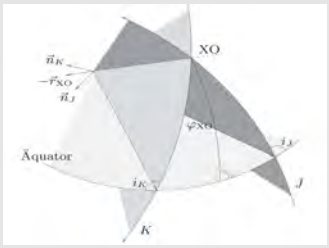
$$\begin{aligned} \lambda &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \\ r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Für die Kreuzungspunktsuche können unterschiedliche Methoden herangezogen werden. Jedoch sind - je nach Mission - nicht alle Methoden gleichermaßen gut für die Kreuzungspunktsuche geeignet. Entscheidend ist, ob missionsinterne Kreuzungen bestimmt werden sollen, also solche, die sich zwischen Satellitenbahnen genau einer Mission ergeben, oder ob sogenannte Multi-Missions-Kreuzungspunkte bestimmt werden sollen, also solche, die zwischen Bahnspuren verschiedener Missionen entstehen. Speziell wenn die Missionen unterschiedliche Bahninklinationen aufweisen, können entscheidende Symmetrieeigenschaften zwischen Bahnbögen und Kreuzungspunktpositionen u.U. ihre Gültigkeit verlieren, und einige der Ansätze sind nur noch bedingt geeignet. Für die Validierung der GOCE-Gravitationsgradienten kommen ausschließlich missionsinterne Kreuzungen in Frage, da während der Mission keine Satellitenmissionen mit vergleichbaren Beobachtungen operationell waren.

Jarecki (2010) diskutiert drei Methoden der Kreuzungspunktsuche, die für die GOCE-Mission in Frage kommen. Die Kernpunkte der Methoden sind in Abbildung 2.4 dargestellt und werden im Folgenden kurz erläutert.

Input

GOCE-Daten: erdfeste Positionen und Geschwindigkeiten

Kinematisches Verfahren [Jarecki (2010), Abs. 3.2.2.3]	**Tabellierungsverfahren** [Jarecki (2010), Abs. 3.2.2.1]	**Dynamisches Verfahren** [Jarecki (2010), Abs. 3.2.2.2]
		
Schematische Darstellung einiger Geradenstücke entlang zweier Bahnbögen; Prüfung auf Schnitt aller Geradenkombinationen zwischen jeweilgen Stützstellen	Das Mittel der Längen der Äquatorkreuzungen von auf- und absteigendem Bahnbogen ergibt die Länge des Kreuzungspunktes. Quelle: Jarecki (2010)	Der Kreuzungspunkt (XO) liegt auf der Schnittgeraden der momentanen Bahnebene J und K. Quelle: Jarecki (2010)
◦ Bestimmung von Geradenstücken zwischen jeweils benachbarten Stützstellen $[x_i, x_{i+1}]$ der Zeitreihe: $n-1$ Geraden aus n Stützstellen ◦ Parametrisierung der Geradenstücke in Zwei-Punkte-Form	**Bestimmung grober Näherungswerte des Kreuzungspunktes** ◦ Bestimmung einzelner Bahnbögen ◦ Lineare Interpolation der Äquatorkreuzungen jedes Bahnbogens über zwei äquatornahe Punkte ◦ Trennung *asc* und *desc* Bahnbögen ◦ Genäherte Kreuzungspunktlängen aus Mittelung der Äquatorkreuzungslängen beider Bahnbögen	**Bestimmung grober Näherungswerte des Kreuzungspunktes** ◦ Bestimmung einzelner Bahnbögen ◦ Bestimmung des äquatornächsten Punktes innerhalb jedes Bahnbogens ◦ Trennung *asc* und *desc* Bahnbögen ◦ Genäherte Kreuzungspunktpositionen aus Schnitt der Bahnebenen der beteiligten Bahnbögen
◦ Schnittprüfung aller $(n-1)(n-2)$ Geradenkombinationen anhand der Geradenparameter u und v (gemäß Gl. 2.87) ◦ Registrierung der bestätigten Kombinationen	**Benachbarte Punkte & lineare Interpolation** ◦ Bestimmung der Stützstellen x_i^{asc} und x_{i+1}^{asc} sowie x_j^{desc} und x_{j+1}^{desc} in der Zeitreihe, die die genäherte Kreuzungspunktlänge λ_j^* direkt umgeben, so dass gilt $\lambda_i \leq \lambda_{XO}^* \leq \lambda_{i+1} \ \wedge \ \lambda_j \leq \lambda_{XO}^* \leq \lambda_{j+1}$ ◦ Geradenschnitt gemäß dem "Kinematischen Verfahren" inkl. Prüfung, ob Kreuzung wirklich zwischen den derzeitigen Stützstellen erfolgt oder ggf. in ein Nachbarintervall fällt	**Benachbarte Punkte & lineare Interpolation** ◦ Bestimmung der Stützstellen x_i^{asc} und x_{i+1}^{asc} sowie x_j^{desc} und x_{j+1}^{desc} in der Zeitreihe, die die genäherte Kreuzungspunktlänge λ_j^* direkt umgeben, so dass gilt $\lambda_i \leq \lambda_{XO}^* \leq \lambda_{i+1} \ \wedge \ \lambda_j \leq \lambda_{XO}^* \leq \lambda_{j+1}$ ◦ Geradenschnitt gemäß dem "Kinematischen Verfahren" inkl. Prüfung, ob Kreuzung wirklich zwischen den derzeitigen Stützstellen erfolgt oder ggf. in ein Nachbarintervall fällt

Ergebnisse
- Zeitreihenindizes direkt benachbarter Punkte
- linear interpolierte Koordinaten des Kreuzungspunktes
- Geradenparameter zur linearen Interpolation weiterer Beobachtungsgrößen im Kreuzungspunkt

Abbildung 2.4: Methoden der Bestimmung (linear interpolierter) Kreuzungspunkte nach Jarecki (2010).

Geometrische Kreuzungspunktsuche: "Kinematisches Verfahren" (Abb. 2.4, links; Jarecki (2010), Abs. 3.2.2.3)

Diese Methode basiert auf einem zweistufigen Verfahren, bei dem im ersten Schritt Geraden(stücke) zwischen allen aufeinander direkt folgenden Stützpunkten $(\lambda, \varphi)_i$ und $(\lambda, \varphi)_{i+1}$ der Zeitreihe bestimmt werden. Dies entspricht einer stückweise linearen Approximation der Bahnspur. In einem zweiten Schritt werden alle Geradenstücke daraufhin untersucht, ob sie eine der anderen Geradenstücke schneiden.

Analytisch gelingt der Schnitt zweier Geraden durch Gleichsetzen beider Geradengleichungen. Da jede Gerade hier durch zwei Punkte repräsentiert wird, bietet sich als Darstellungsform beider Geraden die Zwei-Punkte-Form an. In allgemeiner Form ergibt sich diese nach Merziger und Wirth (2002) mit den beiden Punkten $\vec{r}_i$ und $\vec{r}_{i+1}$ zu

$$\vec{x} = \vec{r}_i + u \cdot (\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i). \tag{2.85}$$

Im Hinblick auf die Bestimmung von GOCE-Kreuzungspunkten handelt es sich bei den beiden Punkten $\vec{r}_i$ und $\vec{r}_{i+1}$ um Positionsvektoren $(\lambda, \varphi)_i$ und $(\lambda, \varphi)_{i+1}$ entlang einer Bahnspur, zwischen denen die Verbindungsgerade bestimmt wird. Unter Nutzung der Indizierung a für Punkte entlang aufsteigender (ascending) Bahnbögen und d für Punkte entlang absteigender (descending) Bahnbögen, ergibt sich nach Gleichsetzen beider Geradengleichungen

$$\begin{pmatrix} \lambda_{a,i} \\ \varphi_{a,i} \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{a,i+1} - \lambda_{a,i} \\ \varphi_{a,i+1} - \varphi_{a,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{d,i} \\ \varphi_{d,i} \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{d,i+1} - \lambda_{d,i} \\ \varphi_{d,i+1} - \varphi_{d,i} \end{pmatrix}. \tag{2.86}$$

Mit Hilfe der beiden Geradenparameter u und v gelingt die lineare Interpolation der Kreuzungspunktposition nach (2.85). Um den Rechenaufwand möglichst zu minimieren, wird Gleichung (2.86) analytisch gelöst zu

$$\begin{aligned} u &= \frac{(\lambda_{a,i} - \lambda_{d,i})(\varphi_{d,i+1} - \varphi_{d,i}) - (\varphi_{a,i} - \varphi_{d,i})(\lambda_{d,i+1} - \lambda_{d,i})}{(\varphi_{a,i+1} - \varphi_{a,i})(\lambda_{d,i+1} - \lambda_{d,i}) - (\lambda_{a,i+1} - \lambda_{a,i})(\varphi_{d,i+1} - \varphi_{d,i})} \\ v &= \frac{(\lambda_{d,i} - \lambda_{a,i})(\varphi_{a,i+1} - \varphi_{a,i}) - (\varphi_{d,i} - \varphi_{a,i})(\lambda_{a,i+1} - \lambda_{a,i})}{(\varphi_{d,i+1} - \varphi_{d,i})(\lambda_{a,i+1} - \lambda_{a,i}) - (\lambda_{d,i+1} - \lambda_{d,i})(\varphi_{a,i+1} - \varphi_{a,i})}. \end{aligned} \tag{2.87}$$

Die beiden Geradenparameter u und v liefern neben dem linearen Interpolationsparameter die sehr entscheidende Information, ob es sich bei den genutzten Stützpunkten um die direkt benachbarten Stützpunkte der Kreuzungspunktposition handelt. Liegen u und v im Intervall $[0, 1]$, so schneiden sich die Bahnbögen zwischen den verwendeten Stützpunkten. Andernfalls weisen u und v darauf hin, in welche Richtung die Suche zu iterieren ist: Sind $u \vee v > 1$, liegt der Schnittpunkt zwischen Stützpunkten weiter entlang aufsteigender Stützpunktindizes. Sind $u \vee v < 1$, ist der Schnitttest in einem Nachbarintervall mit kleineren Stützpunktindizes zu wiederholen. Da die Methode auf Schnitte zwischen allen möglichen Geradenkombinationen testet, wird hier lediglich geprüft, ob u und v im Intervall $[0, 1]$ liegen. Falls ja, wird ein Kreuzungspunkt registriert, bevor der Test der nächsten Geradenkombination erfolgt.

Das wichtigste Ergebnis dieser Methode sind die Stützpunkte, die den Kreuzungspunkt entlang beider beteiligter Bahnbögen direkt umgeben. Da die linear interpolierten Kreuzungspunktpositionen für die Gradientenvalidierung keine ausreichende Genauigkeit aufweisen, dienen die linear interpolierten Kreuzungspunktpositionen allenfalls als Näherungswerte für aufbauende Interpolationsverfahren, auf die in den Abschnitten 2.4.2 und 5.3 genauer eingegangen wird.

In der Praxis stellt sich diese Methode als robust, aber sehr rechenintensiv dar. Jarecki (2010) nutzt dieses Verfahren aufgrund seiner Robustheit als Referenzverfahren für den Vergleich der verschiedenen Methoden zur Kreuzungspunktbestimmung. Bei einer Datenrate von 1 Hz und einem 30-tägigen Datensatz umfasst die Zeitreihe $i = 2.292.000$ Stützpunkte. Nach der Bestimmung von $i-1$ Geradenstücken müssen $(i-1) \cdot (i-2) \approx i^2$ Geradenvergleiche bzw. Schnitttests durchgeführt werden. Auch wenn es Methoden gibt, um die Anzahl notwendiger

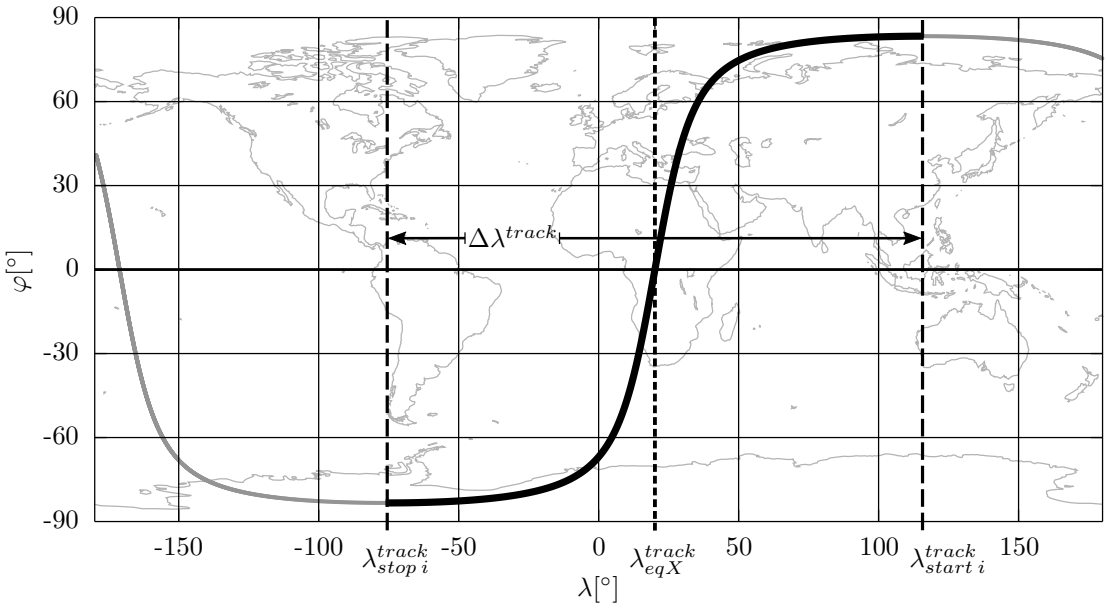


Abbildung 2.5: Bahnbogenparameter am Beispiel eines absteigenden Bahnbogens (*descending track*): Längenüberdeckung $\Delta\lambda^{track}$, Äquatorkreuzungslänge λ^{track}_{eqX} sowie die Längen, an denen der Bahnbogen beginnt $\lambda^{track}_{start\,i}$ und endet $\lambda^{track}_{stop\,i}$.

Vergleiche zu reduzieren (z.B. Geradenvergleich nur zwischen auf- und absteigenden Bahnabschnitten; Aufteilung der Beobachtungen in Breitenbänder), ist dennoch eine riesige Anzahl an Vergleichen notwendig. Die Methode kommt daher im operationellen Betrieb nicht zum Einsatz.

Die anderen beiden **Methoden der Kreuzungspunktsuche** basieren auf Symmetrieeigenschaften zwischen der Lage des Kreuzungspunktes und einigen Bahnbogenparametern. Dabei ist besonders entscheidend, zwischen welchen Abschnitten des GOCE-Orbits Spurkreuzungen entstehen können. Aufgrund der als konstant zu betrachtenden Bahninklination in einem LEO-Orbit (Low Earth Orbiter) können sich Spurkreuzungen nur zwischen aufsteigenden und absteigenden Bahnbögen ergeben. Kreuzungen zwischen zwei z.B. aufsteigenden Bögen können nur im Falle von Multi-Missions-Kreuzungen auftreten oder zwischen nahezu parallel verlaufenden Bahnbögen. In einem solchen Fall bilden die sich kreuzenden Bahnbögen einen 'schleifenden Schnitt' und sind in der Praxis nicht zur Validierung geeignet Bosch (1998). Weiter ist entscheidend, welchen Längenbereich $\Delta\lambda^{track}$ die Bahnspuren abdecken. Dieser ist abhängig von Erddrehung und Knotendrehung der Satellitenbahn. Im Falle von GOCE erstreckt sich jeder Bahnbogen über eine Länge von etwa $\Delta\lambda^{track} = 191,2°$. Da $\Delta\lambda^{track} > 180°$ entsteht sicher mindestens ein Kreuzungspunkt. Jarecki (2010) schließt auf genau einen Kreuzungspunkt. Bei genauerer Betrachtung können aber bis zu zwei Kreuzungspunkte entstehen, wie in Abschnitt 5.2 noch detailliert erläutert wird.

Die Kreuzungspunktsuche für die folgenden beiden Methoden gliedert sich in drei Bearbeitungsschritte (siehe auch Abbildung 2.4): (**1**) Anhand von Bahnbogenparametern wird eine grob genäherte Kreuzungspunktposition bzw. -länge ermittelt. (**2**) Es folgt die Bestimmung der Stützpunkte in der Datenzeitreihe, zwischen denen sich die Kreuzung beider Bahnbögen ergibt. (**3**) Der dritte Teil umfasst die Bestimmung einer linear interpolierten Kreuzungspunktposition.
Im Folgenden werden die unterschiedlichen Lösungsstrategien für die Bearbeitungsschritte für beide Methoden genauer erläutert.

Quasi-analytische Kreuzungspunktsuche mit Näherungswerten: "Tabellierungsverfahren" (Abb. 2.4, Mitte; Jarecki (2010), Abs. 3.2.2.1)

Bei dieser Methode müssen zuerst einige Bahnbogenparameter bestimmt werden. Anhand des Vorzeichens der z-Komponente des Geschwindigkeitsvektors werden die Beobachtungen in auf- und absteigende Bögen aufgeteilt. Technisch betrachtet, wird jeder Halbumlauf durch Speicherung der Indizes der Start- und Endstützpunkte tabelliert. Jarecki (2010) wählt die Indizierung des gesamten Bahnbogens mit aufsteigenden Nummern, wobei auf- und absteigende Bögen sequentiell jeweils mit geraden bzw. ungeraden Nummern versehen werden. Damit gelingt ein direkter Zugriff auf den gewünschten Bahnbogen über die Bahnbogennummer. Als weiterer Bogenparameter wird die Äquatorkreuzungslänge jedes Bogens λ_{eqX}^{track} bestimmt. Deren Berechnung kann durch lineare Interpolation zwischen den den Äquator umgebenden Stützpunkten der Datenzeitreihe erfolgen. Diese werden über den Vorzeichenwechsel entweder in der z-Komponente des erdfesten Positionsvektors oder in der geografischen Breite φ eindeutig identifiziert. Die Interpolation kann linear erfolgen, da die Bahnspuren aufgrund der hohen Bahninklination fast meridian-parallel verlaufen und damit eine lineare Approximation der Bahn in Äquatornähe den realen Bahnverlauf sehr gut beschreibt. Jarecki (2010) wählt den Weg, die Kreuzungszeit in linearer Abhängigkeit zur z-Komponente des Positionsvektors ($r_z = 0$ am Äquator) darzustellen. Anhand der Kreuzungszeit werden weitere interessierende Parameter interpoliert, u.a. die Länge der Äquatorkreuzung λ_{eqX}^{track}.

Kernpunkt dieser Methode ist die Bestimmung der genäherten Kreuzungspunktlänge $\lambda_{XO_{I,J}}^{*}$ unter Nutzung von Symmetrieeigenschaften der beteiligten Bahnbögen I und J. Die Äquatorkreuzungen der beteiligten beiden Bögen $\lambda_{eqX}^{I,asc}$ und $\lambda_{eqX}^{J,desc}$ verlaufen symmetrisch zur Länge des Kreuzungspunktes. Anders herum betrachtet, ergibt sich die Kreuzungspunktlänge $\lambda_{XO_{I,J}}^{*}$ durch Mittelung der Äquatorkreuzungslängen beider Bahnbögen nach

$$\lambda_{XO_{I,J}}^{*} = \frac{\lambda_{eqX}^{I,asc} + \lambda_{eqX}^{J,desc}}{2}. \tag{2.88}$$

Anhand dieser groben Längennäherung sind nun die Indizes der Stützpunkte der Datenzeitreihe zu identifizieren, die den minimalen Abstand zu $\lambda_{XO_{I,J}}^{*}$ aufweisen. Werden die Bahnbogenlängen jeweils um die genäherte Kreuzungspunktlänge reduziert, gelingt die Identifikation der gesuchten Stützpunkte durch Suche nach dem Punkt mit minimalem Abstand von Null. Da die beteiligten Bahnbögen bekannt sind, muss die Suche nur innerhalb des aktuellen auf- bzw. absteigenden Bahnbogens erfolgen und es ist ein eindeutiges Ergebnis (eindeutige Längenzuordnung) zu erwarten. Abschließend hat noch der Übergang des identifizierten Bahnbogenindizes auf die entsprechenden Indizes der Datenzeitreihe zu erfolgen. Das Ergebnis stellt also die Indizes der Stützpunkte in der Zeitreihe mit jeweils minimalem Abstand zur genäherten Kreuzungspunktlänge dar.

Wie eingangs diskutiert, ergibt sich der Schnittpunkt zweier Bahnbögen i.a.R. zwischen zwei Stützpunkten entlang der Bahnbögen. Bisher ist nur der Punkt mit geringstem Abstand zur grob genäherten Kreuzungspunktlänge identifiziert worden. Nun gilt es herauszufinden, 'in welcher Richtung' vom nächstgelegenen Punkt die Kreuzung stattfindet. Da es sich bei $\lambda_{XO_{I,J}}^{*}$ lediglich um eine grobe Längennäherung handelt, muss außerdem überprüft werden, ob der Schnitt der Bahnbögen wirklich zwischen dem $\lambda_{XO_{I,J}}^{*}$ nächsten Punkt der Zeitreihe und einem Nachbarpunkt erfolgt oder ob sich der Schnitt zwischen benachbarten Stützpunkten ereignet.

Unter Berücksichtigung der genannten Kriterien besteht in der Durchführung eines Geradenschnittes eine geeignetere Methode, die den Kreuzungspunkt wirklich umgebenden Punkte der Zeitreihe (direkte Nachbarn) zu identifizieren. Dazu wird jeweils für auf- und absteigenden Bahnbogen eine Geradengleichung aus dem $\lambda_{XO_{I,J}}^{*}$ nächsten Punkt sowie dessen Nachbarn in der Zeitreihe bestimmt. Die Schnittbestimmung erfolgt vollkommen äquivalent zu Gleichung (2.86). Anhand der Geradenparameter u und v (gemäß Gl. (2.87)) wird nun - im Gegensatz zum "Kinematischen Verfahren" - nicht nur untersucht, ob ein Schnitt zwischen den aktuell genutzten Stützpunkten vorliegt, sondern auch 'in welche Richtung' die Schnittuntersuchung ggf. weiter iteriert werden muss. Befinden sich beide Geradenparameter u und v

im Intervall $[0, 1]$ liegt der Schnittpunkt zwischen den jeweils zwei Stützpunkten entlang auf- bzw. absteigendem Bahnbögen und die gesuchten direkt benachbarten Punkte der Zeitreihe sind identifiziert.

In einem letzten Schritt können u bzw. v genutzt werden, um gemäß Gleichung (2.85) weitere Beobachtungen im Kreuzungspunkt linear zu interpolieren. Auf diesem Wege werden auch linear interpolierte Kreuzungspunktpositionen $(\lambda, \varphi)^{lin}_{XO}$ bestimmt.

Im Hinblick auf die Rechenkomplexität dieser Methode, ist sie im Vergleich zur vorangegangenen deutlich weniger aufwändig. Bei n aufsteigenden und m absteigenden Bahnbögen ergeben sich im Falle von GOCE in erster Näherung $n \cdot m$ Kreuzungen. Bei einer Umlaufzeit von etwa 90 min umläuft GOCE 16-mal täglich die Erde; innerhalb von 30 Tagen also 480-mal. Daraus ergeben sich $n = m = 480$ Bahnbögen, für die jeweils Start- und Endstützstellen bestimmt sowie eine Äquatorkreuzung linear interpoliert werden müssen. Der aufwändigste Teil der Berechnungen ist die Suche nach den Stützstellen im jeweiligen Bahnbogen, die die genäherte Kreuzungspunktlänge direkt umgeben. Bei einer Datenrate von 1 Hz und einer mittleren Bogenlänge von 45 min = 2700 s müssen bei $n \cdot m$ Kreuzungspunkten $2 \cdot n \cdot m \cdot 2700$ Vergleiche durchgeführt werden (Faktor 2, da jeweils für auf- und absteigende Bögen notwendig). Im Vergleich zur ersten Methode (*Schnittuntersuchung aller Geradenkombinationen*), kann mit dieser Methode (*Mittelung von Äquatorkreuzungen*) die Rechenzeit deutlich reduziert werden. Dies zeigt sich auch in den Berechnungszeiten in Jarecki (2010): Die Bestimmung linear interpolierter Kreuzungspunktpositionen gelingt über die *Mittelung von Äquatorkreuzungen* um einen Faktor 120 schneller als über die *Schnittuntersuchung aller Geradenkombinationen*.

Als Ergebnis dieser Methode stehen drei entscheidende Größen bereit: (**1**) Zeitreihen-Indizes der Stützpunkte, die den Kreuzungspunkt direkt umgeben, (**2**) Geradenparameter u und v, über die eine lineare Interpolation aller Beobachtungsgrößen im Kreuzungspunkt möglich ist, sowie (**3**) linear interpolierte Koordinaten der Kreuzungspunkte $(\lambda, \varphi)^{lin}_{XO}$.

Analytische Kreuzungspunktsuche mit Näherungswerten: "Dynamisches Verfahren" mit analytischer Geometrie (Abb. 2.4, rechts; Jarecki (2010), Abs. 3.2.2.2)

Die dritte Methode zur Kreuzungspunktsuche baut auf Bahnbogenparametern und Symmetrieeigenschaften der Bahnbögen auf, ähnlich wie die soeben beschriebene Methode *Mittelung von Äquatorkreuzungen*. Auch hier ist eine Aufteilung der Bahnspuren in auf- und absteigende Bahnbögen notwendig, da einerseits genau ein Kreuzungspunkt zwischen jedem Paar auf- und absteigender Bahnbögen entsteht und außerdem die Eindeutigkeit der Breiten-Längen-Zuordnung gegeben ist (innerhalb eines Bahnbogens kann eine Länge genau einer Breite zugeordnet werden). Äquivalent zur vorherigen Methode werden auch hier Äquatorkreuzungen der Bahnbögen bestimmt, wobei nun auf eine Interpolation verzichtet werden kann. Nach Jarecki (2010) ist bei einer Datenrate von 1 Hz sowie 0,2 Hz die Wahl des Äquator-nächsten Punktes für die weiteren Schritte ausreichend genau.

Kernpunkt dieser Methode und zugleich der wesentliche Unterschied zur vorherigen Methode bildet die Art der Bestimmung der grob genäherten Kreuzungspunktposition. Der Kreuzungspunkt wird hier durch den Schnitt der beiden 'Bahnebenen' der auf- und absteigenden Bahnbögen bestimmt. Der Schnitt beider 'Ebenen' ergibt eine Schnittgerade, die sich in geeignete Kugelkoordinaten umrechnen lässt und die grob genäherte Kreuzungspunktpositionen $(\lambda, \varphi)^{*}_{XO}$ in der λ, φ - Ebene ergibt. Da einerseits die Satellitenbahn nur im Inertialsystem und unter Vernachlässigung der Knotendrehung als Ebene betrachtet werden kann, und andererseits der Kreuzungspunkt nur in erdfesten Koordinaten entsteht, eignet sich der skizzierte Ansatz unter Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften in erster Linie zur Bestimmung der Näherungslänge λ^{*}_{XO}. Weitere Details zur Symmetrie sowie zur Art der Bestimmung der Näherungsbreite φ^{*}_{XO} werden im Folgenden beschrieben.

Jarecki (2010) legt zur Definition einer 'repräsentativen Bahnebene' des aktuellen Bahnbogens den äquatornächsten Punkt i zu Grunde. Aus dem Kreuzprodukt von dessen Positionsvektor $\vec{r}_i$ und dessen Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_i$ ergibt sich die 'repräsentative Bahnebene' (im

Folgenden vereinfacht als Bahnebene bezeichnet) in Punkt-Normalen-Form zu

$$\vec{n}_I = \vec{r}_i \times \vec{v}_i. \tag{2.89}$$

Die Schnittgerade beider Bahnebenen I und J ergibt sich in Form des Richtungsvektors $\vec{b}^*_{XO_{I,J}}$ wiederum aus dem Kreuzprodukt der beiden Normalenvektoren $\vec{n}_I$ und $\vec{n}_J$ nach

$$\vec{b}^*_{XO_{I,J}} = \vec{n}_I \times \vec{n}_J = \begin{pmatrix} b^x_{XO_{I,J}} \\ b^y_{XO_{I,J}} \\ b^z_{XO_{I,J}} \end{pmatrix}. \tag{2.90}$$

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden $\vec{b}^*_{XO_{I,J}}$ zeigt in die Richtung des grob genäherten Kreuzungspunktes und kann in Kugelkoordinaten $(\lambda, \varphi)^*_{XO_{I,J}}$ überführt werden:

$$\begin{aligned} \lambda^*_{XO_{I,J}} &= \arctan\left(\frac{b^y_{XO_{I,J}}}{b^x_{XO_{I,J}}}\right) \\ \varphi^*_{XO_{I,J}} &= \arcsin\left(b^z_{XO_{I,J}}\right). \end{aligned} \tag{2.91}$$

(Repräsentative) Bahnebenen lassen sich aus den genannten Gründen nicht streng aus äquatornahen Punkten ableiten. Treten Kreuzungen in Äquatornähe auf, entspricht die Bahnebene noch recht gut dem wahren Bahnverlauf. Je weiter sich der Kreuzungspunkt aber in Richtung der Pole verschiebt (Erde rotiert weiter), desto stärker fallen Differenzen zur wahren, aktuellen Bahnebene ins Gewicht. Aufgrund der bereits angesprochenen Symmetrie der Bahnbögen hat dies keinen Einfluss auf die Längennäherung $\lambda^*_{XO_{I,J}}$, was darauf zurückzuführen ist, dass die Bahnebenen-Abweichungen entlang auf- und absteigender Bahnbögen entgegengesetzt auftreten und sich diese daher in der Mittelung aufheben. Was die Breitennäherung $\varphi^*_{XO_{I,J}}$ betrifft, führen die Bahnebenen-Abweichungen entlang beider Bahnbögen zu einer weiteren Verschlechterung. Je weiter sich die Kreuzungen vom Äquator in Richtung der Pole verlagern, desto größer werden die Differenzen zwischen genäherter und wahrer Breite des Kreuzungspunktes.

Auf Basis der soeben bestimmten grob genäherten Kreuzungspunktpositionen erfolgt nun äquivalent zur Methode über die *Mittelung von Äquatorkreuzungen* die Suche nach direkt benachbarten Punkten in der Zeitreihe. Aufgrund der schlechten Breitennäherungen $\varphi^*_{XO_{I,J}}$ werden hier erneut ausschließlich die Längennäherungen $\lambda^*_{XO_{I,J}}$ herangezogen. Wurden die direkt benachbarten Punkte unter Anwendung des Geradenschnitts identifiziert, kann anhand der Geradenparameter u und v (Gl. (2.87)) die Kreuzungspunktposition linear interpoliert werden.

In puncto Rechenkomplexität ist diese Methode (*Schnitt von Bahnebenen*) vergleichbar mit der Methode über die *Mittelung von Äquatorkreuzungen*. Ihre Ergebnisse sind äquivalent: (**1**) Zeitreihen-Indizes der Stützpunkte, die den Kreuzungspunkt direkt umgeben, (**2**) linear interpolierte Koordinaten der Kreuzungspunkte $(\lambda, \varphi)^{lin}_{XO}$ sowie (**3**) Geradenparameter u und v, die eine lineare Interpolation aller Beobachtungsgrößen im Kreuzungspunkt ermöglichen.

Résumé der Kreuzungspunktsuche

In den vergangenen Abschnitten wurden drei Methoden zur Kreuzungspunktsuche vorgestellt, die speziell im Hinblick auf die GOCE-Mission untersucht wurden. Alle drei stellen als Ergebnis drei entscheidende Größen bereit:

- Zeitreihen-Indizes der Stützpunkte, die den Kreuzungspunkt direkt umgeben,
- Geradenparameter u und v, mit Hilfe derer eine lineare Interpolation aller Beobachtungsgrößen im Kreuzungspunkt möglich ist, sowie
- linear interpolierte Koordinaten der Kreuzungspunkte $(\lambda, \varphi)^{lin}_{XO}$.

Alle drei Methoden führen zu identischen Ergebnissen. Da für den operativen Gebrauch der Kreuzungspunktsuche nur ein Ansatz benötigt wird, wird als wichtiges Entscheidungskriterium die Dauer der Berechnungen herangezogen. Damit scheidet die sehr rechenintensive Methode über die *Schnittuntersuchung aller Geradenkombinationen* aus, und die Wahl sollte auf eine der anderen beiden Methoden fallen. Die Methode über die *Mittelung von Äquatorkreuzungen* ist im Vergleich zum *Schnitt von Bahnebenen* minimal weniger rechenintensiv: Auch wenn eine weitere lineare Interpolation der Äquatorkreuzungen bei der Methode über *Mittelung von Äquatorkreuzungen* notwendig ist, fällt diese nur einmal für jeden Bahnbogen an. Demgegenüber ist beim *Schnitt von Bahnebenen* die Anwendung einer trigonometrischen Funktion (hier der Arkusfunktion der Tangensfunktion) einmal pro Kreuzungspunkt erforderlich.

Aufgrund der geringsten Rechenkomplexität sowie der hohen Anschaulichkeit und Einfachheit der Methode über die **Mittelung von Äquatorkreuzungen** wird diese in modifizierter Form für die Bestimmung genährter Kreuzungspunktpositionen in Realdaten gewählt. Detaillierte Erläuterungen der Modifikationen werden in Abschnitt 5.2 gegeben.

2.4.2 Kreuzungspunktposition und Interpolationen

Grundlage dieses Abschnittes sind die Untersuchungen von Jarecki (2010), die auf Simulationsdatensätze aufbauen und im Vorfeld der Mission stattfanden. Im Gegensatz zu den realen GOCE-Datenzeitreihen waren in den GOCE-Simulationsdatensätze Zeitreihen sämtlicher Datentypen zu gleichen Zeiten gegeben. Im Zuge der Realdaten-Verarbeitung wird daher eine Interpolation entlang der Zeitreihe notwendig, um alle Datenprodukte zu den Zeiten der GOCE-Gravitationsgradienten zu bestimmen und notwendige Vorverarbeitungen durchführen zu können (siehe Abs. 5.3).

Damit ergeben sich folgende beiden Aufgaben, die für die Simulationsdaten sowie Realdaten gleichermaßen notwendig sind:

1. Bestimmung der exakten Kreuzungspunktposition $(\lambda, \varphi)_{XO}$, sowie
2. Interpolation sämtlicher Datenprodukte im Kreuzungspunkt.

Bestimmung der exakten Kreuzungspunktposition $(\lambda, \varphi)_{XO}$

Die Position des Kreuzungspunktes errechnet sich aus dem Schnitt der Bahnspuren der beteiligten Bahnbögen I und J. Zur Bestimmung der exakten Kreuzungspunktposition $(\lambda, \varphi)_{XO}$ ist zuerst der Verlauf beider Bahnspuren geeignet zu parametrisieren. Dies gelingt mit einer Funktion dritten Grades (kubische Funktion), mit der der Zusammenhang zwischen geozentrischen Breiten φ und den Längen λ über die Parameter a, b, c, d beschrieben wird zu

$$\varphi = a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d. \tag{2.92}$$

Eine Funktion zweiten Grades wäre ungeeignet, da die Sattelpunkte in der Satellitenbahn nicht ausgeschlossen werden können (Jarecki, 2010, S. 62).

Zur eindeutigen Bestimmung der Parameter werden entlang der Bahnspur vier Stützpunkte $(\lambda, \varphi)_{i-1} ... (\lambda, \varphi)_{i+2}$ benötigt. Im Hinblick auf den Kreuzungspunkt beschreibt Index i den Punkt der Zeitreihe, der direkt vor dem Kreuzungspunkt liegt. Auf Basis der vier Punkte ergeben sich die Parameter a, b, c, d äquivalent zu Jarecki (2010, Gl. 3.51) nach

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{i-1}^3 & \lambda_{i-1}^2 & \lambda_{i-1} & 1 \\ \lambda_i^3 & \lambda_i^2 & \lambda_i & 1 \\ \lambda_{i+1}^3 & \lambda_{i+1}^2 & \lambda_{i+1} & 1 \\ \lambda_{i+2}^3 & \lambda_{i+2}^2 & \lambda_{i+2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \\ \varphi_{i+2} \end{pmatrix}. \tag{2.93}$$

Entsprechende Parametersätze (a_I, b_I, c_I, d_I) und (a_J, b_J, c_J, d_J) werden im Bereich des Kreuzungspunktes für die Bahnspuren beider Bahnbögen I und J bestimmt. Die Bestimmung der Position des Kreuzungspunktes gelingt durch Gleichsetzen der jeweiligen kubischen

Funktionen gemäß Gleichung (2.92) unter Verwendung der genannten Parametersätze und ergibt sich zu

$$a_I\lambda_I^3 + b_I\lambda_I^2 + c_I\lambda_I + d_I = a_J\lambda_J^3 + b_J\lambda_J^2 + c_J\lambda_J + d_J. \tag{2.94}$$

Im Kreuzungspunkt handelt es sich bei λ_I und λ_J um die Länge des Kreuzungspunktes $\lambda_{XO} = \lambda_I = \lambda_I$, womit sich Gleichung (2.94) umstellen lässt zu

$$(a_I - a_J)\lambda_{XO}^3 + (b_I - b_J)\lambda_{XO}^2 + (c_I - c_J)\lambda_{XO} + (d_I - d_J) = 0. \tag{2.95}$$

Die Lösung dieser Gleichung erhält man durch eine Nullstellenbestimmung, wozu hier das *Newtonverfahren* genutzt wird. Dieses stellt sich allgemein für einen Funktionsverlauf $f(x)$ auf Basis von n Stützstellen x nach Merziger et al. (2001, S. 186) dar zu

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}. \tag{2.96}$$

Nach Anwendung des Newton-Verfahrens gemäß Gleichung (2.96) auf Gleichung (2.95) ergibt sich die gesuchte Kreuzungspunktposition $(\lambda, \varphi)_{XO}$ durch eine iterative Berechnung nach

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \lambda_{XO}^{lin}, \quad \varphi_0 = \varphi_{XO}^{lin} \\
\delta\lambda_k &= \frac{(a_I - a_J)\lambda_k^3 + (b_I - b_J)\lambda_k^2 + (c_I - c_J)\lambda_k + (d_I - d_J)}{3(a_I - a_J)\lambda_k^2 + 2(b_I - b_J)\lambda_k + (c_I - c_J)} \\
\delta\varphi_k &= (3a_I\lambda_k^2 + 2b_I\lambda_k + c_I)d\lambda_k + a_I\lambda_k^3 + b_I\lambda_k^2 + c_I\lambda_k + d_I - \varphi_k \\
\lambda_{k+1} &= \lambda_k + \delta\lambda_k \\
\varphi_{k+1} &= \varphi_k + \delta\varphi_k
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Geeignete Näherungswerte $(\lambda, \varphi)_0$ für den ersten Berechnungsschritt stehen in Form der linear interpolierten Koordinaten $(\lambda, \varphi)_{XO}^{lin}$ aus Abschnitt 2.4.1 zur Verfügung. Die Iteration ist nach Erfüllung eines geeigneten Abbruchkriteriums (z.B. $|\delta\lambda_k| + |\delta\varphi_k| < 10^{-12\circ}$) zu beenden.

Die Bestimmung des Kreuzungspunktes kann als rein geometrisches Problem betrachtet werden. Daher wird die Kreuzungspunktposition - zeitunabhängig - rein Koordinaten- bzw. Positionen-basiert berechnet.

Die kubischen Funktionsparameter (a, b, c, d) werden - wie in Gleichung (2.93) ersichtlich - auf Basis der Mindestanzahl von vier Stützpunkten bestimmt. Die Bahn beruht auf einer reduziert-dynamischen Bahnlösung die i.d.R. keine Sprünge o.ä. enthält und sich allgemein sehr harmonisch darstellt. Daher kann sie durch nur vier Stützpunkte und eine kubische Funktion gut repräsentiert werden.

Interpolation sämtlicher Datenprodukte im Kreuzungspunkt

Das Ziel dieser Arbeit ist der Vergleich von GOCE-Gravitationsgradienten in Kreuzungspunkten der GOCE-Bahnspuren. Um die Gradienten vergleichen sowie deren unterschiedliche Orientierung und Höhen berücksichtigen zu können, ist eine Interpolation der Gradienten selbst sowie einer Vielzahl weiterer Datenprodukte im Kreuzungspunkt notwendig. Dazu müssen alle Daten entlang beider Spuren der Bahnbögen I und J interpoliert werden.

Für das weiter Vorgehen der Interpolation sind wichtig: 1. die Anzahl der Stützstellen und 2. die Art der Interpolation.

Bezüglich der **Anzahl der Stützstellen** ist es entscheidend, dass die Kreuzungspunktanalyse zur Identifikation einzelner sowie kleiner Gruppen von Ausreißern genutzt werden soll. Wird die Interpolation auf Punkte gestützt, die Ausreißer enthalten, 'verschmiert' das Interpolationsergebnis. Dies ist für die Beurteilung der Qualität des Datensatzes zwar unerwünscht, jedoch für die Identifikation von Ausreißern durchaus vorteilhaft. Ein Auffinden der Ausreißer

gelingt damit mit einer höheren Wahrscheinlichkeit auch in Bereichen, in denen nur wenige Kreuzungspunkte auftreten. Allerdings muss ein Ausreißer deutlichen Einfluss auf den interpolierten Wert nehmen, um auf Basis der Kreuzungspunktmethode als solcher identifiziert werden zu können. Um einerseits eine Einflussnahme zu ermöglichen und andererseits den Einflussbereich eines Ausreißers nicht unnötig zu erweitern, sollte die Anzahl der Stützstellen möglichst gering gewählt werden.

Aufgrund dieser Forderung nach einer möglichst geringen Anzahl an Stützpunkten, wird - sowohl für die Interpolation der Position des Kreuzungspunktes, als auch für die Interpolation aller weiteren Datenprodukte im Kreuzungspunkt - nur die Mindestanzahl an Stützpunkten verwendet.

Da alle Datenprodukte als Zeitreihe vorliegen, wäre im Hinblick auf die **Art der Interpolation** eine Interpolation entlang der Zeit(reihe) naheliegend. Bisher wurde mit dem Newton-Verfahren (Gl. (2.97)) die Position des Kreuzungspunktes rein Positionen-basiert bestimmt. Die Zeitpunkte $t_{XO,I}$ und $t_{XO,J}$ entlang beider Bahnbögen I und J, zu denen sich die Kreuzung ergibt, ist nicht bekannt. Die Bestimmung wäre im Falle einer Zeit-basierten Interpolation der Kreuzungszeitpunkte von besonderer Wichtigkeit, da alle weiteren Datenprodukte (sowie die Höhen $h_I(t_{XO,I})$ und $h_J(t_{XO,J})$) in deren Abhängigkeit interpoliert und im Kreuzungspunkt abgeleitet würden. Fehler bei der Bestimmung der Kreuzungszeitpunkte würden sich also direkt auf alle interpolierten Datenprodukte fortpflanzen.

Als Anhaltspunkt müsste die Genauigkeit der Zeitinformation bei einer Bahngenauigkeit von wenigen Dezimetern (0.5 m, siehe Tab. 4.7, S.84) und einer Geschwindigkeit des GOCE-Satelliten von etwa 7.8 km/s in der Größenordnung von 10^{-5} s liegen. Bei einer Datenrate von 1 Hz bewegt sich der Satellit zwischen zwei Stützpunkten ($\Delta t = 1$ s) etwa 7.8 km fort. Im Falle einer gleichförmigen, geradlinigen Bewegung wäre die Interpolation der Kreuzungszeitpunkte einfach über eine lineare Interpolation zu realisieren. Wird von einer ausreichend linearen Beschleunigung des Satelliten ausgegangen, eignen sich z.B. niedriggradige Polynomansätze zu deren Interpolation.

Jarecki (2010) bezweifelt die ausreichende Linearität der Beschleunigungen und nutzt für die Interpolationen daher bivariate, rein positionsbasierte Ansätze. Ein Vergleich verschiedener Interpolationsmethoden für verschiedene Größen auf Basis ausgewählter statistischer Parameter ist in Jarecki (2010, Abs. 3.3.1) zu finden.

In welcher Form die Interpolation in dieser Arbeit realisiert wurde, enthält Abschnitt 5.3. Alle folgenden Schritte der Kreuzungspunktanalyse wurden im Vergleich zu Jarecki (2010) z.T. grundlegend verändert und werden in Kapitel 5 detailliert beschrieben.

3
Die GOCE-Mission

Die **G**ravity Field and Steady-State **O**cean **C**irculation **E**xplorer (**GOCE**) Mission ist eine Satellitenmission der European Space Agency (ESA). Der GOCE-Satellit (siehe Abbildung 3.1) wurde am 17. März 2009 vom nordrussischen Weltraumbahnhof Plesetsk aus gestartet und ist am 11. November 2013 nach genau 1700 Tagen beim Wiedereintritt in die Erdatmosphäre über dem Süd-Atlantik verglüht (GOCE FCT, 2014). Die ursprünglich auf nur 20 Monate ausgelegte Missionsdauer (ESA, 1999) konnte damit beinahe verdreifacht werden, nicht zuletzt ein Zeichen für einen erfolgreichen Missionsbetrieb.

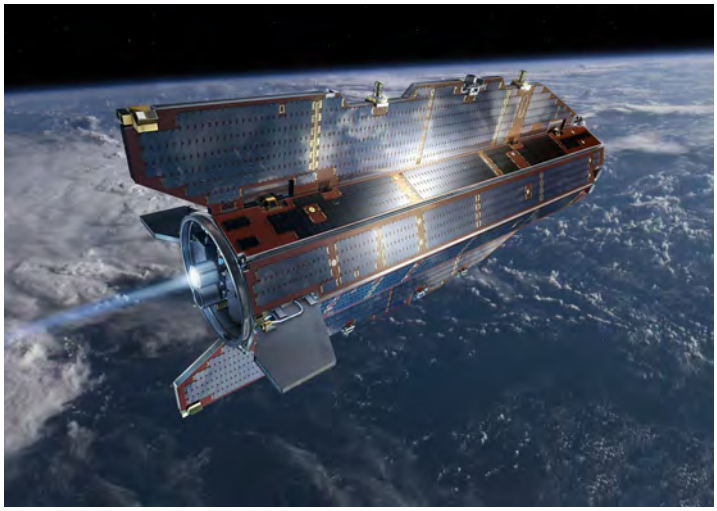


Abbildung 3.1: Der GOCE-Satellit (Quelle: ESA, 2008).

Die Beschreibung der GOCE-Mission in diesem Kapitel umfasst den Aufbau und die Bahn des Satelliten sowie dessen Instrumente und Datenprodukte, und spiegelt damit den Status der Mission zum Startzeitpunkt wider. Für ausgewählte Analysen realer Daten wird auf Kapitel 4 und 6 verwiesen.

Eine hoch entwickelte Gravitationsfeldsatellitenmission wie GOCE erfordert eine ideale Abstimmung des Satelliten und des Systems aus Sensoren und Kontrollelementen mit dem Ziel, ein Gesamtsystem, eine Gravitationsmesseinheit, zu schaffen. Im Vergleich zu den meisten Fernerkundungssatelliten tritt im Falle von GOCE die Besonderheit auf, dass der Satellit selbst einen wesentlichen Teil des Instrumentariums darstellt, und man nicht streng zwischen Raumflugkörper und Messinstrumenten unterscheiden kann (ESA, 2008). So kann GOCE selbst als Testmasse im Erdschwerefeld betrachtet werden. Aus den Abweichungen der GOCE-Positionen von einer idealen Kepler-Ellipse können Rückschlüsse auf gravitative und nicht-gravitative Kräfte gezogen werden, die auf den Satelliten wirken. Der Anteil der gravitativen Kräfte hat direkten Bezug zum Erdschwerefeld.

Eine **Gravitationsfeldbestimmung mit GOCE** gelingt durch Kombination zweier Beobachtungsverfahren, der Satellitengradiometrie (SGG, *engl. satellite gravity gradiometry*) und dem high-low satellite-to-satellite tracking (hl-SST), mit der eine präzise Positionsbestimmung des Satelliten gelingt, siehe Abbildung 3.2.

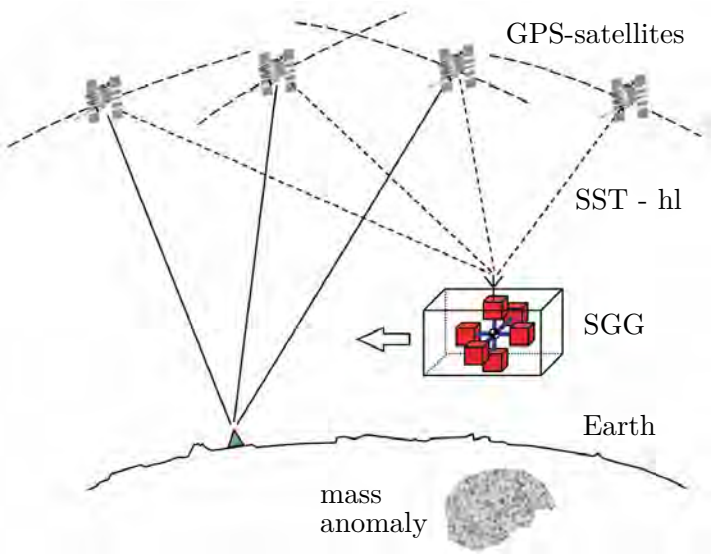


Abbildung 3.2: Prinzip der Satellitengradiometrie (SGG) und des high-low satellite-to-satellite tracking (hl-SST) (in Anlehnung an ESA, 1999).

Beide Beobachtungsverfahren haben Stärken in bestimmten Frequenzbereichen, weshalb bei der Gravitationsfeldbestimmung entscheidend von deren Kombination profitiert werden kann (Rummel und Gruber, 2010). Großräumige Variationen des Gravitationsfeldes werden aus Bahninformationen von GOCE abgeleitet. Dazu werden GNSS-Beobachtungen genutzt (entspricht dem Prinzip des hl-SST), über die eine präzise Positionsbestimmung des Satelliten erfolgt. Jäggi et al. (2011) vergleichen rein GPS-basierte Schwerefeldlösungen von CHAMP (CHAllenging Minisatellite Payload), GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) und GOCE. Sie können zeigen, dass nur 8 Monate GOCE GPS-Daten einen signifikanten Beitrag zur Schwerefeldlösung zwischen Grad 20 und 115 einer sphärisch harmonischen (SH) Reihenentwicklung leisten. Die reinen GPS-Positionen enthalten demnach 'neue' Informationen des Schwerefeldes mit einer räumlichen Bodenauflösung zwischen 1000 km (SH Grad 20) und 175 km (SH Grad 115). Kleinräumige Strukturen des Gravitationsfeldes werden nach dem Prinzip der Satellitengradiometrie und somit mittels des Gravitationsgradiometers gewonnen, das in Abschnitt 3.2 genauer beschrieben wird.

Es lassen sich langwellige (niederfrequente) Informationen aus GPS mit kurzwelligen (hochfrequenten) Informationen des Gravitationsgradiometers kombinieren und mittels des timewise-Ansatzes (Pail et al., 2010) rein GOCE-basierte Gravitationsfeldlösungen bestimmen.

Auch wenn die Positionen einer 'niedrig fliegenden Testmasse' beeindruckende Möglichkeiten der Gravitationsfeldbestimmung erlauben, bleibt das Ziel der GOCE-Mission die Bestimmung eines räumlich hochaufgelösten Schwerefeldes und damit das Gravitationsgradiometer das Hauptinstrument der Mission.

In den folgenden Abschnitten werden Grundlagen zur GOCE-Mission genauer beleuchtet. In Abschnitt 3.1 wird der Orbit von GOCE erläutert und die Randbedingungen zu dessen Festlegung dargestellt. Das Hauptinstrument des GOCE-Satelliten ist das Gravitationsgradiometer, das die Grundlage für die Gravitationsfeldbestimmung mit GOCE bildet. Abschnitt 3.2 beschreibt das Gradiometer, geht auf Instrumentenfehler ein und behandelt die Bestimmung der Gravitationsgradienten auf Basis der Gradiometerbeobachtungen. In Abschnitt 3.3 wird auf ausgewählte weitere Instrumente von GOCE eingegangen. Da der Satellit eine Vielzahl von Sensoren und Instrumenten vereint und deren Beobachtungen zur Auswertung verknüpft werden müssen, spielen verschiedenste Koordinatensysteme und deren Beziehungen eine wichtige Rolle. Abschnitt 3.4 gibt einen Überblick über die - speziell für die Validierung - Wichtigsten. Welche Datenprodukte der GOCE-Mission bereitgestellt werden und zu welchen der Größen Varianzinformationen zur Verfügung stehen, wird in Abschnitt 3.5 erläutert.

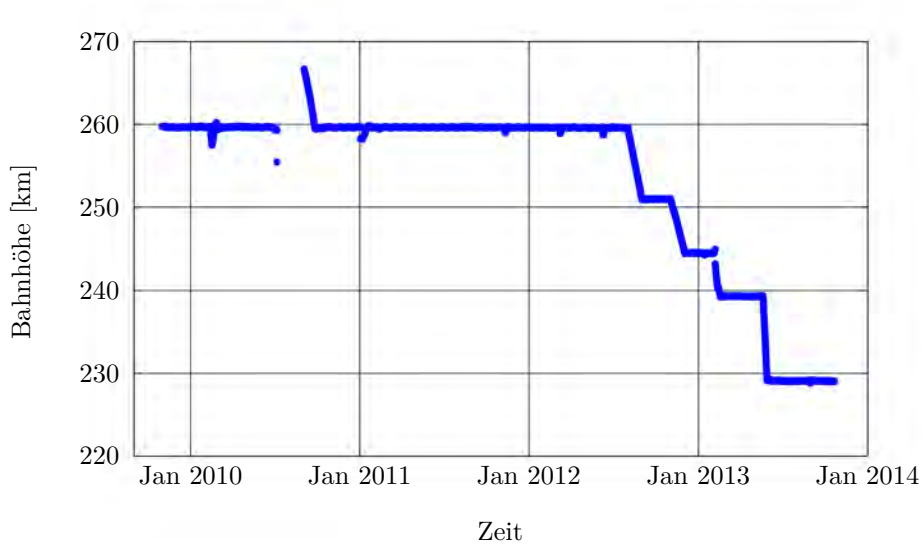


Abbildung 3.3: Mittlere Bahnhöhe (Tagesmittelwerte) der GOCE-Mission [km].

3.1 Wahl des GOCE-Orbits

In den folgenden Ausführungen werden die Begriffe Bahn und Orbit als Synonyme verwendet. Die Fakten sind im Wesentlichen GOCE FCT (2014) und Drinkwater et al. (2007) entnommen.

GOCE wurde für den operationellen Betrieb auf einer mittleren Bahnhöhe von etwa 260 km über der Erdoberfläche gehalten und ist damit der Klasse der LEO-Satelliten (Low-Earth-Orbiter) zuzuordnen. In besagter Höhe wirken eine Vielzahl nicht-gravitativer Kräfte auf den Satelliten ein, wobei es sich vor allem um Störkräfte aufgrund von Restatmosphäre, Erdalbedo und Strahlungsdruck der Sonne handelt. Die Restatmosphäre hat in GOCE-Bahnhöhe den größten Einfluss und nimmt - genau wie der Einfluss durch Erdalbedo - mit abnehmender Höhe zu. Der Einfluss des Strahlungsdrucks der Sonne ist maßgeblich abhängig von der der Sonne zugewandten Fläche des Satelliten sowie von der Sonnenaktivität. Die Summe dieser Kräfte wirkt größtenteils entgegen dem Geschwindigkeitsvektor des Satelliten, wodurch dieser unweigerlich abgebremst wird und an Höhe verliert. Um diesen Höhenverlust zu vermeiden, wurde GOCE mit einem Ionentriebwerk ausgestattet, das den nicht-gravitativen Beschleunigungen entlang der Satellitenlängsachse (entspricht idealerweise der Bewegungsrichtung) entgegenwirkte. Das Ionentriebwerk inkl. Steuerelektronik und Treibstofftank wird als Ion Propulsion Assembly (IPA) bezeichnet und wurde installiert, um zwei wesentliche Ziele zu verfolgen: einerseits um dem genannten Höhenverlust entgegenzuwirken und andererseits um den Wertebereich der gemessenen Beschleunigungen so stark zu verkleinern, dass der Dynamikbereich (eng. dynamic range) der Beschleunigungsmesser minimiert werden konnte mit dem Ziel, die Sensitivität der Beschleunigungsmesser und damit die des Gradiometers zu erhöhen. Realisiert werden konnte allerdings 'nur' ein eingeschränkt drag-free realisierendes System: Das IPA ist in der Lage, nicht-gravitativen Beschleunigungen nur in Richtung der Längsachse des Satelliten entgegenzuwirken und überdies die besagten Beschleunigungen nur für einen bestimmten Frequenzbereich zu reduzieren. Weitere Informationen zum IPA sowie den genannten Einschränkungen werden in Abschnitt 3.3 gegeben.

Da die Sonnenaktivität während der GOCE-Missionsdauer geringer ausfiel als vorhergesagt, wirkten weniger starke Störbeschleunigungen auf den Satelliten als prognostiziert. Daher konnte einerseits Treibstoff für das Ionentriebwerk gespart und die Missionsdauer verlängert werden. Andererseits konnte die Bahnhöhe des Satelliten im Laufe des letzten Jahres der Mission schrittweise bis auf eine mittlere Bahnhöhe von 229 km abgesenkt werden (GOCE FCT, 2014), während das Ionentriebwerk - mit wenigen Ausnahmen - auch die größer werdenden nicht-gravitativen Beschleunigungen erfolgreich kompensierte.

Abbildung 3.3 zeigt den Verlauf der mittleren GOCE-Bahnhöhe über den Missionszeitraum. Diese wurde auf Basis der SST PSO 2 PRD-Positionen (siehe Abs. 3.5) aus dem sphärischen Bahnradius abgeleitet und um den Äquatorradius der Erde (6378 km) reduziert. Bis Ende Juli 2012 wurde die mittlere Bahnhöhe mit Ausnahme einiger Anomalie-bedingter Abweichungen auf den vorgesehenen 260 km gehalten. Ab August 2012 wurde damit begonnen, den Orbit schrittweise abzusenken.

Um das Gravitationsfeld-Signal in Satellitenhöhe zu maximieren, wurde aus wissenschaftlicher Sicht eindeutig eine möglichst niedrige Bahnhöhe von GOCE favorisiert. Das Gravitationsfeld-Signal verhält sich umgekehrt proportional zum Quadrat des Bahnradius und folgt in erster Näherung dem Newton'schen Gravitationsgesetz (Torge und Müller, 2012). Eine Verringerung der Bahnhöhe führt damit zu einer Erhöhung der Gravitationskraft und steigert die räumliche Auflösung der Beobachtungen. Beliebig weit kann die Bahnhöhe jedoch nicht herabgesetzt werden, da damit ein Anstieg der nicht-gravitativen Störungen einhergeht.

Der Kompromiss einer Bahnhöhe von etwa 260 km ergab sich einerseits aus den wissenschaftlichen Forderungen nach einer möglichst niedrigen Bahnhöhe zur Maximierung des Gravitationsfeld-Signals und andererseits einer Mindesthöhe zur sicheren Kompensation aller Störkräfte mit dem in puncto Schubkraft limitierten Ionentriebwerk. Die schrittweise Reduzierung der Bahnhöhe im Laufe des letzten Missionsjahres führte nicht nur zu einer Erhöhung des Gravitationsfeld-Signals, sondern ermöglichte es den beteiligten Ingenieuren das Ionentriebwerks unter Extrembedingungen zu testen sowie Studien zu Atmosphärendichte etc. durchzuführen.

Satellitenbahnen können in erster Näherung mit Hilfe der Kepler'schen Elemente beschrieben werden. Diese basieren auf den Kepler'schen Gesetzen, mit denen die ungestörte Bewegung eines Satelliten um die Erde geometrisch beschrieben werden kann. Danach bewegen sich Satelliten auf elliptischen Bahnen um die Erde, die sich in einem der Brennpunkte der Ellipse befindet[1]. Die Form der Ellipse, deren Lage im Raum sowie die Position eines Satelliten auf dieser Ellipse beschreiben die sechs Kepler'schen Elemente (Schneider, 1988). Dabei wird die Form der Bahnellipse mit Hilfe der großen Halbachse a und der Exzentrizität e festgelegt. Deren Lage im Raum wird mit der Inklination i, der Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω und dem Argument des Perigäums ω beschrieben. Schließlich kann die Positionierung des Satelliten auf der elliptischen Bahn z.B. über die wahre Anomalie ν oder die mittlere Anomalie M erfolgen.

Zur approximativen Beschreibung des GOCE-Orbits wurden Kepler'sche Elemente aus realen GOCE-Daten abgeleitet. Die folgenden Werte stellen Mittelwerte dar, die über bekannte mathematische Zusammenhänge (Montenbruck und Gill, 2005, S. 28 - 29) auf Basis von reduziert-dynamischen Positions- und Geschwindigkeitsvektoren der GOCE-Mission aus 10 Bahnumläufen zu Beginn der Mission am 01. November 2009 abgeleitet wurden. Die Form des GOCE-Orbits ist mit einer großen Halbachse a von etwa $6743,608$ km und einer Exzentrizität e von $0,0157$ nahezu kreisförmig. Dies garantiert eine dauerhaft geringe Entfernung zur Erdoberfläche und damit zur interessierenden Erdmasse. Die Inklination liegt im Mittel bei 98.36° und kann daher sonnen-synchron realisiert werden. Dies ist notwendig um einerseits den Energiebedarf des Instrumentariums über Sonnenenergie dauerhaft decken zu können und andererseits um starke thermale Schwankungen des Satelliten zu vermeiden. Thermale Schwankungen werden meist durch den Ein- und Austritt des Satelliten in den bzw. aus dem Erdschatten induziert, sie liegen in der Größenordnung von ± 160°C und können u.a. zu Verformungen der Satellitenstruktur führen.

Der sonnen-synchrone Orbit sowie die Erdabplattung haben zur Folge, dass die weiteren Kepler'schen Elemente einer Veränderung mit der Zeit unterliegen. Die Rektaszension des aufsteigenden Bahnknotens Ω weist eine Drehung von etwa 1° pro Tag (360° in 365 Tagen) auf, womit die jährliche Drehung der Erde um die Sonne ausgeglichen und die Son-

[1] Die Gültigkeit der Kepler'schen Gesetze ist nur unter folgenden vereinfachenden Annahmen gegeben: Die Betrachtung wird auf ein Zweikörperproblem (Erde und Satellit) reduziert, es wird ein gravitatives Massepunktmodell angenommen (Erde als Zentralmasse), die im Verhältnis kleine Satellitenmasse wird vernachlässigt, genau so wie nicht-gravitative Störungen und der Einfluss weiterer Himmelskörper (Schneider, 1988).

nensynchronität gewährleistet wird. Der Orbit wurde damit als 'dusk-dawn' Orbit realisiert (Bigazzi und Frommknecht, 2010), womit die Bewegungsrichtung von GOCE in der oben genauer spezifizierten Bahnebene beschrieben werden kann. Aus Sicht der Sonne bewegte sich GOCE gegen den Uhrzeigersinn um die Erde. Die aufsteigenden Bahnbögen (Bewegungsrichtung: Süd → Nord) lagen somit über Gebieten der Erde, wo Abenddämmerung (eng. dusk) herrschte, und die absteigenden Bögen (Bewegungsrichtung: Nord → Süd) über Gebieten mit Morgendämmerung (eng. dawn).

Aufgrund des nahezu kreisförmigen GOCE-Orbits ist das Argument des Perigäums schlecht konditioniert und dessen Bestimmung im Zuge einer einfachen approximativen Berechnung kaum möglich. Daher wird das Argument der Breite definiert, das sich aus der Summe des Arguments des Perigäums und der wahren Anomalie ergibt (Seeber, 1989). Das Argument der Breite variiert entsprechend der Umlaufperiode mit etwa 360° in 90 min (1 Umlauf).

3.2 Gradiometer und Gravitationsgradienten

Das Gradiometer stellt das Hauptinstrument der GOCE-Mission dar. Es besteht aus einer Konstellation von sechs servogesteuerten kapazitiven Beschleunigungsmessern, die um das Zentrum des Satelliten angeordnet sind. Aus den Beobachtungen des Gradiometers werden Gravitationsgradienten, also zweite Ableitungen des Gravitationspotentials der Erde bestimmt, die die Grundlage der Gravitationsfeldbestimmung mit GOCE bilden.

Im folgenden Abschnitt 3.2.1 wird der Aufbau des Gradiometers sowie die Beschleunigungsmesser beschrieben, wobei auf deren Funktionsweise und Eigenschaften eingegangen wird. Der sehr entscheidende Schritt der Bestimmung von Gravitationsgradienten aus Gradiometer- bzw. Beschleunigungsmesserbeobachtungen wird in Abschnitt 3.2.2 dargestellt. Darin wird außerdem auf Einschränkungen des Instruments eingegangen sowie deren Auswirkungen auf die Gradienten erläutert. Abschnitt 3.2.3 beschreibt die Fehler des Instruments und wie diese behandelt werden.

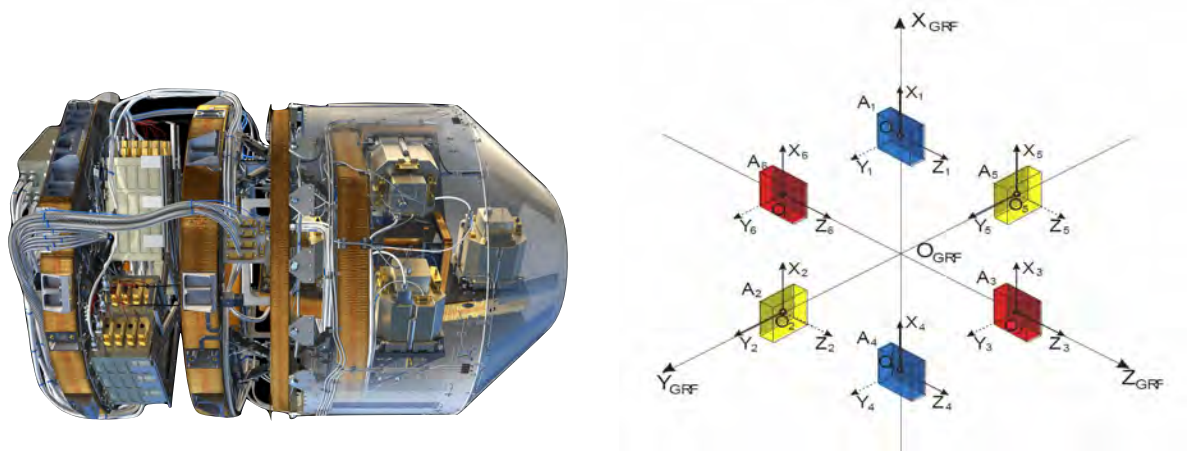
3.2.1 Gradiometeraufbau und Beschleunigungsmesser

Die folgende Darstellung orientiert sich an ESA (2008) und ESA (2015a).

Das Gradiometer besteht aus insgesamt sechs drei-achsigen Beschleunigungsmessern, die in Paaren entlang jeder der drei Raumachsen in der sogenannten Diamantkonfiguration angeordnet sind (siehe Abbildung 3.4). Der Abstand zwischen jeweils zwei Beschleunigungsmessern (accelerometer, ACC) entlang jeder Achse beträgt etwa 0.50 m. Das Gradiometer wurde möglichst genau in das Massenzentrum des Satelliten eingebaut, so dass jeder ACC etwa 0.25 m vom Zentrum des Gradiometers und damit vom Massenmittelpunkt des Satelliten entfernt ist.

Das Funktionsprinzip der ACC basiert auf elektrostatischer Aufhängung bzw. Schwebung (engl. electrostatic suspension), siehe Touboul et al. (1999). Dabei wird die Spannung gemessen, die notwendig ist, um eine Testmasse frei schwebend im Zentrum eines Gehäuses zu halten. Die Innenseiten jedes Gehäuses sind dabei mit acht Elektroden-Paaren bestückt, die zwei wesentliche Aufgaben haben: Einerseits gelingt mit ihnen die sehr genaue und präzise Bestimmung von Testmassenbewegungen (Translationen und Rotationen), anderseits werden sie genutzt, um ein elektromagnetisches Feld zu erzeugen, mit dem die Testmasse im Zentrum des Gehäuses gehalten werden kann (electrostatic feedback system). Die gemessene Spannung ist proportional zur Kraft, die erforderlich ist, um den Schwebezustand der Testmasse zu gewährleisten. Diese wird auch als Rückstellkraft bezeichnet und ist den auf den Satelliten einwirkenden Kräften (gravitativer und nicht-gravitativer Natur) entgegen gerichtet. Damit wird ein und dasselbe System für die Messung und das Induzieren von Spannungen genutzt.

Die GOCE-Beschleunigungsmesser wurden von ONERA (Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales) konstruiert und entwickelt, und von Thales Alenia Space (TAS) hergestellt. Beschleunigungsmesser mit demselben Funktionsprinzip wurden bereits bei den



(a) (b)

Abbildung 3.4: Gradiometer und Beschleunigungsmesseranordnung. (a) Beschleunigungsmesser-Sensorköpfe, rechts, sowie deren Steuerelektronik, links, auf der Trägerstruktur (Quelle: ESA, 2015b), (b) Anordnung der Beschleunigungsmesserpaare in der Diamantkonfiguration im Gradiometer-Referenzsystem (GRF) sowie der Orientierung hoch genauer (durchgezogene) und weniger genauer (gestrichelt) Beschleunigungsmesserachsen (Quelle: Gruber et al., 2014c).

Schwerefeldmissionen CHAMP und GRACE eingesetzt. Aufbauend auf den Erfahrungen beider Missionen wurden die Beschleunigungsmesser weiterentwickelt und für GOCE optimiert. Es handelt sich um servogesteuerte drei-achsige Beschleunigungsmesser, wobei die Beschleunigungen nicht in allen Achsen gleich genau bestimmt werden können. Dies ist in der Notwendigkeit der Kalibration der Beschleunigungsmesser begründet, die auf der Erde (on-ground) und damit bei Vorhandensein der Erdbeschleunigung (1 g) zu erfolgen hat (Drinkwater und Kern, 2006). Im Zuge dieser on-ground Tests müssen, u.a. die Funktionalität des Systems garantiert, der Schwebezustand der Testmasse geprüft, die Übertragungsfunktion kontrolliert und diverse Kalibrationsfaktoren bestimmt werden (Marque et al., 2008).

Ein Funktionstest bei 1 g hat außerdem entscheidenden Einfluss auf das Design der Beschleunigungsmesser. Die Elektroden müssen in der Lage sein, ein ausreichend starkes Kraftfeld aufzubauen, um ein freies Schweben der Testmasse auch bei 1 g zu garantieren. Daher handelt es sich bei den Testmassen nicht um Würfel mit gleicher Kantenlänge, sondern um Quader im Format $4 \times 4 \times 1$ cm^3, deren größte Flächen bei den on-ground Tests 'horizontiert' werden. Die Größe der entsprechenden Elektroden wurde angepasst.

Die Kalibrierung erfolgt auf einem Pendelprüfstand - einer pendelnden Plattform - auf der die Erdbeschleunigung durch definierte oszillierende Pendelbewegungen in die 'horizontalen' Achsen der Beschleunigungsmesser projiziert wird. Da die vertikale Achse dabei 1 g ausgesetzt ist und im operativen Betrieb in 0 g Umgebung arbeiten muss, gelingt eine Kalibrierung im Vergleich zu den beiden horizontalen Achsen nur mit geringerer Güte. Die Sensitivität der beiden hochgenauen Achsen liegt bei 10^{-12} m/s$^2/\sqrt{Hz}$ (Rummel und Gruber, 2010), wobei die der weniger genauen Achse um etwa 2 Größenordnung vermindert ist. Wie die Angaben der Sensitivität bereits zeigen, sind diese frequenzabhängig und gelten im Falle des GOCE-Gradiometers für den Frequenzbereich zwischen $5 \cdot 10^{-3}$ und $1 \cdot 10^{-1}$ Hz, die sogenannte *Measurement Bandwidth (MBW).*

Für weitere Details zur Funktionsweise elektrostatischer Beschleunigungsmesser wird auf Josselin et al. (1999) verwiesen, weitere Informationen über Aufbau, Funktion und Fehlereinflüsse einzelner GOCE-Beschleunigungsmesser sind Marque et al. (2008) zu entnehmen bzw. werden im folgenden Abschnitt 3.2.3 weiter ausgeführt.

3.2.2 Gravitationsgradienten aus Beschleunigungsdifferenzen

In diesem Abschnitt wird die Ableitung von Gravitationsgradienten aus Beschleunigungsdifferenzen erläutert. Die Ausführungen orientieren sich an Müller (2001), Rummel et al. (2011) und Stummer (2013).

Die im folgenden angegebenen Formalismen sind nur gültig, solange das Gradiometer fehlerfrei ist, also keinerlei Fehlausrichtungen oder Fehlpositionierungen der einzelnen Beschleunigungsmesser vorliegen. Die in der Realität auftretenden Fehler werden in Abschnitt 3.2.3 diskutiert. Aufgrund der weniger genauen Bestimmung einzelner Beschleunigungen (siehe vorherigen Abschnitt) können einige Variablen nur mit geringerer Genauigkeit bestimmt werden. Diese werden in Anlehnung an Stummer (2013) im Folgenden mit einer Tilde über den Variablen gekennzeichnet.

Wie bereits im vorherigen Abschnitt beschrieben sowie in Abbildung 3.4 (b) erkennbar, besteht das Gradiometer aus sechs drei-achsigen Beschleunigungsmessern $A_1 ... A_6$, die in Paaren entlang der drei Gradiometerarme (in Richtung der Achsen x, y und z) angeordnet sind. Die Entfernungen L_x, L_y, L_z zwischen den jeweiligen Paaren belaufen sich auf etwa 0.50 m([2]).

GOCE-Gradienten werden aus differentiellen Beschleunigungen $a_{diff,lk,i}$ (sogenannten *differential mode accelerations*) zwischen den Beschleunigungsmessern l und k entlang der Achsen $i \in \{x, y, z\}$ der Gradiometerarme abgeleitet nach

$$a_{diff,lk,i} = \frac{1}{2} \left(a_{l,i} - a_{k,i} \right) . \tag{3.1}$$

Die Gradiometerbeobachtungen enthalten neben den gesuchten Gravitationsgradienten auch Zentrifugalterme sowie Anteile aus den Winkelbeschleunigungen des Satelliten (siehe Gl. (2.36) und (2.39), S.17). Um die einzelnen Anteile voneinander trennen zu können, werden Winkelgeschwindigkeiten ω und Winkelbeschleunigungen $\dot{\omega}$ bestimmt. Mit Hilfe von Gleichung (2.40a, S. 17) gelingt die Bestimmung der Winkelbeschleunigungen aus den Gradiometerbeobachtungen nach

$$\begin{aligned} \tilde{\dot{\omega}}_x &= -\frac{\tilde{a}_{diff,36,y}}{L_z} + \frac{\tilde{a}_{diff,25,z}}{L_y}, \\ \dot{\omega}_y &= -\frac{a_{diff,14,z}}{L_x} + \frac{a_{diff,36,x}}{L_z}, \\ \tilde{\dot{\omega}}_z &= +\frac{\tilde{a}_{diff,14,y}}{L_x} - \frac{a_{diff,25,x}}{L_y}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ein wesentlicher Grund für die Anordnung der Beschleunigungsmesser im Gradiometer war die hochgenaue Bestimmung von $\dot{\omega}_y$. Aufgrund der Rotation des Satelliten von 360°/Umlauf um die y-Achse ($\approx$ Normale der Satellitenbahnebene) weist diese Winkelbeschleunigungskomponente mit Abstand den größten Betrag auf. $\dot{\omega}_x$ und $\dot{\omega}_z$ können nur mit verminderter Genauigkeit bestimmt werden. Da die Winkelgeschwindigkeiten direkt die Qualität der Gravitationsgradienten beeinflussen, ist deren hochgenaue Bestimmung von zentraler Bedeutung. Schließlich werden die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ aus einer Kombination der Winkelbeschleunigungen aus Gleichungen (3.2) und Sternkamerabeobachtungen abgeleitet. Die Kombination soll die in der Measurement Bandwidth (MBW) hochgenauen Winkelgeschwindigkeiten möglichst gut mit den langwellig genauen Sternkamerabeobachtungen verknüpfen. Eine Beschreibung der realisierten Methode ist in Stummer (2013) und Stummer et al. (2012) gegeben.

Auf Basis der Winkelgeschwindigkeiten sowie der differentiellen Beschleunigungen aus Gleichung 3.1 können die Gravitationsgradienten bestimmt werden:

---

[2] Exakte Werte der Längen der Gradiometerarme sind $L_x = 0.5140135$ m, $L_y = 0.4998900$ m und $L_z = 0.5002010$ m (Siemes, 2014).

$$\boldsymbol{V}_{xx} = -\frac{2a_{diff,14,x}}{L_x} - \omega_y^2 - \tilde{\omega}_z^2 \qquad \tilde{\boldsymbol{V}}_{xy} = -\frac{\tilde{a}_{diff,14,y}}{L_x} - \frac{a_{diff,25,x}}{L_y} + \tilde{\omega}_x\omega_y$$

$$\boldsymbol{V}_{yy} = -\frac{2a_{diff,25,y}}{L_y} - \tilde{\omega}_x^2 - \tilde{\omega}_z^2 \quad (3.3) \qquad \boldsymbol{V}_{xz} = -\frac{a_{diff,14,z}}{L_x} - \frac{a_{diff,36,x}}{L_z} + \tilde{\omega}_x\tilde{\omega}_z \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{V}_{zz} = -\frac{2a_{diff,36,z}}{L_z} - \tilde{\omega}_x^2 - \omega_y^2 \qquad \tilde{\boldsymbol{V}}_{yz} = -\frac{\tilde{a}_{diff,25,z}}{L_y} - \frac{\tilde{a}_{diff,36,y}}{L_z} + \omega_y\tilde{\omega}_z.$$

Die Hauptdiagonalelemente des Gravitationsgradiententensors enthalten den Großteil der Gravitationsfeldinformation und sind damit die Zielgrößen zur Gravitationsfeldbestimmung Müller (2001). Anhand der Gleichungen (3.3) und (3.4) wird deutlich, dass die Bestimmung der drei Hauptdiagonalelemente V_{xx}, V_{yy}, V_{zz} sowie der V_{xz} Komponente mit hoher Genauigkeit gelingt. Dies ist auf die hohe Qualität der differentiellen Beschleunigungen entlang der Gradiometerarme $a_{diff,14,x}, a_{diff,25,y}$ und $a_{diff,36,z}$ sowie $a_{diff,14,z}$ und $a_{diff,36,x}$ zurückzuführen. Die Bestimmung der Tensorkomponenten V_{xy} und V_{yz} beruht auf den sogenannten transversalen Beschleunigungsdifferenzen (Differenzen von Beschleunigungen zwischen unterschiedlichen Gradiometerachsen). Diese werden von weniger genauen Beschleunigungen entlang weniger genauer Achsen beeinflusst, so dass deren Ableitung nur mit verminderter Genauigkeit gelingt.

Die Mittelwerte zweier Beschleunigungen $a_{com,lk,i}$ (*common mode accelerations*), die sich in Anlehnung an Gleichung 3.1 zu

$$a_{com,lk,i} = \frac{1}{2}\left(a_{l,i} + a_{k,i}\right) \quad (3.5)$$

ergeben, werden u.a. zur Steuerung des Ionentriebwerks (IPA) genutzt (siehe Abschnitt 3.3). Für weitergehende Ausführungen, die Ableitung der *common mode* Beschleunigungen betreffend, wird auf Stummer (2013) verwiesen.

3.2.3 Einschränkungen und Fehler des Gradiometers

Das Gradiometer ist ein hochentwickeltes Instrument, das jedoch - wie erwartet - nicht perfekt ist. Im Folgenden wird zwischen Einschränkungen und Fehlern unterschieden. Einschränkungen umfassen mehr die 'natürlichen' Eigenschaften des GOCE-Instrumentariums, wohingegen unter Fehlern Einbaufehler sowie äußere Fehlereinflüsse zu verstehen sind, denen man mit einer Kalibration entgegenwirken kann.

Die Bestimmung der Zielgröße, hier der Gravitationsgradienten, wird im Wesentlichen von zwei **Einschränkungen** beeinflusst:

- **Eine weniger genaue Beschleunigungsmesser-Achse:** Aufgrund der on-ground Prüfung des einzelnen Beschleunigungsmesser (siehe Abschnitt 3.2.1) sind nur zwei der drei Achsen jedes Beschleunigungsmessers hochgenau.
- **Frequenzabhängiges Genauigkeitsverhalten der V_{ij}:** Das Gradiometer wurde für einen bestimmten Frequenzbereich, der MBW zwischen 0.005 Hz und 0.1 Hz qualitätsoptimiert. Außerhalb der MBW liefert das Gradiometer weniger genaue Beobachtungen, was sich im Signal besonders in langwelligen Ungenauigkeiten ausdrückt (siehe Abs.4.1).

Die genannten Einschränkungen haben zur Folge, dass zum einen einige differentielle Beschleunigungen und Winkelbeschleunigungen nur mit verminderter Qualität bestimmt werden können, weshalb die Gravitationsgradienten V_{xy} und V_{yz} weniger genau sind (siehe Abschnitt 3.2.2). Zum anderen weisen alle Elemente des Gravitationsgradiententensors langwellige Ungenauigkeiten auf. Im Zuge der Validierung in Kreuzungspunkten muss daher ein Austausch langwelliger Anteile der Gravitationsgradienten gegen Modellinformation - abgeleitet aus einem Gravitationsfeldmodell - erfolgen (siehe Abs. 5.5).

Wie zu Beginn von Abschnitt 3.2.2 erwähnt, gelten die dortigen Formalismen nur im Zusammenhang mit einem - über die genannten Einschränkungen hinaus - perfekten Gradiometer. In der Realität weist das Gradiometer sowie dessen Beschleunigungsmesser (auch Akzelerometer)

verschiedenartige **Fehler** auf. Diese lassen sich nach Müller (2001) einteilen in Instrumenten- und Einbaufehler sowie in Fehler, die durch äußere Einflüsse entstehen:

- **Instrumentenspezifische Fehlerquellen bei der Beschleunigungsmessung**
  - Skalierungsfehler,
  - Fehler aufgrund von Misalignment,
  - Fehler aufgrund der Nicht-Orthogonalität der Akzelerometerachsen,
  - Weitere Fehlerquellen wie Instrumentenrauschen, Bias, quadratischer Faktor oder Positionierung der Akzelerometer.
- **Mögliche Fehlerquellen durch äußere Kräfte**
  - Gravitative Störungen,
  - Einfluss der Atmosphäre und der Steuerung,
  - Transformation zwischen den Bezugssystemen,
  - Einfluss der Winkelbeschleunigungen.

Die genannten Fehlerquellen werden in Müller (2001) im Hinblick auf deren Größenordnung und Auswirkung auf die Zielgrößen detailliert diskutiert. Für weitere Details die Fehlerquellen betreffend wird daher auf Müller (2001) verwiesen.

In der Praxis wurden diese Fehler mit einer Gradiometerkalibration bestimmt und reduziert. Dabei wurde ein spezielles Manöver, das *satellite shaking* durchgeführt, bei dem der Satellit mittels eines Düsensystems definierten Beschleunigungen ausgesetzt wurde. Aus dem Vergleich von Soll-Beschleunigungen und vom Gradiometer gemessenen Beschleunigungen wurden Kalibrationsparameter in Form der Inverse Calibration Matrix (ICM) abgeleitet. Das Verfahren wurde auch als ICM-Kalibration bezeichnet. Diese wurde im gewöhnlichen Betrieb etwa alle 2 Monate durchgeführt. Die exakten Daten der ICM-Kalibrationen sind in GOCE FCT (2014, S. 86) gegeben.

3.3 Weiteres Instrumentarium im GOCE-Satelliten

Neben dem Gravitationsgradiometer enthält der GOCE-Satellit eine Vielzahl weiterer Instrumente, von denen einige bereits in den vorherigen Abschnitten erwähnt wurden. In diesem Abschnitt werden ausgewählte Instrumente erläutert, die einen direkten Einfluss auf die Gravitationsgradienten oder sonstige für die Analyse wichtigen Datenprodukte haben. Die Informationen dieses Abschnittes basieren auf ESA (1999), ESA (2008) und ESA (2015a).

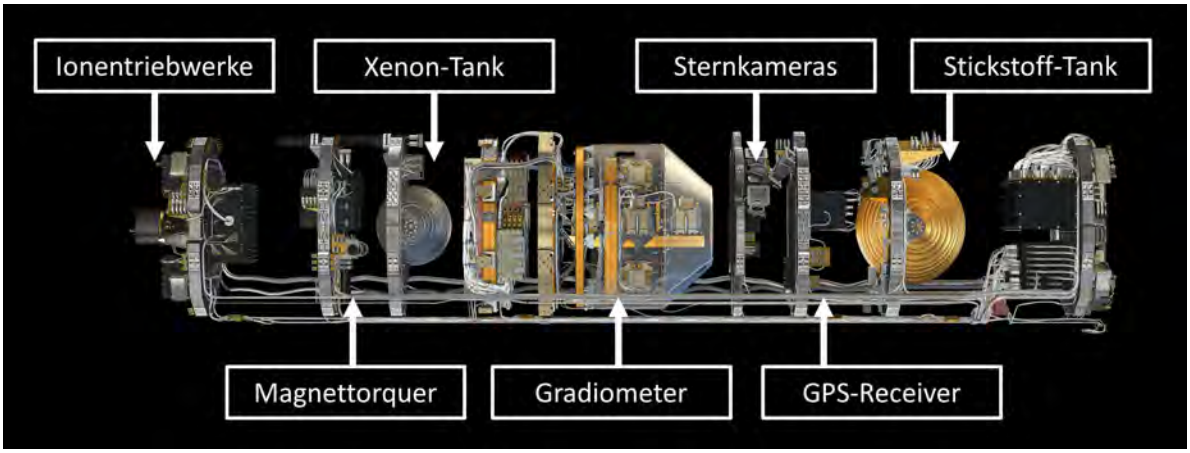


Abbildung 3.5: Anordnung der wesentlichen Instrumente im GOCE-Satelliten, hier Flugrichtung: rechts (Quelle: ESA, 2008, modifiziert).

(a) (b) (c)

Abbildung 3.6: Bilder ausgewählter Instrumente des GOCE-Satelliten (Quelle: ESA, 2008). (a) Helix-L-Band-Antenne, (b) Laser-Retro-Reflektor (LRR), (c) Ionentriebwerk.

Die Instrumente wurden an der Satellitenstruktur montiert, die zu großen Teilen aus kohlefaserverstärkten Kunststoffsandwichplatten besteht. Damit wird eine Trägerkonstruktion mit sehr hoher Steifigkeit geschaffen, die kaum auf variierende Temperaturen reagiert und zudem nur eine geringe Masse aufweist. Um etwaige Temperatureinflüsse auf das Gradiometer auszuschließen, wurde dieses vom Satelliten thermisch vollständig entkoppelt. Die Satelliten-Oberfläche ist auf der Sonnen-zugewandten Seite mit Solarkollektoren überzogen, um eine ausreichende Stromversorgung der Instrumente sicherzustellen.

Abbildung 3.5 gibt einen Einblick in den GOCE-Satelliten und lässt die Anordnung der wichtigsten Instrumente erkennen: Auf der linken Seite sind Teile des Antriebssystems (Ionentriebwerk) zu erkennen. Die Flugrichtung des Satelliten ist 'rechts'. Auf der nächsten Ebene sind zwei Magnettorquer montierte. Es folgt der Xenon-Tank sowie im Massenzentrum des Satelliten das Gradiometer mit den Beschleunigungsmessern inkl. Kontrolleinheiten. Im folgenden Abschnitt sind die drei Sternkameras untergebracht. Die nächste Ebene enthält den GPS-Receiver als Teil des Satellite-to-Satellite Tracking Instrumentes (SSTI). Es folgen der Stickstoff-Tank, die Computer sowie die Lithium-Ionen Batterien, die auf der vordersten Ebene in Flugrichtung platziert wurden. Nicht erkennbar, aber im Folgenden für diese Arbeit wichtig, sind der Laser-Retro-Reflektor sowie die L-Band Antenne als Teil des SSTI.

GNSS-Empfänger und Antenne

Zur Positionierung des GOCE-Satelliten werden Globale Navigationssatellitensysteme [*Global Navigation Satellite Systems*] (GNSS) genutzt. Das high-low Satellite-to-Satellite Tracking (hl-SST) Instrument, das auf der niedrigen (*low*) GOCE-Bahn Signale hoch (*high*) fliegender GPS-Satelliten empfängt und verarbeitet, besteht aus einem Doppelfrequenz 12-Kanal GPS-Receiver und einer Helix-L-Band-Antenne (siehe Abb. 3.6(a)). Damit gelingt die simultane Verarbeitung der Signale von bis zu 12-GPS-Satelliten. Die Ergebnisse umfassen Code- (*pseudo-range*) und Trägerphasenbeobachtungen (*carrier-phase*) auf beiden GPS-Frequenzen (Datenrate 1 Hz) sowie eine Navigationslösung. Außerdem stellt der GPS-Receiver ein Puls pro Sekunde [*Pulse Per Second*] (PPS) Signal bereit, mit dem der Bezug zur GPS-Zeit gegeben ist (siehe Abs. 2.1.5, S. 19) und alle Beobachtungen zeitlich referenziert werden können.

Die Beobachtungen dienen als Grundlage für die Orbitbestimmung (Level-1b Datenprodukt) sowie für die Precise Science Orbits (PSO) als Level-2 Produkt (siehe Abschnitt 3.5, S. 59) Im Falle von GOCE ist die Qualität der Orbitlösungen besonders wichtig, da die Positionen neben den Gradiometerbeobachtungen die entscheidende Datenbasis für rein GOCE-basierte Gravitationsfeldlösungen darstellen. Weitere Ausführungen finden sich in ESA (1999) und SERCO/DATAMAT Consortium (2008).

Laser-Retro-Reflektor

Der Laser Retro Reflector (LRR) ist ein passiver Sensor mit einem Durchmesser von etwa 12 cm, der an der erd-zugewandten Seite des Satelliten montiert wurde. Der LRR (siehe Abb. 3.6(b)) besteht aus sieben corner-cube Reflektoren, die die Eigenschaft haben, Laser-Pulse exakt in die Richtung zu reflektieren, aus der der Laserstrahl eingefallen ist. Damit war es möglich, Satellite Laser Ranging (SLR) Beobachtungen zwischen GOCE-Satelliten und SLR-Bodenstationen durchzuführen und deren Entfernungen zu bestimmen. Aus SLR-Beobachtungen lässt sich ein vollständig vom Satellitensystem und dem GNSS-Positionierungssystem losgelöster, unabhängiger Datensatz an Positionen des Satelliten ableiten. Dieser eignet sich als unabhängige Referenz zur Kontrolle und Validierung der Precise Science Orbit (PSO)-Lösungen.

Weitere Informationen zur Entwicklung sowie Prüfergebnisse des GOCE-LRR Laser-Retro-Reflektors sind in Shargorodsky (2004) enthalten.

Sternkameras

Der GOCE-Satellit wurde mit drei Sternkameras (auch Sternsensoren) versehen. Diese wurden direkt oberhalb des Gradiometers installiert (siehe Abb. 3.5), mit dem Ziel, eine möglichst direkte Information zur Orientierung des Gradiometers und deren Änderungen zu erhalten. Die Ausrichtung der einzelnen Sternkameras wurde so gewählt, dass eine äußerst präzise Lagebestimmung erreicht wird und zeitgleich höchstens eine Kamera überbelichtet werden kann (z.B. durch den Mond). Die Ausrichtung lässt sich anhand von Coviello (2007) wie folgt beschreiben: Die Blickrichtung von Sternkamera 1 verlief senkrecht zur Satellitenlängsachse in einem Winkel von 30° entfernt von der Mitte (kleines Richtungsruder) der Sonnen-abgewandten Seite des Satelliten. Die Blickrichtung von Sternkamera 2 verlief ebenfalls senkrecht zur Satellitenlängsachse und wurde im Verhältnis zu Sensorkopf 1 um 40° verändert (70° von der Mitte der Sonnenabgewandten Seite). Sternkamera 3 wurde in der gleichen Satelliten-Längs-Ebene wie Sternkamera 1 jedoch mit einer Neigung von 40° in 'Flugrichtung' ausgerichtet.

Aktuatoren zur Lageregelung

Der GOCE-Satellit ist mit drei wichtigen Aktuatoren zur Lageregelung ausgestattet:

- Ein **Magnettorquer** ist ein Elektromagnet, der der 'sanften' Lageregelung dient. Er erzeugt einen starken magnetischen Dipol, der die Eigenschaft besitzt, sich im Magnetfeld der Erde immer parallel zu dessen Feldlinien anordnen zu wollen, wodurch ein Drehmoment erzeugt wird. GOCE wurde mit drei Magnettorquern ausgerüstet, die senkrecht zueinander und entlang der drei Achsen des Satelliten ausgerichtet wurden. An einzelnen Positionen kann der Fall eintreten, dass das Erdmagnetfeld nicht zu jeder Zeit eine Komponente hat, die senkrecht auf allen Achsen steht (GOCE Projektbüro, 2016). In diesen Punkten können einzelne Drehmomente nicht erzeugt werden, worin Abweichungen zwischen realer und nomineller GOCE-Orientierung in der Größenordnung von etwa $\pm$ 3° resultierten.
- **Kaltgasdüsen** dienten der schnellen Lageregelung und wurden für Orbitmanöver sowie bei ICM-Kalibrationen (*Satellite Shakings*) eingesetzt. Als Treibstoff wird Stickstoff eingesetzt (siehe Stickstoff-Tank Abb. 3.5).
- Das **Ionentriebwerk** ist Teil des Ion Propulsion Assembly (IPA) und dient der Bahnhaltung. Es stellt für die GOCE-Mission ein besonders entscheidendes Instrument dar und wird daher im folgenden Abschnitt gesondert behandelt.

Weitere Informationen über Sensoren und Aktuatoren zu Lageregelung sind am Beispiel der Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE)-Mission in Bandikova (2015) zu finden.

Ionentriebwerke und Ion Propulsion Assembly (IPA)

Der GOCE-Satellit ist mit zwei redundanten Ionentriebwerken ausgestattet (siehe Abb. 3.6(c)), die u.a. neben dem Xenon-Treibstofftank Teil des Ion Propulsion Assembly (IPA) sind und auf Schubbefehle des Drag-Free and Attitude Control System (DFACS) reagieren. Während das IPA für einen kontinuierlichen Schub sorgt, wird die Intensität des Schubes auf Basis von Informationen des DFACS mit einer Frequenz von 10 Hz reguliert. Dazu bestimmt das DFACS die auf den Satelliten wirkenden nicht-gravitativen Beschleunigungen und sendet einen Steuerbefehl an das IPA zur Erzeugung eines ausreichend großen Schubes, um der gemessenen Beschleunigung entgegenzuwirken (Wallace et al., 2011). Die Reaktion des IPA erfolgt damit im Vergleich zum Zeitpunkt der Beschleunigungsmessung mit einer Latenzzeit von 0.1 s. Dies hat jedoch keine Auswirkungen auf die Datenprodukte, die mit einer Frequenz von 1 Hz bereitgestellt werden (siehe auch Abs. 3.5).

Bei dem auf GOCE realisierten DFACS handelte es sich um kein vollständig drag-free System: Einerseits kompensierte das System nicht-gravitative Beschleunigungen nur im Frequenzbereich zwischen 1 mHz und 100 Hz (Edwards et al., 2004) und andererseits konnte diesen Beschleunigungen - wie bereits erwähnt - nur in Richtung der Satellitenlängsachse entgegengewirkt werden. Da die nicht-gravitativen Beschleunigungen die senkrecht zur Satellitenlängsachse auf den Satelliten einwirkten im Vergleich zu denen in Längsrichtung deutlich geringer ausfielen, genügte die Kompensation derjenigen in Längsrichtung ohne einen limitierenden Faktor für die Leistung des Gesamtsystems darzustellen. Das DFACS schafft somit die notwendigen Voraussetzungen zur Minimierung der auftretenden (nicht-gravitativen) Beschleunigungen und garantiert eine ausreichend ruhige Umgebung für das Gradiometer.

Weitere Details zum Aufbau des IPA sowie eine Beurteilung von DFACS und IPA während der ersten Monate der GOCE-Mission sind in Wallace et al. (2011) oder Sechi et al. (2011) zu finden.

Im operationellen Betrieb kam es im IPA vereinzelt zu sogenannten ***Beam-Outs***. Dabei handelt es sich um einen Kurzschluss zwischen Komponenten des IPA, der in einem kurzen Aussetzer des Ionentriebwerkes resultiert (Tato et al., 2004). Dieser 'Fehler' des IPA ist auch bei der Validierung der Gravitationsgradienten zu berücksichtigen, da er sich in den Beschleunigungen niederschlägt und bis auf die Gradienten fortpflanzt. Frommknecht et al. (2011) zeigen den Einfluss eines Beam-Outs auf die *common mode* Beschleunigungen und weisen auf dessen Einfluss auf die Tensorkomponente V_{xx} hin. In einer Zeitreihe von Gravitationsgradienten stellen sich Beam-Outs in Form kurzer Oszillationen dar. Da die Größenordnung der Beam-Out induzierten Oszillationen die Validierungsgenauigkeit der Kreuzungspunktanalyse überschreitet, lassen sich Beam-Outs im Zuge der Validierung identifizieren (siehe Abs. 6.4).

3.4 Koordinatensysteme und Transformationen

Im Zusammenhang mit der GOCE-Mission und der GOCE-bezogenen Datenverarbeitung sind verschiedene Koordinatensysteme und -transformationen wichtig. Vor allem im englischen Sprachgebrauch wird in diesem Zusammenhang zwischen Bezugssystem (*reference system*) und Bezugsrahmen (*reference frame*) unterschieden. Ein Bezugssystem definiert theoretisch die Festlegung des Ursprungs sowie der Achsen des Systems, auch Konstanten, Modelle, usw. Die Realisierung des Bezugssystems ist der Bezugsrahmen, also die Bestimmung von Koordinaten im zuvor definierten System. Dieser stellt dann mit Hilfe präziser Koordinaten den Praxisbezug her. Im Falle des International Celestial Reference Frame (ICRF) sind dies präzise Koordinaten kompakter extra-galaktischer Radioquellen (Petit und Luzum, 2010), anhand derer der Bezugsrahmen als Realisierung des Bezugssystems (International Celestial Reference System (ICRS)) gelagert und orientiert wird.

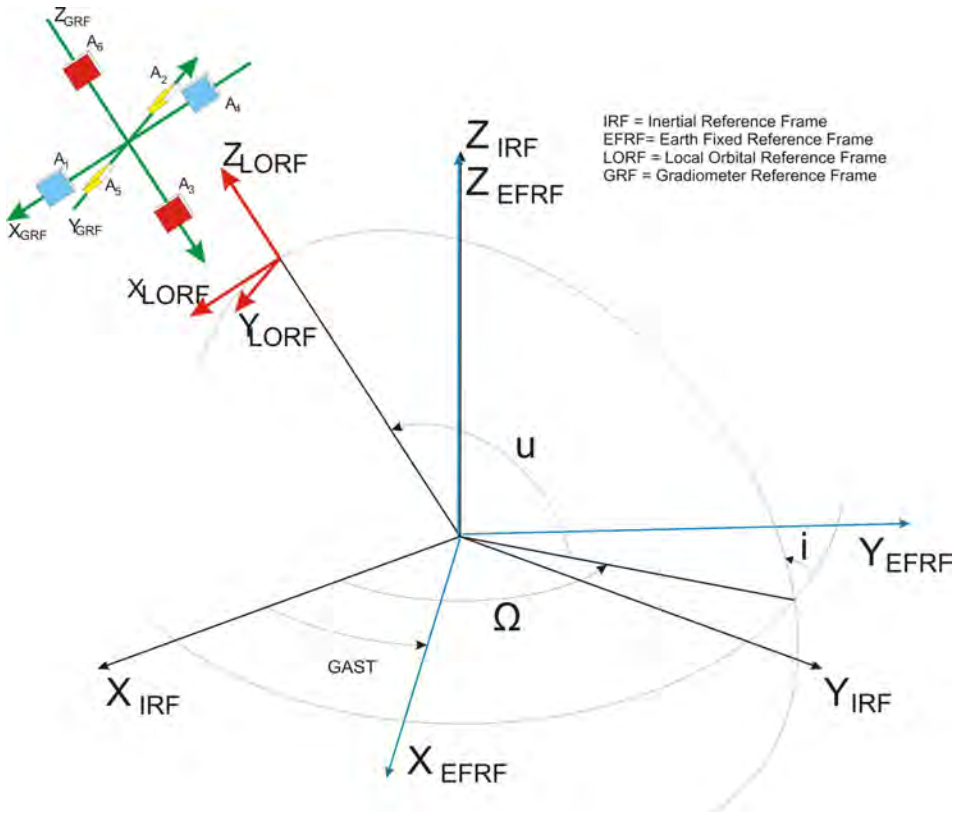


Abbildung 3.7: Koordinatensysteme (Quelle: Gruber et al., 2014c).

3.4.1 GOCE-relevante Koordinatensysteme

In den folgenden Erläuterungen der im Zusammenhang mit GOCE interessierenden Systeme wird verallgemeinernd von Koordinatensystemen gesprochen, auch wenn es sich i.d.R. um Bezugsrahmen handelt. Sofern im Folgenden nicht anders angegeben, basieren die Inhalte dieses Abschnittes auf Gruber et al. (2014a,c).

Im Zusammenhang mit GOCE können drei Gruppen von Koordinatensystemen unterschieden werden:

1. **Übergeordnete Koordinatensysteme**,
2. **Gradiometrie-bezogene Koordinatensysteme**,
3. **Instrumenten-spezifische Koordinatensysteme**.

Die für GOCE und die Validierung relevanten Koordinatensysteme der einzelnen Gruppen sind in Abbildung 3.7 dargestellt und werden im folgenden erläutert.

Übergeordnete Koordinatensysteme

Übergeordnete Koordinatensysteme umfassen zälestische (z.B. ICRS) und terrestrische (z.B. International Terrestrial Reference System (ITRS)) Systeme. Diese sind in der Geodäsie von entscheidender Bedeutung, da über deren Bezug z.B. Beobachtungen extra-galaktischer Objekte mit Beobachtungen auf der Erde verknüpft werden können. Für die GOCE-Datenverarbeitung ist einerseits der Bezug zwischen den Koordinatensystemen zum Zwecke von Transformationen wichtig. Andererseits werden Positionen und Geschwindigkeiten des GOCE-Satelliten im International Terrestrial Reference Frame (ITRF) bereitgestellt. Eine übersichtliche Erläuterung der übergeordneten Koordinatensysteme ist in Gruber et al. (2014a), Kapitel 4 zu finden, für eine detaillierte Beschreibung wird auf McCarthy und Petit (2003) verwiesen. Im Folgenden sind aus dieser Gruppe relevant: Inertial Reference Frame (IRF) sowie Earth Fixed Reference Frame (EFRF).

Inertial Reference Frame (IRF)

Das IRF ist ein raumfestes (inertiales), drei-achsig orthogonales Koordinatensystem, dessen Ursprung im Geozentrum gelagert ist. Die x-Achse zeigt in Richtung des Frühlingspunktes, die z-Achse in Richtung des zälestischen Pols. Die y-Achse komplettiert das Rechtssystem. Es gilt zu beachten, dass es sich bei dem IRF - mit Bezug auf die Namenskonventionen gemäß McCarthy und Petit (2003) - um ein ICRF handelt. Dies kann zu Irritationen führen, es handelt sich aber um dasselbe System.

Im Zuge der GOCE-Validierung fungiert das IRF als 'Zwischensystem', so z.B. bei der Transformation zwischen LNOF und GRF.

Earth Fixed Reference Frame (EFRF)

Das EFRF ist ein erdfestes, drei-achsig orthogonales Koordinatensystem, dessen Ursprung im Geozentrum gelagert ist. Es folgt der Rotation der Erde und deren täglicher Bewegung im Raum. Die x-Achse zeigt in Richtung des Meridians von Greenwich und kreuzt diesen in der Äquatorebene. Die z-Achse weist in Richtung des Nordpols, die y-Achse komplettiert ein Rechtssystem.

Ähnlich den Namenskonventionen des IRF handelt es sich bei dem EFRF unter 'offiziellem' Namen (McCarthy und Petit, 2003) um ein ITRF. Für die GOCE-Mission wurde als EFRF die Realisierung ITRF2008 (Altamimi et al., 2011) gewählt. Darin werden GOCE-Positionen und Geschwindigkeiten bereitgestellt.

Gradiometrie-bezogene Koordinatensysteme

Gradiometrie-bezogene Koordinatensysteme sind von zentraler Bedeutung für die hiesige Validierung, da die GOCE-Gravitationsgradienten darin bestimmt, bereitgestellt und behandelt werden. Sie sind im Satelliten gelagert und rotieren mit dem Satelliten um die Erde. In diese Gruppen fallen die im Folgenden beschriebenen Koordinatensysteme: Gradiometer Reference Frame (GRF), Local Orbital Reference Frame (LORF) sowie Local North Oriented Frame (LNOF).

Gradiometer Reference Frame (GRF)

Das GRF ist ein Gradiometer-festes Koordinatensystem, in dem die Gravitationsgradienten bestimmt werden. Der Ursprung des GRF ist im Mittelpunkt der geradlinigen Verbindung zwischen den beiden Zentren der Beschleunigungsmesser A_3 und A_6 gelagert. Die x-Achse zeigt in Flugrichtung des Satelliten (*along-track*) und verläuft parallel zur Verbindungslinie der beiden Zentren der Beschleunigungsmesser A_1 und A_4. Die z-Achse verläuft parallel zur Verbindungslinie durch die beiden Zentren der Beschleunigungsmesser A_3 und A_6 und zeigt in erster Näherung in Richtung Erdmittelpunkt (*radially-inwards*). Die y-Achse komplettiert das Rechtssystem und verläuft parallel zur Verbindungslinie durch die Zentren der Beschleunigungsmesser A_2 und A_5; sie zeigt näherungsweise in Richtung der Normalen der Orbit-Ebene (*cross-track*) und damit in grober Näherung in Richtung Sonne.

Nominal schneiden sich alle drei Verbindungslinien zwischen den Zentren der Beschleunigungsmesserpaare $A_1|A_4$, $A_2|A_5$ und $A_3|A_6$ exakt in einem Punkt, dem Ursprung des GRF. Und auch die Achsen des GRF fallen idealerweise mit den Verbindungslinien der jeweiligen Beschleunigungsmesser-Zentren zusammen. Aufgrund von Fertigungsunsicherheiten können Abweichungen sowie Fehler gemäß Abschnitt 3.2.3 auftreten.

Der GOCE-Satellit wird mittels der Sensorik zur Lage-Regelung (siehe Abs. 3.3, S. 53) so orientiert, dass die x-Achse des GRF in die Bewegungsrichtung des Satelliten (entspricht dem LORF) weist. Aufgrund der 'sanften' Lageregelung mittels Magnettorquern kann diese Orientierung nicht dauerhaft zu 100% gewährleistet werden und es kommt zu Orientierungsunterschieden zwischen LORF und GRF in der Größenordnung von $\pm 3°$.

Der Ursprung des GRF und damit das ungefähre Zentrum des Gradiometers fällt nicht exakt mit dem Massenmittelpunkt des Satelliten zusammen. Entlang der x-Achse treten beispielsweise Differenzen von etwa 2 cm auf (Fuchs und Bouman, 2011), die auf die weiteren Analysen jedoch keinen Einfluss haben.

Local Orbital Reference Frame (LORF)

Das LORF ist ein drei-achsiges Koordinatensystem, das im Massenmittelpunkt des Satelliten gelagert ist. Die x-Achse zeigt in Richtung des derzeitigen Geschwindigkeitsvektors $\vec{V}$ des Satelliten, die y-Achse in die momentane Richtung des Bahndrehimpulses $\vec{N}$. $\vec{V}$ und $\vec{N}$ sind definitionsgemäß orthogonal, solange gilt $\vec{N} = \vec{R} \times \vec{V}$, mit $\vec{R}$ dem Vektor vom Geozentrum zum Ursprung des LORF. Die z-Achse steht senkrecht auf $\vec{V}$ und $\vec{N}$ (parallel zu $\vec{V} \times \vec{N}$, Rechtssystem).

Fuchs und Bouman (2011) bestimmen zwei Arten von LORFs: LORF-v und LORF-r. Bei dem oben beschriebenen Typ handelt es sich um das LORF-v. Das LORF-r wird bezüglich des Radiusvektors definiert: Die z-Achse entspricht dem Radiusvektor $\vec{R}$ vom Geozentrum zum Massenmittelpunkt des Satelliten, die y-Achse stimmt mit der des LORF-v überein und die z-Achse komplettiert das Rechtssystem.

Local North Oriented Frame (LNOF)

Bei dem LNOF handelt es sich um ein orthogonales, drei-achsiges Rechtssystem, mit Achsenausrichtung 'Norden-Westen-Oben'. Der Ursprung des LNOF liegt im Massenmittelpunkt [*Center of Mass*] (CoM) des Satelliten. Die z-Achse Z_{LNOF} ist definiert als Vektor vom Geozentrum zum CoM des Satelliten und zeigt radial nach außen. Die y-Achse Y_{LNOF} ist parallel zum Normalenvektor der Ebene des geozentrischen Meridians durch den CoM des Satelliten und zeigt westwärts. Die x-Achse X_{LNOF} zeigt nordwärts und ist definiert als Normalenvektor der durch Y_{LNOF} und Z_{LNOF} definierten Ebene.

Die drei Achsen lassen sich aus den geozentrischen Positionen (λ, φ) (gemäß Gl. (2.84), S. 33) des CoM des Satelliten ableiten nach

$$Z_{LNOF} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}; \quad Y_{LNOF} = \begin{pmatrix} \sin\lambda \\ -\cos\lambda \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_{LNOF} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda \\ -\sin\varphi\sin\lambda \\ \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Instrumenten-spezifische Koordinatensysteme

In diese Gruppe fallen verschiedene Koordinatensysteme, in denen meist Beobachtungen von Instrumenten-internen Komponenten erfasst werden. Im Falle von GOCE sind dies Systeme, in denen Bewegungen und Orientierungen einzelner Beschleunigungsmesser oder der Sternsensoren (star sensors) beschrieben werden, oder die zur Verknüpfung der Beobachtungen einzelner Elektroden innerhalb jedes Beschleunigungsmessers notwendig sind. Da diese Systeme im Folgenden keine direkte Rolle spielen, werden sie hier nicht weiter behandelt. Für weitergehende Beschreibungen wird auf Gruber et al. (2014a) verwiesen.

3.4.2 Transformationen zwischen Koordinatensystemen

Um Vektoren (oder Matrizen) von einem Koordinatensystem in ein anderes Koordinatensystem zu überführen, sind diese zu transformieren. Allgemein spricht man bei einer Transformation in der linearen Algebra von einer linearen Abbildung des $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Bei der GOCE-Datenverarbeitung haben wir es beinahe ausschließlich mit Transformationen vom $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zu tun. Dabei kann eine Transformation im $\mathbb{R}^3$ allgemein mehrere 'Operationen' beinhalten (Heck, 2003, S. 359): drei Parallelverschiebungen in Richtung der Koordinatenachsen, drei Drehwinkel, drei Scherwinkel sowie drei Maßstabsfaktoren.

Tabelle 3.1: Datenbasen der Drehmatrizen (Rotationsmatrizen) für Transformationen zwischen Koordinatensystemen bei der GOCE-Gradientenvalidierung und deren Herkunft.

Drehung zwischen Koordinatensystemen	**Datenbasis** (ggf. engl. Originalbezeichnung)	**Herkunft** (siehe auch Abs. 3.5)
GRF $\longleftrightarrow$ IRF	Inertial Attitude Quaternions $\boldsymbol{q}_{\mathrm{IAQ}}$	EGG_NOM_2: Quaternions (entspricht EGG_IAQ_1b)
IRF $\longleftrightarrow$ EFRF	Earth Orientation Quaternions $\boldsymbol{q}_{\mathrm{EOQ}}$	SST_PSO_2: SST_PRM_2 - Quaternions
EFRF $\longleftrightarrow$ LNOF	geozentr. Positionen (λ, φ)	nach Gl. (2.84) basierend auf SST_PSO_2: SST_PRD_2

GOCE-Positionen oder Gravitationsgradienten (GG)-Tensoren sollen bei der Transformation keine Verzerrungen durch Scherwinkel oder Maßstabsfaktoren erfahren. Daher lässt sich die Transformation eines Vektors $\boldsymbol{x}$ vereinfacht und klassisch darstellen zu

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}. \tag{3.7}$$

Darin wird die klassische Aufteilung der Transformation in eine Rotation (Multiplikation des Vektors $\boldsymbol{x}$ mit Drehmatrix $\boldsymbol{R}$, die die Drehwinkel enthält) und eine Translation ($\boldsymbol{b}$, enthält drei Parallelverschiebungen in Richtung der Koordinatenachsen) erkennbar. Mit Gleichung (3.7) gelingt die Abbildung des Vektors $\boldsymbol{x}$ auf den Vektor $\boldsymbol{y}$. Bei der Drehmatrix $\boldsymbol{R}$, die auch als Rotationsmatrix bezeichnet wird, handelt es sich um eine orthogonale Matrix mit entsprechenden Eigenschaften (siehe Abs. 2.3).

Werden beispielsweise Positionen (Positionsvektoren) zwischen EFRF und IRF transformiert, vereinfacht sich wegen der geozentrischen Lagerung beider Systeme die Transformation zu einer reinen Rotation (Becker und Hehl, 2012) gemäß

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{IRF}} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{x}_{\mathrm{EFRF}} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{x}_{\mathrm{EFRF}} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{x}_{\mathrm{IRF}}. \tag{3.8}$$

Diese Vereinfachung wird ebenfalls bei der Transformation zwischen den im Satelliten gelagerten Koordinatensystemen GRF, LORF sowie LNOF angesetzt. Abweichungen zwischen dem Ursprung dieser drei Systeme, die sich im Vektor $\boldsymbol{b}$ (Gl. (3.7)) abbilden, belaufen sich auf maximal wenige Zentimeter und werden vernachlässigt, da sie für die weiteren Analysen nicht ins Gewicht fallen.

Im Zuge der Validierung in Kreuzungspunkten werden Transformationen zwischen verschiedenen Koordinatensystemen benötigt. Tabelle 3.1 zeigt, zwischen welchen Systemen transformiert bzw. rotiert wird und auf welcher Datenbasis die jeweiligen Drehmatrizen beruhen. Um gemäß Gleichung (3.8) eine Transformation ausführen zu können, hat eine Überführung der Quaternionen bzw. der geozentrischen Positionen in Drehmatrizen $\boldsymbol{R}$ zu erfolgen. Der entsprechende Zusammenhang ist Gleichung (2.83) (S.32) zu entnehmen.

Die Drehmatrix $\boldsymbol{R}_{\mathrm{EFRF} \leftarrow \mathrm{LNOF}}$ auf Basis der geozentrischen Positionen (λ, φ) ergibt sich durch Kombination von Gleichungen (3.6) zu

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{EFRF} \leftarrow \mathrm{LNOF}}(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & \sin\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ -\sin\varphi\sin\lambda & -\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Ist beispielsweise eine Transformation vom LNOF in das GRF notwendig, gelingt die Bestimmung der entsprechenden Drehmatrix $\boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF} \leftarrow \mathrm{LNOF}}$ durch Kombination der einzelnen Drehmatrizen nach

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF} \leftarrow \mathrm{LNOF}} = \boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF} \leftarrow \mathrm{IRF}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{IAQ}}) \cdot \boldsymbol{R}_{\mathrm{IRF} \leftarrow \mathrm{EFRF}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{EOQ}}) \cdot \boldsymbol{R}_{\mathrm{EFRF} \leftarrow \mathrm{LNOF}}(\lambda, \varphi). \tag{3.10}$$

Dabei ist zu beachten, dass Matrixmultiplikationen nicht kommutativ sind und die Reihenfolge, in der die einzelnen Matrizen multipliziert werden, daher einzuhalten ist.

Die Rotationsmatrizen können nun gemäß der Vorschriften aus Abschnitt 2.3 (S. 29) zur Transformation bzw. Rotation von Vektoren und Matrizen genutzt werden. Im weiteren Gebrauch wird bei der Notation der Drehmatrizen auf die Angabe der Datenbasis der Rotationsinformation (eingeklammerte Information auf der rechten Seite von Gl. (3.10)) verzichtet.

3.5 Datenprodukte und deren Genauigkeiten

Dieser Abschnitt erläutert diejenigen Datenprodukte der GOCE-Mission, die im Zuge der Validierung genutzt werden. Generell wurden seitens der European Space Agency (ESA) direkt und mit einer Latenzzeit von nur wenigen Tagen sogenannte Level 1b Produkte bereitgestellt, die sich in drei Kategorien aufteilen lassen (SERCO/DATAMAT Consortium, 2008):

1. **Satellite-to-Satellite Tracking Daten (SST_NOM_1b)**: GPS-Rohdaten, Korrekturen und Orbitlösungen, inkl. Positionen, Geschwindigkeiten sowie präzise Zeitinformation;
2. **Satellite-to-Satellite Tracking RINEX-Daten (SST_RIN_1b)**: GPS-Rohdaten im RINEX-Format; sowie
3. **Electrostatic Gravity Gradiometer Daten(EGG_NOM_2)**: Rohdaten der Beschleunigungsmesser, kalibrierte Beschleunigungen, die Gravitationsgradienten im GRF, sowie Rotationsinformation zwischen GRF und IRF ($\boldsymbol{q}_{\mathrm{IAQ}}$).

Neben den Level 1b Produkten sind auch sogenannte Level 2 Produkte verfügbar. Beide werden über das *ESA GOCE Virtual Archive*[3] bereitgestellt. Die Level 2 Produkte wurden von der *High Level Processing Facility* berechnet, einem Verbundsystem, das vom *European GOCE Gravity-Consortium (EGG-C)* entwickelt und betrieben wurde. Die Level 2 Produkte werden mit Latenzzeiten zwischen 2 Wochen und 1 Jahr zur Verfügung gestellt und lassen sich ebenfalls in drei Kategorien einteilen:

1. **Gravitationsgradienten**: In den Koordinatensystemen GRF (EGG_NOM_2), LNOF (EGG_TRF_2) sowie als Gitter in Satellitenhöhe (GRD_SPW_2) sowie 10 km über der Erdoberfläche (GRC_SPW_2);
2. **GOCE Orbits** (SST_PSO_2): Reduziert-dynamische sowie kinematische PSO, Rotationsinformation zwischen IRF und EFRF ($\boldsymbol{q}_{\mathrm{EOQ}}$), Varianzinformationen für kinematische Orbits und einen Qualitätsbericht;
3. **GOCE Gravitationsfelder**: Gravitationsfeldmodelle (EGM_GOC_2), deren Varianz-Kovarianz-Matrix (EGM_GVC_2) sowie zeitvariable Gravitationsvariationen (SST_AUX_2).

Um die Möglichkeiten der Gradientenvalidierung in Kreuzungspunkten als schnelles Analysetool bestmöglich auszunutzen und Validierungsergebnisse mit geringer Latenzzeit nach der Datenerfassung bereitstellen zu können, sollten auch die Satellitendaten zeitnah zur Verfügung stehen. Diese Forderung wurde am ehesten mit den GOCE Level 1b Daten erfüllt. Dennoch wird die hiesige Validierung auf Level 2 Daten gestützt. Dies hat in erster Linie praktische Gründe: Die zu validierende Größe, die **Gravitationsgradienten sind als Level 1b und als Level 2 Produkt identisch**. Es wurde keinerlei Modifikation der Gradienten vorgenommen, mit Ausnahme der Abspaltung zeitvariabler Anteile, die zusätzlich bereitgestellt werden.

Ein weiterer Grund für die Nutzung der Level 2 Produkte liegt in den Eigenschaften speziell der Orbitprodukte. Die Positionen als Level 1b Produkt (SST_PVT_1b) sind teilweise mit Ausreißern sowie kleineren Datenlücken behaftet und können Sprünge enthalten. Speziell die reduziert-dynamischen Orbitlösungen (Level 2 Produkt, SST_PSO_2: SST_PRD_2) weisen einen harmonischen Verlauf ohne Sprünge und Ausreißer auf. Auch wenn die reduziert-dynamischen Positionen nur eine Datenrate von 0.1 Hz ($\Delta t = 10$ s) aufweisen, spiegeln die Positionen die als verhältnismäßig gleichförmig und 'ruhig' anzunehmende Bewegung des GOCE-

[3]Erreichbar über den Weblink: http://eo-virtual-archive1.esa.int/, letzter Zugriff 12.12.2016.

Satelliten im Orbit sehr gut wider. Als Grundlage der hiesigen Validierung der Gradienten werden aus zweierlei Gründen reduziert-dynamische Orbits zugrunde gelegt: diese sind Genauigkeit und Praktikabilität. In puncto Genauigkeit liegen die reduziert-dynamischen Orbits im unteren cm-Bereich (siehe nächster Absatz). Was die Praktikabilität betrifft, so sind die reduziert-dynamischen Orbits im Vergleich zu den kinematischen oder auch den Level 1b Orbits am wenigsten von Ausreißern oder Datensprüngen beeinflusst und weisen eine nahezu perfekt konstante Datenrate auf. Um im Zuge der Datenverarbeitung nicht mit Aufgaben wie Ausreißersuche und Behandlung von Datensprüngen, etc. konfrontiert zu werden, wird die Validierung der Gradienten auf reduziert-dynamische Orbits gestützt. Eine intensive Diskussion zur Wahl des reduziert-dynamischen Orbits ist im folgendem Abschnitt gegeben.

Ein weiterer rein praktischer Grund zur Nutzung der Level 2 Produkte ist die Tatsache, dass die für die Analyse benötigte Transformationsinformation zwischen IRF und EFRF in Form der Quaternionen $\boldsymbol{q}_{\mathrm{EOQ}}$ als Level 2 Produkt vorliegt. Die Berechnungen dieser terrestrisch-zälestischen Transformation lassen sich mit vollkommen äquivalentem Ergebnis beispielsweise mit Hilfe der Erläuterungen in Gruber et al. (2014a) oder McCarthy und Petit (2003) bestimmen.

Verwendung von kinematischen oder reduziert-dynamischen Orbits

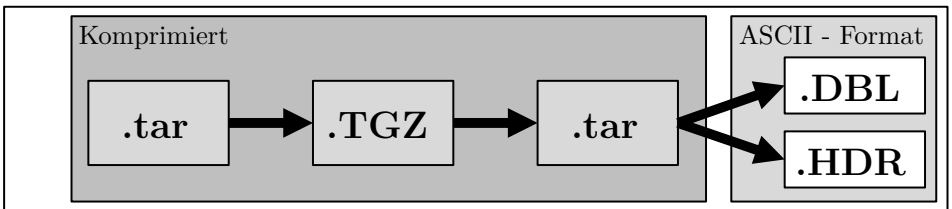
Die beiden GOCE Level 2 Orbitlösungen beruhen auf unterschiedlichen Berechnungsstrategien. Entsprechende Grundlagen sind in Bock et al. (2007) sowie Švehla und Rothacher (2005) zu finden. Für tiefer gehende Beschreibungen wird beispielsweise auf Švehla und Rothacher (2003), Jäggi (2003) sowie Bock (2003) verwiesen.

Die kinematische Bahnbestimmung beruht auf einem rein geometrischen Ansatz, bei dem ausschließlich auf Basis der GPS-Beobachtungen 3D-Positionen sowie Receiver-Uhr-Fehler für jede Epoche (1 Hz) bestimmt werden. Sie enthalten keinerlei Kräftemodelle oder Informationen zur Satellitendynamik.

Reduziert-dynamische Bahnen basieren neben den GPS-Beobachtungen auf einer Vielzahl von Kräftemodellen (Montenbruck und Gill, 2005): Gravitationsfelder von Erde und Planeten, Strahlungsdruck der Sonne, Atmosphärenwiderstand u.v.m. Die Bestimmung reduziert-dynamischer Positionen basiert auf der numerischen Integration von Bewegungs- und Variationsgleichungen mit dem Ziel, die Bahn sowie die partiellen Ableitungen in Bezug auf die Orbitparameter zu erhalten (Švehla und Rothacher, 2005). Dabei werden eine Vielzahl empirischer Parameter angesetzt, um die Schwächen der Kräftemodelle abzufangen. Die reduziert-dynamische Bahnpositionen erlaubt die Bestimmung von LEO-Orbits höchster Qualität (Jäggi, 2003), sind gleichzeitig aber stark abhängig von den genutzten Kräftemodellen (Jäggi et al., 2008). Im Falle von GOCE werden sie als Level 2 Produkt (SST_PSO_2: SST_PRD_2) mit einer Datenrate von 0.1 Hz (Δt = 10 s) bereitgestellt.

Welche Art der Bahnbestimmung die besseren Ergebnisse liefert, lässt sich letztlich nur mit Hilfe einer unabhängigen Referenz beantworten. Im Fall von GOCE stehen dazu SLR-Beobachtungen zur Verfügung. Anhand der Analyse der SLR-Residuen gelingt eine unabhängige Beurteilung der Qualität reduziert-dynamischer sowie kinematischer Positionen. Bock et al. (2014) analysieren SLR-Residuen über den gesamten Missionszeitraum und bestimmen einen RMS der Residuen von 1.84 cm für die reduziert-dynamischen und 2.42 cm für die kinematischen Positionen. Die kinematischen Positionslösungen speziell gegen Ende der Mission wurden negativ von der steigenden Sonnenaktivität beeinflusst. Die Orbit-Missions-Requirements der PSOs von 2 cm wurden von den reduziert-dynamischen Positionen damit sogar unterschritten.

Die Wahl der Orbits hat je nach Anwendungsgebiet zu erfolgen. Sollen Positionen zur Bestimmung langwelliger Anteile einer Gravitationsfeldlösung genutzt werden (siehe Wu, 2016), wird dringend empfohlen, kinematische Orbits zu nutzen, die nicht auf Kräftemodellen und damit bereits auf bestehenden Gravitationsfeldmodellen beruhen. Im Zuge der Gradientenvalidierung dienen die Orbits zur Positionierung, und ihre Richtigkeit ist eher von Interesse als deren physikalische Berechnungsgrundlage.



	1/2 Monat	1 Tag	1 Tag	1 Tag
SST	560 MB	37 MB	450 MB	450 MB
				< 1 MB
EGG	500 MB	25 MB	30 MB	30 MB
				< 1 MB

Abbildung 3.8: Dekomprimierung der GOCE-Daten (EGG und SST) in drei Schritten; seitens der ESA werden Files im Umfang eines halben Monats bereitgestellt; vollständig dekomprimiert, entstehen zwei XML-Files im Umfang eines Tages im ASCII-Format (.DBL und .HDR).

Da einersits - wie beschrieben - keine qualitativen Nachteile auftreten und im Vergleich zu Level 1b oder kinematischen Level 2 Positionen ausschließlich eine Interpolation der Positionen entlang der Zeitreihe notwendig wird (siehe Abs. 5.3) und sich andererseits rein praktisch einige Vorteile bzw. Vereinfachungen ergeben, werden für die hiesige Gradientenvalidierung in Kreuzungspunkten **reduziert-dynamische Level 2 Positionen** genutzt.

Datenbasis für die GOCE-Gradientenvalidierung

Die ESA hat für sämtliche Earth Explorer Missionen ein einheitliches Dateiformat festgelegt, in dem der Datenaustausch erfolgt. Entsprechende Regularien sind in ESA (2003) zu finden. Diese sehen vor, sämtliche Daten als Extensible Markup Language (XML) Dokument im ASCII-Format bereitzustellen. Um die Dateigröße zu minimieren, werden die Daten in drei Schritten komprimiert. Nach vollständiger Dekomprimierung (siehe Abbildung 3.8) enthalten die Level 2 Daten für jeden Tag zwei Dateien: eine Daten-Datei (.DBL) und eine Header-Datei (.HDR).

Wie in Abbildung 3.8 ersichtlich, werden Satellite-to-Satellite Tracking (SST) und Electrostatic Gravity Gradiometer (EGG) Daten nach dem selben Schema (de)komprimiert. In den jeweiligen Header-Dateien (.HDR) finden sich neben Dateinamen, Angaben zum Datenzeitraum oder der genutzten Prozessierungssoftware einige Zusatzinformationen wie beispielsweise die Angabe der Orbitnummer. Sämtliche Datensätze inkl. Zeitstempel sind in den Datenfiles (.DBL) enthalten.

Tabelle 3.2 gibt einen Überblick über die Struktur der GOCE-Datenfiles und enthält eine Auflistung derjenigen Datenprodukte, die für die Gradientenvalidierung genutzt werden. Die aufgelisteten Daten sind ohne Ausnahme den jeweiligen Datenfiles (.DBL) zu entnehmen. Aus den zugehörigen Header-Dateien werden ergänzend der Referenzzeitpunkt der SST-EOQ-Quaternionen ('Time_Since_Reference_Epoche') sowie die Orbitnummer ('Abs_Orbit') benötigt.

Die SST- und EGG-Produkte unterscheiden sich in puncto Struktur und Anordnung innerhalb der Daten-Dateien (.DBL). Bei den EGG-Produkten wird zu jedem Zeitstempel ein kompletter Satz aller Daten angegeben, bevor mit dem nächsten Zeitstempel der nächste Satz folgt. Damit geht einher, dass die EGG-Produkte alle zu identischen Zeiten zur Verfügung stehen. Bei den SST-Produkten enthält die XML-Datei nacheinander erst alle Daten einer Datenart (z.B. die Positionen) mit Zeitstempel, bevor die nächste Datenart (z.B. Quaternionen) mit eigenem Zeitstempel folgt. Ein Grund dafür ist, dass sich die Datenrate der Produkte unterscheidet (siehe Tabelle 3.2).

Wie bereits erwähnt, werden die Daten in XML-Formatstruktur bereitgestellt. XML eignet sich aufgrund der Übersichtlichkeit gut für den menschlichen Nutzer. Allerdings ist das Einle-

sen größerer XML-Dateien (z.B. in MATLAB) verhältnismäßig speicher- und zeitaufwändig. Daher wurden Programme entwickelt, die die XML-Syntax analysieren und die benötigten Zahlenwerte in ein praktikabler handhabbares Format überführt. Im Rahmen dieser Arbeit wurde dazu das Programm *GOCEPARSER* von Arsov (2012) genutzt. Das Einlesen der resultierenden Datenfiles gelingt im Vergleich zu den XML-Dateien deutlich schneller und unter geringerem Speicheraufwand.

Genauigkeiten der Datenprodukte

Die Level 2 Datensätze, die im Rahmen der Kreuzungspunktanalyse genutzt werden (Tabelle 3.2), beinhalten keine Varianzinformation. Diese wird weder bereitgestellt noch bestimmt. Dennoch lässt sich die Genauigkeit der Datensätze anhand einiger Referenzen und Überlegungen ableiten und im Hinblick auf die Kreuzungspunktanalyse diskutieren:

- **Zeiten**
  Zeiten sind für die Referenzierung von Erdbeobachtungsgrößen mittels Satelliten sowie für den Bezug zwischen Referenzsystemen von essentieller Bedeutung. Es wird davon ausgegangen, dass alle Beobachtungen mit einem richtigen Zeitstempel versehen wurden. Im Weiteren werden Zeitangaben als fehlerfrei betrachtet.
- **Positionen**
  Wie bereits erwähnt, bestimmen Bock et al. (2014) anhand von SLR-Residuen über den gesamten GOCE-Missionszeitraum die Qualität der reduziert-dynamischen Bahnpositionen zu 1.84 cm (RMS der Residuen). Eine Positionsgenauigkeit im cm-Bereich erscheint für die hiesigen Analysen bei weitem ausreichend.
- **Geschwindigkeiten**
  Die Geschwindigkeiten werden zusammen mit den Positionen abgeleitet, und man kann von einer entsprechenden Genauigkeit ausgehen. In der Kreuzungspunktanalyse werden die Geschwindigkeiten einzig im Zuge der Bestimmung der Satellitenspurkreuzungspunkte genutzt. Dazu ist die Genauigkeit allemal ausreichend - selbst eine positionsbasierte Bestimmung mittels Differentiation würde ausreichend genaue Geschwindigkeiten liefern.

Tabelle 3.2: Auflistung aller bei der Gradientenvalidierung genutzten GOCE-Level 2-Daten.

	Datenart	**XML-Elemente**		**Datenrate**
EGG	Zeit	Time_Information	GPS_Time	$\approx$ 1 Hz
	Gravitations-gradienten V_{ij}	Gravity_Gradients	XX,YY,ZZ,XY,XZ,YZ	$\approx$ 1 Hz
		Sigmas	XX,YY,ZZ,XY,XZ,YZ	$\approx$ 1 Hz
		Flags	XX,YY,ZZ,XY,XZ,YZ	$\approx$ 1 Hz
		Corrections	Temporal (XX,...,YZ)	$\approx$ 1 Hz
			Calibration (XX,...,YZ)	$\approx$ 1 Hz
	Quaternionen IAQ	Quaternions	Q1,Q2,Q3,Q4	$\approx$ 1 Hz
SST	red.-dyn. Positionen u. Geschwindigkeiten SST_PRD_2	Time_Information	GPS_Time	0.1 Hz
		Positions	X,Y,Z	0.1 Hz
		Velocity	X,Y,Z	0.1 Hz
	Quaternionen EOQ SST_PRM_2	Time_Information	Time_Since_ Reference_Epoche	1 Hz
		Quaternions	Q1,Q2,Q3,Q4	1 Hz

- **Quaternionen**
  Die Quaternionen enthalten Informationen zum Übergang zwischen den Referenzsystemen:
  - **EOQ - Earth Orientation Quaternions**
    Die EOQ-Quaternionen geben den Zusammenhang zwischen EFRF und IRF an. Dieser Zusammenhang ist mit (sub-)mm-Genauigkeit bekannt.
  - **IAQ - Inertial Attitude Quaternions**
    Die IAQ-Quaternionen sind das Resultat einer Kombination von Sternkamera- und Gradiometer-Beobachtungen. Auch wenn keine direkte Angabe der Genauigkeit der Quaternionen in Form eines Winkelfehlers o.ä. zur Verfügung steht, deuten die Ergebnisse in Stummer (2013) an, dass seitens der IAQ-Quaternionen kein limitierender Einfluss auf die hiesigen Analysen zu erwarten ist.
- **Gravitationsgradienten**
  Die Bestimmung der Qualität der GOCE-Gravitationsgradienten ist Ziel dieser Arbeit, siehe nächster Absatz.

Standardabweichungen, Korrekturen und Kennzeichnungen der Gravitationsgradienten

Ziel dieser Arbeit ist die Validierung der GOCE-Gravitationsgradienten. Dabei sollte bekannt sein, welche Vorverarbeitungsschritte die untersuchten Gradienten durchlaufen haben. Neben der Gradientenbestimmung aus Beschleunigungsdifferenzen (Abs. 3.2.2), wie sie bereits für die Level 1b Gradienten erfolgte, wurden die Gradienten im Zuge der Weiterverarbeitung zum Level 2 Produkt einigen Analysen unterzogen. Deren Ergebnisse werden ebenfalls in Form Gradienten-bezogener Level 2 Datenprodukte bereitgestellt (siehe Tabelle 3.2):

- **Standardabweichungen (*Sigmas*) der Gradienten** $[1/s^2]$**:** Zur Beurteilung jedes einzelnen Gradienten wären Standardabweichungen äußerst wünschenswert. Die Angabe umfasst jedoch lediglich eine sehr grobe Fehlerschätzung: je Tensorkomponente wird genau eine Standardabweichung (Quadratwurzel der Varianz) pro Woche angegeben. Erst Methoden wie die Kreuzungspunktanalyse erlauben die Qualitätsbeurteilung einzelner (oder zumindest kleiner Gruppen von) Gravitationsgradienten.
- **Korrekturen (*Corrections*) der Gradienten** $[1/s^2]$**:** Als Korrekturen werden sowohl der Einfluss zeitlicher Veränderungen der Erde (tidenbeeinflusste sowie tidenfreie) auf die Gravitationsgradienten bereitgestellt, als auch etwaig durchgeführte Gradienten-Kalibrationen angegeben. Der Einfluss tidenbeeinflusster (direkte Gezeiten, Gezeiten der festen Erde, Ozeangezeiten, Polgezeiten) und tidenfreier Veränderungen auf die Gravitationsgradienten wird auf Basis zeitvariabler Gravitationsvariationen (SST_AUX_2, siehe Level 2 Produkte, Punkt 3, S. 59) zu jedem Zeitpunkt für jede Tensorkomponente angegeben.
- **Kennzeichnungen (*Flags*) der Gradienten:** Die Flags geben zu jedem Zeitpunkt für jede Tensorkomponente an, ob zeitliche Korrekturen angebracht wurden, eine externe Kalibration erfolgt ist, oder ob Ausreißer oder Datenlücken identifiziert oder neu interpolierte Werte eingesetzt wurden (siehe Tabelle 3.3). Die Flags kodieren also, welche Verarbeitung einzelne Tensorkomponenten erfahren haben.

Für weitere Details die drei genannten Datenprodukte betreffend wird auf Gruber et al. (2014c) verwiesen.

Die Varianzen, Korrekturen und Flags erlauben bei weitem keine Beurteilung der Qualität einzelner Gradienten. Sie werden im Rahmen dieser Arbeit genutzt, um den Einfluss zeitvariabler Gravitationsfeldanteile auf die Kreuzungspunktanalyse zu untersuchen. Außerdem werden die Flags für eine gegenseitige Kontrolle mit den Validierungsergebnissen eingesetzt und die Frage beantwortet, ob 'geflaggte' Gradienten zu erhöhten Kreuzungspunktresiduen führen.

Tabelle 3.3: Flags der GOCE EGG_NOM_2 Daten und deren Bedeutung gemäß Gruber et al. (2014c); Eingeklammerte Markierungen: beide Fälle möglich, falls nicht angebracht, enthält Datenfile "0.000".

Flags	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
keine Korrekturen enthalten	X						
zeitliche Korrekturen berücksichtigt		X	X	X	X	X	X
externe Validierung erfolgt		X	X	X	X	X	X
Kalibrationsparameter angebracht			X	(X)	(X)	(X)	(X)
Ausreißer vermutet				X	X	X	X
Ersatzwert eingefügt				X		X	
Datenlücke vermutet						X	X
Lückenfüller eingesetzt						X	

4

Genauigkeitsanforderungen an Datenprodukte und Rechenoperationen abgeleitet aus realen GOCE-Daten

Wie genau sind GOCE-Gravitationsgradienten? Die Antwort auf diese Frage wird mit der Methode zur Gradientenvalidierung als Ergebnis dieser Arbeit gegeben. Dennoch ist es wichtig, bereits vor der Analyse der Gradienten deren 'Genauigkeitsniveau' zu ermitteln: Bei der Datenverarbeitung sind unterschiedliche Datenprodukte beteiligt. Diese durchlaufen eine Vielzahl mathematischer Rechenoperationen; so werden z.B. Tensoren rotiert, kombiniert oder Daten interpoliert. Jede Operation führt zu einer Veränderung der Daten und oftmals zu Genauigkeitsverlusten (z.B. durch Interpolation). Da das Ziel die **Validierung der Gradienten** ist, muss deren Genauigkeit unvermindert erhalten bleiben. Daher ist dafür zu sorgen, dass weder Fehler der Datenprodukte noch Ungenauigkeiten, die durch Rechenoperationen im Zuge der Analyse entstehen, - fortgepflanzt auf die Gradienten - deren Fehlerniveau tangieren.

Ein Beispiel: Die zu validierende Größe - der Gravitationsgradiententensor (GGT) - ist eine ortsabhängige Größe, die von der Position (Lage und Höhe) sowie der Orientierung des Gradiometers und damit der des Satelliten abhängt. Für den Vergleich zweier Gradiententensoren wird meist - und so auch bei deren Vergleich in Satellitenspurkreuzungspunkten - Modellinformation genutzt, die aus einem Geopotentialmodell abgeleitet wird. Dabei werden Modellgradiententensoren bestimmt und z.B. Anteile davon in den GOCE-Gradiententensor eingebracht (siehe auch Abs. 5.5). Die modellbasierten Tensoren müssen dazu in das GRF transformiert werden. In diese Transformation fließen nahezu alle sonstigen Datenprodukte, wie Positionen sowie verschiedene Orientierungs-Quaternionen, ein, die jeweils unterschiedliche Rechenoperationen durchlaufen. Sind die Positionen oder Orientierungsinformationen fehlerbehaftet oder werden ungenaue Interpolationsmethoden genutzt, können leicht Fehler induziert werden, deren Einfluss auf die Gradienten deren ursprüngliche Genauigkeit überschreitet. Daher ist durch eine geeignete Behandlung der Datenprodukte sowie durch die richtige Wahl der Rechenoperationen für eine qualitätserhaltende Analyse zu sorgen.

Unter Berücksichtigung der Forderungen ergeben sich für dieses Kapitel folgende Aufgaben: Es ist zuerst das Fehlerniveau der Gravitationsgradienten zu bestimmen. Darauf aufbauend sind Unsicherheitsgrenzen für alle Datenprodukte abzuleiten. Um den Einfluss der Unsicherheiten der Datenprodukte auf die Validierungsergebnisse sicher ausschließen zu können, sollte der maximale auf Ebene der Gradienten induzierte Fehler das zu erwartenden Genauigkeitsniveau der Gradienten um eine Größenordnung (Faktor 10) unterschreiten. Zusammenfassend ergeben sich daraus folgende Aufgaben:

1. Bestimmung des Fehlerniveaus der Gravitationsgradienten,
2. Ableitung entsprechender Fehlergrenzen für alle an der Analyse beteiligten Datenprodukte: diese dürfen - fortgepflanzt auf die Gradienten - deren Qualität keinesfalls mindern,
3. Wahl geeigneter mathematischer Operationen zur gesicherten Unterschreitung des Fehlerniveaus der Gradienten.

In dieser Arbeit sollen reale GOCE-Daten validiert werden. Aus diesem Grund erscheint es sinnvoll, auch die genannten Aufgaben - soweit möglich - realdatenbasiert zu lösen. Abschnitt 4.1 beginnt mit einer ausführlichen Analyse der GOCE-Gradienten, bevor in Abschnitt 4.2 deren Genauigkeitsniveau abgeschätzt wird (1. Aufgabe). In Abschnitt 4.3 folgt die Bestimmung von Fehlergrenzen für die verschiedenen Datenprodukte (2. Aufgabe). Die Wahl geeigneter mathematischer Operationen (3. Aufgabe) erfolgt in den jeweiligen Kapiteln, in denen die Rechenoperationen angewandt werden. Beispielhaft erfolgt die Auswahl geeigneter Interpolationsmethoden in Abschnitt 5.3.

Sofern nicht anders angegeben, basieren die Untersuchungen dieses Kapitels auf dem etwa 71-tägigen Satz von Realdaten im Zeitraum zwischen 01.11.2009 und 11.01.2010. Dieser stellt einen der längsten zusammenhängenden Datensätze der GOCE-Mission dar und wurde daher zugrunde gelegt.

4.1 Analyse der GOCE-Gravitationsgradienten

Dieser Abschnitt erarbeitet die Grundlagen für die Ableitung des Genauigkeitsniveaus der Gravitationsgradienten in Abschnitt 4.2. Dazu werden in Abschnitt 4.1.1 die Gradienten und deren Fehler in Zeit- und Frequenzbereich untersucht und mit den im Vorfeld des Starts der Mission prognostizierten Anforderungen (*Mission Requirements*) verglichen. Abschnitt 4.1.2 stellt einen Vergleich der GOCE-Gradienten mit Modellgradienten - abgeleitet aus verschiedenen Geopotentialmodellen - her und arbeitet wichtige Erkenntnisse für die Wahl des Geopotentialmodells (Earth Gravity Model, EGM) heraus.

4.1.1 GOCE-Gradienten und deren Fehler im Zeit- und Frequenzbereich

Die GOCE-Gradienten sind zweite Ableitungen des Gravitationspotentials der Erde. Sie werden im satellitenfesten GRF bestimmt (siehe Abs. 3.2.2) und im Folgenden auch dort analysiert. Abbildung 4.1 zeigt beispielhaft trendreduzierte Hauptdiagonalelemente des GOCE Gradiententensors über 3 Umläufe (etwa 4.5 Std.) im Zeitbereich. Darin sind zwei Eigenschaften des GOCE-Gradiententensors deutlich erkennbar: einerseits der periodische Verlauf der $\boldsymbol{V}_{ii}$ (mit $i \in \{x, y, z\}$) in Abhängigkeit der Orbitperiode (siehe Verlauf der Breite); andererseits das relative Verhalten der Hauptdiagonalelemente $\boldsymbol{V}_{ii}$ zueinander, aus dem sich über die Laplace-Gleichung ein Gütekriterium des Tensors ableiten lässt.

Der **periodische Verlauf** ist in erster Linie auf Veränderungen der Bahnhöhe zurückzuführen, auf die die Gradienten sehr sensitiv sind (siehe auch 'Dämpfungsfaktor' $1/r$ bei der Entwicklung des Gravitationspotentials in Kugelfunktionen, Gl. (2.17), S. 10). Bahnhöhenänderungen lassen sich anhand der Bahneigenschaften erklären: Trotz der geringen Exzentrizität des GOCE-Orbits variiert der sphärische Radius r (Gl. (2.84), S. 33) über die drei Umläufe um etwa 30 km (peak-to-peak). Dadurch wird der Großteil der Variation hervorgerufen. Der nächstgrößere Signalanteil ergibt sich aus der ellipsoidischen Form der Erde (Erdabplattung)[1], wodurch entlang der inklinierten GOCE-Bahn ebenfalls Orbit-periodische Schwankungen (bei der doppelten Orbitfrequenz) entstehen. Betrachtet man längere Zeiträume, so spielt auch die Knotendrehung der GOCE-Bahn eine entscheidende Rolle, die selbst als Resultat der Erdabplattung auftritt. Letztlich überlagern sich alle diese Effekte und es kommt zu Phasenverschiebungen aufgrund der unterschiedlichen Periodenlängen. Je nach Phasenlage der Effekte entstehen dabei Verstärkungen bzw. Verminderungen der Signalamplitude und die Signalstrukturen resultieren entsprechend Abbildung 4.1. Auch wenn für die Gravitationsfeldbestimmung meist die hochfrequenten Signalanteile interessieren, ist deutlich erkennbar, dass die langwelligen Strukturen (niederfrequente Signalanteile) einen Großteil des Signals ausmachen.

[1] Die Differenz zwischen großer Halbachse a und kleiner Halbachse b beläuft sich auf $a - b \approx 21.38$ km.

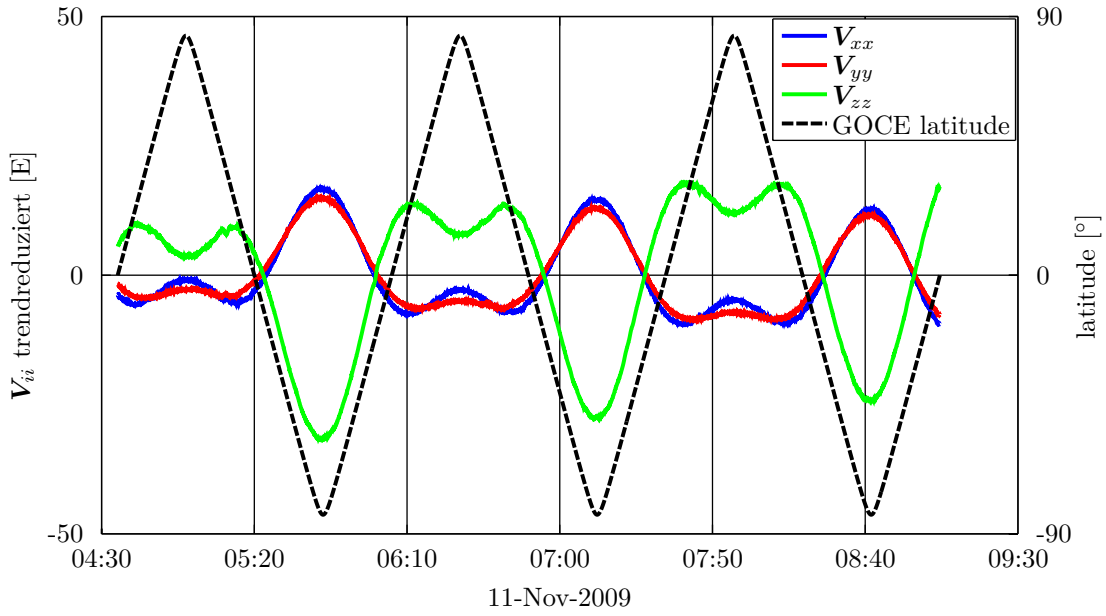


Abbildung 4.1: GOCE-Gravitationsgradienten $\boldsymbol{V}_{ii}$ [E] (mit $i \in \{x, y, z\}$) entlang dreier Umläufe (etwa 270 Min.) am 11. November 2009 und die zugehörigen Breiten (latitude) des GOCE-Satelliten.

Das Gravitationsfeld hat die nützliche Eigenschaft, dass es im Außenraum der Erde die Laplace-Gleichung (Gl. (2.13), S. 10) erfüllt, sich die Spur des Tensors also zu Null ergibt. Diese Spurfreiheit des Tensors wird bereits optisch am **relativen Verhalten** der $\boldsymbol{V}_{ii}$ zueinander in Abbildung 4.1 deutlich, denn $|\boldsymbol{V}_{xx} + \boldsymbol{V}_{yy}| \approx |\boldsymbol{V}_{zz}|$. Bei Betrachtung der Zahlenwerte ergibt sich ein ganz ähnliches Bild, so weisen in einem erdgerichteten Koordinatensystem (z.B. LNOF, LORF oder GRF) $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ Werte um +1350 mE auf, $\boldsymbol{V}_{zz}$ liegt im Bereich von –2750 mE. Die Summe aller drei ergibt sich entsprechend der Laplace-Gleichung zu Null. Alle Abweichungen von Null sind als Fehler zu interpretieren.

Der Spurfreiheit des Tensors wurde sich als Vorschlag zu Validierungszwecken bereits zum Zeitpunkt der Auswahl als Earth Explorer Core Mission (ESA, 1999, S. 170) bedient. Später wurde sie zur Definition der frequenzabhängigen Qualitätsanforderungen an das Gradiometer (*performance requirements*) genutzt, so z.B. in Cesare (2008). Im Folgenden wird die Spurfreiheit des Tensors als Gütekriterium für die GOCE-Realdatenanalyse eingesetzt.

Wird die Spur des Tensors für den eingangs genannten 71-tägigen Datensatz bestimmt, wird schnell deutlich, dass gerade die niederfrequenten Signalanteile große Fehler aufweisen. Die Spur zeigt einen deutlich von Null abweichenden Verlauf, der in erster Näherung gut mittels linearem Trend approximiert werden kann. Dieser ergibt sich zu etwa 1.4 E/Tag. In Tabelle 4.1 sind lineare Trends aller Tensorkomponenten dargestellt. Diese fallen für verschiedene Datenzeiträume unterschiedlich aus und ändern sich meist nach einer Gradiometerkalibration. Die Werte aus Tabelle 4.1 sind somit nur als beispielhaft zu betrachten.

Vor dem Hintergrund, dass GOCE-Gradienten mit mE-Genauigkeit in die Gravitationsfeldbestimmung einfließen sollen, erscheinen diese Trends sehr groß. Deren Ursache ist jedoch schnell gefunden und auf das frequenzabhängige Leistungsverhalten des Gradiometers (*gradio-*

Tabelle 4.1: Lineare Trends [E/Tag] aller Komponenten des GOCE-Gravitationsgradiententensors $\boldsymbol{V}_{ij}$ (mit $ij \in \{xx, yy, zz, xy, xz, yz\}$) beispielhaft abgeleitet aus einem 71-tägigen Datensatz zu Beginn der Mission.

GOCE Tensorkomponente	$\boldsymbol{V}_{xx}$	$\boldsymbol{V}_{yy}$	$\boldsymbol{V}_{zz}$	$\boldsymbol{V}_{xy}$	$\boldsymbol{V}_{xz}$	$\boldsymbol{V}_{yz}$	Spur
linearer Trend [E/Tag]	-0.069	1.447	0.017	-4.378	0.011	-9.611	1.395

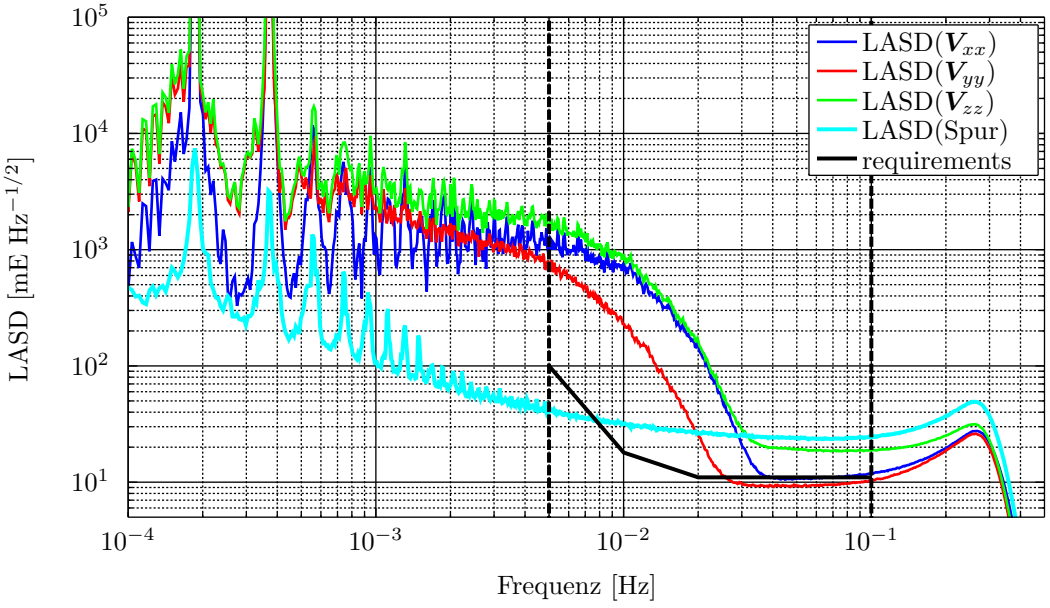


Abbildung 4.2: Logarithmische Amplituden-Spektraldichten (LASD) der Spur des Gravitationsgradiententensors $\boldsymbol{V}$, von dessen Hauptdiagonalelementen $\boldsymbol{V}_{xx}$, $\boldsymbol{V}_{yy}$ und $\boldsymbol{V}_{zz}$ sowie die vor Missionsstart bestimmten Anforderungen an die Tensor-Spur (*requirements*) im Frequenzbereich. Diese wurden auf Grundlage des LASD-Algorithmus gemäß Abschnitt 2.2.4 berechnet.

meter performance) zurückzuführen. Das GOCE-Gradiometer weist ein farbiges Rauschverhalten auf und wurde für einen bestimmten Frequenzbereich, die MBW zwischen 0.005 Hz und 0.1 Hz, optimiert (siehe auch Abs. 3.2). Innerhalb der MBW konnte ein niedriges Rauschniveau realisiert werden, das in weiten Teilen die Eigenschaft aufweist, weiß zu sein. Außerhalb und speziell unterhalb der MBW steigt das Rauschniveau stark an, was sich in Form eines Trends sowie langperiodischen Rauschens äußert. Die Signalcharakteristik ist also nicht überraschend und war derart zu erwarten.

Aufgrund der Dominanz der langwelligen Fehler sowie des allgemein frequenzabhängigen Fehlerverhaltens wurden die Anforderungen an die Qualität des Gradiometers bzw. des Gradiententensors im Frequenzbereich definiert und zwar in Form der ASD der Spur[2]. Eine Betrachtung der Zeitreihe der Gradienten im Frequenzbereich erscheint daher auch hier sinnvoll. Dazu werden die ASD bzw. die LASD der Zeitreihen der Hauptdiagonalelemente sowie die der Spur des Tensors gemäß Abschnitt 2.2.4 bestimmt.

Abbildung 4.2 zeigt die LASDs der Hauptdiagonalelemente sowie der Spur des Gradiententensors im Frequenzbereich. Die senkrecht gestrichelten Linien geben die Grenzen der MBW bei 0.005 Hz und 0.1 Hz an. Die *requirements* stellen die Qualitätsanforderungen an die Spur des Tensors dar, wie sie vor dem Missionsstart definiert wurden (Drinkwater und Kern, 2006; Cesare, 2008). Bei $\boldsymbol{V}_{xx}$, $\boldsymbol{V}_{yy}$ und $\boldsymbol{V}_{zz}$ handelt es sich um Beobachtungen und damit um *Signal*. Die Spur ist als Fehler des Beobachtungstensors zu betrachten und als *Rauschen* zu interpretieren.

Bei der Validierung der Gradienten geht es in erster Linie darum, deren Qualität innerhalb der MBW zu überprüfen. Für einige Berechnungsschritte ist das Verhalten der Gradienten aber auch außerhalb - im Speziellen unterhalb - der MBW von Interesse. Daher werden im Folgenden beide Frequenzbereiche betrachtet.

[2]Zur Abschätzung der Qualität der GOCE-Gradienten wurden im Zuge der Missionsplanung sämtliche Fehlerquellen mit Einfluss auf die Gradienten analysiert. Die Summe aus Fehlern des Gradiometers selbst sowie Fehlereinflüssen durch den Satelliten und dessen Umgebung diente zur Definition eines maximalen Rauschniveaus. Dieses wurde in Form der ASD ($\sqrt{PSD}$) der Spur des Tensors in der MBW definiert und wird als Spur-Requirement oder auch *gradiometer performance requirement* bezeichnet (Drinkwater und Kern, 2006, S. 13).

Signal und Rauschen außerhalb der MBW

Anhand der ASDs in Abbildung 4.2 wird deutlich, dass sowohl die Hauptdiagonalkomponenten des Tensors (Signal) als auch deren Spur (Rauschen) viel Energie unterhalb der MBW enthalten: Sie weisen Peaks bei der Orbitfrequenz (etwa $1.85 \cdot 10^{-4}$ Hz) sowie Vielfachen davon auf. Für die Tensorkomponenten $\boldsymbol{V}_{ii}$ (mit $i \in \{x, y, z\}$) ist dieses Verhalten zu erwarten und wie eingangs erwähnt auf die Exzentrizität und Knotendrehung des Orbits sowie auf die Erdabplattung zurückzuführen. Die Peaks in der ASD der Spur sind das Ergebnis nicht perfekt bestimmter Kalibrationsparameter des Gradiometers, über die einige Kopplungsfaktoren nur unzureichend abgefangen werden. Außerhalb der MBW ist im Weiteren der Frequenzbereich zwischen 0.001 Hz und 0.005 Hz interessant, in dem das Rauschniveau teilweise mehr als eine Größenordnung (Faktor 10) unterhalb der Signalstärke und damit das Signal-Rausch-Verhältnis (signal-to-noise ratio, SNR) deutlich über 1 liegt. Basierend auf dem SNR ist die Qualität der Gradienten in diesem Frequenzbereich hoch, weshalb man sich für die Festlegung einer geeigneten Grenzfrequenz (auch roll-off oder cut-off Frequenz) im Rahmen der Filterung in Abschnitt 5.5.1.2 bedient.

Da der Fokus der Gradientenvalidierung auf dem Frequenzbereich der MBW liegt, ist der Einfluss orbitperiodischer Signal- und Rauschanteile (weit) unterhalb der MBW hier weniger von Interesse. Gleiches gilt für den Signalgehalt im Frequenzbereich oberhalb der MBW: Die ASD der Spur (Rauschen) liegt oberhalb der ASDs aller $\boldsymbol{V}_{ii}$ (Signal), SNR < 1. Die Qualität der Beobachtungen ist in diesem Frequenzbereich damit unzureichend und für die weitere Verwendung nicht geeignet.

Zusammenfassend gilt festzuhalten, dass große Signalanteile auf Frequenzen unterhalb der MBW entfallen, das SNR bis hinunter zu 0.001 Hz deutlich über 1 liegt und die Signalanteile oberhalb der MBW aufgrund eines SNR < 1 keine sinnvolle Nutzung der Signalanteile erlauben und ausschließlich zu einem erhöhten Rauschen der Gradientenkomponenten $\boldsymbol{V}_{ii}$ beitragen.

Signal und Rauschen innerhalb der MBW

Im Frequenzbereich der MBW liefern die Gravitationsgradienten den entscheidenden Beitrag zu GOCE-basierten Gravitationsfeldlösungen. Aus diesem Grund fokussiert die Qualitätsbeurteilung der Gradienten auf die MBW. Wie in Abbildung 4.2 ersichtlich, liegt der Signalgehalt aller $\boldsymbol{V}_{ii}$ im unteren Bereich der MBW bei etwa 1000 mE/$\sqrt{\text{Hz}}$ und sinkt bis 100 mHz für alle $\boldsymbol{V}_{ii}$ unter 20 mE/$\sqrt{\text{Hz}}$. $\boldsymbol{V}_{yy}$ verliert recht schnell an Energie und kreuzt die ASD der Spur bei etwa 20 mHz (SNR = 1). Der Signalabfall in $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{zz}$ setzt etwas später ein und führt zur Kreuzung der ASD der Spur bei etwa 30 mHz. Im oberen Teil der MBW ($f > 30$ mHz) enthält $\boldsymbol{V}_{zz}$ mit etwa 20 mE/$\sqrt{\text{Hz}}$ zwar doppelt so viel Energie wie $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ (etwa 10 mE/$\sqrt{\text{Hz}}$), dennoch liegt das Signal-Rausch-Verhältnis aller $\boldsymbol{V}_{ii}$ in diesem Bereich unter 1 (SNR < 1).

Beim Vergleich derartiger Signal- und Rauschkurven und dem Ableiten entsprechender Signal-Rausch-Verhältnisse muss berücksichtigt werden, dass sich das Rauschen - hier die Spur - aus der Summe aller drei Hauptdiagonalelemente ergibt und daher ein 'gemitteltes' Genauigkeits- bzw. Rauschmaß des Tensors darstellt. Weist nur eines der Hauptdiagonalelemente ein gegenüber den beiden anderen erhöhtes Rauschniveau auf, würde dies ebenso zu einem höheren Rauschniveau der Spur führen wie drei gleich stark verrauschte Komponenten. Was die Bestimmung der Frequenz betrifft, an der sich der Schnittpunkt von Signal- und Rauschkurve ergibt ('Kreuzungsfrequenz' mit SNR = 1) ist besondere Vorsicht geboten; denn die Verwendung des gemittelten statt Komponenten-individuellen Rauschens kann zu verzerrten und damit falsch bestimmten Frequenzen führen.

Im Falle der Hauptdiagonalelemente sowie der Spur des GOCE-Gravitationsgradiententensor (GGT), deren Signalgehalt in erster Näherung stetig in Richtung hoher Frequenzen abnimmt (negative Steigung der ASDs), und wenn außerdem der Signalabfall der $\boldsymbol{V}_{ii}$ stärker ist als der der Spur, kann die Spur-basierte Bestimmung der Kreuzungsfrequenz f_x zu einer Unterschätzung der Frequenz führen. Da das Rauschen der Spur das Rausch-Maximum aller beteiligten Komponenten darstellt und das Rauschen der Einzelkomponenten sicher kleiner oder gleich der

Spur ist, kann f_x im Vergleich zur wahren Kreuzungsfrequenz höchstens zu gering bestimmt werden.

Im Hinblick auf das Ziel dieser Untersuchungen, eine Aussage über das Rauschniveau einzelner GGT-Komponenten machen zu können, muss deren Komponenten-individuelles Rauschen bestimmt werden. Dazu wäre ein Vergleich zu Gravitationspotentialmodellen denkbar, wie er im folgenden Abschnitt 4.1.2 durchgeführt wird. Um das individuelle Rauschen rein auf Basis des zu analysierenden Datensatzes durchzuführen, käme ein 'quick-look' Analysetool in Frage, wie es beispielsweise in Murböck et al. (2011) genutzt wird. Dabei wird unter Anwendung des semi-analytischen Ansatzes (Sneeuw, 2000) eine Gravitationsfeldlösung bestimmt. Die Ableitung des Rauschens einzelner Tensorkomponenten gelingt dabei durch eine direkte Schätzung der Rauschanteile im Zuge der Ausgleichung. Ebenfalls denkbar wäre ein GOCE-Modell-Vergleich, bei dem aus dem Modell abgeleitete Funktionale (hier Gravitationsgradienten) mit den Eingangsdaten (GOCE) verglichen werden. Pail und Wermuth (2003) und Pail et al. (2007) zeigen den praktischen Einsatz des Quick-Look-Tools für die GOCE-Mission. Im operationellen Missionsbetrieb wurde das Quick-Look-Tool genutzt, um das Satellitensystem regelmäßig zu überprüfen und systematische Fehler zu identifizieren (Mayrhofer et al., 2010).

Wie bereits diskutiert, kann die Eigenschaft der Spurfreiheit des GGT zur Qualitätsprüfung herangezogen werden. Ein Spur-Vergleich zwischen GOCE und den *Mission Requirements* ist grafisch anhand von Abbildung 4.2 möglich und kann numerisch Tabelle 4.2 entnommen werden. Es wird sofort deutlich, dass in weiten Teilen der MBW das Rauschniveau der realen Beobachtungen um einen Faktor 2-3 über den Requirements liegt, die Erwartungen an die Tensorgenauigkeit also nicht erfüllt werden. Ob das erhöhte Rauschniveau auf das Rauschen aller oder nur einzelner Hauptdiagonalkomponente des GGT zurückzuführen ist, wird aus der individuellen Rausch-Bestimmung im folgenden Abschnitt deutlich. Unterhalb von etwa $8 \cdot 10^{-3}$ Hz fällt der Spur-Vergleich weitaus positiver aus, dort ist das Rauschniveau geringer als prognostiziert. Dies ist vor allem auf eine Optimierung der Datenprozessierung - verbunden mit einer Daten-Reprozessierung - zurückzuführen (siehe Stummer et al., 2012; Stummer, 2013; Murböck et al., 2014), wodurch der Fehler im unteren Bereich des Messbandes erheblich verringert wurde.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die Spur als Qualitätskriterium des GGT geeignet ist. Sie ermöglicht keine Aussagen zur Qualität einzelner GGT-Komponenten zu machen, sondern stellt ein 'gemitteltes' Gütekriterium dar. Für den Bereich der MBW weist die Spur ein Niveau von etwas über 20 mE/$\sqrt{\text{Hz}}$ auf. Damit liegt das Rauschniveau des Tensors um einen Faktor 2-3 höher als angenommen. Im unteren Bereich der MBW (unterhalb von etwa $8 \cdot 10^{-3}$ Hz) ist das Rauschen niedriger als erwartet und auch der Rauschanstieg in Richtung niedriger Frequenzen ist deutlich geringer als prognostiziert. Welche GGT-Komponente(n) für das erhöhte Rauschen verantwortlich sind, lässt sich erst durch einen Vergleich der GOCE-Gradienten mit Gradienten aus einem Gravitationsfeldmodell ableiten. Da die Analysen der Datenzeitreihen im Zeitbereich stattfinden, muss das genannte Rauschniveau in den Zeitbereich 'transformiert' werden. Beides wird im folgenden Abschnitt behandelt.

4.1.2 Vergleich der Gradienten mit globalen Gravitationsfeldmodellen

Der Vergleich realer GOCE-Gradienten mit globalen Geopotentialmodellen erlaubt die Bestimmung individuellen Rauschens einzelner GGT-Komponenten, die Bestimmung der Schnittfrequenz an der sich Signal und Rauschen schneiden (SNR = 1), die Identifikation in welchen

Tabelle 4.2: Vergleich der Amplituden-Spektraldichten (ASD) von *Mission Requirements* und GOCE-Tensorspur [mE/$\sqrt{\text{Hz}}$] im Bereich der Gradiometer-Messbandbreite (MBW).

(Knick-) Frequenzen der MBW	0.005 Hz	0.01 Hz	0.02 Hz	0.1 Hz
ASD der Mission Requirements	100	18	11	11
ASD der GOCE-Spur	40	32	26	24

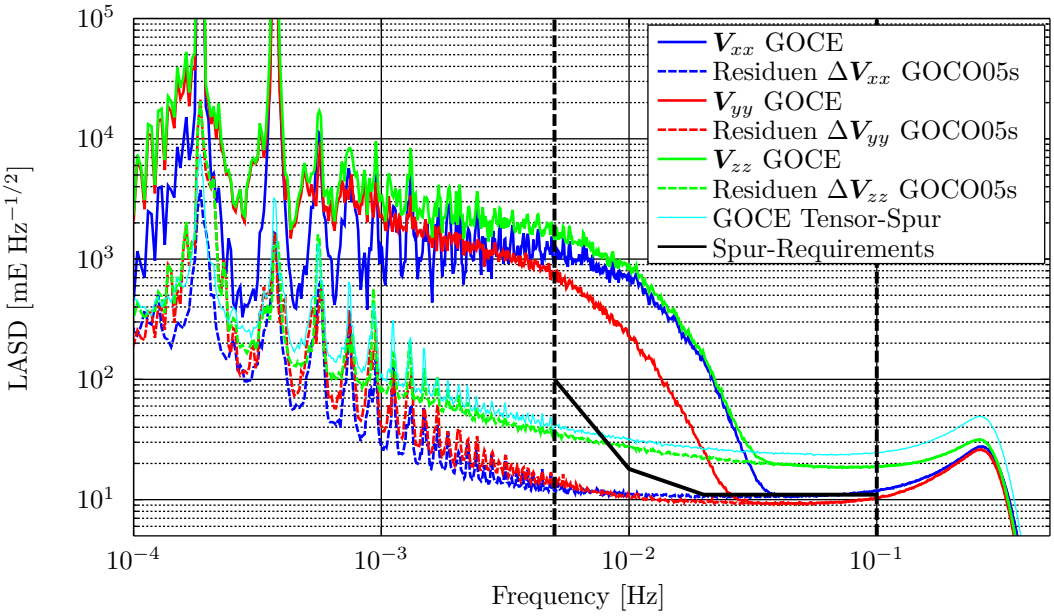


Abbildung 4.3: Logarithmische Amplituden-Spektraldichten (LASD) der Hauptdiagonalelemente $\boldsymbol{V}_{xx}$, $\boldsymbol{V}_{yy}$ und $\boldsymbol{V}_{zz}$ des GOCE-GGT und deren individuellen Rauschens, abgeleitet aus Differenzen zum Geopotentialmodell GOCO05s sowie die Tensor-Spur und deren Requirements im Frequenzbereich.

geografischen Bereichen Fehler in den Beobachtungen auftreten oder die Beobachtungen gegenüber dem Modell neue Informationen enthalten u.v.m.

Die Basis des Vergleiches sind einerseits die realen GOCE-Gradienten und andererseits synthetische GG, die aus einem Geopotentialmodell abgeleitet werden (siehe Abs. 2.1.3). Die synthetischen GG müssen gemäß Abschnitt 3.4 vom LNOF in das GRF transformiert werden. Damit liegen zwei Zeitreihen von GG $\boldsymbol{V}^{GRF}_{ij,GOCE}$ und $\boldsymbol{V}^{GRF}_{ij,Modell}$ zu identischen Zeiten im selben Koordinatensystem (GRF) vor, deren Differenzen $\Delta\boldsymbol{V}^{GRF}_{ij}$ sich gemäß Gleichung (4.1) ergeben und im folgenden analysiert werden.

$$\Delta\boldsymbol{V}^{GRF}_{ij} = \boldsymbol{V}^{GRF}_{ij,GOCE} - \boldsymbol{V}^{GRF}_{ij,Modell} \tag{4.1}$$

Aufgrund der langwelligen Ungenauigkeiten der GOCE-Gradienten werden auch die Differenzen von diesem langwelligen Rauschen dominiert und eine Betrachtung im Frequenzbereich erscheint sinnvoll. Abbildung 4.3 zeigt die Hauptdiagonalelemente $\boldsymbol{V}^{GRF}_{ii,GOCE}$ (mit $i \in \{x, y, z\}$), deren Differenzen $\Delta\boldsymbol{V}^{GRF}_{ij}$ zu Modellgradinten $\boldsymbol{V}^{GRF}_{ij,Modell}$ auf Basis des Geopotentialmodells GOCO05s (Mayer-Gürr et al., 2015) sowie die Spur des GOCE-GGT. Die Differenzen $\Delta\boldsymbol{V}^{GRF}_{ij}$ können als Rauschen der GOCE-GG und damit als Fehler der einzelnen Komponenten interpretiert werden. Abbildung 4.4 zeigt die entsprechenden Signal- und Rauschkurven für die GGT-Komponenten $\boldsymbol{V}_{xy}$, $\boldsymbol{V}_{xz}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$.

Wie in Abbildung 4.3 ersichtlich, ist das Rauschen der $\boldsymbol{V}_{zz}$ Komponente maßgeblich für das erhöhte Rauschniveau der Tensor-Spur verantwortlich. Das Rauschen von $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ erfüllt die Erwartungen und unterschreitet im gesamten Bereich der MBW die Spur-Requirements. Das Rauschen von $\boldsymbol{V}_{xz}$ (Abb. 4.4) entspricht etwa dem von $\boldsymbol{V}_{zz}$. Die Komponenten $\boldsymbol{V}_{xy}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$ werden aufgrund des Einflusses weniger genauer Beschleunigungsmesserachsen im Gradiometer mit verminderter Genauigkeit bestimmt. Dies wird auch bei Betrachtung des Rauschens deutlich, das im Vergleich zu den anderen GGT-Komponenten um ein bis zwei Größenordnungen höher liegt.

In den Abbildungen 4.3 und 4.4 ist ersichtlich, dass Signal- und Rauschkurven 'ineinander laufen' und sich ab einer bestimmten Frequenz gleichen. Die Zeitreihen der GOCE-Gradienten

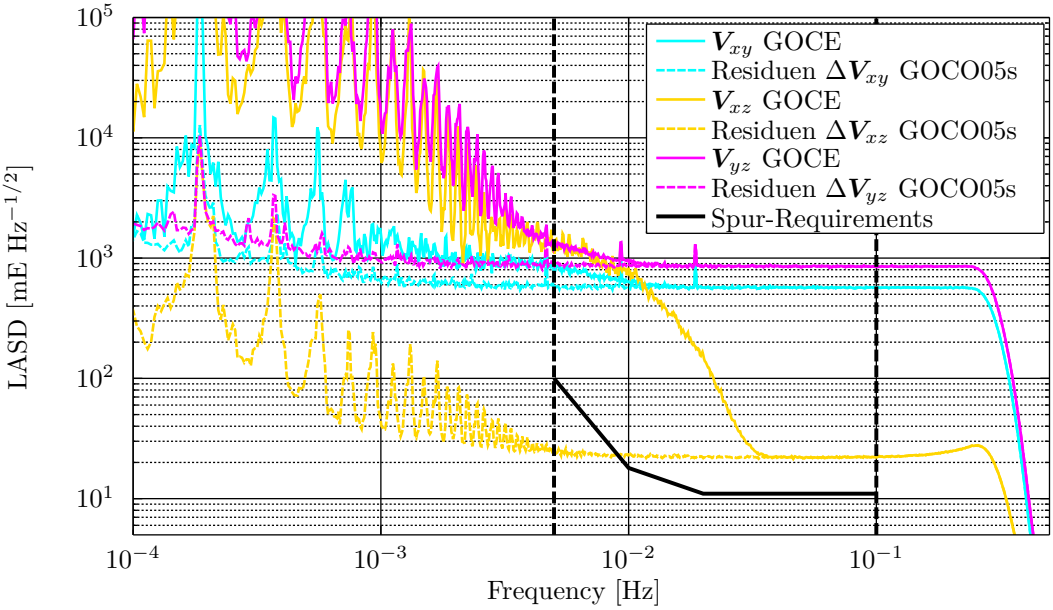


Abbildung 4.4: Logarithmische Amplituden-Spektraldichten (LASD) der GOCE GGT-Komponenten $\boldsymbol{V}_{xy}$, $\boldsymbol{V}_{xz}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$ und deren individuelles Rauschen, abgeleitet aus Differenzen zum Geopotentialmodell GOCO05s sowie den Spur-Requirements im Frequenzbereich.

bestehen aus Signal und Rauschen. Da das SNR für höhere Frequenzen unter 1 sinkt, das Rauschen also dominiert, bestehen die Gradientenzeitreihen im oberen Bereich der MBW ausschließlich aus Rauschen. Im Hinblick auf die Bestimmung einer 'Kreuzungsfrequenz', ab der das SNR = 1 ist, tritt nun das Problem auf, dass keine direkte Kreuzung der ASDs auftritt. Fuchs und Bouman (2011) bestimmen ebenfalls Kreuzungsfrequenzen für GOCE-Gradienten und stellen dazu zwei Methoden vor:

1. **Bestimmung im Frequenzbereich (ASD-basiert):** Die Signal-Energie wird entweder aus einem rein GOCE-basierten Modell oder aus GOCE-Gradienten berechnet. Die Rausch-Energie kann aus GOCE-Modell-Residuen abgeleitet oder im Rahmen der Gravitationsfeldbestimmung mittels Quick-Look-Tools mitgeschätzt werden (Mayrhofer et al., 2010).

2. **Bestimmung im Zeitbereich:** Nach einer Bandpass-Filterung der GOCE- als auch der Modell-Gradienten werden die GOCE-Gradienten ins Verhältnis gesetzt zu den GOCE-Modell-Residuen.

In beiden Ansätzen wird das Verhältnis von Signal und Rauschen gebildet und die Frequenz bestimmt, zu der sich deren Verhältnis etwa zu 1 ergibt. Fuchs und Bouman (2011) resümieren, dass alle Wege im Prinzip zu den gleichen Ergebnissen führen, sich Unterschiede einzig in der praktischen Umsetzung und dem Einfluss bzw. der Behandlung von Ausreißern und Datenlücken ergeben.

Um auf die Bestimmung der Kreuzungsfrequenz zwischen Signal- und Rauschkurve zurückzukommen, sollte eine wirkliche Kreuzung nur im Falle der modellbasierten Signalbestimmung auftreten, denn nur dort kommt es zu einem klaren Signalabfall im Bereich der MBW, und es entsteht ein Schnitt mit der Rauschkurve. Die genannten Analysemethoden enthalten einige Parameter, wie die Wahl der Grenzfrequenzen für die Bandpass-Filterung oder die Wahl des EGM, die das Ergebnis beeinflussen können.

Tabelle 4.3: Frequenzen [mHz], ab denen Signal- und Rausch-ASD ein SNR < 1.01 ergeben, bestimmt für die GGT-Komponenten $\boldsymbol{V}_{xx}$, $\boldsymbol{V}_{yy}$, $\boldsymbol{V}_{zz}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ auf Basis verschiedener Geopotentialmodelle.

Geopotentialmodell (l_{max})	**(Kreuzungs-) Frequenz [mHz] für** $\boldsymbol{V}_{xx}$	$\boldsymbol{V}_{yy}$	$\boldsymbol{V}_{zz}$	$\boldsymbol{V}_{xz}$
EGM96 (360)	41.3	31.8	38.6	38.0
EGM2008 (2190)	41.3	31.8	38.6	38.0
ITG-Grace2010s (180)	32.0	29.1	32.0	32.0
GOCO05s (280)	41.6	31.8	38.6	38.3
EGM_TIM_RL05 (280)	41.6	31.8	38.6	38.3
GOCE GGT-Spur	28.9	19.6	31.6	32.0

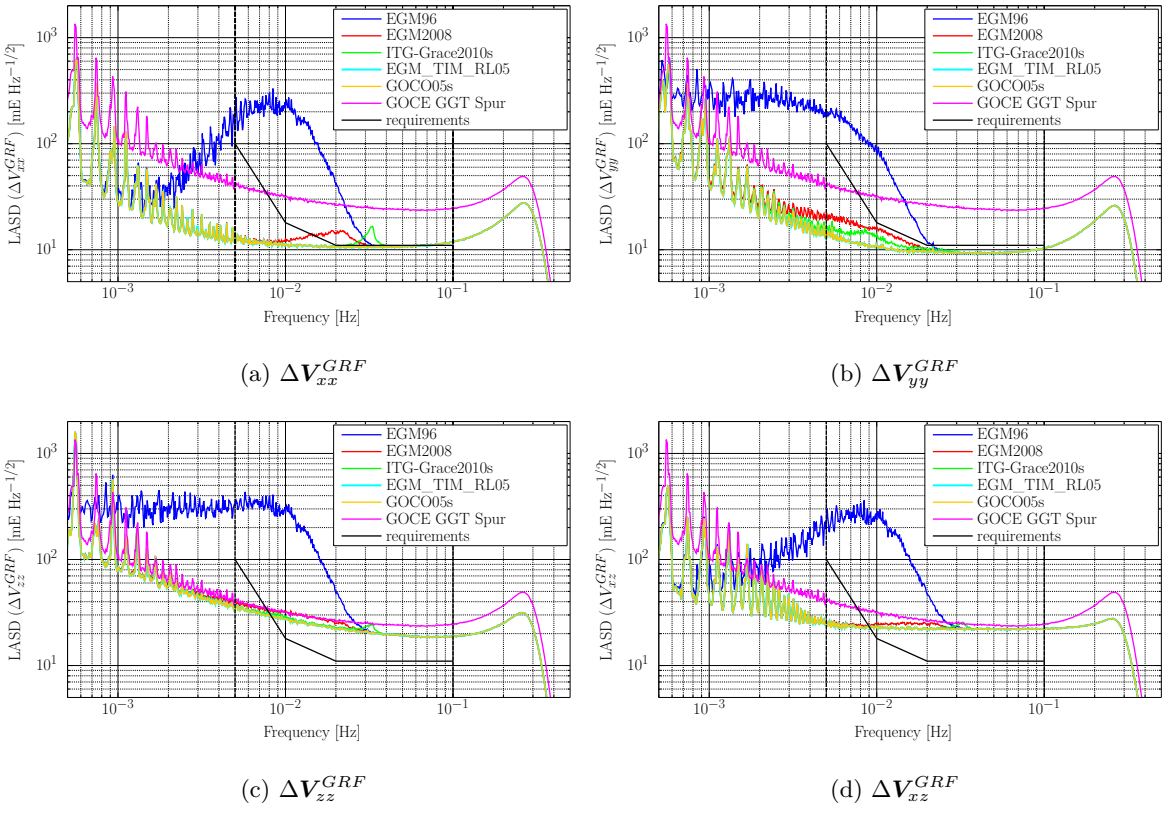
Rauschen im Frequenzbereich

Die Analysen in dieser Arbeit beruhen auf Signal-ASDs der GOCE-Gradienten und Rausch-ASDs der GOCE-Modell-Residuen $\Delta\boldsymbol{V}_{ij}^{GRF}$ (Gl. (4.1)). Daraus werden Kreuzungsfrequenzen für alle hochgenau bestimmten Gradientenkomponenten - die drei Hauptdiagonalelemente des GGT sowie $\boldsymbol{V}_{xz}$ - bestimmt. Da eine wirkliche Kreuzung nicht erfolgt, wird die Frequenz bestimmt, ab der sich Signal- und Rausch-ASD weniger als 1% voneinander unterscheiden (SNR < 1.01). Um eine etwaige Abhängigkeit von der Wahl des EGMs zu überprüfen, werden verschiedene Modelle zugrunde gelegt. Tabelle 4.3 zeigt die entsprechenden (Kreuzungs-) Frequenzen auf Basis der Modelle EGM96 (Lemoine et al., 1997), EGM2008 (Pavlis et al., 2008), ITG-Grace2010s (Mayer-Gürr et al., 2010), GOCO05s (Mayer-Gürr et al., 2015) sowie EGM_TIM_RL05[3] (Brockmann et al., 2014); ebenfalls enthalten sind die (Kreuzungs-) Frequenzen basierend auf der Spur des GOCE-GGT. Zur Bestimmung der Modell-GGTs wurde jeweils Modellinformation bis zum maximalen Entwicklungsgrad (l_{max}) verwendet.

Wie aus den Frequenzen - bei denen ein SNR $\approx$ 1 entsteht - in Tabelle 4.3 ersichtlich, ist deren Bestimmung bedingt abhängig von der Wahl des zu Grunde gelegten EGM. Die meisten dargestellten Modelle führen zu den gleichen Frequenzen bzw. weisen nur marginale Unterschiede auf. Einzig die Frequenzen auf Basis des ITG-Grace2010s führen zu abweichenden Werten. Auffällig ist, dass sich die Frequenzen auf Basis des EGM96 sowie des EGM2008 und die Frequenzen auf Basis des GOCO05s sowie des EGM_TIM_RL05 gleichen. Die Ursache dafür liegt in der teilweise identischen Datenbasis, die dazu führt, dass die Modelle im Frequenzbereich der Signal-Rausch-'Kreuzung' nahezu identischen Informationsgehalt liefern.

Dass grundsätzlich Frequenz-Unterschiede auftreten können, lässt sich auf die verschiedenen Datenbasen der Modelle zurückführen. Modelle wie das EGM96 sowie das EGM2008 wurden auf Basis terrestrischer Schweredaten sowie Satellitendaten berechnet, wie sie bis zum Jahre 1996 bzw. 2008 zur Verfügung standen. In das EGM96 sind daher im Vergleich zum EGM2008 keine GRACE-Daten eingeflossen. Alle anderen Modelle basieren ausschließlich auf Satellitendaten: das ITG-Grace2010s ausschließlich auf GRACE-Daten, das GOCO05s wurde aus einer Vielzahl von Orbits von LEO-Satelliten sowie GRACE und GOCE bestimmt. Einzig das EGM_TIM_RL05 basiert ausschließlich auf Daten der GOCE-Mission. Mit den unterschiedlichen Datenbasen geht einher, dass die Modelle 1) in verschiedenen Frequenzbereichen unterschiedliche Qualität aufweisen und 2) aufgrund von inhomogen verteilten terrestrischen Schweredaten sowie beispielsweise aufgrund des Polarloches (GOCE) regionalen Qualitätsschwankungen unterliegen. Grundsätzlich gilt, dass die GRACE-basierten Modelle im unteren und mittleren Frequenzbereich (SH d/o 10 ... 120) aufgrund der homogenen und hohen Datenqualität die besten Ergebnisse liefen. Terrestrische Daten führen meist im hochfrequenten Bereich zu hoher Qualität der Modelle, jedoch kann die Qualität - wie angedeutet - regional sehr unterschiedlich sein: Gebiete mit guter und umfangreicher terrestrischer Datenbasis, wie z.B. Deutschland, weisen hohe Qualität auf; Regionen wie Südamerika, in denen die Datenbasis nur einen sehr geringen Umfang hat, sind im Bereich hoher Frequenzen weniger genau.

[3]Der offizielle Name lautet 'GO_CONS_EGM_TIM_2I_20091101T000000_20131020T235959_0001.IDF'. Die Kurzform EGM_TIM_RL05 wurde Brockmann et al. (2014) entnommen.



(a) $\Delta \boldsymbol{V}_{xx}^{GRF}$ (b) $\Delta \boldsymbol{V}_{yy}^{GRF}$

(c) $\Delta \boldsymbol{V}_{zz}^{GRF}$ (d) $\Delta \boldsymbol{V}_{xz}^{GRF}$

Abbildung 4.5: Rauschen der GOCE-Gravitationsgradienten, abgeleitet aus GOCE-Modell-Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{GRF}$ (mit $ij = \{xx, yy, zz, xz\}$, siehe Gl. (4.1)) auf Basis unterschiedlicher Modelle für die hochgenauen Komponenten des GGT.

Die GOCE-GGs liefern einen einzigartigen Beitrag zur Bestimmung des Gravitationsfeldes für den Bereich hoher Frequenzen (MBW). Die Gradienten stehen mit Ausnahme des Polarlochs global zur Verfügung und weisen eine homogene Qualität auf.

Werden zur Rauschbestimmung GOCE-basierte Modelle herangezogen, unterscheidet sich diese Herangehensweise nur geringfügig von der Rauschbestimmung auf Basis des Quick-Look-Tools, sofern Modell-Gradienten auf Basis der Quick-Look-Lösung bestimmt und die GOCE-Modell-Residuen zur Rauschbestimmung genutzt werden. Beide Varianten haben gemein, dass die Modelle die Möglichkeit eröffnen, 'Gleiches mit Gleichem' zu vergleichen, also Modelle zu nutzen, die dort qualitativ hochwertig sind, wo es auch die GOCE-Gradienten selbst sind. Werden Modelle zu Grunde gelegt, die in den für GOCE interessierenden Frequenzbereichen bekannterweise weniger genau sind, führt dies zu höheren GOCE-Modell-Residuen. Die Rauschbestimmung der GOCE-Gradienten wird verzerrt. Daher sollte die Bestimmung der Frequenz mit SNR = 1 auf einem GOCE-basierten Modell beruhen. Diese enthalten für den Bereich der MBW die qualitativ hochwertigste globale Datenbasis. Es kommen somit das EGM_TIM_RL05 sowie das GOCO05s in Frage.

Die Frequenzen in Tabelle 4.3 deuten auf einen nahezu identischen Informationsgehalt der Modelle EGM96, EGM2008, GOCO05s sowie EGM_TIM_RL05 hin. Wie Abbildung 4.5 zeigt, ist dem jedoch nicht so. Auch wenn im Frequenzbereich der 'Signal-Rausch-Kreuzung' sehr ähnliche Verläufe erkennbar sind, ändert sich dieses Bild für den Frequenzbereich zwischen 3...40 mHz (untere MBW und darunter) entscheidend.

Das EGM96 führt zu GOCE-Modell-Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}$, die die Residuen der anderen Modelle unterhalb von etwa 30 mHz um bis zu eine Größenordnung übersteigen (siehe Abb. 4.5). In diesem Frequenzbereich tragen GRACE-Daten maßgeblich zum Informationsgehalt der Gravitationsfeldmodelle bei, die in EGM96 nicht enthalten sind. Das EGM2008 sowie das ITG-Grace2010s enthalten beide keine GOCE-Daten. Ihre GOCE-Modell-Residuen zeigen einen unterschiedlich ausgeprägten Signalabfall innerhalb der MBW, der in den GOCE-Modell-Residuen in Form höheren Rauschens erkennbar wird: für $\Delta \boldsymbol{V}_{xx}^{GRF}$ zwischen 8...40 mHz, für

$\Delta \boldsymbol{V}_{yy}^{GRF}$ zwischen 3...20 mHz, für $\Delta \boldsymbol{V}_{zz}^{GRF}$ zwischen 3...40 mHz und für $\Delta \boldsymbol{V}_{xz}^{GRF}$ im Bereich von 7...40 mHz. Wie in Abbildung 4.5 ersichtlich, überlagern sich die Residuen der beiden GOCE-Modelle GOCO05s und EGM_TIM_RL05 und weisen im dargestellten und für die GOCE-Validierung interessierenden Frequenzbereich identischen Informationsgehalt auf.

Modellunabhängig (mit Ausnahme des EGM96) zeigt sich, dass die Komponenten $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ ein den Requirements entsprechendes Verhalten aufweisen. Mit Ausnahme kleinerer Bereiche höheren Rauschens für EGM2008 und ITG-Grace2010s in $\boldsymbol{V}_{xx}$, wie oben beschrieben, unterschreiten sie die Requirements über die gesamte MBW. Sowohl $\boldsymbol{V}_{zz}$ als auch $\boldsymbol{V}_{xz}$ weisen ein über die MBW etwa um den Faktor 2 erhöhtes Rauschniveau auf. Das Rauschen von $\boldsymbol{V}_{zz}$ steigt in Richtung niedriger Frequenzen an; der Anstieg ist jedoch erheblich geringer als prognostiziert und so liegt das Rauschen an unteren Grenze der MBW deutlich unterhalb der Requirements. $\boldsymbol{V}_{xz}$ zeigt ein in der MBW sehr konstantes weißes Rauschen, das erst unterhalb des Messbandes beginnt anzusteigen. Bedingt durch Änderung in der GOCE-Datenprozessierung verbunden mit einer Daten-Reprozessierung konnte die Qualität der Gradienten speziell im unteren Bereich des Messbandes erheblich verbessert werden. Im Ergebnis zeigen $\boldsymbol{V}_{yy}$ und $\boldsymbol{V}_{zz}$ einen leichten Anstieg in Richtung der unteren Grenze des Messbandes. $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ weisen weißes Rauschen über die gesamten MBW auf.

Wie sowohl in Tabelle 4.3 als auch Abbildung 4.5 ersichtlich, eignet sich die GGT-Spur nicht zur Bestimmung der (Kreuzungs-)Frequenzen mit SNR = 1. Wie bereits im vorherigen Abschnitt diskutiert, führt die Frequenz-Bestimmung auf Grundlage der Spur zu einer Unterschätzung der Frequenzen bei allen Komponenten.

Rauschen im Zeitbereich - regionale Korrelationen

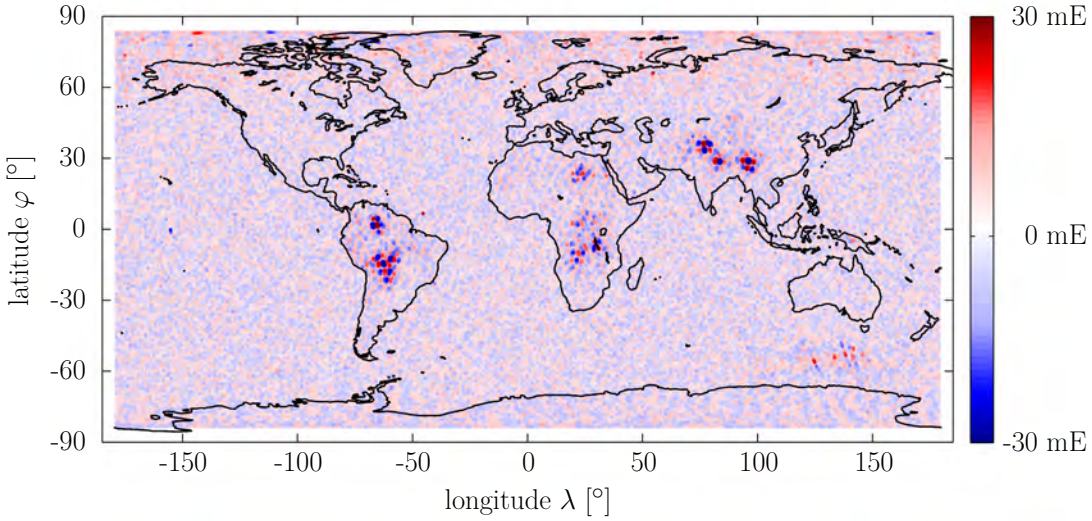
Die Rauschbestimmung der Gradientenkomponenten beruht auf GOCE-Modell-Residuen gemäß Gleichung (4.1). Wie bereits diskutiert, kann die Datenbasis der EGM von unterschiedlicher Qualität sein, speziell im Falle terrestrischer Schweredatensätze. Wird bei der Validierung der GOCE-Gradienten ein Vergleich von GOCE- und Modell-Gradienten durchgeführt, können Residuen im Wesentlichen zwei Ursachen haben:

1. Die GOCE-Gradienten sind fehlerhaft, oder
2. die Qualität der Modell-Gradienten ist regional oder in bestimmten Frequenzbereichen gemindert, so dass die GOCE-Gradienten an diesen Stellen mehr Informationen enthalten.

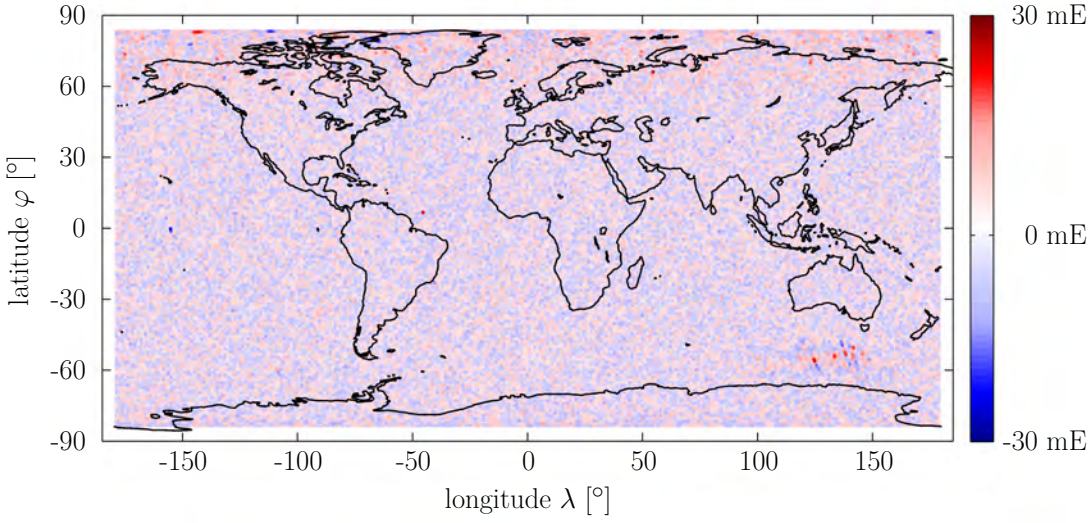
Diese Tatsache ist für die Ergebnisinterpretation entscheidend, sofern Modellinformation in die Analyse einfließt (siehe dazu Abs. 5.5.1.1).

Um einen Eindruck zu vermitteln, wie sich derartige GOCE-Modell-Residuen geografisch häufen können, werden im Folgenden Residuen auf Basis einiger Modelle untersucht. Beispielhaft werden dazu einige Komponenten und Modelle ausgewählt. Aufgrund der langwelligen Ungenauigkeiten der GOCE-Gradienten werden GOCE und Modell nur im Bereich der MBW verglichen. Dazu werden beide Gradiententensoren komponentenweise Bandpass-gefiltert. Zur Filterung wird ein Butterworth-Filter 8-ter Ordnung verwendet (siehe auch Abs. 2.2.3). Als Grenzfrequenzen (auch cut-off oder roll-off Frequenzen) werden $f_l = 0.005$ Hz für die untere und $f_h = 0.1$ Hz für die obere gewählt, also die Grenzen der MBW. Die folgenden Abbildungen zeigen die Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{GRF,\ MBW} = bandpass[V_{ij,GOCE}^{GRF}]_{f_l}^{f_h} - bandpass[V_{ij,Modell}^{GRF}]_{f_l}^{f_h}$ (ähnlich Gl. (4.1)) als Differenz der beiden Filterresultate.

In Abbildung 4.6 werden die Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{yy}^{GRF,\mathrm{MBW}}$ zwischen GOCE und dem EGM2008 (a) sowie dem GOCO05s (b) im Messband dargestellt. Es sind deutlich Regionen mit erhöhtem Rauschen zu erkennen, die jedoch verschiedene Ursachen haben. Die Datenbasis terrestrischer Schweredaten in Teilen Südamerikas, Afrikas sowie dem Himalaya-Gebirge sind vergleichsweise schlecht und das dortige erhöhte regionale Rauschen in den Residuen zum EGM2008 ist auf die im Vergleich zu GOCE niedrigere Genauigkeit des EGM2008 zurückzuführen. Dies wird auch beim Vergleich mit den Residuen zum GOCO05s deutlich, in dem die entsprechenden Gebiete kein erhöhtes Rauschen aufweisen.



(a) **EGM2008**



(b) **GOCO05s**

Abbildung 4.6: Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{yy}^{GRF,\ MBW}$ aus der Differenz von GOCE- und Modell-Gradienten in der GOCE-MBW.

Diejenigen Gebiete höheren Rauschens, die in den Residuen zu beiden Modellen auftreten, sind auf Ungenauigkeiten der GOCE-Gradienten zurückzuführen. Diese treten in erster Linie südlich von Australien auf. Ein leicht erhöhtes Rauschen lässt sich ebenfalls in nördlichen Breiten im Bereich um den Nordpool erkennen. Auf eine Interpretation der Ursachen regional erhöhten Rauschens wird an dieser Stelle verzichtet, da es hier darum geht, auf unterschiedliche Fehlerquellen zu sensibilisieren. Die Regionen erhöhten Rauschens in den GOCE-Gradienten werden durch die Kreuzungspunktanalyse sehr genau identifiziert. Für eine Interpretation der Ursachen wird auf Abschnitt 6.3 verwiesen.

Die Residuen der $\boldsymbol{V}_{yy}$ Komponente wurden hier nur beispielhaft gewählt: Nur diese zeigen die südlich von Australien auftretende Korrelation regionalen Rauschens. Alle anderen Komponenten zeigen eine weitgehend homogene Rauschverteilung ohne regionale Auffälligkeiten. Die Größenordnung der Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{yy}^{GRF,\ MBW}$ in der MBW ist im Vergleich zu den anderen hochgenauen Komponenten eher gering. Dies wird bereits am Verlauf der ASD in Abbildung 4.5 (b) deutlich: Die Energie des Rauschens liegt in großen Bereichen der MBW nur zwischen 9...10 mE/$\sqrt{\text{Hz}}$ und weist damit das niedrigste Rauschniveau aller Komponenten auf.

Wie in Abbildung 4.6 (a) ersichtlich, weisen die GOCE-EGM2008-Residuen über weiten Teilen der Erde ein gleichmäßiges (weißes) Rauschen auf. In der ASD der $\Delta \boldsymbol{V}_{yy}^{GRF}$ in Abbildung 4.5 (b) zeigt sich im Vergleich zu den GOCE-GOCO05s-Residuen eine erhöhte Rausch-Energie, sehr deutlich im unteren Bereich des Messbandes zwischen 5...20 mHz. Dieser Frequenzbereich entspricht einer räumlichen Bodenauflösung von 740...185 km (Umrechnung entsprechend Gl. (2.29) und (2.30), S. 13). Die Größe der Regionen mit erhöhtem Rauschen in Abbildung 4.6 (a) fallen genau in diesen Bereich. Das regionale Rauschen bildet sich also in der ASD ab. Die ASD enthält aber keine Information darüber, dass regionales Rauschen den entsprechenden Anstieg im Bereich der genannten Frequenzen verursacht. Die ASD stellt nur ein 'gemitteltes' Rauschmaß der gesamten Zeitreihe dar.

Anhand dieses Beispiels wird deutlich, dass die ASD keine Aussage über die Qualität einer Einzelmessung erlaubt. Die Einzelmessung kann deutlich besser sein, als es sich aus der ASD der Zeitreihe ableiten lässt.

Zusammenfassend ergeben sich aus diesem Abschnitt folgende Erkenntnisse:

- Rauschen einzelner GGT-Komponenten lässt sich sehr gut aus GOCE-Modell-Residuen ableiten. Dabei ist die Wahl des Modells jedoch entscheidend (siehe letzter Punkt).
- Die Bestimmung von Frequenzen an denen sich Signal- und Rauschkurven kreuzen (SNR = 1) sollten auf Basis des individuellen Rauschens einzelner Komponenten bestimmt und nicht basierend auf der Tensor-Spur abgeleitet werden (Gefahr einer 'Frequenzunterschätzung').
- Die GGT-Komponenten $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ weisen ein Rauschverhalten entsprechend den Requirements auf; das Rauschen von $\boldsymbol{V}_{zz}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ liegt etwa einen Faktor 2 darüber.
- Die ASD erlaubt keine Aussage über die Qualität einer Einzelmessung. Sie stellt eher ein gemitteltes Rauschmaß dar. Einzelmessungen können daher auch eine höhere Qualität aufweisen als sich aus der ASD ergibt. Aus diesem Grund wird zur Validierung einzelner Beobachtungen (hier der GG) die Kreuzungspunktanalyse angewandt und die Qualität nicht auf Basis des reinen GOCE-Modell-Vergleichs abgeleitet.
- Werden in den Validierungsprozess Modellinformationen in Form von Modell-Gradienten eingebracht, ist die Modellwahl entscheidend: Die Wahl sollte auf Modelle fallen, die im interessierenden Frequenzbereich eine zu den GOCE-Gradienten möglichst ähnliche Qualität aufweisen. Erst damit kann sichergestellt werden, dass auftretende Residuen am Ende des Validierungsprozesses auf Ungenauigkeiten der GOCE-Gradienten zurückzuführen sind und es sich nicht um Artefakte der GOCE-Modell-Differenzen handelt. Diese könnten im Zuge der Ergebnisinterpretation nicht von den wirklichen GOCE-Fehlern getrennt werden.

Im nächsten Abschnitt wird das bisher frequenzabhängige Rauschen in den Zeitbereich 'transformiert', in dem die Analysen zur Validierung der GOCE-Gradienten stattfinden.

4.2 Abschätzung der Genauigkeit der Gravitationsgradienten

Das Ziel dieser Arbeit ist die Beurteilung der Qualität einzelner Gravitationsgradienten mit Hilfe des in-orbit Vergleichs in Kreuzungspunkten. In diesem Abschnitt wird ein Genauigkeitsniveau der Gradienten abgeschätzt. Dieses gilt als Grenze für den Einfluss jeglicher Rechenoperationen auf die Gradienten im Zuge des Validierungsprozesses.

Die Validierung soll eine Qualitätsbeurteilung *einzelner* GOCE-Gradienten in einem *bestimmten Frequenzbereich* - z.B. der MBW - erlauben. Für die Bestimmung des Genauigkeitsniveaus einzelner Gradienten bedeutet dies die Ableitung eines Rauschmaßes im Zeitbereich. Um die Forderung nach der Frequenzabhängigkeit zu erfüllen, erfolgt die Bestimmung des Rauschmaßes auf Basis der Spektraldichten der GOCE-Modell-Residuen. Diese werden in den Zeitbereich 'transformiert': Durch Integration der Fläche unterhalb der PSDs (PSD = ASD^2) der GOCE-Modell-Residuen wird die in den Residuen enthaltene Energie, genauer die

Standardabweichung der Residuen, berechnet. Diese Vorgehensweise birgt den Vorteil, dass die Integration auf den gewünschten Frequenzbereich begrenzt werden kann und die Standardabweichung (die 'Rauschenergie') explizit nur für diesen Frequenzbereich bestimmt wird. Zur mathematischen Ableitung der Rauschenergie eignet sich die Trapezformel gemäß Gleichung (2.72) (S. 29).

Brieden und Müller (2012) vergleichen die Rauschenergie der Spur-Requirements mit der Rauschenergie der Tensor-Spur auf Basis realer GOCE-Daten. Da sich das Rauschen der einzelnen Komponenten des GGT voneinander unterscheidet, wird der Vergleich der Rauschenergie für alle vier hochgenauen Gradienten komponentenweise durchgeführt.

Tabelle 4.4 zeigt die Energie des Gradientenrauschens in verschiedenen Frequenzbereichen. Die Werte basieren auf den ASDs der GOCE-GOCO05s-Residuen (gemäß Gl. (4.1)) der jeweiligen GGT-Komponente. Es wird die Fläche unterhalb der LPSDs (=LASD^2, Abb. 4.5) integriert. Wie bereits im vorherigen Abschnitt diskutiert, wird auch hier das erhöhte Rauschniveau von $\boldsymbol{V}_{zz}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ gegenüber dem vom $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ deutlich. Für die Komponenten mit erhöhtem Rauschniveau ergibt sich für die MBW ein Rauschen von 6...7 mE und für $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ eines von 3...4 mE.

Eine Erweiterung des Integrationsbereiches im Verhältnis zur MBW in Richtung niedriger Frequenzen ($f_l = \{5(\text{MBW}), 4, 3\}$ mHz) führt erwartungsgemäß zu einem leichten Anstieg des Rauschens: 1...3 % bei Erweiterung auf 4 mHz; 2...6 % bei Erweiterung auf 3 mHz. Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt, liegen die Frequenzen, an denen sich ein SNR ≈ 1 ergibt, gemäß Tabelle 4.3 zwischen 31 und 42 Hz (ohne Berücksichtigung der ITG-Grace2010s basierten Ergebnisse). Wird der Integrationsbereich auf eine obere Frequenz f_h von 50 bzw. 42 Hz begrenzt, reduziert sich erwartungsgemäß die zu integrierende Fläche und es wird ein geringeres Rauschen abgeleitet: für $f_h = 42$ Hz liegt das Rauschen von $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ im Bereich von 2 mE und für $\boldsymbol{V}_{zz}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ bei 4...5 mE.

Wie eingangs erwähnt, basieren diese Zahlenwerte auf dem gut zweimonatigen Datensatz zu Beginn der GOCE-Mission im November 2009 bis Januar 2010. Auf Grundlage anderer Datenzeiträumen ergeben sich nur marginal unterschiedliche Werte, sodass die Interpretation der Ergebnisse als allgemeingültig für den GOCE-Missionszeitraum zu betrachten sind.

Das aus den Spur-Requirements abgeleitete Rauschen lässt sich aufgrund des eingeschränkten Definitionsbereiches nur für Frequenzbereiche bestimmen, die vollständig innerhalb der MBW liegen. Im Falle der Spur wird besonders deutlich, dass die Integration der Fläche unterhalb der PSD mittels Trapezformel auf linearen Datenachsen beruht. Wird in einer Darstellung mit linearen Datenachsen eine Gerade durch eine Vielzahl an Punkten beschrieben, so stellen diese Punkte in einer (doppelt-)logarithmischen Darstellung keine Gerade mehr dar. Genau so stellen sich Punkte, die in einer (doppelt-)logarithmischen Darstellung eine Gerade bilden, auf linearen Achsen nicht als Gerade dar. Diese Eigenschaft muss im Zuge der Integra-

Tabelle 4.4: Rauschenergie [mE] der GOCE Gravitationsgradienten in verschiedenen Frequenzbereichen (zwischen unterer Frequenz f_l und oberer Frequenz f_h), abgeleitet aus den GOCE-Modell-Residuen basierend auf dem EGM GOCO05s.

Frequenzbereich	**Rauschenergie [mE]**				
f_l...f_h [mHz]	$\Delta\boldsymbol{V}_{xx}^{GRF}$	$\Delta\boldsymbol{V}_{yy}^{GRF}$	$\Delta\boldsymbol{V}_{zz}^{GRF}$	$\Delta\boldsymbol{V}_{xz}^{GRF}$	Spur-Requ.
5 ... 100 (MBW)	3.39	3.00	6.37	6.85	4.85
4 ... 100	3.41	3.04	6.48	6.90	
3 ... 100	3.44	3.09	6.61	6.96	
5 ... 50	2.28	2.08	4.80	4.74	4.17
4 ... 50	2.33	2.13	4.94	4.81	
3 ... 50	2.37	2.20	5.12	4.90	
5 ... 42	2.01	1.91	4.47	4.30	4.06
4 ... 42	2.12	1.96	4.63	4.38	
3 ... 42	2.17	2.04	4.81	4.49	

tion der Fläche unterhalb der Spur-Requirements berücksichtigt werden, um die Energie der nur durch vier Stützpunkte repräsentierten Spur richtig zu bestimmen. Eine Lösung ermöglicht eine gegen unendlich strebenden Anzahl an Stützpunkten, mit Hilfe derer der induzierte Fehler minimiert wird. Für die Spur-Requirements (beschrieben durch nur 4 Stützpunkte, siehe Tab. 4.2) bedeutet dies eine Interpolation weiterer Stützstellen, die den stückweise geraden Verlauf der Requirements auf einer (doppelt-)logarithmischen Darstellung beschreiben.

Wie erwartet, liegt die aus den Spur-Requirements abgeleitete Standardabweichung zwischen denen der hochgenauen Komponenten ($\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$) und der Komponenten mit leicht erhöhtem Rauschniveau ($\boldsymbol{V}_{zz}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$).

Résumé

Die Analyse frequenzabhängigen Rauschens einzelner GOCE-GGT-Komponenten gelingt über einen GOCE-Modell-Vergleich. Bei der Modellwahl ist darauf zu achten, dass die Qualität des Modells im interessierenden Frequenzbereich möglichst ähnlich ist zu der Qualität der Gradienten selbst. Die Bestimmung von Frequenzen, an denen sich Signal und Rauschen kreuzen (SNR = 1), sollten nicht Spur-basiert, sondern auf Basis des Rauschens aus GOCE-Modell-Residuen errechnet werden.

Die Qualitätsbeurteilung der GOCE-Gradienten fokussiert auf die MBW des Gradiometers. Darin zeigt sich ein den Requirements entsprechendes Rauschen von $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$; $\boldsymbol{V}_{zz}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ liegen etwa Faktor 2 oberhalb der Requirements. Unterhalb der MBW ist die Qualität aller vier hochgenauen Tensorkomponenten besser als erwartet. Im oberen Bereich der MBW sowie bei höheren Frequenzen übersteigt das Rauschniveau der Gradienten deutlich deren Signalgehalt (SNR < 1).

Die Analyse einzelner GOCE-Gradienten findet im Zeitbereich statt. Aus diesem Grund ist das 'Rauschniveau' auch im Zeitbereich zu definieren. Um darüber hinaus die Forderung nach einem Rauschniveau in einem bestimmten Frequenzbereich zu erfüllen, wird auf Basis der ASD der GOCE-Modell-Residuen eine 'Transformation' des Rauschens im interessierenden Frequenzbereich vollzogen. Dabei gilt zu beachten, dass die ASD-basierte Rauschbestimmung ein 'gemitteltes' Rauschmaß jeder Komponente darstellt (regionale Rauschhäufungen führen z.B. zu einem in Teilen erhöhten ASD-Verlauf). Die einzelne Beobachtung - eine einzelne GOCE-GGT-Komponente - kann besser sein. Auch um diesen Effekt zu berücksichtigen, wird 1/10 des Rauschniveaus als Grenze für den Einfluss von Rechenoperationen auf die Gradienten definiert.

Gemäß Tabelle 4.4 ergibt sich für die MBW ein Rauschniveau zwischen 3...6.85 mE. Alle Erweiterungen sowie Einschränkungen des Frequenzbereiches führen zu einer Rauschenergie zwischen etwa 2 mE und 7 mE. Das (obere) **Rauschniveau ergibt sich zu 7 mE**. Um der erwähnten Empfehlung des auf 1/10 des Rauschniveaus festzulegenden Grenze des Einflusses der Datenverarbeitung genüge zu tun, ergibt sich der **Grenzwert der Einflüsse der Datenverarbeitung zu 1/10 · 7 mE = 0.7 mE**. Damit wird auch das Rauschniveau der am wenigsten verrauschten Tensorkomponenten deutlich unterschritten und es kann sichergestellt werden, dass jegliche Rechenoperationen keinen Einfluss auf die Gradienten-Validierung haben.

Um schließlich die Qualität der einzelnen Gradienten beurteilen zu können, genügt ein GOCE-Modell-Vergleich aufgrund des geringeren Informationsgehaltes der Modelle, sowie der unsicheren Ursache verbleibender Residuen nicht. Dazu sind Validierungsmethoden entsprechend der Kreuzungspunktanalyse notwendig, wie sie in dieser Arbeit für den Einsatz der GOCE-Gradienten-Validierung untersucht wird.

4.3 Bestimmung der Genauigkeitsanforderungen an Datenprodukte und Rechenoperationen

Zu Beginn von Abschnitt 5.1 wird in Abbildung 5.1 (S. 86) eine Übersicht über den Ablauf der Kreuzungspunktanalyse gegeben. Abschnitt 3.5 enthält neben einer Auflistung der verwendeten Datenprodukte (Tab. 3.2, S. 62) auch eine Diskussion zu deren Genauigkeiten (S. 62).

In diesem Abschnitt geht es um die Abschätzung, wie groß Fehler der GOCE-Level 2 Daten selbst sowie durch Rechenoperationen induzierte Fehler sein dürfen, um - fortgepflanzt auf die Gradienten - deren Fehlergrenze von 0.7 mE sicher zu unterschreiten. Für eine entsprechende Abschätzung müssen die Wege untersucht werden, auf denen Rechenoperationen und Datenprodukte Einfluss auf die Gradienten nehmen. Direkte Wege der Einflussnahme sind:

1. **Bestimmung synthetischer Modellgradienten**
   Synthetische Modellgradienten werden bei der Analyse mit den GOCE-Gradienten kombiniert. Die Ableitung von Modellgradienten im LNOF basiert neben dem zu Grunde gelegten Gravitationsfeldmodell auf erdfesten Satellitenpositionen (λ, φ, r) (Gl. (2.22), S. 11).

2. **Transformation der Gradiententensoren**
   Für die Transformation von Gradiententensoren werden sowohl die Positionen (λ, φ) als auch die EOQ- und IAQ-Quaternionen benötigt (siehe Gl. (3.10), S. 58).

Im Zuge der Kreuzungspunktanalyse werden nicht nur Transformationen der Gradienten vollzogen, es findet auch eine Kombination von Modell- und GOCE-Gradienten statt. Beide Operationen beeinflussen direkt die Gradientenqualität. Daher geht es in den folgenden Absätzen darum, anhand der funktionalen Zusammenhänge von Gradienten und sonstigen Level 2 Datenprodukten eine maximale Fehlergrenze für die Einfluss-nehmenden Datenprodukte zu bestimmen. Jeglicher Einfluss der Rechenoperationen hat, nach Fortpflanzung auf die Gradienten, die Gradienten-Fehlergrenze von 0.7 mE zu unterschreiten.

Aus den Untersuchungen ergeben sich Fehlergrenzen einzelner Datentypen, die z.B. bei deren Interpolation berücksichtigt werden müssen. Eine entsprechende Diskussion ist am Ende dieses Abschnittes zu finden.

Bestimmung synthetischer Modellgradienten

Die Bestimmung synthetischer Modellgradienten basiert neben dem Gravitationsfeldmodell auf erdfesten Positionen des GOCE-Satelliten. Somit gilt es abzuschätzen, welcher Positionsfehler zu einem Gradientenfehler von 0.7 mE führt. Diese Abschätzung erfolgt modellbasiert: Anhand von Satellitenpositionen in GOCE-Bahnhöhe werden Modellgradienten (im LNOF) bestimmt. Im nächsten Schritt werden die Positionen leicht verändert, dort erneut Modellgradienten abgeleitet und die Modellgradienten-Differenzen untersucht. Dieses Vorgehen entspricht der Untersuchung 3-ter Ableitungen des Gravitationspotentials der Erde (siehe auch Abs. 2.1.3). Diese sind als richtungsabhängige Veränderungen der zweiten Ableitungen interpretierbar. Zweite sowie dritte Ableitungen des Gravitationspotentials sind stark abhängig von der absoluten Entfernung zum Zentralkörper (hier der Erde). Der Radius r (Entfernung GOCE - Erdmittelpunkt) skaliert die Ableitungen (siehe z.B. Tab. 2.2, S. 15). Eine geringe Bahnhöhe (kleiner Radius) bewirkt absolut größere 2-te und 3-te Ableitungen; daher werden für diese Untersuchung Bahnhöhen im Bereich von 229 km (GOCE-Orbithöhe in letzter Missionsphase) gewählt.

Aufgrund der Ortsabhängigkeit der Gradienten werden zwei Sätze globaler Gradienten-Gitter ($0.5^\circ \times 0.5^\circ$) miteinander verglichen. Für die praktische Abschätzung wird ein MATLAB Software-Tool nach Eshagh und Abdollahzadeh (2012) genutzt, mit dem eine schnelle Bestimmung von Gravitationsgradienten-Gittern möglich ist. Für die Berechnungen wird die reine Breitenabhängigkeit der Legendreschen Polynome herangezogen, wodurch Gitterwerte sehr effizient berechnet werden können. Die Software wurde für die hiesigen Analysen leicht

Tabelle 4.5: Sensitivität der Gradienten gegenüber Positionsänderungen ($\Delta\lambda$, $\Delta\varphi$, Δr): Jeweils maximales Residuum $\Delta\#V_{ij}$ [mE] zwischen globalen Gradient-Gitterwerten in einer Höhe von 229 km und Gradienten-Gitterwerten auf entsprechend veränderten Positionen; $\#V_{ij}$ im LNOF auf Basis des GOCO05s.

Veränderungen [m]	**maximale absolute Residuen [mE]** $\Delta\#\boldsymbol{V}_{xx}$	$\Delta\#\boldsymbol{V}_{yy}$	$\Delta\#\boldsymbol{V}_{zz}$	$\Delta\#\boldsymbol{V}_{xy}$	$\Delta\#\boldsymbol{V}_{xz}$	$\Delta\#\boldsymbol{V}_{yz}$
Länge: $\Delta\lambda$						
1 m ($8.7 \times 10^{-6\circ}$)	0.00	0.01	0.12	0.00	0.01	0.01
5 m ($4.3 \times 10^{-5\circ}$)	0.02	0.05	0.06	0.02	0.03	0.05
10 m ($8.7 \times 10^{-5\circ}$)	0.05	0.09	0.12	0.04	0.06	0.11
58 m ($5.0 \times 10^{-4\circ}$)	0.27	0.52	**0.70**	0.22	0.36	0.61
Breite: $\Delta\varphi$						
1 m ($8.7 \times 10^{-6\circ}$)	0.01	0.01	0.02	0.00	0.01	0.01
5 m ($4.3 \times 10^{-5\circ}$)	0.06	0.03	0.08	0.02	0.07	0.03
10 m ($8.7 \times 10^{-5\circ}$)	0.13	0.05	0.15	0.05	0.13	0.06
45 m ($5.2 \times 10^{-4\circ}$)	0.58	0.25	**0.69**	0.22	0.59	0.28
Höhe: Δr						
0.25 m	0.16	0.16	0.32	0.00	0.00	0.00
0.50 m	0.32	0.32	0.64	0.00	0.01	0.01
0.55 m	0.35	0.35	**0.70**	0.00	0.01	0.01
0.75 m	0.48	0.48	0.96	0.00	0.01	0.01
1.00 m	0.64	0.64	1.27	0.01	0.02	0.01

modifiziert: Die ursprüngliche Bestimmung ausschließlich Normalpotential-reduzierter Gradienten wurde derart verändert, dass die Gravitationsgradienten nun ein volles Signal inkl. des Anteils des Normalpotentials enthalten.

Am Beispiel zweier um die Höhe Δh gegeneinander verschobener Gradientengitter $\#V_{ij}^{h}$ und $\#V_{ij}^{h+\Delta h}$ ergeben sich die Residuen $\Delta\#V_{ij}$ in einer Entfernung h vom Geozentrum zu

$$\Delta\#V_{ij} = \#V_{ij}^{h} - \#V_{ij}^{h+\Delta h}. \tag{4.2}$$

Die jeweils größten Werte der Gradientengitter-Residuen $\Delta\#V_{ij}$ sind für unterschiedliche Positionsänderungen in Tabelle 4.5 enthalten. Darin wird ersichtlich, dass $\Delta\#V_{zz}$ jeweils den größten Wert annimmt, die Tensorkomponente $\boldsymbol{V}_{zz}$ also am empfindlichsten gegenüber Positionsänderungen ist. Den deutlichsten Einfluss auf die Gradienten haben Änderungen in der Höhe, also der Entfernung zum Geozentrum. Auf Lageänderungen (Länge, Breite) reagieren die Gradienten im Vergleich etwa um einen Faktor 20 weniger sensitiv. Ein Vergleich der Positionsänderungen und Residuen zeigt deren in erster Näherung lineare Beziehung. Die Residuen aus Tabelle 4.5 beruhen auf dem EGM GOCO05s, sie sind jedoch weitestgehend unabhängig von der Modellwahl.

Als **Résumé** des Abschnitts über die Bestimmung synthetischer Modellgradienten kann festgehalten werden, dass solange Positionen mit einem Fehler ($\sigma_{\text{Datenprodukt}} + \sigma_{\text{Rechenoperation}}$) von weniger als 0.55 m (euklidische Distanz) zur Ableitung synthetischer Modellgradienten genutzt werden, ein Einfluss von weniger als 0.7 mE auf die Gradienten garantiert werden kann.

Transformation der Gradienten

Der zweite Weg, auf dem sonstige Datenprodukte Einfluss auf die Gradienten nehmen, ist bei der Transformation der Gradienten. Im Zuge der Kreuzungspunktanalyse werden im Wesentlichen zwei Gradiententransformationen durchgeführt: Einerseits werden synthetische Modellgradienten vom LNOF in das GRF transformiert und dort mit den GOCE-Gradienten kombiniert (siehe Abb. 5.1, S. 86); andererseits hat zum Gradientenvergleich im Kreuzungspunkt

eine Transformation der Gradiententensoren zwischen beiden im Kreuzungspunkt beteiligten GRFs zu erfolgen (Abs. 5.5). Die jeweils benötigten Rotations- oder Drehmatrizen ergeben sich aus der Kombination mehrere Sub-Matrizen, wie am Beispiel der LNOF-GRF Transformation in Gleichungen (2.83) bis (3.10) gezeigt. Da beteiligte Sub-Rotationsmatrizen auf Positionen sowie Quaternionen basieren (siehe Tab. 3.1, S. 58), werden zur Beschreibung der Rotationen die Eulerwinkel (α, β, γ) um drei Raumachsen (x, y, z) genutzt. Von diesen aus gelingt eine einfache Umsetzung der Rotationsinformation in Rotationsmatrizen sowie Quaternionen und zurück (siehe Abs. 2.3).

Im Folgenden gilt es abzuschätzen, wie groß der Fehler der Rotationsmatrizen sein darf um einen Gradientenfehler $\sigma_{V_{ij}} < 0.7$ mE hervorzurufen. Die allgemeine Rotation eines Tensors V von *System A* in *System B* erfolgt mit der Drehmatrix $\boldsymbol{R}_{B \leftarrow A}$ nach

$$\boldsymbol{V}_B = \boldsymbol{R}_{B \leftarrow A} \cdot \boldsymbol{V}_A \cdot \boldsymbol{R}^T_{B \leftarrow A}. \tag{4.3}$$

Werden Rotationsfehler als Winkelfehler definiert, wird aufgrund der Abhängigkeit von trigonometrischen Funktionen schnell deutlich, dass eine Rotationsmatrix $\boldsymbol{R}(\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma)$ rein auf Basis von Fehlerwinkeln nicht zu den größtmöglichen Gradientenfehlern führt, denn auch der absolute Betrag der Drehwinkel ist entscheidend. Daher baut die Fehleruntersuchung im Folgenden auf Gradienten-Residuen $\Delta\boldsymbol{V}_{ij}^{\sigma_w}$ gemäß Gleichung (4.4) auf, die aus der Differenz mit $\boldsymbol{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ fehlerfrei rotierter und mit $\boldsymbol{R}(\alpha + \sigma_\alpha, \beta + \sigma_\beta, \gamma + \sigma_\gamma)$ fehlerbehaftet rotierter Gravitationsgradienten hervorgehen.

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{V}_{ij}^{\sigma_w} = &\left(\boldsymbol{R}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \boldsymbol{V}_{ij} \cdot \boldsymbol{R}(\alpha, \beta, \gamma)^T\right) \\ &- \left(\boldsymbol{R}(\alpha + \sigma_\alpha, \beta + \sigma_\beta, \gamma + \sigma_\gamma) \cdot \boldsymbol{V}_{ij} \cdot \boldsymbol{R}(\alpha + \sigma_\alpha, \beta + \sigma_\beta, \gamma + \sigma_\gamma)^T\right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Der Gravitationsgradiententensor $\boldsymbol{V}_{ij}$ wurde mit

$$\boldsymbol{V}_{ij}[E] = \begin{pmatrix} -1360 & 0 & 0 \\ 0 & -1360 & 0 \\ 0 & 0 & 2720 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

so gewählt, dass er einem mittleren Gravitationsgradiententensor in erdgerichteter Orientierung in GOCE-Bahnhöhe entspricht.

In der praktischen Umsetzung wurde eine der Monte-Carlo-Simulation ähnliche Herangehensweise gewählt: Die Drehwinkel (α, β, γ) wurden jeweils zufällig zwischen 0...360° variiert; auf Basis von 1.000.000 Drehwinkel-Sätzen und der Differenzenbildung gemäß Gleichung (4.4) wurde das jeweils größte Element der differentiellen Gradiententensoren aller Sätze $max\left(\Delta\boldsymbol{V}_{ij}^{\sigma_w}\right)$ registriert; die Winkelfehler wurden nicht zufällig addiert, sondern für alle Fehlerkomponenten immer der gleiche Maximalbetrag σ_w angenommen: $\sigma_w = \sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma$. Als Ergebnisse werden in Tabelle 4.6 diejenigen Fehlerwinkel σ_w präsentiert, die zu einem maximalen Gradienten-Residuum von etwa 0.7 mE führen. Auch wenn es nicht aus den Ergebnissen in Tabelle 4.6 ersichtlich ist, besteht auch hier ein in erster Näherung linearer Zusammenhang zwischen induziertem Fehler und den $\Delta\boldsymbol{V}_{ij}^{\sigma_w}$.

Die Simulationen auf Basis der Zusammenhänge zwischen Drehwinkeln, Drehmatrizen und Quaternionen gemäß Gleichung (3.9) (S. 58) sowie Diebel (2006) erlauben die Fortpflanzung der Fehlerwinkel σ_w auf Fehler der Rotationsmatrizen sowie Quaternionen. Die dem Fehlerwinkel entsprechende metrische Distanz d in GOCE-Bahnhöhe (siehe Tab. 4.6) wurde als Bogenstück über die Beziehung $d = r \cdot \sigma_w$ [rad] mit r der Entfernung GOCE-Geozentrum (hier 6.633 km) abgeleitet. Die Drehmatrix $\boldsymbol{R}_{\mathrm{EFRF} \leftarrow \mathrm{LNOF}}$ wurde gesondert untersucht, da sie nur von zwei Winkeln (λ, φ) abhängt.

Die Fehlergrenzen gemäß Tabelle 4.6 stellen die 'maximal erlaubten' Fehlergrenzen der beteiligten Datenprodukte dar, um einen Einfluss auf die Gravitationsgradienten von weniger als 0.7 mE zu garantieren. Die Fehlergrenzen dienen damit als Grundlage für sämtliche Datenoperationen, in denen die Daten modifiziert oder verändert werden: Vor allem die Interpolationen

Tabelle 4.6: Fehlergrenzen ausgedrückt in unterschiedlichen Rotationsdarstellungen mit gesicherter Unterschreitung der Gradienten-Fehlergrenze von $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{\sigma_w} < 0.7$ mE.

	Fehlerwinkel σ_w (metr. Dist. [m])	Größtes Element der differentiellen Drehmatrix $\Delta \boldsymbol{R}$	Größtes Element des Differenz-Quaternions	max. $\left(\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{\sigma_w}\right)$
$\boldsymbol{R}(\alpha, \beta, \gamma)$	7.5×10^{-6} ° (0.87 m)	2.79×10^{-7}	/	0.69 mE
$\boldsymbol{R}_{\mathrm{EFRF} \leftarrow \mathrm{LNOF}}(\lambda, \varphi)$	9.7×10^{-6} ° (1.12 m)	2.79×10^{-7}	/	0.69 mE
Quaternionen	7.5×10^{-6} ° (0.87 m)	2.79×10^{-7}	1.31×10^{-7}	0.69 mE

der Datensätze entlang der Zeitreihe oder im Kreuzungspunkt sind derart zu realisieren, dass induzierte Ungenauigkeiten sicher die Fehlergrenzen unterschreiten.

Wie bereits erwähnt, setzt sich die Drehmatrix $\boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF} \leftarrow \mathrm{LNOF}}$ aus der Kombination der Sub-Matrizen $\boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF} \leftarrow \mathrm{IRF}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{IAQ}})$, $\boldsymbol{R}_{\mathrm{IRF} \leftarrow \mathrm{EFRF}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{EOQ}})$ und $\boldsymbol{R}_{\mathrm{EFRF} \leftarrow \mathrm{LNOF}}(\lambda, \varphi)$ zusammen (siehe Gl. (3.10), S. 58). Die in Tabelle 4.6 enthaltenen maximalen Fehlerwinkel beziehen sich auf die zur Drehung eingesetzte Matrix (hier $\boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF} \leftarrow \mathrm{LNOF}}$) und beinhalten damit die Gesamtfehler aller drei Matrizen. Im Falle linearer Zusammenhänge ließe sich die Fehlergrenze gleichmäßig mit dem Faktor $1/\sqrt{3}$ auf die drei Sub-Matrizen verteilen. Da einerseits keine linearen Beziehungen zwischen den Datenprodukten und den Drehmatrizen bestehen und andererseits einige der beteiligten Matrizen die Fehlergrenze 'von Natur aus' deutlich unterschreiten, können die Fehlerbeiträge zwischen den drei Drehmatrizen verlagert werden, wie im Folgenden diskutiert.

$\boldsymbol{R}_{\mathrm{IRF} \leftarrow \mathrm{EFRF}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{EOQ}})$ beschreibt den Zusammenhang zwischen EFRF und IRF, der - wie in Abschnitt 3.5 (S. 63) bereits kommentiert - hochgenau bekannt ist. Ein Vergleich von EOQ-basiert abgeleiteten Drehmatrizen mit den über das Online-Tool des IERS[4] anhand der Zeitinformationen ableitbaren Drehmatrizen ergab maximale Differenzen (größtes Element der Drehmatrix) von bis zu 1×10^{-9}. Die Drehmatrizen $\boldsymbol{R}_{\mathrm{IRF} \leftarrow \mathrm{EFRF}}$ unterschreiten die 'erlaubte' Fehlergrenze also um zwei Größenordnungen. Ihr Fehlerbeitrag ist damit als äußerst gering und in diesem Zusammenhang als vernachlässigbar zu betrachten.

Was die Drehmatrix $\boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF} \leftarrow \mathrm{IRF}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{IAQ}})$ betrifft, so wird deren Fehlerniveau ebenfalls deutlich unterhalb der Fehlergrenzen gemäß Tabelle 4.6 eingeschätzt (vgl. Abs. 3.5, S. 63).

Die Induktion eines Großteils des 'erlaubten' Fehlers könnte also durch $\boldsymbol{R}_{\mathrm{EFRF} \leftarrow \mathrm{LNOF}}(\lambda, \varphi)$ erfolgen. $\boldsymbol{R}_{\mathrm{EFRF} \leftarrow \mathrm{LNOF}}$ beruht auf den geozentrischen Positionskomponenten (λ, φ). Für Beide kann gesichert davon ausgegangen werden, dass deren Fehler die 1.12 m gemäß Tabelle 4.6 bei weitem unterschreiten.

Auch wenn die Fehler der aus den GOCE-Datenprodukten abgeleiteten Drehmatrizen deutlich unterhalb der Fehlergrenze liegen, sind auch die Rechenoperationen derart zu wählen, dass deren Einfluss nicht zum Überschreiten der Fehlergrenzen führt. Die wesentliche Rechenoperation, die alle an der Rotation beteiligten Datenprodukte durchlaufen muss, ist die Daten-Interpolation. Dass die im Zuge der Kreuzungspunktanalyse notwendigen Interpolationen keinen limitierenden Faktor bei der Einhaltung der 0.7 mE Fehlergrenze darstellen, wird in Abschnitt 5.3 gezeigt.

[4] Berechnung von Erdrotationsmatrizen auf der Webseite http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/index.php?index=matrice_php&lang=en (letzter Abruf am 18.08.2016)

Fehlergrenzen der Datenprodukte und Rechenoperationen

Zusammengefasst ergeben sich aus den Erkenntnissen dieses Abschnitts die einzuhaltenden Fehlergrenzen für die verschiedenen Datentypen gemäß Tabelle 4.7. Über die bereits genannten Datentypen hinaus, enthält Tabelle 4.7 auch eine Fehlergrenze für die Zeitinformation. Diese wurde auf Basis einer mittleren Geschwindigkeit in Satellitenhöhe von 7800 m/s und der Fehlergrenze der Positionen (0.55 m) abgeleitet. In der Datenverarbeitung der Kreuzungspunktanalyse ist sicherzustellen, dass die im Zuge von Interpolationen sowie weiterer Rechenoperationen induzierten Fehler nicht zur Überschreitung der Fehlergrenzen der jeweiligen Datentypen führen.

Werden mehrere Rechenoperationen nacheinander durchgeführt oder sind mehrere Datenprodukte beteiligt, ist dafür zu sorgen, dass auch die Summe aller Fehleranteile nicht die Fehlergrenze der Gravitationsgradienten von 0.7 mE überschreitet.

Tabelle 4.7: Maximale Fehlergrenzen verschiedener Datenprodukte zur sicheren Unterschreitung eines Gradientenfehlers von 0.7 mE.

Datenprodukte	**Beschreibung**	**Fehlergrenze**
Positionen	euklidische Distanz	0.55 m
	Kugelkoordinaten	8×10^{-8} °
Drehwinkel	je Winkelkomponente	7.5×10^{-6} °
Drehmatrizen	größtes Element	2.79×10^{-7}
Quaternionen	größtes Element	1.31×10^{-7}
Gravitationsgradienten	größtes Element	0.7 mE
Zeiten	-	7×10^{-5} s

5

Methodik zur Validierung von Gravitationsgradienten in Kreuzungspunkten

Der Vergleich von Beobachtungen in Kreuzungspunkten ist eine von der Idee her einfache und sehr anschauliche Methode zur Validierung und Kalibrierung von Instrumenten bzw. deren Messwerten. Die Grundidee basiert auf der Annahme gleicher Messwerte an gleichen Orten: Wird ein Messinstrument auf einer bewegten Plattform (Fahrzeug, Schiff, Satellit,...) zu unterschiedlichen Zeiten über den selben Ort bewegt, sollte derselbe ortsbezogene Messwert erfasst werden. Die Berücksichtigung lokaler und zeitlich variabler Einflüsse (z.B. Tiden) auf die Messwerte vorausgesetzt, können aus verbleibenden Messwertdifferenzen instrumentelle Fehler sowie Fehler genutzter Modelle abgeschätzt werden.

Da letztlich Messwert-Differenzen in Kreuzungspunkten analysiert werden, spricht man bei dem Verfahren auch von Kreuzungspunktanalyse oder Kreuzungspunktmethode. Aufgrund der englischen Bezeichnungen *cross-over analysis* bzw. *cross-over method*, wird im folgenden auch die Abkürzung XO für *cross-over*, also Kreuzungspunkt verwendet (entsprechend XOs für den Plural Kreuzungspunkte). Die vorliegende Arbeit behandelt die Validierung von GOCE-Gravitationsgradienten, weshalb auch von Gradientenvalidierung gesprochen wird.

Die methodische Basis für die Validierung von GOCE-Gradienten in Kreuzungspunkten wird in diesem Kapitel vorgestellt. Das Kapitel ist wie folgt aufgebaut: Abschnitt 5.1 beginnt mit der Beschreibung des Ablaufes der Validierung von GOCE-Gravitationsgradienten und stellt in Kürze die verwendeten Datenprodukte sowie die wichtigsten Verarbeitungsschritte zur Bestimmung der Residuen der GOCE-Gradienten in XOs dar.

In Abschnitt 5.2, der Kreuzungspunktbestimmung, werden die Beobachtungen entlang der Bahnbögen identifiziert, zwischen denen sich die Kreuzung ergibt, und lineare Näherungen der Kreuzungspunktpositionen berechnet. Die eigentliche Interpolation der finalen Kreuzungspunktposition erfolgt in Abschnitt 5.3, in dem gleichzeitig die Kreuzungszeiten entlang beider sich kreuzender Bahnbögen bestimmt werden und die Interpolation weiterer Datenprodukte im XO beschrieben wird.

Der Vergleich zweier GOCE-Gradiententensoren hat in einem Koordinatensystem zu erfolgen. Eine Diskussion zu geeigneten Systemen enthält Abschnitt 5.4. Die notwendige Transformation mindestens eines der beteiligten Tensoren und alle dazu notwendigen Verarbeitungsschritte werden in Abschnitt 5.5 erläutert.

Abschließend wird in Abschnitt 5.6 ein 'Closed-loop Test' vorgestellt, mit dem die Methode der Validierung von GOCE-Gravitationsgradienten in Kreuzungspunkten intern geprüft wird.

5.1 Ablauf der Validierung von GOCE-Gravitationsgradienten in Kreuzungspunkten

Die folgende Beschreibung des Ablaufes der Validierung von GOCE-Gravitationsgradienten in Kreuzungspunkten orientiert sich an Abbildung 5.1, in der die wichtigsten Verarbeitungsschritte dargestellt sind. Aufbauend auf den verschiedenen GOCE-Datenprodukten (siehe auch

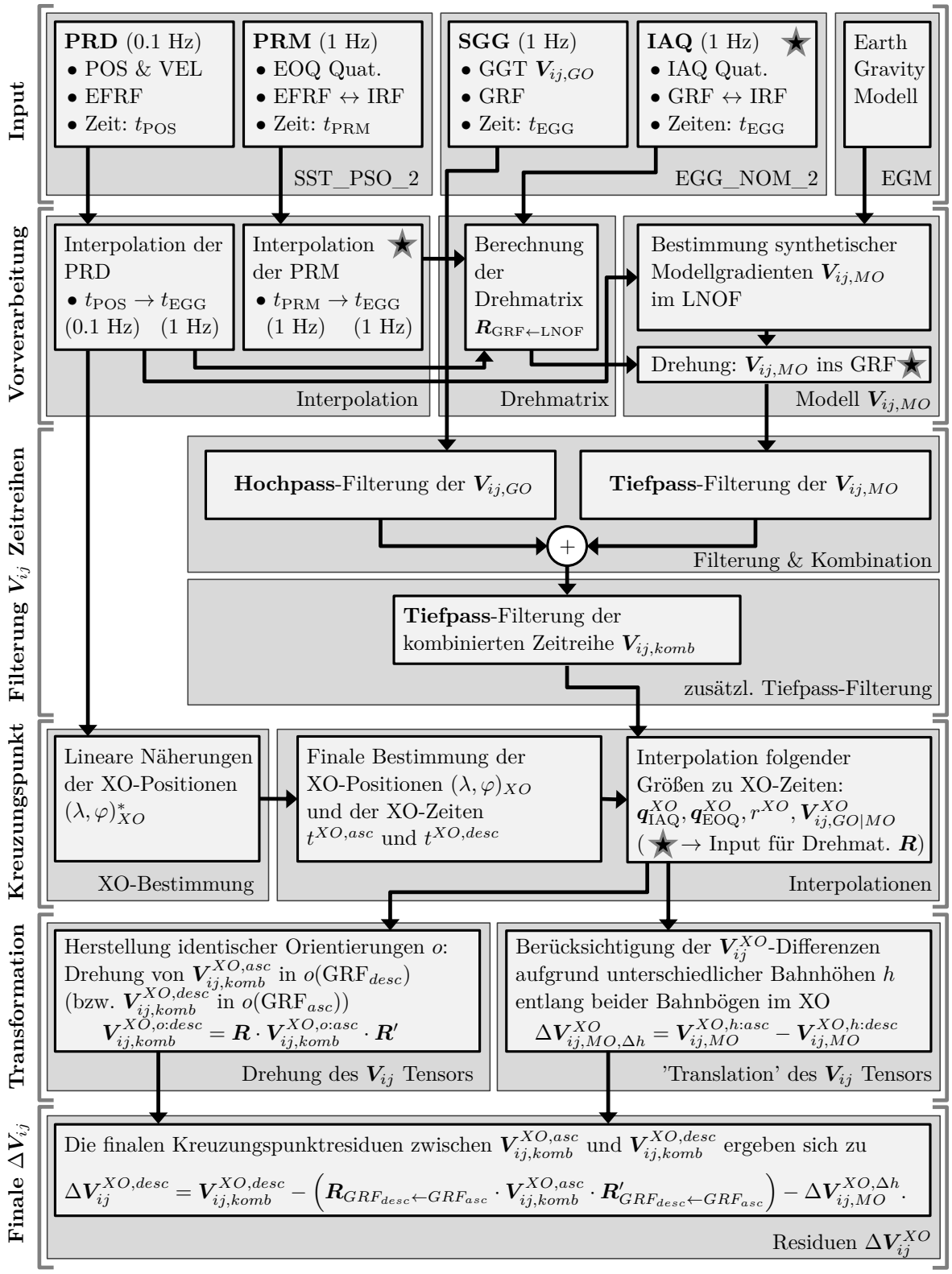


Abbildung 5.1: Übersicht zum Ablauf der Bestimmung von GOCE-Gradientenresiduen $\Delta\boldsymbol{V}^{XO}_{ij}$ im Kreuzungspunkt.

Abs. 3.5) sowie einem geeigneten Gravitationsfeldmodell (EGM) werden in der Vorverarbeitung alle (vorwiegend SST-)Datenprodukte zu den Zeiten der Gradienten (GGT) interpoliert. Geeignete Interpolationsmethoden werden in Abschnitt 5.3 untersucht. Da es bei der Validierung um die GOCE-Gradienten geht, sollen diese - solange wie möglich - unverändert bleiben, so dass nur eine Interpolation aller sonstigen Datenprodukte zu den Zeiten der Gradienten (t_{EGG}) in Frage kommt. Es werden außerdem einige Drehmatrizen (vor allem $\boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF}\leftarrow\mathrm{LNOF}}$) benötigt, die sich aus der Kombination verschiedener Datenprodukte ergeben. Als weiterer Schritt der Vorverarbeitung erfolgt die Bestimmung modellbasierter Gravitationsgradienten im LNOF sowie im GRF.

Um zwei Gradiententensoren im Kreuzungspunkt vergleichen zu können, hat eine Transformation in ein 'gemeinsames' Koordinatensystem zu erfolgen. Die Transformation (Abs. 5.5) beinhaltet eine Rotation (Drehung) und eine Translation. Um bei der Rotation eine Vermischung weniger genauer und hochgenauer Gradientenkomponenten zu verhindern, werden weniger genaue Signalanteile gegen Modellinformation ausgetauscht. Die Filterung, in der dieser Schritt erfolgt, wird in Abschnitt 5.5.1.2 erläutert.

Anschließend wird der Kreuzungspunkt berechnet. Beginnend mit der Identifikation derjenigen Punkte der Zeitreihe zwischen denen sich die Kreuzung ergibt (Abs. 5.2), werden finale Kreuzungspunkte in Abschnitt 5.3 bestimmt. Zu den Kreuzungszeitpunkten werden weitere Größen entlang beider Bahnbögen interpoliert.

Im Bereich Transformation werden alle Datensätze kombiniert. Einer der beiden zu vergleichenden GGT im Kreuzungspunkt wird in das Koordinatensystem des anderen transformiert (Abs. 5.5). Die finalen Kreuzungspunktresiduen $\Delta\boldsymbol{V}_{ij}^{XO,desc}$ (bzw. $\Delta\boldsymbol{V}_{ij}^{XO,asc}$) werden bestimmt (Abs. 5.5.3) und in Kapitel 6 detailliert analysiert.

Nummerierung der Bahnbögen

GOCE umrundete bis zum Wiedereintritt in die Erdatmosphäre innerhalb von 1.700 Tagen etwa 27.300 mal die Erde (GOCE FCT, 2014). Um eindeutig auf bestimmte Bereiche der Daten-Zeitreihe verweisen zu können, eignet sich die Zeitinformation ('Zeitstempel') der Datenprodukte (vgl. Abs. 3.5 und 2.1.5). Zeitangaben sind mitunter 'unhandlich', daher soll hier eine einfachere Art der Zuordnung gewählt werden. Da die Existenz von Kreuzungspunkten stark von der relativen Lage jeweils zweier Orbits bzw. Bahnbögen abhängt, erscheint die Nutzung von Orbitnummern geeignet. Diese Nummerierung jedes Satellitenumlaufs um die Erde wird auch von offizieller Seite (ESA) genutzt und erlaubt eine eindeutige Zuordnung zu einem jeweils etwa 90-minütigen Bereich der Daten-Zeitreihe. Über die Angabe der Orbitnummern gelingt eine einfache Referenzierung von Daten oder z.B. (Kreuzungspunkt-)Residuen (siehe Kapitel 6), die oftmals Orbit- oder Bahnbogen-bezogen dargestellt oder ausgewertet werden.

Im Detail ist die sogenannte 'Absolute Orbitnummer' unter dem Kürzel "<Abs_Orbit>" im 'Main-Product-Header' der GOCE-Datenfiles (z.B. der SST- und EGG-Produkte) enthalten (siehe auch Abs. 3.5, Datenprodukte). In den Datenprodukten der Level-2 (L2) Daten werden die Orbitnummern nicht genutzt. Eine übersichtliche Zuordnung der Orbitnummern des jeweils ersten und letzten Orbits eines Tages ist GOCE FCT (2014) zu entnehmen. Die Orbitnummer 1 ist natürlich dem allerersten Orbit am Tag des GOCE-Starts, also am 17.03.2009, zugeordnet. Der erste Orbit am 01. November 2009 - seit diesem Tag stehen offizielle GOCE-Datenprodukte in vollem Umfang zur Verfügung - trägt beispielsweise die Orbitnummer 3658.

Die offizielle Orbit-Nummerierung ist derart gewählt, dass ein neuer Orbit (inkrementell um 1 erhöhte Orbitnummer) beginnt, sobald der GOCE-Satellit den Äquator aus Richtung Süden in Richtung Norden überquert. Diese offizielle Art der Nummerierung ist für die Kreuzungspunktbestimmung ungeeignet, da sich Kreuzungen immer zwischen auf- und absteigenden Bahnbögen ergeben. Jeder aufsteigende Bahnbogen beinhaltet jedoch Beobachtungen zweier unterschiedlicher Orbits. Für die Kreuzungspunktanalyse wurde daher eine Bahnbogen-bezogene Nummerierung entwickelt.

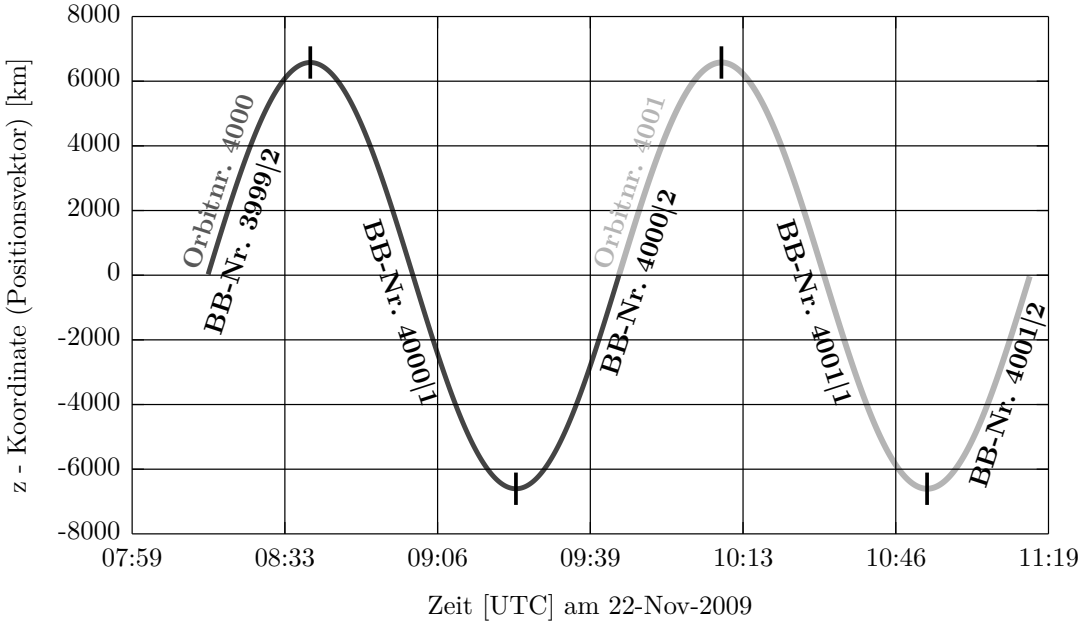


Abbildung 5.2: Bahnbogennummern (BB-Nr.) 3999|2 ... 4001|2 in Anlehnung an die offiziellen Orbitnummern (Orbitnr.) 4000 und 4001.

Um den Bezug zur offiziellen Nummerierung nicht zu verlieren, wurde die bogenweise Nummerierung an die Orbitnummerierung angelehnt. Der Zusammenhang ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Bahnbogen-Nummern ergeben sich aus der Kombination von Orbitnummer und einem Bahnbogenindex i: $i = 1$ für absteigende Bahnbögen und $i = 2$ für aufsteigende Bahnbögen. Dabei wird die Nummer desjenigen Orbits zugrunde gelegt, dem die erste Beobachtung des Bahnbogens zugeordnet ist. Abbildung 5.1 zeigt die Orbits Nr. 4000 und 4001. Diese teilen sich auf in die drei vollständig dargestellten Bahnbögen 4000|1, 4000|2, 4001|1 sowie die halb dargestellten Bahnbögen 3999|2 und 4001|2 (zur Verdeutlichung werden die Bahnbogenindizes mit einem '|' abgesetzt).

Datenumfang

Im Rahmen dieser Arbeit sollen reale GOCE-Gravitationsgradienten mit Hilfe der Kreuzungspunktanalyse validiert werden. Aufgrund der GOCE-Bahnparameter (siehe Abs. 3.1) ergibt sich eine vollständig Abdeckung der Erdoberfläche nach rund 61 Tagen[1], dies entspricht einem Wiederholungszyklus (engl. *repeat cycle*). Grundsätzlich ist die gleichzeitige Untersuchung einer langen Datenzeitreihe wünschenswert, da die Anzahl der Kreuzungspunkte in etwa quadratisch mit der Anzahl der Umläufe n steigt. Jeder zusätzliche Umlauf führt zum Entstehen von etwa $2 \cdot n$ weiteren Kreuzungspunkten. Sinnvoll erscheint eine Zeitreihenlänge von mindestens 61 Tagen (ein Wiederholungszyklus). Da nach jedem 61 Tage-Zyklus, neben der genannten Knotenverschiebung, außerdem eine Kalibration des Gradiometers durchgeführt wurde, ist der Vergleich von Gradienten vor und nach einer Kalibration von Interesse. Sollen dazu Daten aus 61 Tagen vor und 61 Tagen nach der Kalibration genutzt werden, umfasst der Datensatz bereits 122 Tage. Bei einer Datenrate der Gravitationsgradienten von 1 Hz ergeben sich $86.400 \ \frac{Beobachtungen}{Tag} \cdot 122$ Tage ≈ 5.3 Millionen Zeitpunkte, zu denen Daten vorliegen. Die

[1]Der Wiederholungszyklus (engl. *repeat cycle*) der GOCE-Mission liegt bei etwa 61 Tagen (979 Umläufen, Steiger et al., 2013), was zu einer Entfernung benachbarter Bahnspuren am Äquator von etwas über 40 km führt. Um die räumliche Auflösung der Beobachtungen weiter zu verbessern, wurde nach jeweils 61 Tagen eine geringe Knotenverschiebung des GOCE-Orbits durchgeführt. Damit wurde eine Verringerung der Entfernung benachbarter Bahnspuren am Äquator erreicht. Der Begriff Wiederholungszyklus (oder repeat cycle) beschreibt daher die Dauer einer vollständigen Abtastung der Erdoberfläche und nicht etwa die wirkliche Wiederholung der identischen Satellitenspur (auch wenn diese räumlich nah beieinander liegen).

Kreuzungspunktsuche hat also in einer Datenbasis von 5.3 Millionen Positionsvektoren der GOCE-Bahn zu erfolgen.

5.2 Kreuzungspunktbestimmung

Die Bestimmung von Kreuzungspunkten ist eine Grundaufgabe der Kreuzungspunktanalyse. Sie umfasst die Identifikation von Spurkreuzungen in einer Zeitreihe von Positionsvektoren des GOCE-Satelliten. Zur Vereinfachung und Optimierung dieser Suche werden folgende missionsspezifische Eigenschaften zugrunde gelegt, die bereits in Abschnitt 2.4.1 erläutert wurden.

- Aufgrund der Tatsache, dass zur Zeit der GOCE-Mission keine weiteren Missionen operationell waren, mit denen man hätte vergleichbare Beobachtungen anstellen können, beschränkt sich die Validierung auf missions-interne Vergleiche in Kreuzungspunkten.
- Kreuzungspunkte treten i.a.R. nicht im dreidimensionalen auf, sondern in der Projektion der Satellitenspuren auf eine geeignete Referenzfläche, hier die λ, φ-Ebene erdfester, geozentrischer Kugelkoordinaten (vgl. Gl. (2.84), S. 33).
- Mit einer Bahnhöhe von etwa 260 km oberhalb der mittleren Erdoberfläche ist GOCE der Klasse der LEO-Satelliten zuzuordnen. Spur-Kreuzungen von LEO-Satelliten ergeben sich immer zwischen aufsteigenden (*engl. ascending*) und absteigenden (*engl. descending*) Bahnbögen (Bosch, 2007).

In den folgenden Abschnitten werden Kernpunkte der Kreuzungspunktbestimmung thematisiert. Abschnitt 5.2.1 beginnt mit der Beschreibung der Zielgrößen und eingesetzten Bestimmungsmethode, bevor die wesentlichen Modifikationen der Bestimmungsmethode im Vergleich zur im Grundlagenkapitel vorgestellten Variante herausgestellt werden. Eine Beschreibung des in dieser Arbeit genutzten Algorithmus zur Kreuzungspunktbestimmung und dessen Implementierung enthält Abschnitt 5.2.2.

5.2.1 Ziele und Methodik

Das Ziel der Kreuzungspunktbestimmung wird definiert als Bestimmung der folgenden Größen:

- Zeitreihenindizes der Stützpunkte, zwischen denen sich der Kreuzungspunkt ergibt (jeweils entlang auf- sowie absteigendem Bahnbogen),
- Interpolationsparameter, mit deren Hilfe eine lineare Interpolation aller Beobachtungsgrößen im Kreuzungspunkt möglich ist, sowie
- linear interpolierte Kreuzungspunktpositionen $(\lambda, \varphi)^*_{XO}$.

Diese stellen das Ergebnis der Kreuzungspunktbestimmung dar.

Jarecki (2010) stellt drei für die GOCE-Mission geeignete Methoden zur Kreuzungspunktbestimmung vor. Diese wurden in Abschnitt 2.4.1 ausführlich beschrieben. Für die Anwendung auf Realdaten wird in dieser Arbeit eine der drei Methoden aufgegriffen: und zwar die **Quasi-analytische Kreuzungspunktsuche mit Näherungswerten: "Tabellierungsverfahren"** (siehe auch Abs. 2.4.1). Dabei werden genäherte Kreuzungspunktlängen λ^*_{XO} über die Mittelung der Äquatorkreuzungslängen sich kreuzender Bahnbögen bestimmt. Die Anwendung des "Tabellierungsverfahrens" auf Realdaten hat gezeigt, dass gegenüber der in Abschnitt 2.4.1 beschriebenen Variante des Verfahrens einige Modifikationen notwendig sind. Diese umfassen (1) eine präzisere Behandlung von Bahnbogengrenzen und (2) die Erhöhung der Anzahl möglicher Kreuzungen zwischen zwei Bahnbögen. Auf beide Modifikationen wird im Folgenden eingegangen.

Behandlung von Bahnbogengrenzen

Die Simulationsdatensätze, auf die Jarecki (2010) aufbauen konnte, umfassten lediglich einen Zeitraum von 30 Tagen. Sollen, im Zuge der Realdatenanalyse, Datensätze mit einer Länge von mehr als 61 Tagen behandelt werden, liegen benachbarte Bahnbögen räumlich deutlich näher beieinander als im Simulationsdatensatz. Damit weiterhin der Grundsatz gewahrt bleibt, dass sich Kreuzungen immer zwischen auf- und absteigenden Bahnbögen ergeben, hat eine präzise Bestimmung der 'nördlichsten' ('südlichsten') Positionen der Satellitenbahnen und damit des Übergangs von auf- zu absteigenden (ab- zu aufsteigenden) Bahnbögen zu erfolgen. Es muss also klarer definiert werden, wo ein Bahnbogen beginnt und endet.

Ganz besonders deutlich wird die Notwendigkeit der Interpolation im Falle der Kreuzungspunktsuche in 0.1 Hz Positions-Datensätzen (dynamische Positionsvektoren, vgl. Abs. 3.5). Der GOCE-Satellit legte darin zwischen zwei Stützpunkten (im Abstand $\Delta t = 10$ s) eine Strecke von etwa 77 km zurücklegt. Diese Distanz ist zu groß, um Bahnbogenanfang und -ende an Stützpunkten festzumachen - hier wird eine Interpolation der 'nördlichsten' bzw. 'südlichsten' Positionen der Satellitenbahn notwendig.

Um den polnächsten Punkt des GOCE-Orbits in der λ, φ-Ebene zu identifizieren, wird zunächst der polnächste Stützpunkt der Zeitreihe bestimmt. Dies gelingt über die Suche nach einem Vorzeichenwechsel in der z-Komponente des Geschwindigkeitsvektors oder äquivalent über die Suche nach einem Vorzeichenwechsel im differenzierten φ-Vektor. Auf Basis von insgesamt 5 Stützstellen im Bereich des polnächsten Punktes wird der Bahnverlauf mit einer Parabel (Funktion 2-ten Grades) angenähert, die sich in allgemeiner Form nach Merziger und Wirth (2002) ergibt zu

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c. \tag{5.1}$$

Der Scheitelpunkt s der Parabel lässt sich in allgemeiner Form aus den Parametern a, b und c (Gl. (5.1)) bestimmen nach

$$S = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-b}{2a} \\ \frac{4ac-b^2}{4a} \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Werden in Gleichung (5.1) für x die Breiten φ und für y die Längen λ der genannten Stützpunkte eingesetzt, kann die hier ausschließlich interessierende Länge des Scheitelpunktes λ_s über die Bestimmung der Parameters x_s in Gleichung (5.2) erfolgen. λ_s definiert den Übergang zweier Bahnbögen und legt somit fest, wo ein Bahnbogen endet und ein neuer beginnt. Wird in den folgenden Abschnitten - in Bezug auf die Länge λ - also von 'Anfang' ($\lambda_{start}^{asc|desc}$) oder 'Ende' ($\lambda_{end}^{asc|desc}$) eines Bahnbogens gesprochen, entsprechen diese der Scheitelpunktlänge λ_s. Für Scheitelpunkte im Norden gilt damit $\lambda_{end}^{asc} = \lambda_s = \lambda_{start}^{desc}$ und für Scheitelpunkte im Süden $\lambda_{end}^{desc} = \lambda_s = \lambda_{start}^{asc}$.

Der Rechenaufwand der Interpolation fällt hier kaum ins Gewicht, da diese nur $n - 1$ mal durchgeführt werden muss, mit n der Anzahl an Bahnbögen. In der prototypischen MATLAB-Implementierung dauert die Interpolation von 2000 Scheitelpunkten (dies entspricht etwa 1000 Umläufen, oder einem Datenumfang von etwa 62.5 Tage) weniger als 2 s.

Anzahl der Kreuzungspunkte

Wie eingangs erläutert, ergeben sich missions-interne Kreuzungspunkte der GOCE-Mission immer zwischen Spuren auf- und absteigender Bahnbögen. Jeder GOCE-Bahnbogen überdeckt einen Längenbereich von etwa $\Delta\lambda^{track} = 180°(1 + \frac{\alpha}{\beta}) \approx 191.2°$, weil die GOCE-Bahn als Wiederholungsbahn mit einem Zyklus von $\beta = 979$ Umläufen in $\alpha = 61$ Tagen realisiert

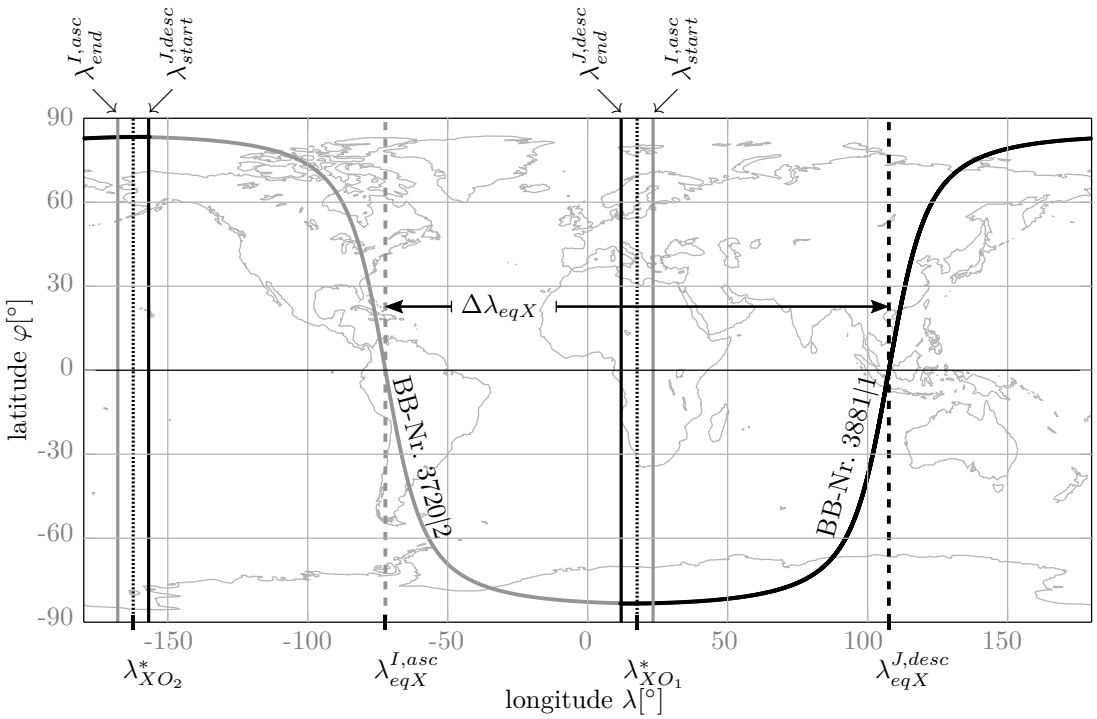


Abbildung 5.3: Die Äquatorkreuzungen des aufsteigenden Bahnbogens Nr. 3720|2 (grau) und des absteigenden Bahnbogens Nr. 3881|1 (schwarz) sind $\Delta\lambda_{eqX} = \left|\lambda_{eqX}^{I,asc}\right| + \left|\lambda_{eqX}^{J,desc}\right| = 179.85°$ voneinander entfernt. Die Bahnbögen bilden daher zwei Kreuzungspunkte bei $\lambda_{XO_1}^* = 17.67°$ und $\lambda_{XO_2}^* = -162.33°$. Aufgrund der Symmetrie der Bahnbögen liegen beide Längennäherungen 180° auseinander.

wurde[2]. Da die Bahnbögen (Spuren der Halbumläufe) eine Längenabdeckung von 180° überschreiten (siehe Abbildung 2.5, S. 36), ergibt sich immer mindestens ein Kreuzungspunkt. Dies lässt sich einfach veranschaulichen: Grenzen zwei GOCE-Bahnbögen (*ascending* und *descending*) direkt aneinander an, überdecken Sie einen Längenbereich von etwa $2 \cdot 191.2° = 382.4°$. Die Längenbereiche beider Bahnbögen 'überlappen' sich also um $382.4° - 360° = 22.4°$ und es entsteht sicher ein Kreuzungspunkt. Sind die Äquatorkreuzungen der Bahnbögen etwa 180° voneinander entfernt, überdecken sich beide Enden der Bahnbögen um etwa $22.4°/2 = 11.2°$, und zwischen einem Paar auf- und absteigender Bahnbögen entstehen zwei Kreuzungspunkte. Diese Situation ist in Abbildung 5.3 dargestellt: Das 'Ende' des absteigenden Bahnbogens $\lambda_{end}^{J,desc}$ liegt westlich des 'Anfangs' des aufsteigenden Bahnbogens $\lambda_{start}^{I,asc}$ und das 'Ende' des aufsteigenden Bahnbogens $\lambda_{end}^{I,asc}$ liegt westlich des 'Anfangs' des absteigenden Bahnbogens $\lambda_{start}^{J,desc}$. In Abbildung 5.3 sowie allen Bahnbogen-Darstellungen des GOCE-Satelliten in der λ, φ-Ebene ist zu beachten, dass sich aufgrund der retrograden Satellitenbahn ($i > 90°$) die Bahnbögen 'von rechts nach links' aufbauen. D.h., die Spur von GOCE beginnt im Osten und 'bewegt sich' mit fortlaufender Zeit westwärts. Bei dem schwarzen Bahnbogen handelt es sich also um einen absteigenden, wohingegen der graue ein aufsteigender ist.

Aus den Vorüberlegungen ergibt sich, dass der Schlüssel zur Anzahl der Kreuzungspunkte zwischen einem auf- und einem absteigenden Bahnbogen in der Längenabdeckung beider Bahnbögen $\Delta\lambda^{track}$ und dem longitudinalen Abstand[3] $\Delta\lambda_{eqX}$ der Äquatorkreuzung beider Bahnbögen $\lambda_{eqX}^{I,asc}$ und $\lambda_{eqX}^{J,desc}$ liegt. Im Weiteren werden $\lambda_{eqX}^{I,asc}$ und $\lambda_{eqX}^{J,desc}$ vereinfacht mit λ_{eqX}^{asc} und λ_{eqX}^{desc} dargestellt.

[2]Wird die mittlere Längenüberdeckung eines Bahnbogens $\Delta\lambda^{track}$ aus 2000 Bahnbögen der ersten 1000 Umläufe im Zeitraum von 01. November 2009 bis 03. Januar 2010 abgeleitet, ergeben sich Längenüberdeckungen $\Delta\lambda^{track}$ zwischen (min:) 191.2004° und (max:) 191.2308° mit einer Standardabweichung von 0.0086955°.

[3]Abstand entlang der geozentrischen Längenkomponente, also in Ost-West-Richtung.

Unter der Annahme einer konstanten Längenabdeckung $\Delta\lambda^{track}$ von 191.2° (> 180°) tritt immer mindestens ein Schnittpunkt auf. Gilt außerdem die Beziehung

$$\left(360° - \Delta\lambda^{track}\right) < \Delta\lambda_{eqX} < \Delta\lambda^{track}, \tag{5.3}$$

liegt also der longitudinale Abstand $\Delta\lambda_{eqX}$ im Bereich von $\pm(191.2° - 180°) = \pm 11.2°$ um 180°, so treten zwei Kreuzungspunkte auf. In der Realität variieren die Längenabdeckungen der Bahnbögen $\Delta\lambda^{track}$ um einige hundertstel Grad (siehe auch Fußnote 2 auf S. 91). Dies führt dazu, dass der Zusammenhang aus Gleichung (5.3) im Variationsbereich der Längenabdeckung ($\min(\Delta\lambda_{eqX})$ ... $\max(\Delta\lambda_{eqX})$) keine eindeutige Entscheidung erlaubt. Um dennoch eine eindeutige Aussage über die Anzahl an Kreuzungspunkten machen zu können, wird die Schnittuntersuchung verfeinert:

Sobald

$$\left(360° - \max(\Delta\lambda^{track})\right) < \Delta\lambda_{eqX} < \max(\Delta\lambda^{track}) \tag{5.4}$$

gilt, erfolgt die Schnittprüfung anhand der relativen Lage der Längen von Anfang und Ende der beteiligten Bahnbögen. Weitere Details werden in Abschnitt 5.2.2 erläutert.

Auf Basis von 1000 auf- und 1000 absteigenden Bahnbögen zu Beginn der Mission (Zeitraum: 01. November 2009 bis 03. Januar 2010, etwa 62.5 Tage) ergeben sich insgesamt 1.061.290 Kreuzungspunkte. Darin enthalten sind 61.290 Bahnbögen-Kombinationen, zwischen denen sich je zwei Kreuzungspunkte bilden. Numerische Ergebnisse des folgenden Abschnitts wurden ebenfalls aus der genannten Datenbasis abgeleitet.

Schnittwinkel und schleifende Schnitte

Wie in Abbildung 5.3 deutlich wird, können Bahnbögen im Bereich der Kreuzung nahezu parallele Verläufe aufweisen. Dies führt dazu, dass sich der gesuchte Schnittpunkt eher als 'Schnittbereich' darstellt. Diese Situation wird auch als **'schleifender Schnitt'** der Bahnbögen bezeichnet und führt zu einer schlecht konditionierten Schnittpunktbestimmung. Ein exakter Schnitt**punkt** ist dann kaum auszumachen und die Interpolation selbst ist - genau wie die Interpolation weiterer Beobachtungsgrößen im Kreuzungspunkt - u.U. sehr ungenau.

Die Bestimmung der Schnittwinkel der Bahnbögen im Kreuzungspunkt kann in guter Näherung auf Basis der Zielgrößen der Kreuzungspunktbestimmung erfolgen. Anhand der Zeitreihenindizes $[i, i+1]$ der den Kreuzungspunkt direkt umgebenden Stützstellen können Richtungsvektoren $\vec{b}^{\,asc}$ und $\vec{b}^{\,desc}$ entlang beider Bahnbögen bestimmt werden. Diese ergeben sich äquivalent zu Gleichung (2.85) (S. 35) durch Subtraktion der Positionsvektoren $\vec{r}_{i+1}$ und $\vec{r}_i$ und beschreiben den linearen Verlauf der Bahnbögen im Bereich des Kreuzungspunktes. Der Schnittwinkel ϕ zwischen den linear approximierten Verläufen beider Bahnbögen lässt sich nach Merziger und Wirth (2002) bestimmen zu

$$\phi = \measuredangle(\vec{b}^{\,asc}, \vec{b}^{\,desc}) = \arccos \frac{\vec{b}^{\,asc} \cdot \vec{b}^{\,desc}}{\left|\vec{b}^{\,asc}\right| \left|\vec{b}^{\,desc}\right|}. \tag{5.5}$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften der GOCE-Bahnbögen ist der Schnittwinkel ϕ zwischen auf- und absteigenden Bahnbögen abhängig von der longitudinalen Entfernung der Äquatorkreuzungen beider Bahnbögen $\Delta\lambda_{eqX}$ und - damit direkt verknüpft - von der (geozentrischen) Breite φ. Abbildung 5.4 zeigt die genannten Abhängigkeiten der Schnittwinkel in Kreuzungspunkten, die gemäß Gleichung (5.5) auf Basis des oben genannten Datenzeitraums bestimmt wurden: [*links*] - Kreuzungen in Äquatornähe bilden Schnittwinkeln um $\phi = 160°$, 'deutlichste' Schnittwinkel von $\phi = 90°$ entstehen in Breiten um 68.8°, und in Polnähe streben die Schnittwinkel gegen Null. [*rechts*] - Liegen die Bahnbögen nahe beieinander ($\Delta\lambda_{eqX} \to 0$), entstehen Kreuzungspunkte in Äquatornähe unter großen Schnittwinkeln. Je größer der Abstand der Äquatorkreuzungen wird, desto polnäher entstehen Kreuzungen und desto 'paralleler' verlaufen die beteiligten Bahnbogenabschnitte, was sich in Schnittwinkeln $\phi \to 0$ niederschlägt.

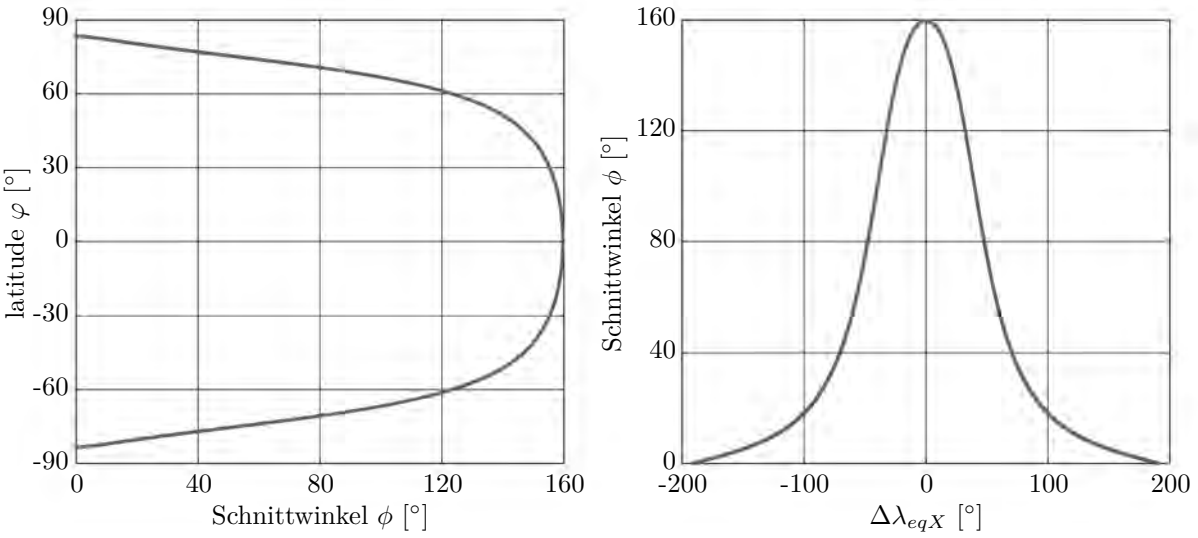


Abbildung 5.4: Schnittwinkel in Abhängigkeit [*links*] der geozentrischen Breite (latitude) und [*rechts*] der longitudinalen Entfernung der Äquatorkreuzungen $\Delta\lambda_{eq}$.

Das Problem des 'schleifenden Schnittes' ist in vielen Fachdisziplinen bekannt, in denen es auch als 'Gefährlicher Ort' oder 'Gefährlicher Kreis' bezeichnet wird. Neben der Numerischen Mathematik (Deuflhard und Hohmann, 2008) tauchen gefährliche Örter auch in Geodäsie-näheren Fachdisziplinen wie der Astronomie (Schödlbauer, 2011) oder auch der Satellitennavigation auf, in der sogenannte DOP-Werte (Dilution of Precision) genutzt werden, um ein Maß für geometrisch bedingte Ortungsfehler anzugeben (Mansfeld, 2004). In der Fachliteratur ist keine klare Grenze definiert, ab wann es sich bei einem Schnitt um einen 'schleifenden Schnitt' handelt. Als Richtwert wird bei Schnittwinkeln $\leq 10°$ von schleifenden Schnitten gesprochen. Aufgrund der Bahngeometrie von GOCE bilden sich die allermeisten Spurkreuzungen in Polnähe. Aus Tabelle 5.1 wird ersichtlich, dass sich etwa 35 % aller Kreuzungen unter Schnittwinkeln von weniger als 10° ergeben, 50% aller Kreuzungen unter Schnittwinkel von weniger als 20.3° und in absoluten Breiten von über 80°. Der 'ideale Schnittwinkel' von 90° entsteht in (absoluten) Breiten um 68.82°. Etwa 77 % aller Kreuzungen fallen damit in die weit gefassten Polbereiche zwischen Nordpol (Südpol) und einer nördlichen (südlichen) Breite von 68.82°. Aufgrund der GOCE-Bahninklination von i $\approx 96.6°$ entsteht ein Polarloch und die Projektion der Bahn in die λ, φ-Ebene bildet sich im Breitenbereich $-83.36° \leq \varphi \leq 83.36°$ ab. Bereits wenige hundertstel Grad 'unterhalb' dieser Breiten-Maxima treten Schnittwinkel von bis zu 1° auf (4.5 % der Kreuzungen mit $\phi < 1°$).

Zur Gewährleistung einer fehlerfreien und exakten Interpolation der Kreuzungspunktpositionen sowie aller zu interpolierenden Beobachtungsgrößen sollte auf schleifende Schnitte verzichtet werden. Um nicht bereits zu diesem frühen Zeitpunkt der Daten-Verarbeitung einen beträchtlichen Anteil der Kreuzungspunkte auszusortieren (35 % mit $\phi \leq 10°$), werden nicht pauschal alle Kreuzungen unterhalb eines Schnittwinkels von 10° von der Analyse ausgeschlossen. Die Untersuchung von Realdaten zeigt, dass bei Schnittwinkeln $\phi < 1°$ 'Mehrdeutigkeiten' bei der Bestimmung der Indizes benachbarter Punkte der Zeitreihe auftreten. Diese kommen zustande, wenn zwei polnahe Bahnspuren ineinander verschachtelt sind und aufgrund gering-

Tabelle 5.1: Schnittwinkel von Bahnbögen ϕ, die zugehörige geozentrische Breite φ und der Anteil der Kreuzungen, deren Schnittwinkel $\leq \phi$ sind bzw. die in absoluten Breiten $\geq \varphi$ liegen.

Schnittwinkel ϕ	**geozentrische Breite φ**	**Anteil der Kreuzungspunkte**
1°	83.328°	4.50 %
5°	82.931°	20.82 %
10°	82.082°	34.69 %
20°	80.274°	49.68 %
90°	68.820°	77.19 %

fügig unterschiedlicher Bahninklinationen zwei Schnittpunkte bilden bzw. die Bestimmung benachbarter Zeitreihenpunkte nicht mehr eindeutig ist. Diese 'unsicheren' Kreuzungen lassen sich im Zuge der Kreuzungspunktbestimmung (Abs. 5.2.2) leicht identifizieren und ggf. von der Analyse der Kreuzungspunktresiduen ausschließen (siehe Abs. 6.1). Allen weiteren Kreuzungen, die ebenfalls polnah und damit unter schleifenden Schnitten entstehen, muss bei der Interpretation der Ergebnisse besondere Beachtung geschenkt werden.

Bahnbogenpaare, zwischen denen sich zwei Kreuzungen ergeben, bilden die polnahsten Kreuzungen und schneiden sich unter Schnittwinkeln $\phi \leq 2.66°$ (in Breiten $\varphi \geq 83.22°$). Alle einfachen Kreuzungen von Bahnbogen-Paaren weisen Schnittwinkel $\phi \geq 2.55°$ auf[4]. Bleiben Kreuzungen mit Schnittwinkeln unterhalb von 1° bei der weiteren Analyse unberücksichtigt, werden weiterhin etwa 60 % der sich zweifach kreuzenden Bahnbogenpaare genutzt (etwa 7 % absolut). Daher müssen Doppelkreuzungen zwischen Bahnbogenpaaren weiterhin berücksichtigt werden.

Bis zu welchen Schnittwinkeln Spurkreuzungen für die Validierung der Gravitationsgradienten genutzt werden können, ist abhängig von den gesuchten Validierungsparametern und wird in Kapiteln 6 weiter diskutiert.

5.2.2 Beschreibung des Algorithmus und Implementierung

Der Algorithmus zur Bestimmung von Spurkreuzungspunkten sollte die Eigenschaften erfüllen, eine präzise Analyse der Bahnbögen zu ermöglichen, zu korrekt interpolierten Kreuzungspunktpositionen zu führen sowie effizient implementiert werden zu können (möglichst kurze Berechnungszeiten). Der Schlüssel zur Erfüllung der Forderungen ist die Stützung der Kreuzungspunktbestimmung auf wenige und aussagekräftige **Bahnbogenparameter**. Diese werden für jeden Bahnbogen bestimmt und umfassen:

1. **Bahnbogengrenzen λ_{start}^{track} und λ_{end}^{track}**
   Scheitelpunktbestimmung aus Parabel durch 5 polnahe Punkte gemäß Gleichung (5.2),
2. **Länge der Äquatorkreuzung λ_{eqX}**
   linear interpoliert zwischen den 2 äquatornächsten Punkten,
3. **Bahnbogen: auf- (ascending) oder absteigend (descending)**
   z.B. $\varphi_{start}^{track} > \varphi_{end}^{track} \rightarrow$ absteigender Bahnbogen,
4. **Längenüberdeckung jedes Bahnbogens $\Delta\lambda^{track}$**
   abgeleitet aus longitudinalem Abstand von λ_{start}^{track} und λ_{end}^{track}.

Die Parameter werden grafisch in Abbildungen 5.3 bzw. 2.5 (S. 36) dargestellt.

Durch Nutzung der vier Bahnbogenparameter je Bahnbogen kann die Kreuzungspunktbestimmung deutlich vereinfacht und effizienter gestaltet werden. Ein Beispiel: Anstatt Kreuzungen direkt in der Zeitreihe mit etwa 5.4 Millionen Datenpunkten (Umfang: etwa 62.5 Tage, Datenrate: 1 Hz) zu suchen, die 1000 auf- und 1000 absteigende Bahnbögen umfasst, wird die Bestimmung erster Näherungswerte mit nur noch $4 \cdot 2000 = 8000$ Bahnbogenparametern durchgeführt.

Um auch der effizienten Implementierung gerecht zu werden, wurde auf Basis der Bahnbogenparameter und unter Zuhilfenahme logischer Operatoren (auch boolesche Variablen) der Rechenaufwand für die Suche nach Kreuzungen auf ein Minimum reduziert. Da es an vielen Stellen um Verhältnisse und relative Lagen der Parameter geht, reicht oft eine Speicherung des Wahrheitswertes (logical) logischer Operatoren. Das Ergebnis von Abfrage mittels logischer Operatoren kann nur zwei Zustände annehmen: *wahr* (Binärzahl 1) oder *falsch* (Binärzahl 0); die Speicherung genau dieser beiden Zustände erlauben boolesche Variablen. Bei logischen Operatoren wird meist zwischen Vergleichs- und Verknüpfungsoperatoren unterschieden. Ty-

[4] Der kleine 'Überlappungsbereich' $2.55° \leq \phi \leq 2.66°$ ist auf geringe Variationen der realen Satellitenbahn zurückzuführen.

Tabelle 5.2: Logische Operatoren (in Anlehnung an Wikipedia, 2015).

	Operator	**Mathematik**	**MATLAB**
Vergleiche	gleich	$=$	==
	ungleich	$\neq$	~=
	größer	$>$	>
	kleiner	$<$	<
	größer oder gleich	$\geq$	>=
	kleiner oder gleich	$\leq$	<=
Verknüpfungen	und	$\wedge$	&
	oder	$\vee$	|
	nicht	$\neg$	~

pische Operatoren sowie deren Darstellungsformen in der Mathematik sowie in MATLAB sind Tabelle 5.2 zu entnehmen.

Die Implementierung der Programme zur Kreuzungspunktbestimmung sowie der gesamten Analyse der Gradienten in Kreuzungspunkten wurde in einem MATLAB-Programm umgesetzt. Boolesche Variablen werden in MATLAB als *Logische Operatoren* (logical) bezeichnet und erlauben eine effiziente Speicherung von Ergebnissen von Vergleichs- und Verknüpfungsabfragen großer Datensätze unter Nutzung minimalen Speicherplatzes: Der Speicherbedarf eines Wahrheitswertes liegt eigentlich bei nur 1 Bit (0 oder 1), in MATLAB wird 1 Byte benötigt. Die Berechnung und Verarbeitung logischer Abfragen (Vergleiche oder Verknüpfungen) sind wenig rechenintensiv und schnell auszuführen.

Näherungswerte für Längen der (Spur-)Kreuzungen λ^*_{XO}

Die Kreuzungspunktbestimmung erfolgt in der (λ, φ) - Ebene geozentrischer Positionen (siehe Gl. (2.84), S. 33) des GOCE-Satelliten. Wie bereits einleitend in Abschnitt 5.2.1 beschrieben, findet dazu die Methode **Quasi-analytische Kreuzungspunktsuche mit Näherungswerten: "Tabellierungsverfahren"** Anwendung, bei der genäherte Kreuzungspunktlängen λ^*_{XO} über die Mittelung der Äquatorkreuzungslängen sich kreuzender Bahnbögen λ^{asc}_{eqX} und λ^{desc}_{eqX} bestimmt werden. Die Datenbasis des Bestimmungsalgorithmus' umfasst die geozentrischen Positionen sowie die eingangs genannten Bahnbogenparameter.

Aufgrund der Existenz von bis zu zwei Kreuzungspunkten zwischen einem Bahnbogen-Paar werden alle Bahnbogen-Paare auf Doppelschnitt untersucht. Dabei werden $2 \cdot (n_{asc} \cdot n_{desc})$ potentielle Schnitte geprüft, mit n Anzahl der auf- (asc) bzw. absteigenden ($desc$) Bahnbögen. Die genäherten Längen beider potentiellen Kreuzungspunkte ergeben sich durch Mittelung (also 'in der Mitte') der Äquatorkreuzungslängen λ^{asc}_{eqX} und λ^{desc}_{eqX}. Dabei gibt es 'zwei Mitten', die $\Delta\lambda = 180°$ voneinander entfernt liegen und in zwei verschiedene longitudinale 'Bereiche' fallen (siehe Abb. 5.5): Die Mitte des Bereiches OHNE $\pm 180°$ Längenumbruch (**Bereich A**) und die Mitte des Bereiches MIT $\pm 180°$ Längenumbruch (**Bereich B**). Die Äquatorkreuzungslängen λ^{asc}_{eqX} und λ^{desc}_{eqX} definieren die Grenzen beider Bereiche. Die genäherten potentiellen Kreuzungspunktlängen $\lambda^*_{XO,A}$ und $\lambda^*_{XO,B}$ ergeben sich durch Mittelung beider Äquatorkreuzungslängen und damit jeweils in der Mitte jedes Bereiches. Im Falle der Situation gemäß Abbildung 5.5 wird schnell ersichtlich, dass $\lambda^*_{XO,A}$ im Weiteren zu bestätigen und $\lambda^*_{XO,B}$ zu verwerfen ist.

Der Aufbau des Algorithmus' zur Bestimmung von Kreuzungspunktlängen λ^*_{XO}, wie er für diese Arbeit entwickelt wurde, wird im Folgenden erläutert und ist in Abbildung 5.6 dargestellt. Die Erklärungen folgen den einzelnen Bearbeitungsschritten des MATLAB-Programms, wie sie in der Abbildung 'von oben nach unten' verfolgt werden können. Im Folgenden werden einige numerische Angaben gemacht, die aus dem etwa 62.5 Tage umfassenden realen Datensatz (siehe S. 92) zu Beginn der GOCE-Mission mit 1000 aufsteigenden und 1000 absteigenden Bahnbögen abgeleitet wurden.

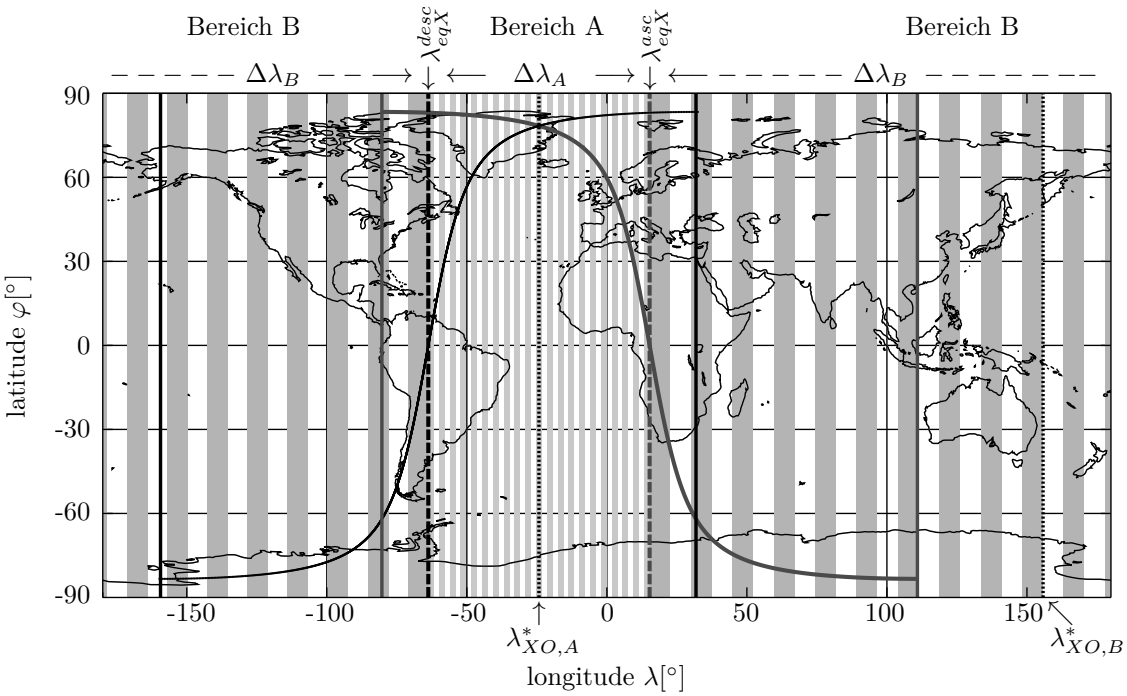


Abbildung 5.5: Longitudinale Bereiche **A** (fein gestreift) und **B** (grob gestreift) entstehen zwischen den Längen der Äquatorkreuzungen λ_{eqX}^{asc} und λ_{eqX}^{desc} jeweils zweier Bahnbögen. Es ergibt sich je eine potentielle Kreuzungspunktlänge je Bereich: $\lambda_{XO,A}^* = -24.24°$ und $\lambda_{XO,B}^* = 155.76°$. Hier ist nur der Kreuzungspunkt bei $\lambda_{XO,A}^*$ als wahrer XO zu bestätigen.

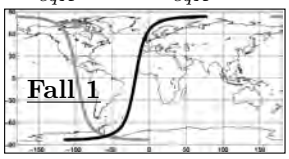
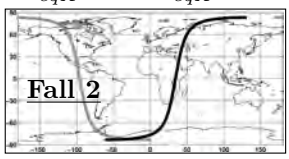
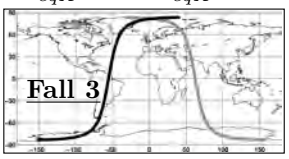
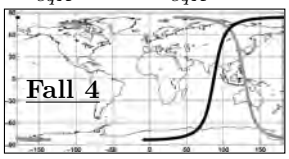
Der erste Schritt nach Bestimmung der Bahnbogenparameter umfasst die Berechnung der longitudinalen Entfernungen $\Delta\lambda_A$ und $\Delta\lambda_B$ zwischen den Äquatorkreuzungen aller Bahnbogenpaare. Diese stellen eine Spezifikation des longitudinalen Abstandes $\Delta\lambda_{eqX}$ (Abb. 5.3, S. 91) dar und entsprechen den 'Breiten' der Bereiche A und B. Aufgrund des Wertebereichs der geozentrischen Längen $-180° \leq \lambda \leq +180°$ und dem damit einhergehenden Umbruch zwischen $-180°$ und $+180°$ werden je nach Lage der Äquatorkreuzungen vier Fälle unterschieden (siehe Abbildung 5.6, oben). Die genäherte Kreuzungspunktlänge im Bereich A ($\lambda_{XO,A}^*$) ergibt sich - je nach Fall - durch Addition oder Subtraktion der halben longitudinalen Entfernung $\Delta\lambda_A/2$ zur bzw. von der Äquatorkreuzungslänge eines Bahnbogens (hier λ_{eqX}^{ASC}). Dies ist äquivalent zur Mittelung der Äquatorkreuzungslängen beider Bahnbögen. Genäherte Kreuzungspunktlängen im Bereich B ($\lambda_{XO,B}^*$) liegen 180° von denen aus Bereich A entfernt; bei dessen Berechnung kann ein Umbruch in den Wertebereich erforderlich werden[5].

Mit $\lambda_{XO,A}^*$ und $\lambda_{XO,B}^*$ sind nun alle potentiellen Längennäherungen bekannt, in deren Bereich Kreuzungspunkte auftreten können. Im Fall des genannten Beispieldatensatzes lassen sich $n_{pot.XO} = 2.000.000$ potentielle Kreuzungspunktlängen ableiten. Alle folgenden Schritte widmen sich der Prüfung dieser Längen - mit dem Ziel einige zu bestätigen und andere zu verwerfen.

Die longitudinalen Entfernungen $\Delta\lambda_A$ und $\Delta\lambda_B$ in Verbindung mit der Längenabdeckung $\Delta\lambda^{track}$ jedes Bahnbogens (Abschnitt 5.2.1, S. 90) erlauben es, sofort ein Urteil zu einem Großteil der potentiellen Kreuzungen zu fällen. Ist $|\Delta\lambda_A|$ (bzw. $|\Delta\lambda_B|$) kleiner als $360° - \max(\Delta\lambda^{track})$, mit $\max(\Delta\lambda^{track})$ der Längenabdeckung des longitudinal längsten Bahnbogens, so entsteht ein XO im Bereich A (bzw. Bereich B), Kreuzungsszenario (1). Ist $|\Delta\lambda_A|$ (bzw. $|\Delta\lambda_B|$) größer als die maximale Längenabdeckung $\max(\Delta\lambda^{track})$, so entsteht in Be-

[5] In MATLAB gelingt ein 'Umbruch' in den Längen-Wertebereich von $\pm 180°$ durch Modulation der beteiligten Längen λ[°] unter Nutzung der Modulus-Funktion: $\lambda_{mod} = \mathrm{mod}(\lambda + 360, 360)$. Die Längen werden dabei verschoben und am ehemaligen Nullmeridian umgebrochen. Es ist darauf zu achten, Ergebnisse zu 're-modulieren', um eine richtige Zuordnung zu den Ursprungsdaten sicherzustellen: $\lambda = \mathrm{mod}(\lambda_{mod} + 180, 360) - 180$.

Bestimmung potentieller Kreuzungspunktlängen λ^*_{XO}

$\lambda^{asc}_{eqX} < 0 \wedge \lambda^{desc}_{eqX} < 0$	$\lambda^{asc}_{eqX} < 0 \wedge \lambda^{desc}_{eqX} > 0$	$\lambda^{asc}_{eqX} > 0 \wedge \lambda^{desc}_{eqX} < 0$	$\lambda^{asc}_{eqX} > 0 \wedge \lambda^{desc}_{eqX} > 0$
 **Fall 1**	 **Fall 2**	 **Fall 3**	 **Fall 4**
$\Delta\lambda_A = \lvert\lambda^{asc}_{eqX}\rvert - \lvert\lambda^{desc}_{eqX}\rvert$	$\Delta\lambda_A = \lvert\lambda^{asc}_{eqX}\rvert + \lvert\lambda^{desc}_{eqX}\rvert$	$\Delta\lambda_A = \lvert\lambda^{asc}_{eqX}\rvert + \lvert\lambda^{desc}_{eqX}\rvert$	$\Delta\lambda_A = \lvert\lambda^{asc}_{eqX}\rvert - \lvert\lambda^{desc}_{eqX}\rvert$
$\lambda^*_{XO,A} = \lambda^{asc}_{eqX} + \Delta\lambda_A/2$		$\lambda^*_{XO,A} = \lambda^{asc}_{eqX} - \Delta\lambda_A/2$	

$$\lambda^*_{XO,B} = \lambda^*_{XO,A} + 180° \qquad \Rightarrow \text{beachte Fußnote 5 (S. 96)}$$

Anzahl potentieller Kreuzungspunkte:

$$n_{pot.XO} = (n_{asc} \cdot n_{desc})_{XO,A} + (n_{asc} \cdot n_{desc})_{XO,B} = 2 \cdot (n_{asc} \cdot n_{desc})$$

Prüfung potentieller Kreuzungspunktlängen λ^*_{XO}

Mögliche Kreuzungsszenarien:

(1 a) $|\Delta\lambda_A| < (360° - \max(\Delta\lambda^{track}))$ $\Rightarrow$ 1 XO im Bereich A & es gilt (2b)

b) $|\Delta\lambda_B| < (360° - \max(\Delta\lambda^{track}))$ $\Rightarrow$ 1 XO im Bereich B & es gilt (2a)

(2 a) $|\Delta\lambda_A| > \max(\Delta\lambda^{track})$ $\Rightarrow$ kein XO im Bereich A & es gilt (1b)

b) $|\Delta\lambda_B| > \max(\Delta\lambda^{track})$ $\Rightarrow$ kein XO im Bereich B & es gilt (1a)

(3 a) $(360° - \max(\Delta\lambda^{track})) < |\Delta\lambda_A| < \max(\Delta\lambda^{track})$

b) $(360° - \max(\Delta\lambda^{track})) < |\Delta\lambda_B| < \max(\Delta\lambda^{track})$

$\Rightarrow$ 1 XO in Bereich A oder B, oder

$\Rightarrow$ 2 XOs: je 1 XO in Bereich A & B

Weitere Prüfung (s.u.)!

Prüfung der potentiellem Kreuzungspunktlängen zu Szenario (3)

$\Rightarrow$ **Aufteilung in potentielle XOs auf Nordhalbkugel und auf Südhalbkugel**

Nordhalbkugel

$$\lambda^{asc}_{eqX} > 0 \ \wedge \ \lambda^{desc}_{eqX} < 0$$
$$\vee$$
$$\lambda^{asc}_{eqX} < 0 \ \wedge \ \lambda^{desc}_{eqX} < 0 \ \wedge \ \Delta\lambda_A < 0$$
$$\vee$$
$$\lambda^{asc}_{eqX} > 0 \ \wedge \ \lambda^{desc}_{eqX} > 0 \ \wedge \ \Delta\lambda_A > 0$$

Südhalbkugel

$$\lambda^{asc}_{eqX} < 0 \ \wedge \ \lambda^{desc}_{eqX} > 0$$
$$\vee$$
$$\lambda^{asc}_{eqX} < 0 \ \wedge \ \lambda^{desc}_{eqX} < 0 \ \wedge \ \Delta\lambda_A > 0$$
$$\vee$$
$$\lambda^{asc}_{eqX} > 0 \ \wedge \ \lambda^{desc}_{eqX} > 0 \ \wedge \ \Delta\lambda_A < 0$$

$\Rightarrow$ **Prüfung der rel. Lage von Start- ($\lambda_{i_{start}}$) und Endlängen ($\lambda_{i_{end}}$) der Bahnbögen**

Bereich A

Norden	Süden
$\lambda^{asc}_{i_{end}} < \lambda^{desc}_{i_{start}}$	$\lambda^{asc}_{i_{start}} > \lambda^{desc}_{i_{end}}$

Bereich B

Norden	Süden
$\lambda^{asc}_{i_{end}} < \lambda^{desc}_{i_{start}}$	$\lambda^{asc}_{i_{start}} > \lambda^{desc}_{i_{end}}$

Umbruch-Berücksichtigung!

Bei Erfüllung aller Vergleichsabfragen ist die Existenz der XOs bei λ^*_{XO} zu bestätigen.

Abbildung 5.6: Struktur des Algorithmus zur Bestimmung und Verifikation potentieller Kreuzungspunktlängen.

Tabelle 5.3: Anzahl potentieller und wahrer Kreuzungspunkte im Beispieldatensatz, aufgeteilt nach Szenarien und Bereichen gemäß Abb. 5.6.

Kreuzungs-szenario	**potentielle XOs**			**bestätigte XOs**		
	in Bereich		Summe	in Bereich		Summe
1	a)	717.714	937.221	a)	717.714	937.221
	b)	219.507		b)	219.507	
2	a)	219.507	(937.221)	a)	0	0
	b)	717.714	keine XOs	b)	0	
3	a)	62.779	125.558	a)	62.075	124.069
	b)	62.779		b)	61.994	
		Σ	1.062.779		**Σ**	**1.061.290**

reich A (Bereich B) sicher kein XO, Kreuzungsszenario (2)[6]. Die genannten Kreuzungsszenarien bedingen sich gegenseitig: So geht z.B. mit einem sicheren XO in Bereich A (Szenario (1a)) einher, dass in Bereich B kein XO entsteht (Szenario (2b)). Entsprechend gelten immer gleichzeitig Szenario (1b) und Szenario (2a). Im Fall von Kreuzungsszenario (3) tritt die Beziehung aus Gleichung (5.4) auf und es kommt sicher zu 1 XO im Bereich A oder B, oder es entstehen 2 XOs: einer in jedem Bereich.

Zur eindeutigen Klärung der potentiellen Kreuzungen aus Szenario (3) werden diese ihrer Lage auf Nord- oder Südhalbkugel entsprechend unterteilt. Dies gelingt z.B. über eine bedingte Abfrage gemäß Abbildung 5.6. Ob potentielle Kreuzungen sich bewahrheiten oder nicht, kann letztlich über die relative Lage der Längen der Bahnbogenenden geklärt werden. Für eine Kreuzung im Norden muss beispielsweise das Ende des aufsteigenden Bahnbogens 'westlicher' liegen als der Anfang des absteigenden Bahnbogens. Dies gilt für Bereich A und Bereich B äquivalent, wobei in Bereich B u.U. $\pm 180°$ Umbrüche der beteiligten Längen zu berücksichtigen sind.

Wie bereits in Abschnitt 5.2.1 erläutert, werden die Enden der Bahnbögen über eine Scheitelpunktbestimmung der Parabeln durch die polnahsten Punkte bestimmt. Die Längen der Äquatorkreuzungen werden (linear) interpoliert. Im Vergleich zur Verwendung nächstgelegener Punkte in der Zeitreihe ('nearest neighbor') führen die Interpolationen zu einer derartigen Qualitätssteigerung der Längen der Bahnbogenenden sowie der Näherungswerte der Kreuzungslängen, dass auf deren Basis die Entscheidungen zu Szenario (3) getroffen werden können.

Ergebnisse aus dem Datenbeispiel

Die folgenden Ergebnisse basieren auf GOCE-Realdaten (reduziert-dynamische Positionen, 0.1 Hz) im Zeitraum vom 01. November 2009 bis zum 03. Januar 2010. In diesem Zeitraum sind exakt 1000 auf- und 1000 absteigende Bahnbögen entstanden, wie bereits an einigen Stellen in diesem Kapitel erwähnt (siehe z.B. Fußnote 2, S. 91).

Tabelle 5.3 enthält die Anzahl an Kreuzungspunkten, die sich auf Basis des Datensatzes für die drei Kreuzungsszenarien ergeben. Wie bereits in Abbildung 5.6 angedeutet, lassen sich hier einige Eigenschaften der gewählten XO-Bestimmungsmethode erkennen. So treten zwischen den Bahnbogenkombinationen, die im Bereich A sicher eine Kreuzung enthalten (Szenario (1a)), in Bereich B sicher keine Kreuzung auf (Szenario (2b)). Entsprechend bedingen sich Szenarien (1b) und (2a), was zur gleichen Anzahl potentieller XOs führt. In Szenario (1) werden alle 937.221 potentiellen Kreuzungen bestätigt (das sind bereits 88% der letztlich wahren XOs). Szenario (2) führt zu keinen Kreuzungen. In Szenario (3) fallen aufgrund der Eingangs-

[6]Im Falle von 2 Bahnbögen mit der Längenausdehung $\max(\Delta\lambda^{track})$ im Abstand von $\Delta\lambda_A = \max(\Delta\lambda^{track})$ würden sich die Bahnbögen im Bereich A berühren, jedoch nicht schneiden. Erst wenn die Äquatorkreuzungslängen λ_{eqX} beider Bögen weniger als $\max(\Delta\lambda^{track})$ voneinander entfernt wären, würde ein Schnittpunkt entstehen.

bedingung gemäß Gleichung (5.4) mit jeweils 62.779 die gleiche Anzahl an potentiellen XOs in beide Bereiche. Daraus ergibt sich, dass zwischen 62.779 Bahnbögenkombinationen je zwei Kreuzungen auftreten können.

Auf Basis der oben sowie in Abbildung 5.6 beschriebenen Prüfung der potentiellen XOs in Szenario (3) bestätigen sich 62.075 der 62.779 potentiellen Kreuzungen im Bereich A und 61.994 der 62.799 potentiellen Kreuzungen im Bereich B. Von diesen insgesamt 124.069 XOs sind 122.580 das Ergebnis von doppelten Kreuzungen zwischen zwei Bahnbögen ($2 \cdot 61.290$); 785 XOs aus Szenario (3) bilden nur eine Kreuzung in Bereich A und 704 XOs nur eine in Bereich B.

Insgesamt treten im beschriebenen Datensatz aus 1000 auf- und 1000 absteigenden Bahnbögen damit 1.061.290 Kreuzungen auf.

Die Bestimmung der Kreuzungspunktlängen, inkl. aller Tests und Prüfungen gemäß Abbildung 5.6, gelingt für den genannten Datensatz bestehend aus 1000 auf- und 1000 absteigenden Bahnbögen (etwa 2 Monate) mit Hilfe des implementierten prototypischen MATLAB-Programms in unter 5 s.

Lineare Interpolationsparameter und linear interpolierte Kreuzungspunktpositionen

Auf Basis der genäherten Längen potentieller Kreuzungen λ^*_{XO} aus dem vorherigen Abschnitt werden hier die gesuchten Zielgrößen der Kreuzungspunktbestimmung gemäß Abschnitt 5.2.1 (S. 89) ermittelt. Die angegebenen Zwischenergebnisse basieren auf dem im vorherigen Absatz genannten Beispieldatensatz.

Die wesentliche Zielgröße umfasst die Zeitreihenindizes derjenigen Stützpunkte, zwischen denen die Kreuzung der beteiligten Bahnbögen erfolgt. Als 'Nebenprodukte' fallen dabei lineare Interpolationsparameter sowie linear interpolierte XO-Positionen ab. Folgende Schritte sind zu durchlaufen:

- Bestimmung der Zeitreihenindizes der Stützpunkte, die die Näherungslänge λ^*_{XO} direkt umgeben,
- Prüfung auf Kreuzung zwischen Stützpunkten durch Geradenschnitt,
- Identifikation der Stützpunktindizes zwischen denen die Kreuzung wirklich stattfindet.

Diese Punkte sowie einige Sonderfälle, die im Zuge der Realdatenverarbeitung notwendig sind, werden in den folgenden Abschnitten genauer beleuchtet.

In einem ersten Schritt werden die Zeitreihenindizes der Stützpunkte gesucht, die die genäherte Kreuzungspunktlänge λ^*_{XO} direkt umgeben. Gesucht werden also die 'direkten Nachbarn' ('nearest neighbor') in der Zeitreihe. Anhand der bekannten Anfangs- und Endindizes jedes Bahnbogens gelingt deren Identifikation äquivalent zu Abschnitt 2.4.1 durch Reduktion der Längen des aktuellen Bahnbogens um λ^*_{XO}; der Stützpunkt mit dem absolut geringsten Abstand zu Null liefert den Zeitreihenindex des nächstgelegenen Punktes in der Zeitreihe.

Da die genannten Bearbeitungsschritte die Prüfung aller Stützpunkte der aktuellen Bahnbögen erfordern, hängt deren Effizienz maßgeblich mit der Anzahl der Stützpunkte jedes Bahnbogens zusammen. Weil diese Prüfung außerdem für jeden Kreuzungspunkt durchgeführt werden muss, ist eine Verringerung der zu durchsuchenden Stützpunktanzahl anzustreben. Dies gelingt durch Nutzung von Vorinformationen aus dem vorherigen Abschnitt: der Lage des Kreuzungspunktes auf Nord- oder Südhalbkugel. Liegt die Kreuzung auf der Nordhalbkugel (Südhalbkugel), genügt es, die Bahnbögen mit $\varphi > 0$ ($\varphi < 0$) zu durchsuchen. Der Suchraum wird halbiert. Weitere Einschränkungen des Suchraums auf bestimmte Breitenbänder wären durch Rückschlüsse des Abstandes der Äquatorkreuzung auf die genäherte Breite der Kreuzung φ^*_{XO} denkbar, wovon hier jedoch kein Gebrauch gemacht wird. In der praktischen Umsetzung werden die Bahnbogenabschnitte sowohl im Bereich der Pole als auch im Bereich des Äquators um einige Stützpunkte weiter gefasst, um auch in diesen 'Grenzbereichen' sicher das richtige Intervall identifizieren zu können.

Da die Näherungen λ^*_{XO} nicht perfekt sind, muss die wahre Kreuzung nicht unbedingt zwischen dem nächstgelegenen Punkt und seinem direkten Nachbarn liegen, sondern kann auch zwischen ferner benachbarten Stützpunkten entstehen. Eine entsprechende Verifikation kann durch Schnittprüfung zweier Geradenstücke äquivalent zu der in Abschnitt 2.4.1 (S. 35) beschriebenen Methode erfolgen. Dabei wird anhand der Geradenparameter u und v (Gl. (2.87)) überprüft, ob sich der Schnitt zwischen oder außerhalb der Stützpunkte ergibt. Ist dies der Fall, handelt es sich bei u und v um die gesuchten linearen Interpolationsparameter, mit denen unter Anwendung von Gleichung (2.85) (Gerade in Zwei-Punkte-Form, S. 35) die lineare Interpolation der Kreuzungspunktposition erfolgen kann.

Bei der Verarbeitung von Realdaten kommst es vor, dass die Schnittprüfung auf Basis der Geradenparameter u und v kein eindeutiges Ergebnis hervorbringt. Dieser Fall kann bei polnahen Kreuzungen auftreten, die unter sehr kleinen Schnittwinkeln von weniger als $1,4°$ (abgeleitet aus Geradenstücken gemäß Gl. (5.5)) und in geozentrischen Breiten von mehr als $\pm 83,3°$ entstehen. Sollen die Kreuzungen mit geringen Schnittwinkeln nicht bereits an dieser Stelle einfach unberücksichtigt bleiben, kann eine Eindeutigkeit der Schnittprüfung statt auf Basis zweier Geradenstücke auf Basis zweier Parabeln erreicht werden[7]. Dazu werden 4 Stützpunkte um die Näherungslänge λ^*_{XO} ausgewählt und eine Parabel durch diese Punkte geschätzt. Die Parabelgleichungen $f(\lambda)$ und $g(\lambda)$ entlang beider Bahnbögen ergeben sich in allgemeiner Form nach Merziger und Wirth (2002) zu

$$\begin{aligned} ASC: \;\; f(\lambda) &= p_1 \cdot \lambda^2 + p_2 \cdot \lambda + p_3, \\ DESC: \;\; g(\lambda) &= q_1 \cdot \lambda^2 + q_2 \cdot \lambda + q_3. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Nach Gleichsetzen von $f(\lambda)$ und $g(\lambda)$ lassen sich die Längen der beiden möglichen Schnittpunkte $\lambda^*_{1/2}$ analytisch auf Basis der Parabelparameter p_i und q_i (mit $i = \{1, 2, 3\}$) ermitteln nach

$$\lambda^*_{1|2} = -\frac{p_2 - q_2}{2 \cdot (p_1 - q_1)} \pm \sqrt{\frac{(p_2 - q_2)^2}{4 \cdot (p_1 - q_1)^2} - \frac{p_3 - q_3}{p_1 - q_1}}. \tag{5.7}$$

Anhand der Näherungslänge λ^*_{XO} sowie dem Wertebereich der Stützpunkte kann die richtige Schnittpunktlänge λ^*_1 oder λ^*_2 identifiziert werden. Führt diese Prüfung nicht zu einem eindeutigen Ergebnis, handelt es sich um (nahezu) parallele bzw. 'ineinander' liegende Parabeln, zwischen denen kein oder nur ein stark schleifender Schnitt (Schnittwinkel $\phi < 0,6°$) auftritt. Mögliche Kreuzungen, bei denen dieser Fall eintritt, werden als unsicher klassifiziert und nicht weiter berücksichtigt.

Im Beispieldatensatz wurden 1.028.425 Kreuzungen über den Geradenschnitt identifiziert und interpoliert. Weitere 32.843 XO-Positionen (gut 3% aller XOs) können über den Parabelschnitt bestimmt werden. In insgesamt 44 Fällen (von insgesamt 1.061.312 potentiellen XOs) kann auch mittels Parabelschnitt keine eindeutige Kreuzung ausgemacht werden, so dass diese potentiellen XOs nicht weiter berücksichtigt werden.

Mit Hilfe der MATLAB-Software gelingt die Bestimmung sämtlicher Zielgrößen inkl. Schnittwinkelbestimmung auf Basis des Beispieldatensatzes (1000 auf- und 1000 absteigende Bahnbögen) in gut 80 s.

[7] Die Entscheidung zur Festlegung eines Mindest-Schnittwinkels (siehe auch schleifender Schnitt, S. 92) kann damit auf die Diskussion der Ergebnisse verschoben werden.

Ergebnis der Kreuzungspunktbestimmung

Das Ergebnis der Kreuzungspunktbestimmung umfasst für jeden bestätigten Kreuzungspunkt:

- **Zeitreihenindizes der Stützpunkte, die den Kreuzungspunkt direkt umgeben**. Außerdem stehen
- **Parameter zur linearen Interpolation weiterer Beobachtungsgrößen** bereit, auf deren Basis auch die
- **linear interpolierten XO-Positionen** entstanden sind.

Die gesamte Kreuzungspunktbestimmung mittels der implementierten MATLAB-Software dauert für den 62.5 Tage umfassenden Beispieldatensatz weniger als 90 s. Der folgende Abschnitt beschreibt die finale Kreuzungspunktbestimmung auf Basis der hier berechneten Parameter und behandelt die Interpolation aller weiteren Beobachtungsgrößen.

5.3 Interpolation der Beobachtungsgrößen

Die zwei wesentlichen Ziele dieses Abschnittes sind die Interpolation der finalen Kreuzungspunktposition $(\lambda, \varphi)_{XO}$ sowie die Interpolation aller sonstigen Größen entlang beider Bahnbögen im Kreuzungspunkt. Wie bereits in Abschnitt 2.4.2 angedeutet, gründet Jarecki (2010) die Kreuzungspunktbestimmung auf eine bivariate, rein positionsbasierte (λ, φ) Interpolation der Kreuzungspunktposition. Er argumentiert, dass aufgrund einer nicht konstanten Geschwindigkeit des Satelliten zwischen den Stützstellen eine Interpolation in Abhängigkeit der Zeit nicht infrage kommt und signifikante Interpolationsfehler auftreten können. Dies sei sowohl für die Kreuzungspunktbestimmung selbst als auch für die Interpolation der weiteren Datenprodukte der Fall.

Der im Folgenden aufgezeigte Weg basiert dennoch auf Interpolationen in Abhängigkeit der Zeit. Die Untersuchung der Realdaten hat gezeigt, dass die Geschwindigkeiten des GOCE-Satelliten ausreichend konstant sind und etwaige Beschleunigungen keine Einflussnahme in kritischer Größenordnung bewirken. Im Zuge der Interpolationen wird der lokale Verlauf der Daten y mit einer Funktion $y = f(t)$ - in Abhängigkeit der Zeit - beschrieben und ein neuer Funktionswert y_{neu} an der Stelle t_{neu} über $y_{neu} = f(t_{neu})$ bestimmt. Diese Herangehensweise hat den Vorteil, dass die Interpolation sonstiger Datenprodukte zu den Kreuzungszeiten $t_{XO,asc}$ und $t_{XO,desc}$ als einfache Interpolation entlang der Zeitreihe realisiert und beispielsweise die Interpolationsmethode einfach dem jeweiligen Datenprodukt und dessen Verhalten angepasst werden kann. Dass die zeitabhängige Interpolation keine Genauigkeitsverluste mit sich bringt, zeigen die folgenden Analysen.

Die Güte sämtlicher Interpolationen wird im Folgenden realdatenbasiert beurteilt. Dazu wird das drei-stufige **EBV-Verfahren** (**E**ntfernen - **B**estimmen - **V**ergleichen) verwendet, wie es in Abbildung 5.7(a) illustriert ist: In einer Zeitreihe realer GOCE-Daten, z.B. einer Komponente des Positionsvektors, wird ein Punkt j 'gedanklich entfernt' (**Stufe A**). Auf Basis der benachbarten (hier vier) Punkte der Zeitreihe $(j-2, j-1, j+1, j+2)$ wird der lokale Verlauf mit einer geeigneten Funktion (blau gestrichelt) beschrieben und ein neuer Funktionswert $j' = f(t_j)$ bestimmt (**Stufe B**). Auf diesem Wege wird ein 'Ist-Wert' definiert, der mit dem originalen Wert der Zeitreihe (Soll-Wert $\hat{=}$ Punkt j) verglichen wird. Dies wird für alle Punkte einer ausreichend langen Zeitreihe durchgeführt. Die Soll-Ist-Residuen $(\Delta x, \Delta y)$ gemäß **Stufe C** dienen als Grundlage für eine Statistik, die zur Beurteilung der Interpolationsgüte dient. Sämtliche Statistiken dieses Kapitels basieren auf Realdaten im Umfang von

Tabelle 5.4: Grenzwerte der hier relevanten Größen gemäß Tabelle 4.7.

Datentyp	Positionen (x,y,z) [m]	Positionen (λ, φ) [°]	Zeit [s]
Grenzwert	0.55 m	4×10^{-6} ° $(7 \times 10^{-8}\ rad)$	7×10^{-5} s

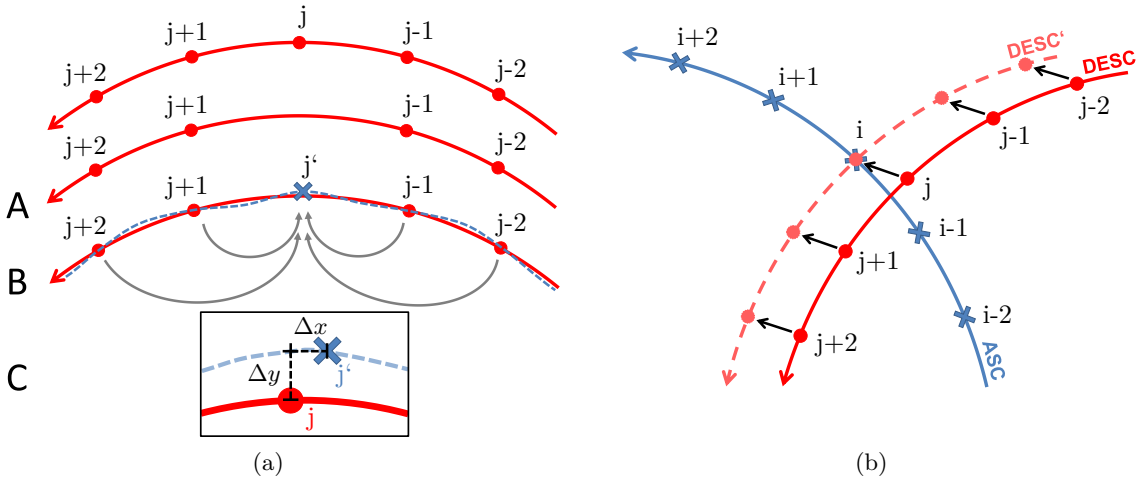


Abbildung 5.7: Strategien zur Prüfung der Interpolationsmethodik. **(a)** Dreistufiges EBV-Verfahren (Entfernen - Bestimmen - Vergleichen), bei dem auf Basis der Punkte $(j-2, j-1, j+1, j+2)$ ein neuer Funktionswert j' zum Zeitpunkt t_j bestimmt und dieser mit dem Soll-Wert j verglichen wird. **(b)** EBV-Verfahren zum Nachweis der Tauglichkeit der gleichzeitigen Bestimmung von Kreuzungspunktposition und Kreuzungszeitpunkten.

etwa 62.5 Tagen, dem selben Datensatz, wie er bereits im vorherigen Abschnitt genutzt wurde (Zeitraum: 01. November 2009 bis 03. Januar 2010).

Mittels des EBV-Verfahrens werden Werte zwischen Stützpunkten interpoliert, die doppelt so weit auseinander liegen $(2 \cdot \Delta t)$, als dies in der Realität der Fall sein kann (Δt, bei konstanter Datenrate). Werden die Grenzwerte also mit Hilfe des beschriebenen Verfahrens eingehalten, ist davon auszugehen, dass die Grenzwerte (siehe Tab. 5.4) im realen Einsatz deutlich unterschritten werden.

Für die praktische Umsetzung der Interpolationen ist folgender Hinweise sinnvoll und beachtenswert. Um die Lösungen numerisch stabiler zu machen, ist es ratsam die (Beträge der) Werte der Stützpunkte (Zeiten t_i und Werte $y = f(t_i)$) klein zu halten. Werden diese beispielsweise um den Mittelwert der Stützpunkte reduziert, kann die Kondition der Design- oder Normalgleichungsmatrix verringert werden und es gelingt eine stabilere Lösung der gesuchten Parameter. Wurde auf diese Weise ein neuer Funktionswert interpoliert, muss anschließend der zuvor abgezogene Reduktionswert berücksichtigt werden.

Bei der Verarbeitung realer GOCE-Daten werden drei 'Arten' von Interpolationen notwendig (siehe auch Abb. 5.1, S. 86):

1. Interpolation der reduziert-dynamischen Positionen zu den Zeitpunkten der EGG-Daten,
2. Interpolation der finalen Kreuzungspunktpositionen $(\lambda, \varphi)_{XO}$ sowie
3. Interpolation aller weiteren Datenprodukte entlang beider Bahnen im Kreuzungspunkt.

Diese werden im Folgenden näher erläutert. Die Datenvektoren bestehen zu jedem Zeitpunkt meist aus mehreren Komponenten (Positionen: 3 - x,y,z; Quaternionen: 4 - q1,q2,q3,q4; ...). Die Interpolationen von Punkt 1 und Punkt 3 werden komponentenweise durchgeführt, jede Komponente (z.B. z-Komponente des Positionsvektors) wird als eigenständige Zeitreihe $z_i = f(t_i)$ interpretiert.

5.3.1 Interpolation der reduziert-dynamischen Positionen zu den Zeitpunkten der EGG-Daten

Für die Interpolation der reduziert-dynamischen Bahnkoordinaten (x,y,z) werden kubische Splines (z.B. de Boor, 1978) verwendet. Zur Eignungsprüfung kubischer Splines wird das EBV-Verfahren für die Positionen (0.1 Hz) angewandt. Die Statistik der Soll-Ist-Residuen (Tab. 5.5) belegt eine Standardabweichung der Residuen zwischen 5-6 mm. Selbst die maximalen Residuen der einzelnen Komponenten des Positionsvektors (x,y,z) liegen trotz eines

zeitlichen Abstandes von 20 s zwischen den Stützstellen bei nur etwa 1 cm. Der Grenzwert von 55 cm wird damit bei weitem unterschritten, so dass die Interpolation der Bahnkoordinaten (0.1 Hz) auf die Zeitpunkte der EGG-Daten (1 Hz) mittels kubischer Splines durchgeführt wird.

5.3.2 Interpolation der finalen Kreuzungspunktpositionen $(\lambda, \varphi)_{XO}$

Die Bestimmung der Kreuzungspunktpositionen wird - wie bereits diskutiert - in zweidimensionalen Kugelkoordinaten (λ, φ) durchgeführt. Die reduziert-dynamischen Bahnen sind 'von Natur aus' ruhig und weisen ein gleichförmiges Verhalten auf. Um die Satellitenbahn im lokalen Umfeld der Kreuzung gut zu beschreiben, eignen sich daher Polynomansätze niedrigen Grades. Der Polynomgrad sowie eine geeignete Anzahl an Stützstellen im Umfeld der Kreuzung werden mit Hilfe des EBV-Verfahrens untersucht. Es werden Soll-Ist-Residuen von Polynomansätzen 2-ten und 3-ten Grades mit vier bis acht Stützstellen im Umfeld der Kreuzung analysiert. Aus den Voruntersuchungen liegen Zeitreihenindizes der Stützpunkte vor, die den Kreuzungspunkt direkt umgeben. Werden beispielsweise sechs Stützstellen zur Schätzung der Polynome genutzt, liegen drei davon zeitlich vor und drei zeitlich hinter der Kreuzung. Damit kann der Einfluss von Randeffekten ausgeschlossen werden. Um außerdem eine 'Gleichgewichtung' der Stützstellen vor und nach der Kreuzung zu gewährleisten, werden nur Fälle mit gerader Anzahl an Stützstellen untersucht, so dass gleich viele Stützstellen 'auf jeder Seite' zur Polynomschätzung beitragen. Die Schätzung der Polynomkoeffizienten erfolgt nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Die Statistik der Soll-Ist-Residuen für die Kugelkoordinaten (λ, φ, r) zeigt Tabelle 5.6. Es wird deutlich, dass der Grenzwert (Winkel: $4 \cdot 10^{-6\circ}$, Radius: 0.55 m) selbst von den Maximalwerten nahezu aller untersuchten Varianten zum Teil deutlich unterschritten wird. Die besten Ergebnisse ergeben sich auf Basis eines Polynoms mit Polynomgrad zwei und insgesamt vier Stützstellen. Der Vergleich der Statistiken auf Basis der Polynomgrade 2 und 3 mit jeweils 6 Stützpunkten zeigt, dass die Ergebnisse auf dem angegebenen Genauigkeitsniveau nahezu identisch sind. Dies ist auch der Fall beim Vergleich der Statistiken beider Polynomgrade mit je 4 Stützstellen (PG: 3 Pkt: 4, hier nicht dargestellt). Daraus lässt sich schlussfolgern, dass sich der lokale Verlauf der Positionskomponenten bereits sehr gut mit einem Polynom 2-ten Grades approximieren lässt. Wird die Anzahl der lokalen Stützpunkte auf acht erhöht, so wird vereinzelt bereits der Grenzwert überschritten (siehe Längen λ bei PG: 3 Pkt: 8). Auch dies unterstreicht, dass die optimale Anzahl an Stützstellen nicht zu groß gewählt werden sollte. Eine genauere Analyse der Soll-Ist-Residuen (hier nicht dargestellt) zeigt, dass die ohnehin kleinen Residuen eine deutliche Breitenabhängigkeit zeigen. Die verhältnismäßig größten Residuen treten (unabhängig von Polynomgrad und Anzahl der Stützstellen) bei Interpolationen in Polnähe auf.

Die Analyse hat gezeigt, dass der lokale Verlauf der Positionskomponenten (λ, φ, r) ausreichend genau mittels einem Polynom 2-ten Grades approximiert werden kann. Zur Bestimmung der finalen **Kreuzungspunktposition $(\boldsymbol{\lambda, \varphi})_{\boldsymbol{XO}}$** werden daher Polynome 2-ten Grades herangezogen, um den Verlauf der beteiligten Bahnbögen im Bereich des Kreuzungspunktes zu beschreiben. Da alle weiteren Datenprodukte als Funktion der Zeit betrachtet und in Abhängigkeit der Zeit interpoliert werden sollen, ist die Bestimmung der **Kreuzungszeitpunkte $\boldsymbol{t_{XO,asc}}$** und $\boldsymbol{t_{XO,desc}}$ besonders wichtig. Man könnte zuerst die Positionen bestimmen und

Tabelle 5.5: Statistik der Soll-Ist-Residuen (EBV) der reduziert-dynamischen Positionen (x,y,z) nach Interpolation mittels kubischer Splines.

Statistische Größen	$\boldsymbol{\Delta x}$ [m]	$\boldsymbol{\Delta y}$ [m]	$\boldsymbol{\Delta z}$ [m]
Min	-0.0109	-0.0106	-0.0101
Max	0.0108	0.0107	0.0102
Mittel	$4.9 \cdot 10^{-7}$	$-1.9 \cdot 10^{-6}$	$-1.8 \cdot 10^{-6}$
Std.Abw.	0.0049	0.0049	0.0062

Tabelle 5.6: Statistik der Soll-Ist-Residuen (EBV) der Kugelkoordinaten (λ, φ, r). Der Funktionsverlauf wurde mit Polynomen 2-ten und 3-ten Grades (PG) auf Basis unterschiedlich vieler Stützpunkte (Pkt) angenähert.

	PG: 2 Pkt: 4	**PG: 2 Pkt: 6**	**PG: 3 Pkt: 6**	**PG: 3 Pkt: 8**
	Längen $\Delta\lambda$ [°]			
Min	$-4.61 \cdot 10^{-7}$	$-1.78 \cdot 10^{-6}$	$-1.78 \cdot 10^{-6}$	$-4.78 \cdot 10^{-6}$
Max	$4.61 \cdot 10^{-7}$	$1.78 \cdot 10^{-6}$	$1.78 \cdot 10^{-6}$	$4.78 \cdot 10^{-6}$
Mittel	$5.01 \cdot 10^{-12}$	$1.93 \cdot 10^{-11}$	$1.93 \cdot 10^{-11}$	$5.19 \cdot 10^{-11}$
Std.Abw.	$7.82 \cdot 10^{-8}$	$3.02 \cdot 10^{-7}$	$3.02 \cdot 10^{-7}$	$8.10 \cdot 10^{-7}$
	Breiten $\Delta\varphi$ [°]			
Min	$-3.44 \cdot 10^{-8}$	$-1.33 \cdot 10^{-7}$	$-1.33 \cdot 10^{-7}$	$-3.56 \cdot 10^{-7}$
Max	$3.36 \cdot 10^{-8}$	$1.30 \cdot 10^{-7}$	$1.30 \cdot 10^{-7}$	$3.48 \cdot 10^{-7}$
Mittel	$2.73 \cdot 10^{-16}$	$1.05 \cdot 10^{-15}$	$1.05 \cdot 10^{-15}$	$2.81 \cdot 10^{-15}$
Std.Abw.	$4.75 \cdot 10^{-9}$	$1.83 \cdot 10^{-8}$	$1.83 \cdot 10^{-8}$	$4.92 \cdot 10^{-8}$
	Radien Δr [m]			
Min	$-1.71 \cdot 10^{-5}$	$-4.11 \cdot 10^{-5}$	$-4.11 \cdot 10^{-5}$	$-7.82 \cdot 10^{-5}$
Max	$2.23 \cdot 10^{-6}$	$8.60 \cdot 10^{-6}$	$8.60 \cdot 10^{-6}$	$2.31 \cdot 10^{-5}$
Mittel	$9.95 \cdot 10^{-12}$	$2.20 \cdot 10^{-11}$	$4.88 \cdot 10^{-12}$	$5.31 \cdot 10^{-11}$
Std.Abw.	$4.28 \cdot 10^{-6}$	$1.21 \cdot 10^{-5}$	$1.21 \cdot 10^{-5}$	$2.60 \cdot 10^{-5}$

anschließend auf die Kreuzungszeitpunkte schließen. Der Argumentation von Bosch (1998) folgend, erscheint eine **simultane Bestimmung** jedoch als konsequentere Lösung.

Simultane Bestimmung von Kreuzungspunktpositionen und Kreuzungszeitpunkten

Die folgenden Ausführungen orientieren sich an Bosch (1998), der die simultane Bestimmung von Kreuzungspunktkoordinaten und Kreuzungszeitpunkten für die Satellitenaltimetrie beschreibt. Die wichtigsten Punkte werden hier in Kürze dargestellt, wobei - gegenüber Bosch (1998) - kleinere Ungenauigkeiten in der Indizierung korrigiert werden.

Ein geeigneter funktionaler Zusammenhang zwischen den gesuchten und gegebenen Größen ergibt sich mit Hilfe von Taylorreihen (z.B. Heck, 2003). Als Nullpunkt wird der gesuchte Kreuzungspunkt mit den Koordinaten $(\lambda, \varphi)_{XO}$ angesetzt. Die Koordinaten der Stützpunkte entlang beider Bahnbögen werden als Funktion der Zeit dargestellt. Die Taylorreihen werden nach dem quadratischen Glied abgebrochen. Damit wird der Verlauf der Zeitreihen (von λ und φ) als Funktion der Zeit äquivalent zu einem Polynom 2-ten Grades beschrieben, dessen Eignung für die Interpolation im vorangehenden Abschnitt bestätigt werden konnte (siehe auch Tab. 5.6). Der funktionale Zusammenhang ergibt sich in Form der besagten Taylorreihen zu

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \varphi_{XO} + a_{11}\Delta t_i + a_{12}\Delta t_i^2 \\ \lambda_i &= \lambda_{XO} + b_{11}\Delta t_i + b_{12}\Delta t_i^2 \end{aligned} \quad i = 1, 2, \ldots, n_1$$
$$\begin{aligned} \varphi_j &= \varphi_{XO} + a_{21}\Delta t_j + a_{22}\Delta t_j^2 \\ \lambda_j &= \lambda_{XO} + b_{21}\Delta t_j + b_{22}\Delta t_j^2 \end{aligned} \quad j = 1, 2, \ldots, n_2 \tag{5.8}$$

mit

$$\Delta t_i = t_i - t_{XO,asc} \quad \text{bzw.} \quad \Delta t_j = t_j - t_{XO,desc}, \tag{5.9}$$

den Zeitpunkten t_i bzw. t_j, zu denen Beobachtungen entlang der Bahnbögen 1 (asc, Index i) bzw. 2 (desc, Index j) vorliegen, sowie mit der Anzahl genutzter Stützpunkte n_1 (Bahnbogen 1) und n_2 (Bahnbogen 2). Außerdem sind die insgesamt 12 zu schätzenden Parameter enthalten: die acht Koeffizienten $a_{11}...b_{22}$ sowie die gesuchten Größen in Form der XO-Position $(\lambda, \varphi)_{XO}$ und der XO-Zeitpunkte $t_{XO,asc}$ und $t_{XO,desc}$. Drei Punkte entlang jedes Bahnbogens würden eine eindeutige Bestimmung ermöglichen. Vier und mehr Punkte je Bahnbogen resultieren

in einem Ausgleichungsproblem. Um die gesuchten Parameter mit möglichst hoher Qualität bestimmen zu können, erscheint eine Ausgleichung sinnvoll. Daher werden im Folgenden vier Punkte je Bahnbogen einbezogen, womit auch der Überlegung gleich vieler Stützstellen auf jeder Seite der Kreuzung Genüge getan wird. Da die Taylorreihen bis zum quadratischen Term entwickelt wurden, ergibt sich ein nicht-lineares Ausgleichungsproblem, das eine Linearisierung erforderlich macht. Die Lösung hat iterativ zu erfolgen und es sind Näherungswerte für die Parameter notwendig. Diese stehen in Form linear interpolierter XO-Positionen $(\lambda, \varphi)^*_{XO}$ sowie Parametern zur linearen Interpolation genäherter Kreuzungszeitpunkte $t^*_{XO,asc}, t^*_{XO,desc}$ als Ergebnisse der Kreuzungspunktbestimmung (Abs. 5.2) bereit. Näherungen für die Koeffizienten der Taylorentwicklung $a_{11}...b_{22}$ können durch Differenzbildung aus den direkt benachbarten Punkten abgeleitet werden.

Das System der Normalgleichung lässt sich angeben als

$$\boldsymbol{N} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' & \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{r}, \tag{5.10}$$

wobei sich die enthaltenen Matrizen und Vektoren wie folgt ergeben. Der Parametervektor $\hat{\boldsymbol{x}}$ besteht aus $\hat{\boldsymbol{x}}_1$ und $\hat{\boldsymbol{x}}_2$, die die gesuchten Größen enthalten (darstellungsbedingt in transponierter Form angegeben):

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}'_1 &= (a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{12}, a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22}) \\ \hat{\boldsymbol{x}}'_2 &= (\lambda_{XO}, \varphi_{XO}, t_{XO,asc}, t_{XO,desc})\,. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Die Normalgleichungsmatrix $\boldsymbol{N}$ setzt sich zusammen aus der Matrix $\boldsymbol{D}$, die die Ableitungen von Gleichung (5.8) nach den Koeffizienten der Taylorentwicklung in der Reihenfolge gemäß Vektor $\hat{\boldsymbol{x}}_1$ enthält:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} [\Delta t_i^2] & [\Delta t_i^3] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [\Delta t_i^3] & [\Delta t_i^4] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\Delta t_i^2] & [\Delta t_i^3] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\Delta t_i^3] & [\Delta t_i^4] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\Delta t_j^2] & [\Delta t_j^3] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\Delta t_j^3] & [\Delta t_j^4] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [\Delta t_j^2] & [\Delta t_j^3] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [\Delta t_j^3] & [\Delta t_j^4] \end{bmatrix}. \tag{5.12}$$

Die Ausdrücke in eckigen Klammern stehen hier und im Folgenden für die Summe über alle Beobachtungen (Stützstellen) i bzw. j.

Die Matrix $\boldsymbol{B}$ beinhaltet die Ableitungen nach den Unbekannten gemäß Vektor $\hat{\boldsymbol{x}}_2$ und ergibt sich zu

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} [\Delta t_i] & 0 & [\alpha_i \Delta t_i] & 0 \\ [\Delta t_i^2] & 0 & [\alpha_i \Delta t_i^2] & 0 \\ 0 & [\Delta t_i] & [\beta_i \Delta t_i] & 0 \\ 0 & [\Delta t_i^2] & [\beta_i \Delta t_i^2] & 0 \\ [\Delta t_j] & 0 & 0 & [\alpha_j \Delta t_j] \\ [\Delta t_j^2] & 0 & 0 & [\alpha_j \Delta t_j^2] \\ 0 & [\Delta t_j] & 0 & [\beta_j \Delta t_j] \\ 0 & [\Delta t_j^2] & 0 & [\beta_j \Delta t_j^2] \end{bmatrix}, \tag{5.13}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_{XO,asc}} = -a_{11} - 2\Delta t_i a_{12} & \beta_i &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial t_{XO,asc}} = -b_{11} - 2\Delta t_i b_{12} \\ \alpha_j &= \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_{XO,desc}} = -a_{21} - 2\Delta t_j a_{22} & \beta_j &= \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_{XO,desc}} = -b_{21} - 2\Delta t_j b_{22}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Die symmetrische Matrix $\boldsymbol{A}$ lässt sich formulieren zu

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} n_1 + n_2 & 0 & [\alpha_i] & [\alpha_j] \\ 0 & n_1 + n_2 & [\beta_i] & [\beta_j] \\ [\alpha_i] & [\beta_i] & [\alpha_i^2 + \beta_i^2] & 0 \\ [\alpha_j] & [\beta_j] & 0 & [\alpha_j^2 + \beta_j^2] \end{bmatrix}. \tag{5.15}$$

Die rechte Seite der Normalgleichungsmatrix, der Vektor $\boldsymbol{r}$, ergibt sich aus den beiden Teilen $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ zu

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} [\Delta\varphi_i \Delta t_i] \\ [\Delta\varphi_i \Delta t_i^2] \\ [\Delta\lambda_i \Delta t_i] \\ [\Delta\lambda_i \Delta t_i^2] \\ [\Delta\varphi_j \Delta t_j] \\ [\Delta\varphi_j \Delta t_j^2] \\ [\Delta\lambda_j \Delta t_j] \\ [\Delta\lambda_j \Delta t_j^2] \end{bmatrix} \quad \text{sowie} \quad \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} [\Delta\varphi_i] + [\Delta\varphi_j] \\ [\Delta\lambda_i] + [\Delta\lambda_j] \\ [\Delta\varphi_i \alpha_i] + [\Delta\lambda_i \beta_i] \\ [\Delta\varphi_j \alpha_j] + [\Delta\lambda_j \beta_j] \end{bmatrix}, \tag{5.16}$$

mit den Elementen

$$\begin{aligned} \Delta t_i &= t_i - t^*_{XO,asc} \quad \text{bzw.} \quad \Delta t_j = t_j - t^*_{XO,desc} \\ \Delta\varphi_i &= \varphi_i - (\varphi^*_{XO} + a^*_{11}\Delta t_i + a^*_{12}\Delta t_i^2) \\ \Delta\lambda_i &= \lambda_i - (\lambda^*_{XO} + b^*_{11}\Delta t_i + b^*_{12}\Delta t_i^2) \quad i = 1, 2, \ldots, n_1 \\ \Delta\varphi_j &= \varphi_j - (\varphi^*_{XO} + a^*_{21}\Delta t_j + a^*_{22}\Delta t_j^2) \\ \Delta\lambda_j &= \lambda_j - (\lambda^*_{XO} + b^*_{21}\Delta t_j + b^*_{22}\Delta t_j^2) \quad j = 1, 2, \ldots, n_2 \end{aligned} \tag{5.17}$$

die die Näherungswerte $(...^*)$ der zu schätzenden Unbekannten enthalten.

Der beschriebene Algorithmus zur simultanen Bestimmung der finalen Kreuzungspunktkoordinaten $(\lambda, \varphi)_{XO}$ und Kreuzungszeitpunkte $t_{XO,asc}$ und $t_{XO,desc}$ vereint nicht nur die gemeinsame Berechnung beider Koordinatenkomponenten (λ, φ), wie sie ebenfalls bei einer bivariaten Interpolation erfolgt (Jarecki, 2010), sondern beinhaltet ebenfalls die gleichzeitige Bestimmung der Kreuzungszeitpunkte $t_{XO,asc}$ und $t_{XO,desc}$ entlang beider Bahnbögen.

Um das Verfahren zur simultanen Bestimmung zu testen, wird eine an das EBV-Verfahren angelehnte Herangehensweise gewählt (siehe Abb. 5.7(b)). Auf Basis eines realen Positionsdatensatzes stehen aus den Voruntersuchungen Zeitreihenindizes i und j der Stützpunkte bereit, die in der Zeitreihe direkt vor dem Kreuzungspunkt liegen. Wie in Abbildung 5.7(b) dargestellt, werden alle an der Interpolation beteiligten Stützpunkte des absteigenden Bahnbogens derart verschoben, dass die Positionskoordinaten mit Index i (asc) und Index j (desc) aufeinander fallen. Es folgt das EBV-Verfahren, bei dem die Punkte mit Indizes i und j gedanklich gelöscht und rein auf Basis der umliegenden Punkte $(\lambda, \varphi)_{(i-2,i-1,i+1,i+2)}$ und $(\lambda, \varphi)_{(j-2,j-1,j+1,j+2)}$ sowie der zugehörigen Zeiten $t_{(i-2,i-1,i+1,i+2)}$ und $t_{(j-2,j-1,j+1,j+2)}$ anhand des beschriebenen Algorithmus Kreuzungspunktkoordinaten $(\lambda, \varphi)_{XO}$ und Kreuzungszeitpunkte $t_{XO,asc}$ und $t_{XO,desc}$ bestimmt werden. Da die 'richtigen' Ergebnisse mit den Positionskoordinaten $(\lambda, \varphi)_i$ sowie den Zeiten t_i und t_j bekannt sind, kann das Verfahren anhand eines Soll-Ist-Vergleichs beurteilt werden. Die Soll-Ist-Residuen $\Delta(\lambda, \varphi, t_{XO,asc}, t_{XO,desc})$ (siehe Gl. (5.18)) werden analysiert und statistisch ausgewertet, siehe Tabelle 5.7.

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_{XO} &= \lambda_i - \lambda_{XO} \\ \Delta\varphi_{XO} &= \varphi_i - \varphi_{XO} \\ \Delta t_{XO,asc} &= t_i - t_{XO,asc} \\ \Delta t_{XO,desc} &= t_j - t_{XO,desc} \end{aligned} \tag{5.18}$$

Die Statistik zeigt, dass die Soll-Ist-Residuen sowohl der Kreuzungspunktpositionen als auch der Kreuzungszeitpunkte die Grenzwerte (Winkel: $4{\cdot}10^{-6\circ}$, Zeit: $7{\cdot}10^{-5}$ s) deutlich unterschreiten. Die Standardabweichung der Residuen liegt jeweils etwa zwei Größenordnungen unterhalb

Tabelle 5.7: Statistik der Soll-Ist-Residuen (EBV) der Kreuzungspunktkoordinaten $(\Delta\lambda, \Delta\varphi)_{XO}$ und Kreuzungszeitpunkte $\Delta t_{XO,asc}, \Delta t_{XO,desc}$) nach deren Bestimmung auf Basis von Taylorreihen. 62.5-tägiger Datensatz.

Statistische Größen	$\boldsymbol{\Delta\lambda_{XO}}$ [°]	$\boldsymbol{\Delta\varphi_{XO}}$ [°]	$\boldsymbol{\Delta t_{XO,asc}}$ [s]	$\boldsymbol{\Delta t_{XO,desc}}$ [s]
Min	$-3.47 \cdot 10^{-8}$	$-2.37 \cdot 10^{-7}$	$-1.19 \cdot 10^{-6}$	$-1.19 \cdot 10^{-6}$
Max	$3.48 \cdot 10^{-8}$	$6.27 \cdot 10^{-7}$	$9.54 \cdot 10^{-7}$	$8.34 \cdot 10^{-7}$
Mittel	$2.90 \cdot 10^{-10}$	$8.23 \cdot 10^{-10}$	$6.87 \cdot 10^{-9}$	$-9.69 \cdot 10^{-9}$
Std.Abw.	$1.68 \cdot 10^{-8}$	$1.17 \cdot 10^{-8}$	$3.81 \cdot 10^{-7}$	$3.81 \cdot 10^{-7}$
RMS	$1.68 \cdot 10^{-8}$	$1.18 \cdot 10^{-8}$	$3.81 \cdot 10^{-7}$	$3.81 \cdot 10^{-7}$

der Grenzwerte. Selbst die Beträge der größten Residuen unterschreiten die Grenzwerte um mehr als eine Größenordnung. Der Algorithmus wurde in MATLAB implementiert. Die Berechnung der Positionen und Zeitpunkte in 1.078.313 Kreuzungspunkten dauert etwa 20 min. In der Regel waren vier Iterationen notwendig. Die Ergebnisse zeigen, dass sich das oben beschriebene Verfahren der simultanen Bestimmung von Kreuzungspunktposition $(\lambda, \varphi)_{XO}$ und Kreuzungszeitpunkten $t_{XO,asc}$ und $t_{XO,desc}$ im Zuge einer gemeinsamen Ausgleichung sehr gut für den Einsatz auf GOCE-Realdaten eignet. Die Güte des Verfahrens bzw. der daraus ermittelten hochqualitativen Kreuzungszeitpunkte bilden die Grundlage der Interpolationen weiterer Beobachtungsgrößen als Funktion der Zeit.

5.3.3 Interpolation weiterer Datenprodukte im Kreuzungspunkt

Im vorherigen Abschnitt wurden neben der finalen Kreuzungspunktposition die Kreuzungszeitpunkte $t_{XO,asc}$ und $t_{XO,desc}$ berechnet. Diese werden herangezogen, um weitere Datenprodukte der GOCE-Mission, die für die Gradientenvalidierung in Kreuzungspunkten benötigt werden, als Funktion der Zeit zu interpolieren.

$t_{XO,asc}$ und $t_{XO,desc}$ stellen die Zeitpunkte dar, zu denen GOCE sich entlang des aufsteigenden (asc) bzw. absteigenden (desc) Bahnbogens exakt in der Kreuzungspunktposition $(\Delta\lambda, \Delta\varphi)_{XO}$ befand. Da alle weiteren Datenprodukte mit exakten Zeitstempeln versehen sind, kann deren Interpolation zu den Kreuzungszeitpunkten 'in der Zeitreihe' erfolgen.

Im Rahmen der Kreuzungspunktanalyse werden folgende Datenprodukte entlang beider Bahnbögen im Kreuzungspunkt benötigt:

- Bahnhöhen in Form der Radien $r_{XO,asc}$ und $r_{XO,desc}$ (Kugelkoordinaten),
- Quaternionen IAQ ($\boldsymbol{q}^{IAQ}_{XO,asc}, \boldsymbol{q}^{IAQ}_{XO,desc}$) und EOQ ($\boldsymbol{q}^{EOQ}_{XO,asc}, \boldsymbol{q}^{EOQ}_{XO,desc}$),
- Tensor der Gravitationsgradienten $\boldsymbol{V}_{ij,XO,asc}$ und $\boldsymbol{V}_{ij,XO,desc}$ (GOCE sowie Modell basiert).

Alle drei Datenprodukte weisen unterschiedliche Charakteristiken auf. Je nach Datenprodukt ist zu prüfen, welche Interpolationsmethode geeignet ist bzw. mit welcher Methode der Verlauf der Daten optimal beschrieben werden kann und wie viele Stützstellen im lokalen Umfeld der Kreuzung für die Interpolation herangezogen werden. Die Ergebnisse werden mit Hilfe des EBV-Verfahrens (siehe S. 101) beurteilt.

Interpolation der Bahnhöhen (Radien)

Die Interpolation der (Kugel-)Radien sowie deren Prüfung verläuft äquivalent zur Interpolation der reduziert-dynamischen Positionen zu den Zeitpunkten der EGG-Daten (siehe S. 102). Die Radien werden mit Hilfe kubischer Splines interpoliert, wobei die Eignung kubischer Splines auf Basis des EBV-Verfahrens anhand der Radien der Kugelkoordinaten mit einer Datenrate von 0.1 Hz geprüft wird, wie sie gemäß Gleichung (2.84) aus den reduziert-dynamischen

Tabelle 5.8: Statistik der Soll-Ist-Residuen (EBV) der (Kugel-)Radien (r) mit einer Datenrate von 0.1 Hz nach Interpolation mittels kubischer Splines.

Statistische Größen	$\boldsymbol{\Delta r}$ [m]
Min	-0.0017
Max	0.0017
Mittel	$-1.80 \cdot 10^{-9}$
Std.Abw.	0.0004

Positionen hervorgehen. Die Statistik der Soll-Ist-Residuen des EBV-Verfahrens ist in Tabelle 5.8 enthalten.

Die Residuen $\boldsymbol{\Delta r}$ weisen eine Standardabweichung von weniger als 1 mm und Beträge maximaler Abweichungen von 1-2 mm auf. Die Eignung kubischer Splines zur Interpolation der Höhenkomponente der Kugelkoordinaten in Form des Radius r ist damit belegt.

Interpolation der Quaternionen EOQ und IAQ

Die Earth-Orientation-Quaternions (EOQ) und die Inertial-Attitude-Quaternions (IAQ) beschreiben zu einem bestimmten Zeitpunkt die Lage bzw. die Orientierung zwischen zwei Koordinatensystemen. Beide sind verschiedenen Ursprungs, weshalb die Zeitreihen ein unterschiedliches Verhalten aufweisen. Die EOQ sind das Ergebnis von Modellen, die die Relativbewegungen zwischen terrestrischem und zälestischem Bezugssystem beschreiben. Die zugrunde gelegten Zusammenhänge sind sehr genau bekannt, so dass die Zeitreihe der EOQ einen 'gleichmäßigen', ruhigen Verlauf aufweist. Die IAQ sind das Produkt von Sternkamerabeobachtungen sowie Gradiometer common-mode Beschleunigungen. Ihr zeitliches Verhalten ist vom Rauschen der Signalquellen beeinflusst, was sich in einem gegenüber den EOQ vergleichsweise hohen Rauschniveau im Bereich hoher Frequenzen äußert. Aufgrund der verschiedenen Signalcharakteristika wird beiden Arten von Quaternionen mit unterschiedlichen Interpolationsstrategien begegnet. Zu den Grundlagen im Umgang mit Quaternionen und Rotationsmatrizen und ihren Eigenschaften wird auf Abschnitt 2.3 verwiesen.

Die **Interpolation der EOQ** gelingt mit Hilfe eines Interpolationsalgorithmus, wie er im GOCE Level 2 Product Data Handbook (Gruber et al., 2014c, Abs. 4.4.2.2) näher erläutert wird. Dieser Algorithmus wird explizit für die Interpolation der EOQ empfohlen und basiert auf nur zwei 'Stütz-Quaternionen' q_a und q_b. Im Kern wird die differentielle Drehung zwischen beiden Quaternionen beschrieben, diese in Form von Rotationsachse und Drehwinkel parametrisiert und beide Parameter zum gesuchten Zeitpunkt interpoliert. In der Praxis ist darauf zu achten, das Vorzeichen eines der beteiligten Quaternionen (aller vier Elemente) zu ändern (z.B. $q_b = -q_b$), falls das Skalarprodukt der Imaginärteile (Vektor) beider Quaternionen $q_{a1}q_{b1} + q_{a2}q_{b2} + q_{a3}q_{b3} < 0$.

Diese Möglichkeit der 'Modifikation' ist gegeben, da q und $-q$ in bestimmten Grenzen die gleiche Drehung beschreiben. Diese Grenzen werden eingehalten, solange der Drehwinkel zwischen den Rotationsachsen beider Quaternionen kleiner als 90° ist. Betrachtet man die Rotationsinformation eines Quaternions in Form einer Drehung α um eine Drehachse $[e_1, e_2, e_3]$, so lässt sich die Mehrdeutigkeit des Vorzeichens leicht nachvollziehen: eine Drehung mit dem Winkel $-\alpha$ um die Drehachse $[-e_1, -e_2, -e_3]$ führt zum identischen Ergebnis wie die erstgenannte Variante. Dies wird ebenfalls bei der Bestimmung einer Drehmatrix aus Quaternionen in Gleichung (2.83) (S. 32) deutlich, in die alle Quaternionenelemente entweder in quadrierter Form oder als Produkt mit einem weiteren Quaternionenelement eingehen. Das Resultat ist in beiden Fällen die gleiche Rotationsmatrix.

Wie bereits in Kapitel 4 gezeigt, wird die Fehlergrenze der Quaternionen in Form des Betrages der größten Differenz der Quaternionenelemente definiert. Dies hat sich in der Praxis als hilfreich erwiesen. Bei den Quaternionen handelt sich um 'Einheitsquaternionen', deren Betrag $|q| = 1$ ist. Kleinere Orientierungsänderungen führen gleich zur Veränderung aller vier Quaternionenelemente und bilden sich bei der Differenzbildung sehr gut im Betrag der größ-

Tabelle 5.9: Statistik der Soll-Ist-Residuen (EBV) der EOQ-Quaternionen Δq_{EOQ} (1 Hz). 62.5-tägiger Datensatz.

Statistische Größen	$\boldsymbol{\Delta q_{EOQ}(1)}$	$\boldsymbol{\Delta q_{EOQ}(2)}$	$\boldsymbol{\Delta q_{EOQ}(3)}$	$\boldsymbol{\Delta q_{EOQ}(4)}$
Min	$-1.06 \cdot 10^{-14}$	$-1.57 \cdot 10^{-14}$	$-1.63 \cdot 10^{-14}$	$-1.93 \cdot 10^{-14}$
Max	$6.24 \cdot 10^{-15}$	$1.55 \cdot 10^{-14}$	$1.24 \cdot 10^{-14}$	$9.88 \cdot 10^{-15}$
Mittel	$4.12 \cdot 10^{-17}$	$2.75 \cdot 10^{-17}$	$7.51 \cdot 10^{-16}$	$7.45 \cdot 10^{-16}$
Std.Abw.	$1.08 \cdot 10^{-16}$	$1.24 \cdot 10^{-16}$	$1.94 \cdot 10^{-15}$	$2.01 \cdot 10^{-15}$
RMS	$1.15 \cdot 10^{-16}$	$1.27 \cdot 10^{-16}$	$2.08 \cdot 10^{-15}$	$2.14 \cdot 10^{-15}$

ten Differenz ab. Die Fehlergrenze für die Quaternionen wurde gemäß Tabelle 4.7 (S. 84) zu 1.31×10^{-7} bestimmt.

Um die Tauglichkeit und Güte des Verfahrens zur Quaternioneninterpolation zu beurteilen, wurde erneut auf das EBV-Verfahren (siehe S. 101) zurückgegriffen. Aus den jeweils direkt benachbarten Quaternionen q_{i-1} und q_{i+1} wurde ein neues Quaternion q_i^{interp} an der Stelle t_i berechnet und dieses mit dem ursprünglichen q_i verglichen. Die Ergebnisse in Form der Statistik der Residuen $\Delta q_{EOQ}(i) = q_i - q_i^{interp}$ für den bereits genannten etwa 62.5 Tage umfassenden Satz an EOQ-Realdaten enthält Tabelle 5.9. Es wird schnell deutlich, dass die geforderte Fehlergrenze um Größenordnungen unterschritten wird. Die Interpolation der mit einer Datenrate von etwa 1 Hz bereitgestellten EOQ-Quaternionen kann damit als nahezu fehlerfrei betrachtet und ohne Einschränkungen bei der Realdatenverarbeitung eingesetzt werden.

Die **Interpolation der IAQ** erfordert eine 'Vorverarbeitung' der Quaternionen. Grundsätzlich sollte von einer Veränderung der EGG-Daten abgeraten werden, denn jegliche Datenverarbeitung (z.B. Interpolation) beeinträchtigt die Datenqualität und Informationen gehen verloren. Im Falle der Gradientenanalyse in Kreuzungspunkten ist die Interpolation der EGG-Produkte zum Zeitpunkt der Kreuzung notwendig und essentiell.

Wie eingangs bereits erläutert, basieren die IAQ zu einem erheblichen Teil auf Gradiometerbeobachtungen (siehe auch Stummer, 2013). Langwellig durch Sternkamerabeobachtungen gestützt, weisen die IAQ im hohen Frequenzbereich (obere MBW) ein mit den Gradienten vergleichbares Rauschverhalten auf: Oberhalb von etwa 40 mHz zeigt sich weißes Rauschen auf einem Niveau von etwa 10^{-7}. Es ist davon auszugehen, dass es sich dabei um Rauschen und nicht um Signal handelt, denn derart hochfrequente Lageänderungen des Satelliten sind nicht zu erwarten. Das Rauschen zeigt sich in der IAQ-Zeitreihe darin, dass benachbarte Werte zum Teil 'deutlich' voneinander abweichen, so dass eine Interpolation über wenige benachbarte Punkte zu keinem befriedigenden Ergebnis führt. Das 'wahre Verhalten' ließe sich am ehesten mit einem glättend wirkenden Polynom über mehrere Stützpunkte erreichen. Zu dessen Wahl sowie zur Bestimmung einer geeigneten Anzahl an Stützpunkten käme das EBV-Verfahren aufgrund des hohen Rauschniveaus jedoch nicht in Frage.

Um eine geeignete Interpolation der Quaternionen zu ermöglichen und das 'wahre Verhalten' der Orientierung von GOCE zu identifizieren, erscheint eine **Tiefpass-Filterung** sinnvoll. Diese wird hier für alle EGG-Produkte und damit auch für die Gradienten empfohlen, um den Einfluss hochfrequenten Rauschens auf die Untersuchungen zu minimieren. Dazu kommt ein Butterworth-Filter (siehe Abs. 2.2.3) vierter Ordnung mit einer Grenzfrequenz von 0.1 Hz (obere Grenze der MBW) zum Einsatz. Da Butterworth-Filter zur Gruppe der IIR-Filter gehören, beeinflusst ihre Impulsantwort die Zeitreihe theoretisch unendlich lang. Um den Filtereinfluss zu ermitteln, wird eine Dirac-Funktion mit einem Höchstwert der maximalen Amplitude $(max(q) - min(q))$ ebenfalls gefiltert (siehe auch Abs. 2.2.3). Unterschreitet der Filtereinfluss einen Schwellwert, wird anhand des Abstandes zum Maximalwert der Dirac-Funktion der Einflussbereich des Filters bestimmt. Dieser sollte an den Enden der Zeitreihe sowie im Bereich von Ausreißern benutzt werden, um Beobachtungen auszusortieren und damit den Filtereinfluss zu berücksichtigen.

Voraussetzung für die Filterung einer Zeitreihe ist ein kontinuierlicher Verlauf der zu interpolierenden Größe. Diesen zeigen die Quaternionenelemente naturgemäß nicht. Da die Quaternionen im Laufe der Verarbeitung in eine Rotationsmatrix umgesetzt werden und auf diesem

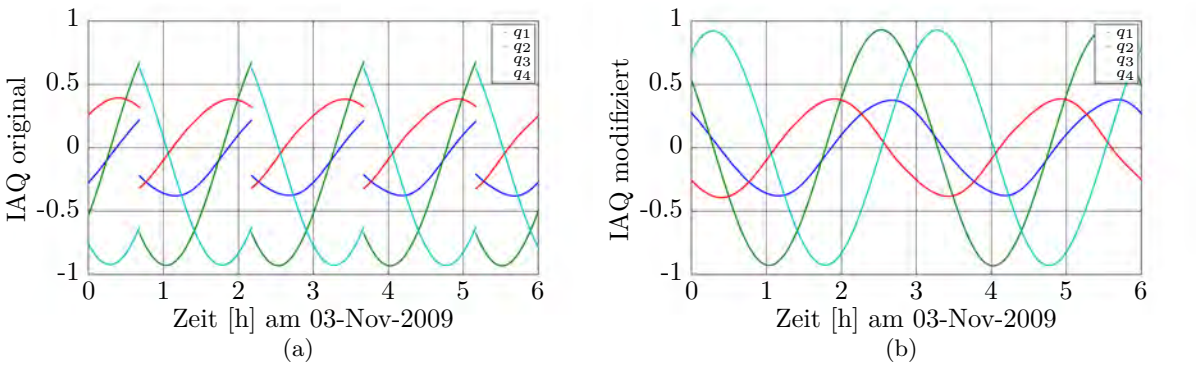


Abbildung 5.8: Modifikation des Verlaufes der Quaternionenelemente zur Vorbereitung auf die Filterung. **(a)** Originaler Verlauf der Zeitreihen aller vier Quaternionenelemente und deren gut erkennbare Sprünge über etwa vier Bahnumläufe. **(b)** Modifizierte Zeitreihen der Quaternionenelemente mit dem Ziel kontinuierlicher Verläufe.

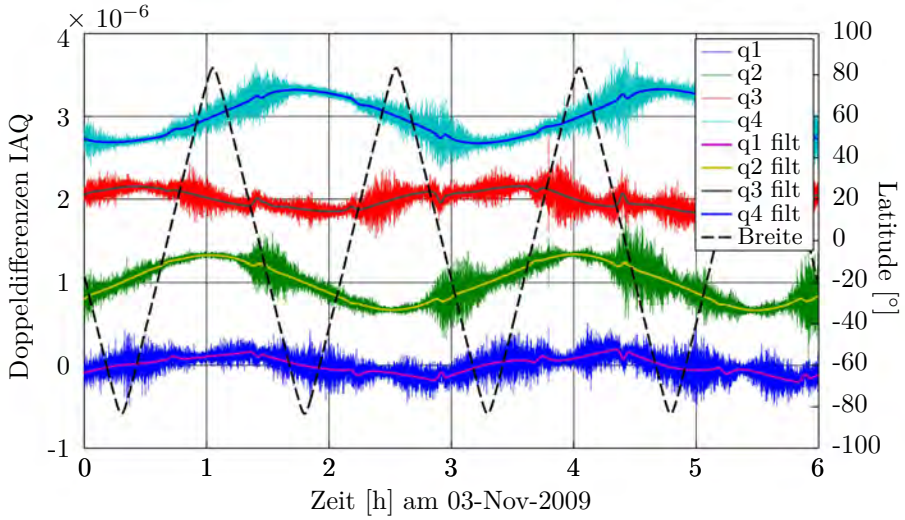


Abbildung 5.9: Doppeldifferenzen der Elemente der IAQ-Quaternionen zur Verdeutlichung des Filtereffektes. Dargestellt über ein Zeitraum von 6 Stunden, also etwa 4 Umläufe. q_2, q_3, q_4 wurden zur besseren Sichtbarkeit um $\{1, 2, 3\} \cdot 10^{-6}$ verlagert.

Wege in oben beschriebener Form quadratisch in Gleichung (2.83) (S. 32) einfließen, kann auch hier eine 'Modifikation' der Zeitreihe der Quaternionenelemente erfolgen (siehe Abb. 5.8): Sprünge in den Zeitreihen der Quaternionenelemente treten zur gleichen Zeit in allen vier Elementen auf (Abb. 5.8(a)). Um eine kontinuierliche Zeitreihe zu erhalten, wird das Vorzeichen jeweils aller vier Elemente in jedem zweiten Abschnitt umgekehrt. Ein Ausschnitt der modifizierten Zeitreihen der Quaternionenlemente zeigt Abbildung 5.8(b). Wie bereits diskutiert, resultieren beide Quaternionen q und $-q$ in der identischen Rotationsmatrix $R(q) = R(-q)$, so dass dieser Schritt die Orientierungsinformation vollständig erhält.

Die modifizierte Zeitreihe der Quaternionenelemente wird nun mittels besagtem Butterworth-Tiefpassfilter gefiltert. Eine Gegenüberstellung ungefilterter und gefilterter Zeitreihen der Quaternionenelemente zeigt Abbildung 5.9. Darin werden die Doppeldifferenzen der Zeitreihen dargestellt, die die hochfrequenten Veränderungen sichtbar machen und den Glättungseffekt der Filterung verdeutlichen. Das Rauschverhalten einzelner Quaternionenelemente zeigt Abhängigkeiten von der geografischen Breite, ein eindeutiger Zusammenhang lässt sich jedoch nicht ausmachen.

Da die Zeitreihen einzelner Quaternionenelemente gefiltert wurden, ist der Betrag nicht mehr sicher 1. Eine erneute Normierung der Quaternionen kann mittels

$$q_{normiert} = \frac{q_{interpoliert}}{\|q_{interpoliert}\|} \tag{5.19}$$

Tabelle 5.10: Statistik der Soll-Ist-Residuen (EBV) der IAQ-Quaternionen Δq_{IAQ} (1 Hz). 62.5-tägiger Datensatz.

Statistische Größen	$\boldsymbol{\Delta q_{IAQ}(1)}$	$\boldsymbol{\Delta q_{IAQ}(2)}$	$\boldsymbol{\Delta q_{IAQ}(3)}$	$\boldsymbol{\Delta q_{IAQ}(4)}$
Min	$-8.51 \cdot 10^{-7}$	$-3.20 \cdot 10^{-7}$	$-7.16 \cdot 10^{-7}$	$-7.36 \cdot 10^{-7}$
Max	$8.87 \cdot 10^{-7}$	$1.87 \cdot 10^{-7}$	$9.05 \cdot 10^{-7}$	$4.35 \cdot 10^{-7}$
Mittel	$2.01 \cdot 10^{-9}$	$-7.78 \cdot 10^{-10}$	$3.53 \cdot 10^{-9}$	$3.47 \cdot 10^{-11}$
Std.Abw.	$1.97 \cdot 10^{-8}$	$5.66 \cdot 10^{-9}$	$2.03 \cdot 10^{-8}$	$5.73 \cdot 10^{-9}$
RMS	$1.98 \cdot 10^{-8}$	$5.71 \cdot 10^{-9}$	$2.06 \cdot 10^{-8}$	$5.73 \cdot 10^{-9}$
OHNE 'Schwankungen' am 11-Dez-2009 zw. 00:57 und 01:04 Uhr:				
Min	$-1.00 \cdot 10^{-7}$	$-8.67 \cdot 10^{-8}$	$-7.61 \cdot 10^{-8}$	$-6.71 \cdot 10^{-8}$
Max	$1.02 \cdot 10^{-7}$	$7.29 \cdot 10^{-8}$	$9.51 \cdot 10^{-8}$	$6.22 \cdot 10^{-8}$
Mittel	$2.01 \cdot 10^{-9}$	$-7.78 \cdot 10^{-10}$	$3.53 \cdot 10^{-9}$	$3.50 \cdot 10^{-11}$
Std.Abw.	$1.96 \cdot 10^{-8}$	$5.65 \cdot 10^{-9}$	$2.03 \cdot 10^{-8}$	$5.69 \cdot 10^{-9}$
RMS	$1.97 \cdot 10^{-8}$	$5.70 \cdot 10^{-9}$	$2.06 \cdot 10^{-8}$	$5.69 \cdot 10^{-9}$

erfolgen. Ein Vergleich von $q_{normiert}$ und $q_{interpoliert}$ zeigt für den untersuchten Datensatz (62.5 Tage) maximale Differenzen der Quaternionenelemente in der Größenordnung von 1×10^{-9}. Fortgepflanzt auf rotierte Gradienten, ergeben sich Gradientendifferenzen von maximal 0.13 mE, womit die Fehlergrenze von 0.7 mE deutlich unterschritten wird. Eine Normierung kann also ohne Genauigkeitsverlust durchgeführt werden.

Die gefilterten Zeitreihen können äquivalent zu den EOQ zwischen zwei 'Stütz-Quaternionen' mittels des Algorithmus nach Gruber et al. (2014c, Abs. 4.4.2.2) in Abhängigkeit der Zeit interpoliert werden. Die Begutachtung der Interpolationsgüte gelingt mittels EBV-Verfahren. Die Statistik der Soll-Ist-Residuen der vier Quaternionenelemente $\Delta q_{IAQ}(1...4)$ zeigt Tabelle 5.10. Bei der Analyse der GOCE-Realdaten konnten drei 'Schwankungen' in den Elementen der IAQ am 11-Dez-2009 in der Zeit zwischen 00:57 und 01:04 Uhr identifiziert werden. Diese sind beispielsweise in den Doppeldifferenzen deutlich erkennbar und haben Einfluss auf die Interpolationsgüte (nach EBV). Der obere Teil von Tabelle 5.10 beinhaltet die Schwankungen, wohingegen die Berechnung der statistischen Werte im unteren Teil der Tabelle ohne die etwa 420 Beobachtungen des besagten Zeitfensters bestimmt wurden. Der Vergleich beider Sätze statistischer Kenngrößen macht deutlich, dass es sich im Verhältnis zur Gesamtanzahl der Werte um eine nur sehr kleine Anzahl an - als 'Ausreißer' deklarierte Werte - handelt, die Standardabweichungen ändern sich kaum. Vor dem Hintergrund einer Fehlergrenze der Quaternionen von 1.31×10^{-7} (siehe Tab. 4.7, S. 84), gelingt die Interpolation der IAQ, sofern die Zeitreihen der Elemente keine zu großen 'Ausreißer' enthalten. In der Praxis wird ein Schwellwert auf Ebene der Doppeldifferenzen gesetzt, mit Hilfe dessen die Identifikation entsprechender 'Ausreißer' identifiziert und registriert wird.

Interpolation der Elemente des Gravitationsgradiententensors

Die Analyse der Gravitationsgradienten in Kreuzungspunkten gelingt nur unter der Voraussetzung, dass auch die Tensorelemente $\boldsymbol{V}_{ij}$ mit $i = \{1...6\}$ und $j = \{1...6\}$ im Kreuzungspunkt interpoliert werden. Der Gebrauch direkt benachbarter Werte ('Nearest Neighbor') in der Zeitreihe genügt den Anforderungen nicht (Jarecki, 2010). Daher müssen auch die $\boldsymbol{V}_{ij}$ im Kreuzungspunkt interpoliert werden.

Wie bereits im vorherigen Abschnitt diskutiert, weisen alle EGG-Produkte ein hochfrequentes Rauschen auf. Da das Signal-Rausch-Verhältnis der Gradienten im oberen Bereich des Messbandes unter 1 liegt, das Rauschen also dominiert (siehe Abs. 4.1), ist die dort enthaltene Information nicht weiter nützlich. Um eine qualitativ hochwertige Interpolation der $\boldsymbol{V}_{ij}$ im Kreuzungspunkt zu ermöglichen, ist eine Glättung des Signals notwendig. Daher werden die Zeitreihen der Gradienten vor der Interpolation Tiefpass-gefiltert. Dieser Schritt ist einerseits notwendig, um die Voraussetzungen für ein gutes Interpolationsergebnis zu schaffen sowie Signalanteile im interessierenden Bereich der MBW vollständig zu erhalten, und er führt

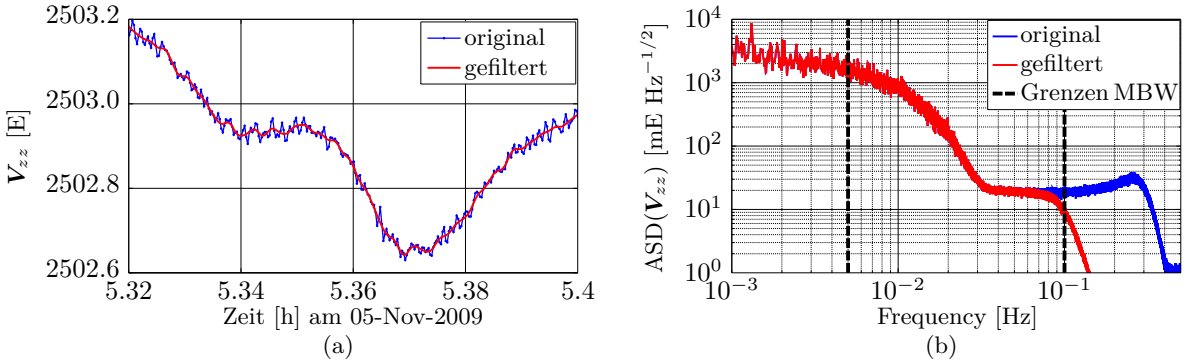


Abbildung 5.10: Vergleich der originalen und gefilterten Gradientenzeitreihen am Beispiel von $\boldsymbol{V}_{zz}$. **(a)** Ausschnitt (etwa 5 min) der Zeitreihen im Zeitbereich; **(b)** Zeitreihen im Frequenzbereich

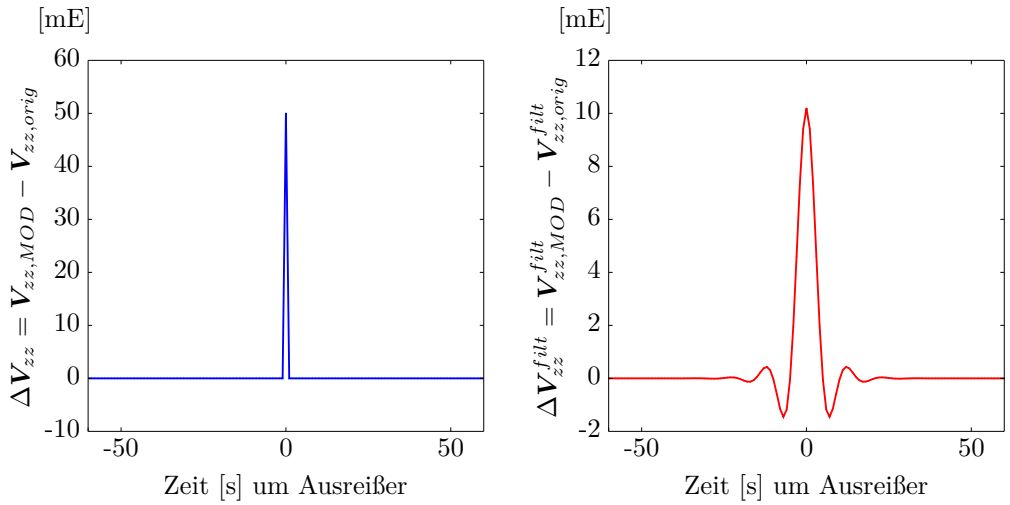


Abbildung 5.11: Auswirkungen der Tiefpass-Filterung am Beispiel eines künstlich erzeugten Ausreißers (MOD) mit einer Amplitude von 50 mE in der originalen GOCE $\boldsymbol{V}_{zz}$-Zeitreihe (links). Rechts nach der Filterung: Amplitude auf etwa 1/5 reduziert und in das Umfeld des Ausreißers 'verschmiert'.

andererseits dazu, dass Signale in Frequenzbereichen ausgeschaltet werden, die ohnehin nicht von Interesse sind. Als Filter kommt - identisch zur Filterung der IAQ - ein Butterworth-Filter 4-ter Ordnung mit einer Grenzfrequenz bei 0.1 Hz zum Einsatz. Ein Vergleich originaler und gefilterter Zeitreihen am Beispiel der $\boldsymbol{V}_{zz}$-Komponente enthält Abbildung 5.10: Auf der linken Seite (a) ist ein etwa 5-minütiger Ausschnitt beider Zeitreihen im Zeitbereich dargestellt. Das ursprünglich hochfrequente Rauschen sowie dessen Glättung durch die Filterung sind deutlich erkennbar. Die rechte Seite (b) zeigt die Zeitreihen im Frequenzbereich und zwar im Bereich der MBW. Aufgrund der niedrigen Filterordnung ist der Signalabfall nicht sehr scharf. Erste Signalunterschiede zwischen originaler und gefilterter ASD treten bereits ab etwa 6-7·10^{-2} Hz auf. Gemäß Gleichung (2.29) (S. 13) entspricht diese Frequenz etwa Grad 350 einer Kugelfunktionsentwicklung und übersteigt deutlich den Bereich in dem die GOCE-Gradienten signifikante Informationen enthalten. Durch die Filterung ist also keinerlei Verlust relevanter Signale zu erwarten.

Es folgt die Interpolation der Gradienten. Um fehlerhafte Gradienten zuverlässig identifizieren zu können, sollte die Interpolation grundsätzlich auf möglichst wenigen Stützpunkten fundieren. Etwaige Ausreißer müssen einen (deutlichen) Einfluss auf den interpolierten Punkt haben, um detektiert werden zu können. Die Filterung führt im Hinblick auf Ausreißer zu zwei Effekten (siehe Abb. 5.11): Einerseits wird die Amplitude des Ausreißers auf etwa 1/5 verkleinert, andererseits wird dessen Einfluss in die Zeitreihe 'verschmiert' und weitere Punktwerte im direkten Umfeld des Ausreißers 'infiziert'. Je nach Amplitude bekommt ein einzelner Ausreißer (Abb. 5.11, links) damit Einfluss auf einen mehr oder weniger großen Abschnitt der Zeitreihe (Abb. 5.11, rechts). Dies ist durchaus als positiv zu bewerten, da einerseits der Ausschnitt der fehlerbehafteten Zeitreihe daher mit höherer Wahrscheinlichkeit entdeckt wird

Tabelle 5.11: Statistik der Soll-Ist-Residuen (EBV) der GOCE-Gradienten $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}$ in [mE]. Die Interpolation erfolgt komponentenweise mittels kubischer Splines entlang der gesamten Zeitreihen. 62.5 tägiger Datensatz.

Stat. Größen	$\Delta \boldsymbol{V}_{xx}$	$\Delta \boldsymbol{V}_{yy}$	$\Delta \boldsymbol{V}_{zz}$	$\Delta \boldsymbol{V}_{xy}$	$\Delta \boldsymbol{V}_{xz}$	$\Delta \boldsymbol{V}_{yz}$
Min	-0.06	-0.05	-0.08	-2.52	-0.10	-4.20
Max	0.06	0.06	0.09	2.42	0.11	3.96
Mittel	$5.3 \cdot 10^{-7}$	$-9.5 \cdot 10^{-8}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$-1.2 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$-1.5 \cdot 10^{-5}$
Std.Abw.	0.01	0.01	0.02	0.64	0.03	0.99
RMS	0.01	0.01	0.02	0.64	0.03	0.99

und andererseits klar auszumachen ist, entlang welchem der beiden Bahnbögen der Fehler auftritt: In erster Linie kann ein einfacher Vergleich zweier Gradiententensoren (bzw. Tensorelemente) im Kreuzungspunkt keinen Aufschluss darüber geben, welcher der beteiligten Tensoren fehlerhaft ist und welcher nicht. Erst wenn ein Ausreißer durch die Filterung in eine kurze harmonische Schwingung 'verwandelt' wird, hat diese - bei einem ausreichend langen Datensatz - Einfluss auf eine Gruppe von Kreuzungspunktdifferenzen entlang eines der beteiligten Bahnbögen. Der Bahnbogen, entlang dessen sich die harmonische Schwingung in den Kreuzungspunktdifferenzen abbildet, enthält die fehlerbehaftete Beobachtung.

Die Untersuchung zum Einfluss eines einzelnen Ausreißers gemäß Abbildung 5.11 wurde in einem Ausschnitt einer Zeitreihe realer GOCE-Gradienten durchgeführt. Ihr Ergebnis gleicht der Untersuchung des Filters mittels Dirac-Funktion: Auf Basis der Impulsantwort des Filters lässt sich der Einfluss eines Ausreißers beschreiben.

Im Hinblick auf die **Interpolation der Gradienten** führt die Filterung dazu, dass keine einzelnen Ausreißer (entsprechend Abb. 5.11, links) mehr existieren und sich stattdessen (falls vorhanden) kleinere Schwingungen (gemäß Abb. 5.11, rechts) zeigen. Der Verlauf der Zeitreihen der Gradienten kann **nach der Tiefpass-Filterung** sehr gut **mittels kubischer Splines** beschrieben werden, so dass auch die Interpolation auf Basis kubischer Splines über die gesamte Zeitreihe erfolgt. Deren Eignung bestätigt sich bei Anwendung des EBV-Verfahrens auf die gefilterten Gradientenzeitreihen. Die EBV-Statistik auf Basis des 62.5 Tage langen Datensatzes ist in Tabelle 5.11 gegeben. Die Werte sind in [mE] angegeben. Es wird deutlich, dass die Interpolation der hochgenauen Tensorkomponenten $\boldsymbol{V}_{xx}, \boldsymbol{V}_{yy}, \boldsymbol{V}_{zz}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ mittels kubischer Splines sehr gut gelingt. Der Grenzwert von 0.7 mE wird selbst von den Maximalwerten deutlich unterschritten. Die Soll-Ist-Residuen der weniger genauen Tensorkomponenten $\boldsymbol{V}_{xy}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$ zeigen deren höheres Rauschverhalten (siehe auch Abb. 4.4, S. 72). Ihr zeitlicher Verlauf lässt sich mittels kubischer Splines nicht ausreichend gut beschreiben. Da beide Komponenten im Zuge der weiteren Verarbeitung vollständig gegen synthetische Modellgradienten ausgetauscht werden (siehe Abs. 5.5.1.1), hat die mindere Qualität der interpolierten $\boldsymbol{V}_{xy}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$ keinerlei Einfluss auf die Ergebnisse der Validierung.

Eine Analyse des beschriebenen Verfahrens zur Interpolation der Gradienten zeigt, dass selbst ein (künstlich erzeugter, einzelner) Ausreißer mit einer Amplitude von 500 mE nach der Tiefpass-Filterung nur zu maximalen EBV-Residuen zwischen gefilterten und zusätzlich mittels kubischer Splines interpolierten Werten von etwa 0.4 mE führt. Die beschriebene Interpolatonsstrategie ist damit als robust gegenüber Ausreißer zu bewerten. Alle Fehler und Effekte, die in den Frequenzbereich der GOCE MBW fallen, sind weiterhin enthalten, werden durch Tiefpass-Filterung und Spline-Interpolation nicht eliminiert und können mit Hilfe der Analyse der Gradientenresiduen im Kreuzungspunkt identifiziert und spezifiziert werden (siehe Kap. 6).

5.4 Vergleichskoordinatensystem

Der Vergleich zweier Tensoren von GOCE-Gravitationsgradienten im Kreuzungspunkt von Satellitenspuren hat in einem 'gemeinsamen' Koordinatensystem zu erfolgen. Im vorangegangenen Abschnitt wurden alle Beobachtungsgrößen entlang der Bahnbögen zur Kreuzungszeit

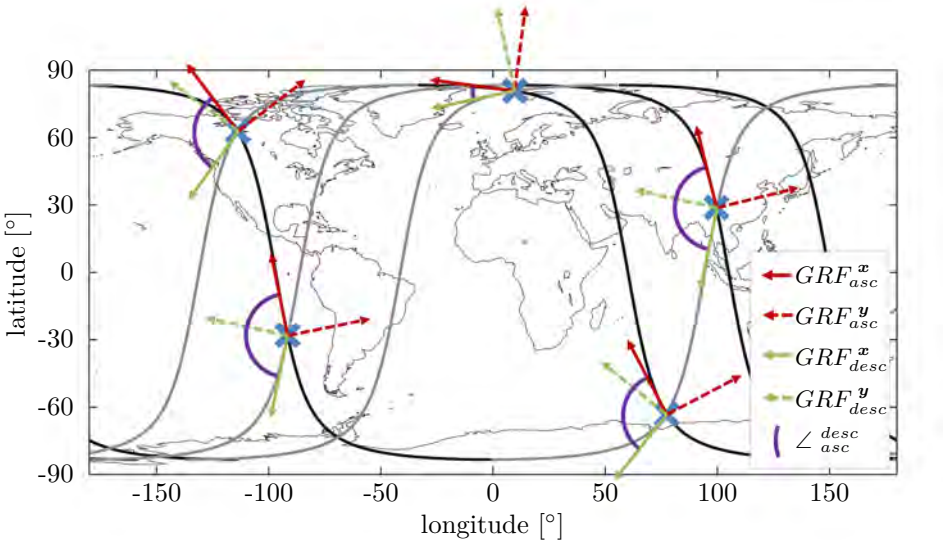


Abbildung 5.12: Darstellung der Orientierungen der x- und y-Achse der GRF entlang aufsteigender (asc) und absteigender (desc) Bahnbögen in ausgewählten Kreuzungspunkten. Die deutliche Breitenabhängigkeit (latitude) der Kreuzungs- oder Schnittwinkel ist gut zu erkennen. Schnittwinkel von 90° ergeben sich in Breiten von etwa 69° (vgl. Abb. 5.4, S. 93).

interpoliert und liegen damit in der Position des Kreuzungspunktes $(\lambda, \varphi)_{XO}$ vor. Im Hinblick auf die zu validierende Größe - den Gravitationsgradiententensor (GGT) - ist entscheidend, dass diese stark von Bahnhöhe und Orientierung abhängt. Da sich sowohl die GOCE-Bahnhöhe im Bereich einiger Kilometer verändert, als auch die Orientierung des Satelliten und damit des GRF (siehe Abs. 3.4, S. 54) - in dem die Gradienten bestimmt wurden - ständig variiert, unterscheiden sich beide im Kreuzungspunkt. Um die GGT entlang beider Bahnbögen miteinander vergleichen zu können, müssen die Einflüsse der Bahnhöhen- und Orientierungsunterschiede auf die Gradienten berücksichtigt werden.

Abbildung 5.12 zeigt die wesentlichen Orientierungsunterschiede der x- und y-Achse beider GRF entlang einzelner aufsteigender (asc) und absteigender (desc) Bahnbögen in ausgewählten Kreuzungspunkten. Der GOCE-Satellit und damit die x-Achse des GRF wurde in engen Grenzen an der Bewegungsrichtung des Satelliten orientiert. Die z-Achse des GRF zeigt nahezu in Richtung Erdmittelpunkt. Damit unterscheiden sich beide GRF entlang aufsteigender GRF_{asc} und absteigender Bahnen GRF_{desc} im Kreuzungspunkt in erster Linie um eine Drehung um die z-Achse (senkrecht zur Bildebene). Wie in Abbildung 5.12 gut ersichtlich, sind die Winkel zwischen den jeweiligen Koordinatenachsen ($\angle\ ^{desc}_{asc}$) stark breitenabhängig. Sie entsprechen in erster Näherung den Schnittwinkeln zwischen den Spuren der Satellitenbahnen (siehe Abb. 5.4, S. 93).

Regulär wird als Vergleichskoordinatensystem das GRF des absteigenden (desc) Bahnbogens im Kreuzungspunkt gewählt: GRF_{desc}. Wie Untersuchungen in den folgenden Abschnitten zeigen, hat die Wahl des Vergleichskoordinatensystems - ob in GRF_{asc} oder GRF_{desc} - weder Einfluss auf den Anteil an Modellinformation (Abs. 5.5.1.4, S. 126) noch auf die Ergebnisse der Validierung (Abs. 6.2.1, S. 143). Für die Analyse der Gradienten-Residuen im Kreuzungspunkt stellt es sich sogar als sinnvoll heraus, die Residuen 'gleichzeitig' im GRF_{asc} und im GRF_{desc} zu betrachten. Um $\boldsymbol{V}_{ij}^{XO,asc}$ in das GRF_{desc} (bzw. $\boldsymbol{V}_{ij}^{XO,desc}$ in das GRF_{asc}) zu überführen, erfolgt eine Transformation des GGT, die im folgenden Abschnitt detailliert beschrieben wird.

5.5 Transformation des Tensors der GOCE-Gravitationsgradienten

Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt 5.4 diskutiert, hat der Vergleich zweier Tensoren von Gravitationsgradienten im selben Koordinatensystem zu erfolgen. Da der GGT im satellitenfesten GRF bestimmt wird und sich der Satellit um die Erde bewegte, sich dessen Position und Orientierung also ständig änderte, treten auch im Kreuzungspunkt (identische

2D-Position $(\lambda, \varphi)_{XO}$) Differenzen in puncto Bahnhöhe und Orientierung (GOCE-Satellit sowie GRF) auf. Die Transformation des GOCE-GGT stellt daher einen notwendigen Schritt dar, um beide Beobachtungen $\boldsymbol{V}_{ij}^{XO,GRF_{asc}}$ und $\boldsymbol{V}_{ij}^{XO,GRF_{desc}}$ in das Koordinatensystem zu überführen, in dem der Vergleich stattfindet: GRF_{desc}.

Die Unterabschnitte dieses Abschnittes orientieren sich an der klassischen Aufteilung der Transformation in eine Rotation (Abs. 5.5.1) und eine Translation (Abs. 5.5.2) gemäß Gleichung (3.7) (S. 58). Im Abschnitt zur Rotation wird die Notwendigkeit der 'Einbringung' von Modellinformation (synthetische Modellgradienten $\boldsymbol{V}_{ij,MO}$) in den GOCE-GGT herausgearbeitet, die eigentliche Einbringung in Form einer Filterung der Gradienten-Zeitreihen beschrieben und untersucht, zu welchem Modellanteil die genannten Schritte nach der Rotation führen. Die Translation des GGT berücksichtigt die unterschiedlichen Bahnhöhen des GOCE-Satelliten im Kreuzungspunkt und dessen Einfluss auf die Gravitationsgradienten.

In Abschnitt 5.5.3 werden beide Teile der Transformation zusammengeführt und die resultierende Zeitreihe kombinierter Gradienten diskutiert.

5.5.1 Rotation des Tensors der GOCE-Gravitationsgradienten

5.5.1.1 Problemstellung und Lösungsansatz

Das GOCE-Gradiometer ist ein hochentwickeltes Instrument zur Bestimmung kleinster Beschleunigungsänderungen. Bedingt durch dessen spezielle Eigenschaften (siehe Abs. 3.2.3), weisen die Gradienten bzw. der GGT zwei wesentliche Schwachstellen auf, die im Hinblick auf die Rotation entscheidend sind:

1. **Langwellige Ungenauigkeiten der GOCE-Gradienten** zeigen sich in der Spur des Gradiententensors (Abb. 4.2, S. 68) und werden beim Vergleich der GOCE- mit Modellgradienten deutlich (siehe Abb. 4.5, S. 74). Das Gradiometer wurde für den Frequenzbereich der MBW zwischen 5 und 100 mHz qualitätsoptimiert. Für niedrige Frequenzen steigt das Rauschniveau der Gradienten an.
2. **Weniger genaue Tensorkomponenten $\boldsymbol{V}_{xy}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$**: Aufgrund der Anordnung der jeweils einen weniger genauen Achse jedes Beschleunigungsmessers gelingt die Bestimmung der Tensorelemente auf der ersten Nebendiagonalen nur mit verminderter Genauigkeit (siehe auch Abs. 3.2.2).

Beide Eigenschaften des GGT führen dazu, dass im Falle einer Drehung des Tensors Signal- und Rauschanteile zwischen den Tensorelementen verlagert werden. Dies wird schnell deutlich bei Betrachtung der Grundformel zur Drehung eines Tensors $\boldsymbol{V}_{ij}^{orig}$ mittels Drehmatrizen $\boldsymbol{R}$. Signalanteile werden zwischen den Tensorelementen zeilen- und spaltenweise 'vermischt':

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{ij}^{trans} &= \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{V}_{ij}^{orig} \cdot \boldsymbol{R}' \\ &= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{xy} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}' .\end{aligned} \tag{5.20}$$

Die beiden weniger genau bestimmten Elemente V_{xy} und V_{yz} würden bei der Drehung mit allen sonstigen Tensorelementen kombiniert. Das Ergebnis wäre ein in allen Elementen wenig genauer GGT.

Die langwelligen Ungenauigkeiten treten in allen sonstigen Tensorelementen auf. Da die Validierung die Qualität der GOCE-Gradienten 'nur' innerhalb der MBW beurteilen soll, könnte eine Hochpass- oder Bandpass-Filterung die Lösung zur Handhabung der langwelligen Ungenauigkeiten sein. Die Filterung würde eine Fokussierung auf den interessierenden Frequenzbereich - hier die MBW - ermöglichen, bevor die Drehung erfolgt. Dabei tritt jedoch das Problem auf, dass sich im Zuge der Drehung nicht nur Signalanteile 'frequenz-treu' zwischen den Tensorelementen verlagern, sondern auch auf andere Frequenzen übergehen. Dies

lässt sich anhand eines einfachen Vergleichs Hochpass- (HP) bzw. Tiefpass- (TP) gefilterter Modellgradienten HP($\boldsymbol{V}_{ij,MO}$) bzw. TP($\boldsymbol{V}_{ij,MO}$) vor und nach der Drehung vom LNOF in das GRF zeigen, wie in Abbildung 5.13 schematisch dargestellt. Entscheidend ist, dass dabei alle Komponenten des GGT gleichermaßen Hochpass- bzw. Tiefpass-gefiltert wurden. Die Signalanteile aller GGT-Komponenten wurden damit unterhalb bzw. oberhalb der Grenzfrequenz (hier 0.003 Hz) 'unterdrückt'.

Abbildung 5.14 zeigt die ASDs der Zeitreihen vor und nach der Drehung (rot) gemäß Gleichung (5.20) am Beispiel der xx-Komponente. Trotz der Tatsache, dass keine der GGT-Komponenten Signalanteile unterhalb (bzw. oberhalb) der Grenzfrequenz enthielten, zeigt das Signal nach der Drehung auch unterhalb (bzw. oberhalb) der Grenzfrequenz deutliche Signalanteile in der Größenordnung von bis zu 100 mE/$\sqrt{\text{Hz}}$. Dies ist auf die Nichtlinearität der Systeme zurückzuführen: Jedes GRF weist eine im Verhältnis zum LNOF andere Orientierung auf, so dass sich jede Drehmatrix $\boldsymbol{R}_i$ zum Zeitpunkt t_i von der Drehmatrix $\boldsymbol{R}_{i+1}$ zum Zeitpunkt t_{i+1} unterscheidet. Keine Drehung zur Überführung eines Datensatzes in ein anderes Koordinatensystem gleicht einer anderen. Damit geht einher, dass sich Signalstrukturen je nach Koordinatensystem zwischen den Frequenzen verlagern können.

Wie in Abbildung 5.14 ersichtlich, würde die Drehung ausschließlich Hochpass-gefilterter GOCE-Anteile zu deren Verlagerung auf verschiedenste Frequenzen führen. Das Ergebnis wäre unbrauchbar. Für die Drehung wird daher der volle Signalgehalt der Elemente des GGT benötigt.

Lösungsansatz durch Integration von Modellinformation

Die Drehung der GOCE-GGT birgt die Gefahr der Vermischung hochgenauer und weniger genauer Signalanteile. Um das mit Sicherheit qualitativ schlechte Rotationsergebnis bei einer Drehung der originalen GOCE-GGT zu verhindern, wird Modellinformation in den Gradiententensor eingebracht. Beide zu Beginn dieses Abschnittes genannten qualitativen Schwachstellen des GGT sollen durch Nutzung synthetischer Modellinformation - in Form von Modellgradienten abgeleitet aus einem EGM - behoben werden. Dazu werden einerseits die langwelligen Anteile aller vier hochgenauen Tensorelemente $\boldsymbol{V}_{xx}, \boldsymbol{V}_{yy}, \boldsymbol{V}_{zz}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ durch die entsprechenden langwelligen Anteile von Modellgradienten ersetzt. Dies erfolgt durch Filterung der Zeitreihen der GGT-Elemente in Abschnitt 5.5.1.2. Die beiden weniger genauen Tensorelemente $\boldsymbol{V}_{xy}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$ werden vollständig durch Modellgradienten ausgetauscht.

Eine vergleichbare Strategie wurde für die Berechnung des offiziellen GOCE-Datenproduktes EGG_TRF_2 genutzt. Dabei handelt es sich um GOCE-Gradienten im LNOF. Die notwendige Drehung der Gradienten vom GRF in das LNOF wurde ebenfalls durch Einbringen von Modellinformation möglich (Bouman, 2007).

Wurde an beiden Stellen Modellinformation in den GGT eingebracht, erfolgt die Drehung gemäß Gleichung (5.20). Bei der Drehung werden die hochgenauen Anteile der Tensorelemente nun mit Modellinformation vermischt. Dieser Schritt ermöglicht die Transformation des GGT und ermöglicht den Vergleich beider GGT im Kreuzungspunkt. Implizit wird dabei davon ausgegangen, dass die eingesetzte (Modell-)Information qualitativ hochwertig ist. Dass das

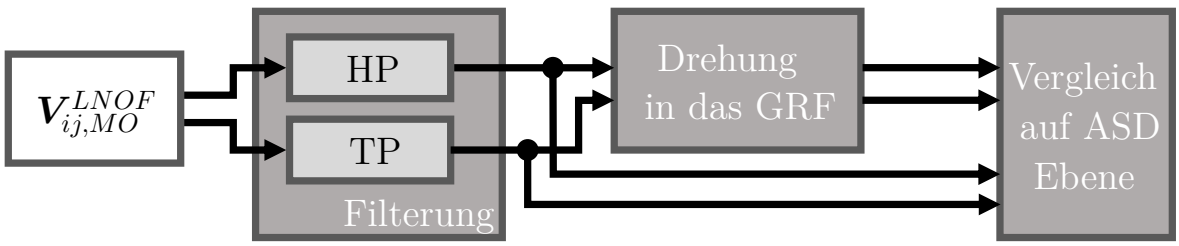


Abbildung 5.13: Schema zur Überprüfung der Verlagerung von Signalanteilen zwischen unterschiedlichen Frequenzen.

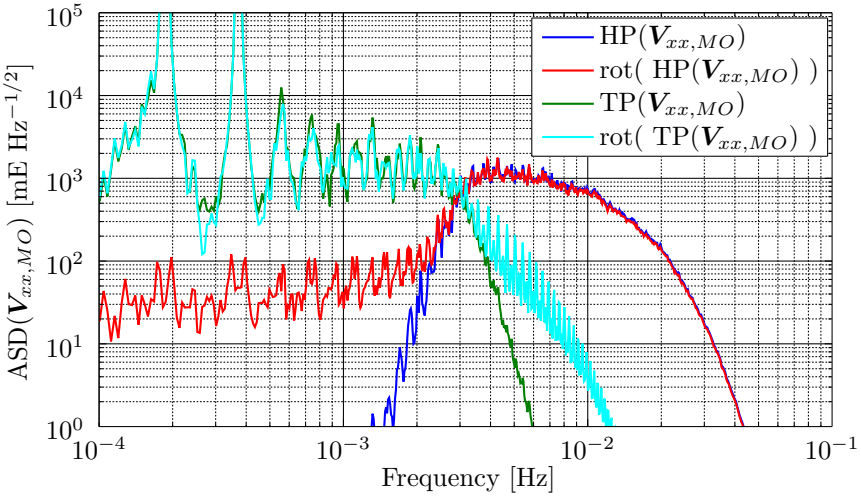


Abbildung 5.14: Verlagerung von Signalanteilen der Tensorkomponente $\boldsymbol{V}_{xx,MO}$ am Beispiel der Drehung vom LNOF in das GRF.

Ergebnis nun eine Mischung aus GOCE- und Modellgradienten darstellt, muss man bei der Interpretation der Ergebnisse beachten.

Welchen Anteil die gedrehten Gradienten Modell- und GOCE-Information enthalten, wird in Abschnitt 5.5.1.4 genauer untersucht.

5.5.1.2 Filterung der Gradienten-Zeitreihen

Ausgangslage der Filterung sind Datensätze von GOCE-Gradienten und Modellgradienten im GRF, die zu identischen Zeitpunkten (t_{EGG}) vorliegen. Die Modellgradienten $\boldsymbol{V}_{ij,MO}^{GRF}$ wurden gemäß den Zusammenhängen in Abschnitt 2.1.3 aus dem Gravitationsfeldmodell (EGM) abgeleitet. Sofern nicht anders angegeben, basieren die Abbildungen und Ergebnisse dieses Abschnitts auf dem EGM2008 (Pavlis et al., 2008).

Wie in Abschnitt 2.2.3 angedeutet, wurden für die digitale Signalverarbeitung eine Vielzahl von Filtern entwickelt, die allesamt spezielle Eigenschaften haben und deren Auswahl anwendungsspezifisch zu erfolgen hat. In diesem Abschnitt sollen gemäß Abbildung 5.1 (S. 86) zwei Filterungen erfolgen, eine unterhalb der MBW und eine im oberen Bereich der MBW. Die Filterung unterhalb der MBW hat zum Ziel, langwellige Anteile des GOCE-GGT gegen Modellinformation zu ersetzen. Zeitreihen Hochpass-gefilterter GOCE-Gradienten HP ($\boldsymbol{V}_{ij,GOCE}$) und Tiefpass-gefilterter Modellgradienten TP ($\boldsymbol{V}_{ij,Modell}$) werden kombiniert gemäß

$$\boldsymbol{V}_{ij,komb} = \mathrm{HP}\left(\boldsymbol{V}_{ij,GOCE}\right) + \mathrm{TP}\left(\boldsymbol{V}_{ij,Modell}\right). \tag{5.21}$$

Die *kombinierten* Zeitreihen (*komb*) bilden die Grundlage für die weiteren Validierungsuntersuchungen. Die Filter bzw. das Filterergebnis sollten folgenden Forderungen genügen (Erläuterungen zu den Begrifflichkeiten sind Abb. 2.3, S. 27 zu entnehmen):

1. Signal im Durchlassbereich des Filters sollte unverändert bleiben.
2. Signal im Sperrbereich des Filters sollte auf vernachlässigbar geringes Energieniveau reduziert werden.
3. Der Signalabfall der gefilterten Zeitreihen sollte steil sein und keinen Einfluss auf Signalanteile innerhalb der MBW haben.
4. Im Frequenzbereich der Grenzfrequenz (cut-off frequency) sollte der Übergang zwischen Hochpass-gefilterten GOCE-Gradienten und Tiefpass-gefilterten Modellgradienten übergangslos und ohne Sprünge erfolgen.

Unter Berücksichtigung dieser Forderungen wurde versucht, FIR- und IIR-Filter zu entwerfen. Um FIR-Filter mit steilem Signalabfall nahe der Grenzfrequenz zu realisieren, ist eine hohe Filterordnung notwendig. Entsprechende Filter weisen meist eine nicht-lineare Phase auf. Deren Korrektur gelingt beispielsweise mit dem in Abschnitt 2.2.3 (S. 27) beschriebenen Verfahren der Vorwärts-Rückwärts-Filterung. Auf Basis von FIR-Filtern mit 'akzeptablen Ordnungen[8]' konnte - speziell im Hinblick auf Forderung 3 und 4 - kein zufriedenstellendes Ergebnis erreicht werden: Nach Vorwärts-Rückwärts-Filterung waren die Differenzen zwischen kombinierter Zeitreihe und der Eingangszeitreihe zu groß.

IIR-Filter bewirken bereits mit einer geringen Filterordnung einen starken Signalabfall nahe der Grenzfrequenz. Je nach Wahl des Filtertyps (z.B. Butterworth, Tschebyscheff, Cauer) lässt sich der Einfluss des Filters auf Durchlass-, Übergangs- oder Sperrbereich regulieren (Oppenheim et al., 2004). IIR-Filter bewirken eine nicht-lineare Phase, deren Einfluss erneut mittels Vorwärts-Rückwärts-Filterung korrigiert wird. Im Gegensatz zu den FIR-Filtern konnte ein IIR-Filter entworfen werden, der alle gewünschten Forderungen erfüllt. Dessen Beschreibung erfolgt im nächsten Abschnitt.

Filterbeschreibung

Aufgrund seiner besonderen Eigenschaften wurde ein **Butterworth-Filter** gewählt, um die GOCE- und Modellgradienten zu filtern. Butterworth-Filter führen zu einem Amplitudengang[9], der im Durchlassbereich maximal flach (Forderung 1) und im Durchlass- und Sperrbereich monoton ist (Oppenheim et al., 2004). Genau wie für FIR-Filter gilt, dass mit höherer Filterordnung ein steilerer Signalabfall im Bereich der Grenzfrequenz erreicht wird. Mit steigender Ordnung des Filters verstärkt sich jedoch auch dessen Neigung zum 'Überschwingen' bei der Sprungantwort.

Der Filter wurde in MATLAB unter Angabe der Filterordnung, der Grenzfrequenz und der Filter-Grundform (z.B. Tiefpass) mit der `butter`-Funktion entworfen. Die Ableitung einer 'idealen' Filterordnung sowie der Grenzfrequenz erfolgt im weiteren Verlauf dieses Abschnitts (ab S. 121). Es sei an dieser Stelle vorweggenommen, dass die 'ideale' Filterordnung der Butterworth-Filter zu $n = 5$ und die 'ideale' Grenzfrequenz zu $f_{GF} = 0.003$ Hz bestimmt werden.

Als Eingangswerte der `butter`-Funktion ist damit die Ordnung $n = 5$ und eine (auf die Nyquist-Frequenz f_{Ny}) normierte Grenzfrequenz Wn zu übergeben. Wn errechnet sich aus der Abtastfrequenz $f_s = 1/\Delta t$ und $f_{Ny} = 1/2 \cdot f_s$ zu $Wn = f_{GF}/f_{Ny}$. Bei einer Abtastfrequenz (auch Datenrate) von $f_s = 1$ Hz ergibt sich $Wn = 0.006$ Hz.

Die Beschreibung des Butterworth-Filters erfolgt in Form von Nullstellen $z_{1,\dots,m}$, Polen $p_{1,\dots,n}$ und einem Verstärkungsfaktor k (*engl. Zero-Pole-Gain*). In Anlehnung an Gleichung (2.66) lässt sich die z-Übertragungsfunktion wie folgt formulieren

$$H(z) = k \cdot \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_m)}. \tag{5.22}$$

Die Zero-Pole-Gain Darstellung wird dann mittels der Funktion `zp2sos` in 'Teilsysteme zweiter Ordnung der dritten kanonischen Form' überführt. Kanonische Strukturen bezeichnen allgemein eine Realisierungsform mit minimaler Anzahl an Speicherelementen. Die kanonische Form gibt an, in welcher Art Operationen des Filters ausgeführt werden. Unter Teilsystemen (zweiter Ordnung) wird die Aufteilung der Operationen eines vergleichsweise komplizierten

[8] Die Ordnung n der FIR-Filter sollte nach Möglichkeit nicht zu groß gewählt werden, da entsprechend viele Werte n im Umfeld einer Datenlücke von der Filtercharakteristik beeinflusst werden und daher von der weiteren Analyse ausgeschlossen werden sollten. Um nicht zu viele Werte aussortieren zu müssen, sollte die Filterordnung nach Möglichkeit also klein gewählt werden.

[9] Als Amplitudengang bezeichnet man das frequenzabhängige Verhältnis der Amplituden von Eingangs- und Ausgangssignal (Oppenheim et al., 2004). Er ergibt sich als Betrag der Übertragungsfunktion: $|H(e^{j\Omega})|$ gemäß Gl. (2.64).

Tabelle 5.12: Zähler-Koeffizienten b_{ik} und Nenner-Koeffizienten a_{ik} der finalen Hochpass (HP) und Tiefpass (TP) IIR-Filter. Werte wurden auf fünf Nachkommastellen gerundet.

	k	b_{0k}	b_{1k}	b_{2k}	a_{1k}	a_{2k}
TP	1	$7.21 \cdot 10^{-11}$	$7.21 \cdot 10^{-11}$	0	−0.98133	0
	2	1	2	1	−1.96961	0.96996
	3	1	2	1	−1.98807	0.98842
HP	1	0.96996	−0.96996	0	−0.98133	0
	2	1	−2	1	−1.96961	0.96996
	3	1	−2	1	−1.98807	0.98842

Systems in mehrere Teilsysteme verstanden. Durch serielle (Kettenschaltung) oder parallele (Parallelschaltung) Anordnung der Filteropertionen lassen sich (im Vergleich zur 'Ein-System-Darstellung') identische oder sogar numerisch stabilere Ergebnisse erreichen. Im Hinblick auf einen Filter werden dabei "einzelne Pol- bzw. Nullstellen [...] zu Teilsystemen mit maximal zweiter Ordnung zusammengefasst und die Teilsysteme anhand einer Kettenschaltung aneinander gereiht. Die wesentlichen Vorteile dieser Struktur bestehen zum einen in der großen Flexibilität der Reihenfolge und zum anderen wird der Einfluss der Parameterquantisierung der Koeffizienten auf die Teilsysteme beschränkt" (Kammeyer und Kroschel, 2009, S. 484). Für tiefer gehende Erläuterungen wird ebenfalls auf Kammeyer und Kroschel (2009) verwiesen. Zusammenfassend gelingt durch die Umformung in 'Teilsysteme zweiter Ordnung' also eine numerisch exaktere und stabilere Realisierung der Übertragungsfunktion.

Die z-Übertragungsfunktion ergibt sich in Form der 'Teilsysteme zweiter Ordnung' mit den Zähler-Koeffizienten b_{ik} und den Nenner-Koeffizienten a_{ik} zu

$$H(z) = g \prod_{k=1}^{L} H_k(z) = g \prod_{k=1}^{L} \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}}. \tag{5.23}$$

Im Falle des beschriebenen Butterworth-Filters ($n = 5$, $f_{GF} = 0.003$ Hz) werden $L = 3$ Teilsysteme gebildet. Mit einem Verstärkungsfaktor von $g = 1$ resultieren die Koeffizienten b_{ik} und a_{ik} für Hochpass (HP) und Tiefpass (TP) Filter gemäß Tabelle 5.12.

Abbildungen 5.15 und 5.16 vermitteln einen Eindruck der Filtercharakteristiken. In Abbildung 5.15 ist der normierte Amplitudengang (Betrag der Übertragungsfunktion) der IIR von Hochpass- und Tiefpass-Filter dargestellt (siehe auch Abb. 2.3, S. 27). Das Abklingen der Signalamplituden im Bereich der Grenzfrequenz (bzw. im Übergangsbereich) wird deutlich. Charakteristisch für den Butterworth-Filter ist die Amplitude von $\sqrt{1/2} \approx 0.707$ bei der normierten Grenzfrequenz $Wn = f_{GF}/f_{Ny} \approx 0.006$ Hz, mit der Grenzfrequenz $f_{GF} = 0.003$ Hz

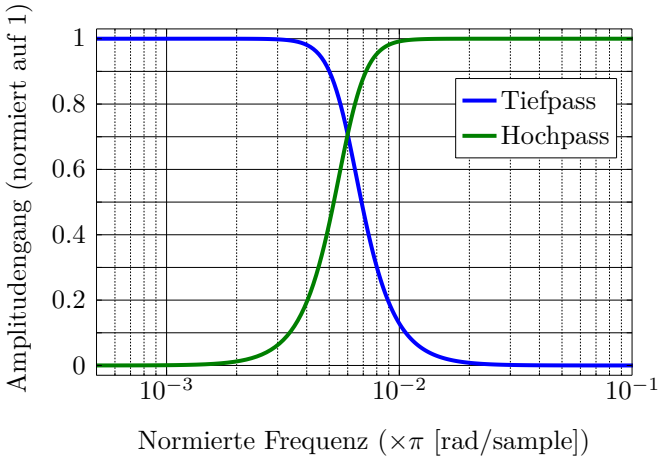


Abbildung 5.15: Normierter Amplitudengang der IIR Hochpass- und Tiefpass-Filter. Bei der normierten Grenzfrequenz $Wn = 0.006$ Hz liegt der Amplitudengang bei $\sqrt{1/2} \approx 0.707$.

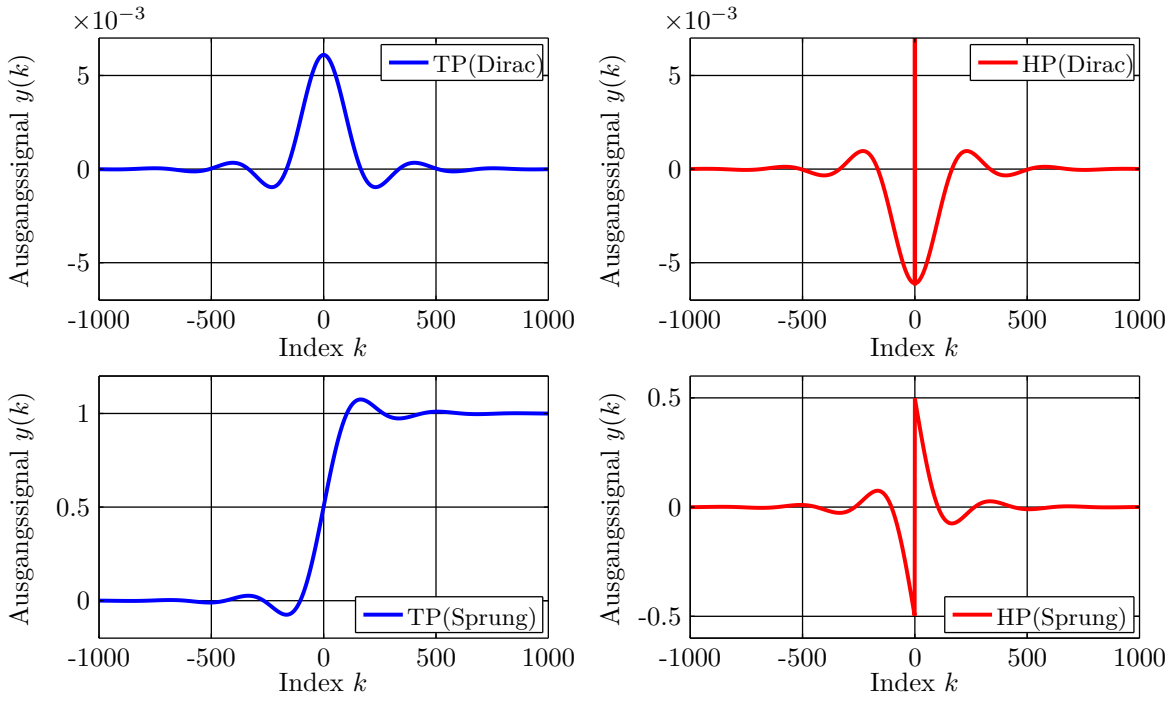


Abbildung 5.16: Ausgangssignale der IIR Hochpass- (rechts) und Tiefpass-Filter (links) nach Anregung mit einer Dirac-Funktion (oben) und einer Sprungfunktion (unten). Das Ausgangssignal der hochpass-gefilterten Dirac-Funktion (oben rechts) ist unvollständig dargestellt: der Peak bei $k = 0$ steigt auf $y(0) \approx 0.9939$ an.

und der Nyquistfrequenz $f_{Ny} \approx 0.5$ Hz. Auch wenn der Butterworth-Filter eine - im Verhältnis zu anderen IIR-Filtern - geringe Flankensteilheit im Übergangsbereich aufweist, sind der sich im Durchlassbereich zu 1 ergebende Amplitudengang sowie dessen monotones Verhalten im Übergangs- und Sperrbereich entscheidende Kriterien, die ihn für die Filterung von GOCE-Gravitationsgradienten besonders auszeichnen.

Abbildung 5.16 zeigt die Ausgangssignale $y(k)$ von Hochpass- und Tiefpass-Filter nach Anregung mit der Dirac-Funktion (Gl. (2.53)) bzw. der Sprungfunktion (Gl. (2.54)). Die Impuls- bzw. Sprung-'Höhe' wurde zu $\delta(0) = \epsilon(0) = 1$ angesetzt. Es sind charakteristische Eigenschaften der Filter erkennbar: Die Tiefpass-Filterung der Dirac-Funktion 'verschmiert' in der Zeitreihe, genau wie die 'Stufe' der Sprungfunktion, die sich nicht mehr klar abzeichnet. Das Ausgangssignal der Hochpass gefilterten Dirac-Funktion entspricht dem 'Vorzeichengeänderten' Ausgangssignal des Tiefpasses, wobei der zentrale Peak (bei $k = 0$) sich bis auf etwa 0.9939 erhebt. In allen Ausgangssignalen $y(k)$ wird deutlich, dass der Filter die Eingangssignale 'verschmiert' und so Einfluss auf die Zeitreihe nimmt. Im Falle von IIR-Filtern ist die gesamte Zeitreihe betroffen. In Abbildung 5.16 wird jedoch deutlich, dass der Einfluss mit größer werdendem Abstand vom Peak bzw. Sprung schnell abnimmt.

Um bei der Realdatenauswertung den Einfluss der Filterung auf Ausreißer (Peaks), Datenlücken oder Sprünge einschätzen zu können, wird die Bandbreite der Beobachtungen zu $\Delta \boldsymbol{V}_{ij} = \max(x(k)) - \min(x(k))$ mittels trendreduzierter GOCE $\boldsymbol{V}_{ij}$ aus dem 62.5-tägigen Datensatz abgeleitet. Mit einem Peak bzw. einem Sprung der Amplitude $\delta(0) = \epsilon(0) = \Delta \boldsymbol{V}_{ij}$ werden Hochpass- und Tiefpass-Filter angeregt. Auf Basis des Ausgangssignals der Filter wird untersucht, in welchem Abstand von Impuls bzw. Sprung deren Ausgangssignal einen Schwellwert (z.B. 0.7 mE für die GGT Zeitreihen) unterschreiten. Die Bestimmung von $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}$ erfolgt Daten basiert. Die Wahl der Dirac-Impuls-Amplitude entspricht damit der maximal möglichen Amplitudenhöhe, womit der 'worst-case' betrachtet wird.

Tabelle 5.13 enthält die Anzahl der Filter-beeinflussten Werte, nach Anregung mit der Dirac-Funktion. Die Amplitude des Dirac-Impulses wurde dabei zu $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}$ gewählt. Es wird deutlich, dass der 'netto' Einflussbereich der Filter bei einer Datenrate von 1 Hz etwa 1/3 bis 1/2 Umlauf umfasst. Die Anzahl der vom Filter beeinflussten Werte von Hochpass- und Tiefpass-Filter sind identisch, womit deren 'vorzeichenveränderte' Entsprechung unterstrichen wird.

Tabelle 5.13: Anzahl der durch die Filterung beeinflussten Werte der Zeitreihe, abgeleitet aus dem Ausgangssignal der Filter nach Anregung mit der Dirac-Funktion (Gl. (2.55), S. 24). Die Hälfte der beeinflussten Werte liegt vor, die andere Hälfte in der Zeitreihe hinter dem Dirac-Impuls. Amplitude des Impulses aus der Differenz $\max(\boldsymbol{V}_{ij}) - \min(\boldsymbol{V}_{ij})$ auf Basis trendreduzierter GOCE $\boldsymbol{V}_{ij}$.

Tensorkomponente	$\boldsymbol{V}_{xx}$	$\boldsymbol{V}_{yy}$	$\boldsymbol{V}_{zz}$	$\boldsymbol{V}_{xz}$	$\boldsymbol{V}_{xy}$	$\boldsymbol{V}_{yz}$
Hochpass	1620	1620	1918	1562	1978	2300
Tiefpass	1620	1620	1918	1562	1978	2300

Der Einfluss der Impuls-Amplitude auf das Ausgangssignal ist linear und lässt sich daher aus der Impulsantwort nach Anregung mit dem Einheits-Impuls skalieren. Werden 'Anomalien' in Form von Datenlücken, Ausreißern o.ä. in den Daten erkannt, ist zu berücksichtigen, dass eine Anzahl von in Tabelle 5.13 gelisteten Werten im Umfeld der Anomalie durch filterbedingte Effekte beeinflusst sein kann.

Bestimmung von Grenzfrequenz und Filterordnung

Entscheidend bei der Filterung der Gradientenzeitreihen sowie der Kombination Hochpass-gefilterter GOCE- und Tiefpass-gefilterter Modell-Gradienten ist die Wahl einer 'idealen' bzw. gut geeigneten Grenzfrequenz sowie einer Ordnung des Butterworth-Filters. Das offizielle GOCE Level 2 Datenprodukt EGG_TRF_2 beinhaltet GOCE-Gradienten im LNOF. Die Strategie zu deren Berechnung gleicht im Wesentlichen dem hier angewandten Verfahren und wird in Bouman (2007) erläutert. Die Modell-Anteile stammen aus einem (GOCE-only) TIM EGM. Für die Filterung wird ein Butterworth-Filter 4-ter Ordnung mit einer Grenzfrequenz von 0.005 Hz eingesetzt, also der unteren Begrenzung der MBW. Die Linearität der Phase wird durch Vorwärts-Rückwärts-Filterung (Matlab-Funktion `filtfilt`) sichergestellt. Die genannten Parameter wurden bereits vor dem Start der Mission bestimmt und werden daher hier basierend auf Realdaten neu berechnet.

Fuchs et al. (2013) untersuchen die GOCE-Gradienten und erarbeiten Repräsentationen in verschiedenen Koordinatensystemen. Die gewählte Herangehensweise ist ebenfalls vergleichbar mit der hier realisierten Filterstrategie und sieht den Austausch langwelliger GOCE-

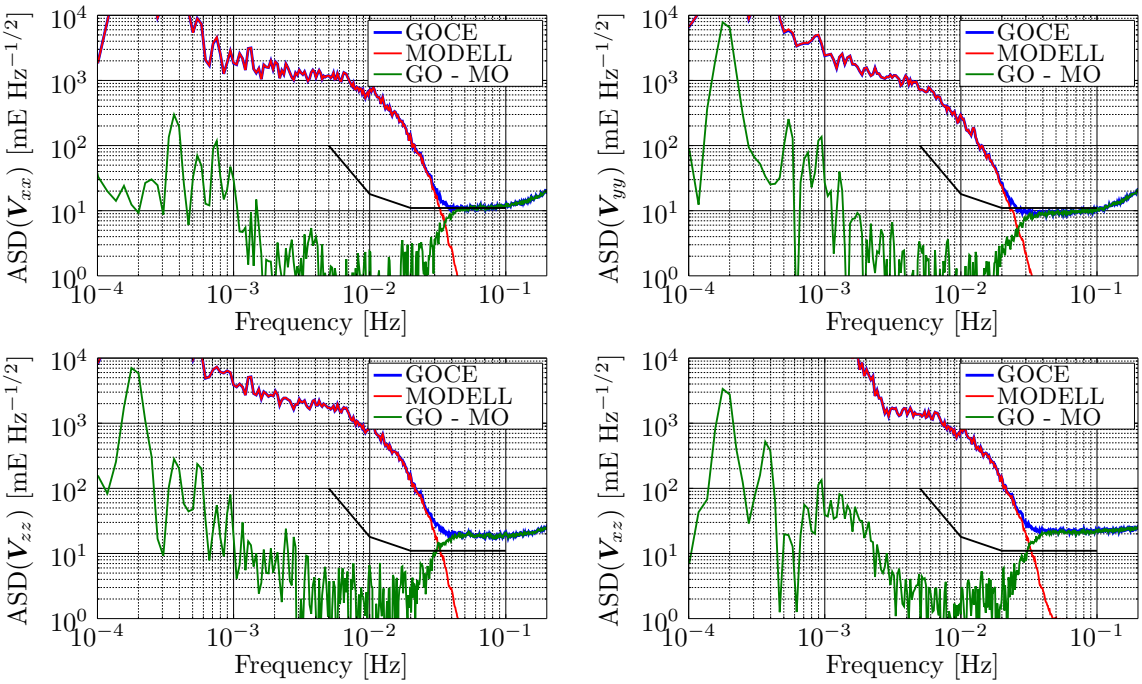


Abbildung 5.17: GOCE-Modell-Differenzen der vier hochgenauen GGT-Elemente. Die Spur-Requirements sind als optische Referenz hier und in den folgenden Abbildungen enthalten.

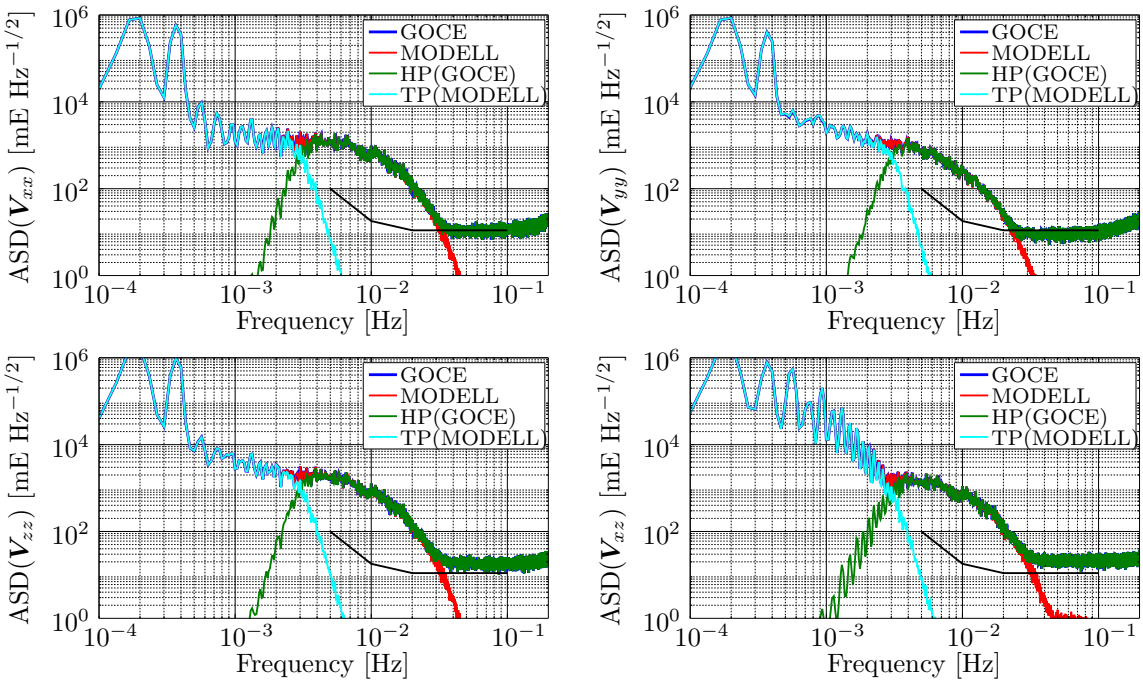


Abbildung 5.18: ASDs der GOCE- und modellbasierten GGT-Komponenten sowie deren Hochpass- bzw. Tiefpass-gefilterte Anteile.

Information durch Modellgradienten vor. Die Filterparameter wurden realdatenbasiert bestimmt. Die Grenzfrequenzen wurden Komponentenweise auf Basis eines Signal-Rausch- Verhältnisses (SNR) abgeleitet. Dieses wiederum basiert auf dem Vergleich der Gradienten mit Modellgradienten, abgeleitet aus einer (GOCE-only) Quick-Look EGM-Lösung nach Mayrhofer et al. (2010). Je nach Komponente variieren die SNR-basierten Grenzfrequenzen der hochgenauen GGT-Komponenten zwischen 3,...,4 mHz. Damit liegen sie bereits deutlich unterhalb der unteren MBW-Begrenzung von 5 mHz. Letztlich wird eine einheitliche Grenzfrequenz von 4 mHz gewählt. An dieser Stelle ist entscheidend, dass die Ergebnisse von Fuchs et al. (2013) auf GOCE-Gradienten *vor* der Reprozessierung basieren. Speziell die Signalanteile im unteren Bereich sowie unterhalb der MBW konnten durch die Reprozessierung signifikant verbessert werden (Stummer, 2013; Brockmann et al., 2012). Daher soll untersucht werden, wie weit die Grenzfrequenz für die hiesigen Analysen weiter reduziert werden kann.

Abbildung 5.17 zeigt einen ASD-basierten Vergleich von GOCE- und Modell-Gradienten der vier hochgenauen GGT-Komponenten im GRF. Es wird deutlich, dass sich der Signalgehalt beider Quellen im unteren Bereich sowie unterhalb des Messbandes kaum unterscheidet: Differenzen liegen teilweise deutlich unterhalb von 10 mE/Hz$^{-1/2}$. Außerdem sind Unterschiede zwischen den vier Komponenten erkennbar. Im Hinblick auf das Ziel der Untersuchung, die Validierung der Gradienten innerhalb der GOCE-MBW, ist es wichtig, dass die Gradienten innerhalb der MBW nicht von Modellinformation beeinflusst werden, und langwellig ungenaue Informationen der GOCE-Gradienten ihren Einfluss auf langwellige Signalanteile verlieren. Da der Filter einen Übergangsbereich zwischen Durchlass- und Sperrbereich bewirkt, ist darin nach Addition der Hochpass- und Tiefpass-gefilterten Anteile ein nennenswerter Anteil von GOCE- als auch Modell-Gradienten enthalten. Um den Einfluss etwaiger Fehler im Übergangsbereich zu minimieren, sollte der Übergangsbereich einen Frequenzbereich umfassen, in dem GOCE- und Modell-Gradienten einen möglichst ähnlichen Signalgehalt aufweisen. Die Filterordnung ist daher so hoch zu wählen, dass der Übergangsbereich 'schmal genug' ist, um einerseits von langwelligen Ungenauigkeiten der GOCE-Gradienten unbeeinflusst zu bleiben und andererseits unterhalb der MBW zu enden. Die Grenzfrequenz ist so zu setzen, dass der Übergangsbereich entsprechend 'ideal' gelagert wird. Ein geeigneter und final genutzter Parametersatz umfasst eine **Filterordnung von 5** bei einer **Grenzfrequenz von 0.003 Hz**. Deren Eignung wird im Folgenden weitere untersucht.

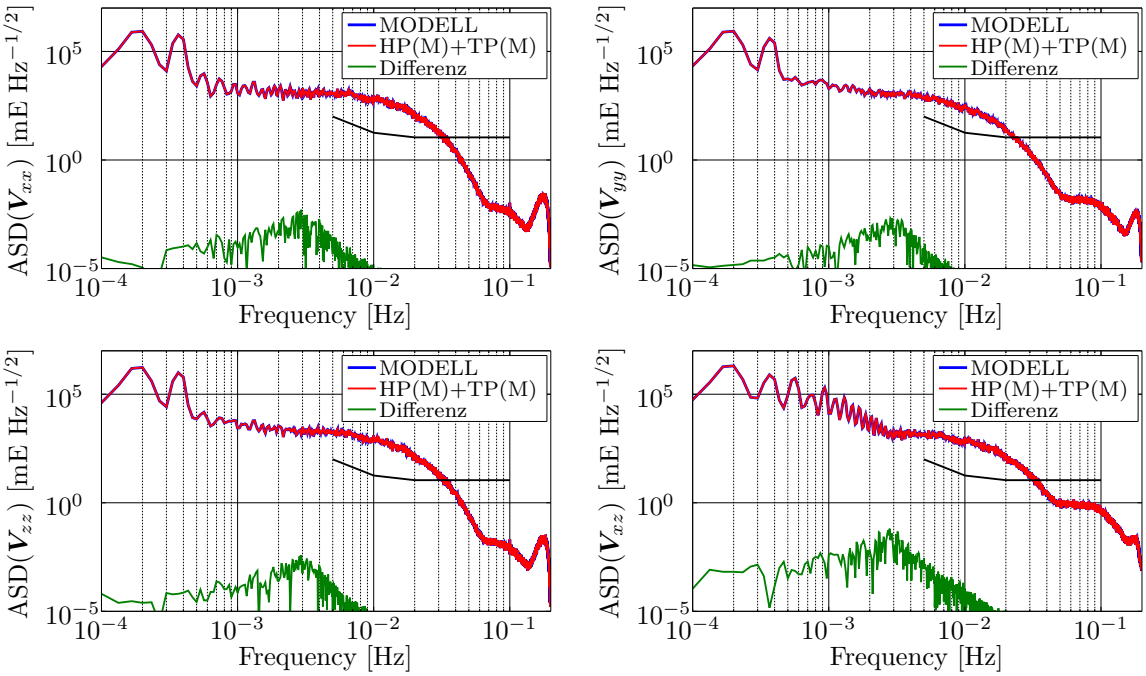


Abbildung 5.19: 'Closed-Loop'-Vergleich von Modellgradienten und deren aus Hochpass (HP) und Tiefpass (TP) gefilterten kombinierten Modellgradienten zur Prüfung der Filterstrategie.

In Abbildung 5.18 sind die ASD der GOCE- und Modell-Gradienten sowie deren Hochpass- (HP) bzw. Tiefpass- (TP) gefilterten Anteile dargestellt. Der Signalabfall im Bereich der Grenzfrequenz von 0.003 Hz wird deutlich. Mit dem gewählten Filter gelingt es, den Modellgehalt am unteren Rand der MBW ($5 \cdot 10^{-3}$ Hz = 5 mHz) auf maximal 10 mE/Hz$^{1/2}$ zu reduzieren. Die ASD der GOCE-Gradienten kreuzt das Niveau von 10 mE/Hz$^{1/2}$ zwischen 1-2 mHz. Beim Vergleich mit den GOCE-Modell-Differenzen in Abbildung 5.17 erweist sich, dass die Differenzen in diesem Bereich zum Teil deutlich unterhalb von 10 mE/Hz$^{1/2}$ liegen. Einzig die Differenzen von $\boldsymbol{V}_{xz}$ weisen unterhalb von 2-3 mHz einen Anstieg über dieses Niveau auf.

Der Vergleich zeigt, dass sich der Signalabfall in einem ausreichend schmalen Übergangsbereich vollzieht und die Filterordnung daher als geeignet zu bewerten ist. Die Grenzfrequenz führt einerseits dazu, dass der Signalgehalt der Modellgradienten nach der Tiefpass-Filterung bei 0.005 Hz (untere Begrenzung der MBW) ein Niveau von 10 mE/Hz$^{1/2}$ erreicht und damit ausreichend weit abgeklungen ist. 'Auf der anderen Seite' bewirkt der Hochpass-Filter, dass der Signalgehalt der langwelligen Anteile der GOCE-Gradienten ausreichend 'schnell' und deutlich unterdrückt wird, um deren Ungenauigkeiten keine weitere Möglichkeit der Einflussnahme zu erlauben. Die Grenzfrequenz von 0.003 Hz ist damit als geeignet anzusehen.

Die Modellgradienten dieses Abschnittes basieren auf dem EGM2008 (Pavlis et al., 2008). Wie bereits in Abschnitt 4.3 diskutiert und auch von Fuchs et al. (2013) beschrieben, ist die Wahl des EGM - ob GRACE- oder GOCE-basiert - jedoch wenig entscheidend.

Die Hochpass- bzw. Tiefpass-Filterung gelingt unter den gewünschten Randbedingungen. Auch wenn darauf geachtet wurde, das Hochpass- und Tiefpass-Filter 'im umgekehrten Sinne identisch' sind, ist dennoch zu prüfen, ob die Kombination - also die Addition beider Filterergebnisse - ein dem Eingangssignal gleichendes Ergebnis hervorbringt. Dazu wird rein auf Basis einer Modellgradienten-Zeitreihe eine Art 'Closed-Loop'-Vergleich der Filterung durchgeführt: Als Eingangssignal werden Modellgradienten $x(k) = \boldsymbol{V}_{ij}$ einerseits Hochpass und andererseits Tiefpass gefiltert, beide Ausgangssignale aufsummiert und mit dem originalen Eingangssignal verglichen. Abbildung 5.19 zeigt die Differenzen auf Ebene der ASD. Die Differenzen liegen etwa vier Größenordnungen unterhalb des Signals und übersteigen selbst im Falle der $\boldsymbol{V}_{xz}$-Komponente (größte Differenzen) das Niveau von 0.1 mE/Hz$^{1/2}$ nicht. Damit sind beide Zeitreihen als gleich zu betrachten und die Filterstrategie in Form der beschriebe-

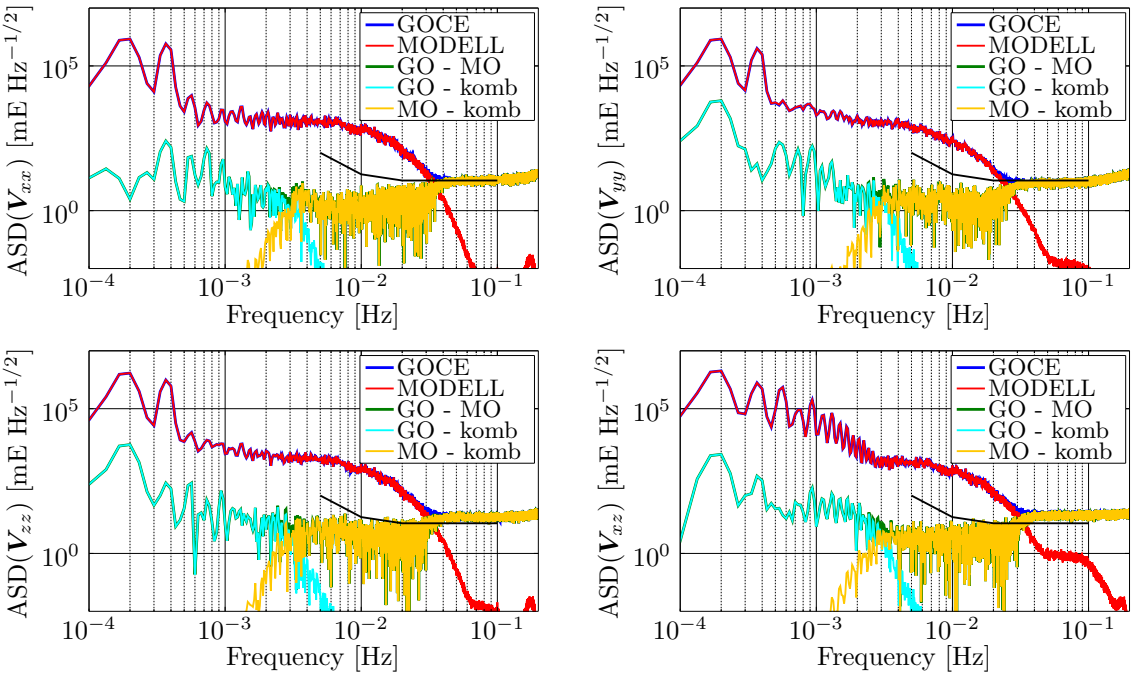


Abbildung 5.20: Vergleich von GOCE (GO), MODELL (MO) sowie aus Hochpass- und Tiefpass-Filtern kombinierten (komb) Gradientenzeitreihen im Frequenzbereich.

Tabelle 5.14: Fehler des Kombinationsschrittes [mE].

Tensorkomponente	$\boldsymbol{V}_{xx}$	$\boldsymbol{V}_{yy}$	$\boldsymbol{V}_{zz}$	$\boldsymbol{V}_{xz}$
$\sigma_{Kombination}$ [mE]	0.00128	0.00289	0.01529	0.00883

nen Kombination von Hochpass- und Tiefpass-gefilterten Anteilen zusammen mit den oben beschriebenen Filtern als geeignet zu beurteilen.

Wie soeben rein Modellgradienten-basiert erfolgt, wird nun ein Vergleich der kombinierten Gradienten-Zeitreihen (im weiteren auch mit *komb* abgekürzt) mit den Zeitreihen der GOCE- sowie Modell-Gradienten vollzogen. Abbildung 5.20 zeigt ASDs der GOCE- und Modell-Gradienten sowie der besagten Differenzen zur ASD der kombinierten Zeitreihen. Es liegt nahe, dass die Differenzen zwischen kombinierter Zeitreihe und GOCE bzw. Modell nicht kleiner werden können als die Differenzen zwischen GOCE und Modell selbst. Es wird aber auch deutlich, dass sie maximal das Niveau der GOCE-Modell-Differenzen erreichen. Ein idealer Hochpass- bzw. Tiefpass-Filter würde einen Signalabriss bei der Grenzfrequenz bewirken. Da derartige Filter nicht realisiert werden können, entsteht - wie oben ausführlich beschrieben - der Übergangsbereich, in dem der Signalgehalt abklingt. Im Hinblick auf die Ableitung eines Fehlers der Kombination kann gemäß Abschnitt 2.2.4 (S. 29) der Flächeninhalt des 'Dreiecks' berechnet werden, das sich im Bereich der Grenzfrequenz unterhalb von gelber (MO - komb) und türkiser (GO - komb) Kurve ergibt (siehe Abb. 5.20). Tabelle 5.14 zeigt die Fehler des Kombinationsschrittes für die vier hochgenauen GGT-Elemente. Es wird deutlich, dass diese mit maximal 0.015 mE vernachlässigbar klein sind.

Wie bereits in Abschnitt 5.3.3 bei der Interpolations-Untersuchung der Gradienten-Zeitreihen beschrieben sowie eingangs in Abbildung 5.1 dargestellt, erfolgt im Anschluss an die Kombination Hochpass-gefilterter GOCE-Gradienten mit Tiefpass-gefilterten Modell-Gradienten eine **Tiefpass-Filterung an der oberen Grenze der MBW (0.1 Hz)**. Diese dient der Reduzierung hochfrequenten Rauschens, wozu ein Butterworth-Tiefpass-Filter 4-ter Ordnung bei einer Grenzfrequenz von 0.1 Hz genutzt wird. Die Filterung wird als Vorwärts-Rückwärts-Filterung durchgeführt. Eine Idee des Filtereinflusses geben Abschnitt 5.3.3 sowie Tabelle 5.11 (S. 113) und Abbildung 5.10(b) (S. 112).

Filterung in der Praxis

Die Verarbeitung von Realdaten bringt einige Herausforderungen mit sich. Auch wenn die Filterung und Kombination der Zeitreihen entsprechend der Beschreibungen erfolgt, ist im Hinblick auf 'Anomalien' (z.B. Datenlücken, Sprünge, Ausreißer) in den Realdaten der Einfluss der Filter zu berücksichtigen. Im Falle von Datenlücken ist es beispielsweise ratsam, diese ggf. vor der Filterung zu schließen, dann die Filterung auszuführen und Bereiche des Ausgangssignals im Radius gemäß Tabelle 5.14 um die Datenlücke als 'filterbeeinflusst' zu markieren. Anhand der 'Flags' der GOCE-Gradienten (siehe Tab. 3.3, S. 64) sollten ebenfalls Bereiche der Zeitreihe markiert werden, die bereits ESA-seitig als 'problematisch' klassifiziert wurden. Es gilt zu prüfen, ob auch im Umfeld der geflaggten Elemente die Berücksichtigung des Filtereinflusses in vollem Umfang zu erfolgen hat. Welche Anomalien und Flags sowie ggf. filterbeeinflusste Bereiche in deren Umfeld Einfluss auf die Gradienten in der MBW haben und berücksichtigt werden sollten, können entsprechende (Sensitivitäts-)Untersuchungen im Zuge der Analyse der Kreuzungspunktdifferenzen (Kap. 6) zeigen.

5.5.1.3 Drehung des Tensors der Gravitationsgradienten

Wie im vorangehenden Abschnitt beschrieben, wurden die Bereiche, in denen der GOCE-Gradiententensor weniger genaue Informationen enthält, gegen Modellinformation ausgetauscht. Damit sind die Voraussetzungen geschaffen, um die eigentlichen Tensordrehung durchzuführen.

Die Drehung eines Tensors $\boldsymbol{V}_{ij}^{A}$ von System A in System B erfolgt allgemein gemäß Gleichung (2.73) (S. 30) zu

$$\boldsymbol{V}_{ij}^{B} = \boldsymbol{R}_{B \leftarrow A} \cdot \boldsymbol{V}_{ij}^{A} \cdot \boldsymbol{R}'_{B \leftarrow A}. \tag{5.24}$$

Um die GOCE-Gradienten (bzw. die kombinierten Gradiententensoren) in Kreuzungspunkten validieren zu können, hat jedoch vor der Tensordrehung eine Interpolation der GGT im Kreuzungspunkt - also zu den Kreuzungszeitpunkten - zu erfolgen. Diese verläuft entsprechend der Ausführungen in Abschnitt 5.3.3. Im Anschluss kann die Transformation in ein einheitliches Koordinatensystem erfolgen. Es ist naheliegend, den Tensorvergleich in einem der beteiligten GRF - entlang aufsteigendem (asc) oder absteigendem (desc) Bahnast - zu vollziehen: GRF_{desc} oder GRF_{asc}.

Wie bereits erwähnt, wird der 'Standardvergleich' entlang der absteigenden Bahnbögen, also im GRF_{desc} erfolgen. Die Beobachtungen $\boldsymbol{V}_{ij}^{asc}$ müssen daher in das GRF_{desc} transformiert werden, um dort mit dem $\boldsymbol{V}_{ij}^{desc}$ verglichen werden zu können. Im Rahmen der Drehung wird ausschließlich die Orientierung (o) des $\boldsymbol{V}_{ij}^{asc}$ verändert, so dass diese der Orientierung des $\boldsymbol{V}_{ij}^{desc}$ entspricht. Die unterschiedlichen 'Höhen (h) der Tensoren', also die höhenunterschiedbedingten Gradientendifferenzen zwischen $\boldsymbol{V}_{ij}^{asc}$ und $\boldsymbol{V}_{ij}^{desc}$ werden im Rahmen der Translation (Abs. 5.5.2) berücksichtigt.

Die Anpassung der Orientierung erfolgt durch eine Drehung gemäß Gleichung (5.24) mit der Drehmatrix $R_{\mathrm{GRF}_{desc} \leftarrow \mathrm{GRF}_{asc}}$. Da die Gradienten eine ortsbezogene Größe darstellen, sind $\boldsymbol{V}_{ij}^{asc}$ und $\boldsymbol{V}_{ij}^{desc}$ über ein erdfestes Koordinatensystem - das EFRF - zusammenzuführen. Die Bestimmung der Drehmatrix $\boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF}_{desc} \leftarrow \mathrm{GRF}_{asc}}$ erfolgt daher entsprechend der Gleichungen (2.77) bzw. (3.10) nach

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF}_{desc} \leftarrow \mathrm{GRF}_{asc}} = \boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF}_{desc} \leftarrow \mathrm{IRF}_{desc}} \cdot \boldsymbol{R}_{\mathrm{IRF}_{desc} \leftarrow \mathrm{EFRF}} \cdot \boldsymbol{R}_{\mathrm{EFRF} \leftarrow \mathrm{IRF}_{asc}} \cdot \boldsymbol{R}_{\mathrm{IRF}_{asc} \leftarrow \mathrm{GRF}_{asc}}. \tag{5.25}$$

Die beteiligten Submatrizen basieren im Falle von $\boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF} \leftarrow \mathrm{IRF}}$ auf den Quaternionen IAQ und im Falle von $\boldsymbol{R}_{\mathrm{IRF} \leftarrow \mathrm{EFRF}}$ auf den Quaternionen EOQ. Auch deren Interpolation hat entlang der Zeitreihe im Kreuzungspunkt zu erfolgen. Dabei sind die Quaternionen gemäß Abschnitt 5.3.3 zu den Kreuzungszeitpunkten zu interpolieren und auf Basis der interpolierten Quaternionen gemäß Gleichung (2.83) (S. 32) Drehmatrizen zu bestimmen. Um die

Drehrichtung der Drehmatrizen zu ändern, ist die Drehmatrix zu transponieren: so ergibt sich beispielhaft $\boldsymbol{R}_{\mathrm{IRF} \leftarrow \mathrm{GRF}} = \boldsymbol{R}'_{\mathrm{GRF} \leftarrow \mathrm{IRF}}$.

Die finale Drehung des Tensors der Gravitationsgradienten $\boldsymbol{V}^{asc}_{ij,komb}$ vom GRF_{asc} in das GRF_{desc} erfolgt damit zu

$$\boldsymbol{V}^{o:desc,h:asc}_{ij,komb} = \boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF}_{desc} \leftarrow \mathrm{GRF}_{asc}} \cdot \boldsymbol{V}^{asc}_{ij,komb} \cdot \boldsymbol{R}'_{\mathrm{GRF}_{desc} \leftarrow \mathrm{GRF}_{asc}}. \tag{5.26}$$

Wie bereits mit der Notation in Gleichung (5.26) angedeutet, wurde damit die Orientierung ('o') des ursprünglich entlang dem aufsteigenden (asc) Bahnbogen befindlichen GGT auf die Orientierung des GRF_{desc} angepasst. Dessen Höhe ('h') ist aber noch die des GRF_{asc}. Dieser Höhenunterschied oder genauer gesagt, die Gradientendifferenz, die sich aus dem Höhenunterschied ergibt, wird in Abschnitt 5.5.2 behandelt.

Ein Vergleich beider Gradienten könnte genau so gut im GRF_{asc} erfolgen. Die entsprechende Drehmatrix $\boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF}_{asc} \leftarrow \mathrm{GRF}_{desc}}$ ließe sich durch Umkehren der Multiplikation der Drehmatrizen in Gleichung (5.25) erreichen oder ergibt sich als Transponierte von $\boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF}_{desc} \leftarrow \mathrm{GRF}_{asc}}$. Ob der Vergleich beider Gradienten letztlich in GRF_{desc} oder GRF_{asc} erfolgt, ist im Hinblick auf die Ergebnisse nicht relevant.

Durch die Drehung der Tensoren (Gl. (5.26)) werden GOCE- und Modell-Gradienten vermischt. Im nächsten Abschnitt wird daher untersucht, welchen Anteil der gedrehten Gradienten $\boldsymbol{V}^{o:desc,p:asc}_{ij,komb}$ die GOCE-Gradienten und welchen die Modell-Gradienten ausmachen.

5.5.1.4 GOCE- und Modellgehalt rotierter Tensoren

Wie zu Beginn von Abschnitt 5.5.1.1 erwähnt, werden an zwei Stellen GOCE-Gradienten gegen Modellgradienten ausgetauscht: einerseits die langwelligen Anteile der vier hochgenauen Tensorkomponenten und andererseits die beiden weniger genauen Komponenten $\boldsymbol{V}_{xy}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$, die vollständig durch Modellinformation ersetzt werden.

Um zu untersuchen, wie groß GOCE- bzw. Modellanteil der rotierten GGT nach Rotation gemäß Gleichung (5.26) sind, werden hier zwei Wege verfolgt: Zum einen lässt sich rein auf Basis der Drehmatrix $\boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF}_{desc} \leftarrow \mathrm{GRF}asc}$ untersuchen, wie viel Energie zwischen den Tensorkomponenten verlagert wird. Dabei können jedoch nur 'ganze' Tensorelemente betrachtet werden. Um auch die frequenzabhängigen Anteile 'innerhalb der Komponenten' in die Untersuchungen einzubeziehen, werden zum anderen GOCE- und Modellanteile getrennt voneinander gedreht und deren Anteile in den gedrehten Tensoren untersucht.

Rein Drehmatrix basierte Betrachtung

Die beiden im Kreuzungspunkt beteiligten GRF (entlang auf- und absteigender Bahnbögen) unterscheiden sich in puncto Orientierung in erster Linie durch die Orientierung derer x- und y-Achsen. Die z-Achsen beider Systeme weichen weniger als 2° voneinander ab. Bei der Überführung von Beobachtungen zwischen GRF_{asc} und GRF_{desc} im Kreuzungspunkt dominiert daher in puncto Orientierung die Drehung um die z-Achse des Systems[10]. Daraus ergibt sich für das Element r_{33} der Drehmatrix $\boldsymbol{R}$ ein Wert nahe 1. Damit und aufgrund der starken Breitenabhängigkeit der Drehwinkel um die z-Achse (siehe Abb. 5.12) ist vergleichsweise leicht nachvollziehbar, welche Drehwinkel in welchen Breiten zu welchen Signalverschiebungen im Tensor führen.

Tabelle 5.15 zeigt die prozentuale Verlagerung der Energie einzelner Tensorelemente rein auf Basis der Drehmatrix $\boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF}_{desc} \leftarrow \mathrm{GRF}asc}$. Die Datengrundlage umfasst Drehmatrizen zwischen GRF_{asc} und GRF_{desc} in gut 1.000.000 Kreuzungspunkten (62.5-tägiger Datensatz). Die

[10] Der Betrag der Drehung entspricht näherungsweise dem Schnittwinkel zwischen auf- und absteigendem Bahnbogen in der λ, φ-Ebene gemäß Abbildung 5.4 (links), ist stark breitenabhängig und variiert zwischen 0° in Polnähe und etwa 160° in der Nähe des Äquators.

Tabelle 5.15: Verlagerung der Energie einzelner Tensorelemente [%] rein auf Basis der Drehmatrix $\boldsymbol{R}_{GRF_{desc} \leftarrow GRF_{asc}}$. Statistische Kenngrößen (min, max, mean) basierend auf Drehmatrizen in gut 1.000.000 Kreuzungspunkten.

Eingangs-daten:	⇒	verlagert auf: $\boldsymbol{V}_{xx}$	$\boldsymbol{V}_{yy}$	$\boldsymbol{V}_{zz}$	$\boldsymbol{V}_{xz}(*)$	$\boldsymbol{V}_{xy}(*)$	$\boldsymbol{V}_{yz}(*)$
$\boldsymbol{V}_{xx}$	min	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	max	100.00	100.00	0.00	0.04	50.00	0.14
	mean	34.43	37.86	0.00	0.00	27.69	0.01
$\boldsymbol{V}_{yy}$	min	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	max	100.00	100.00	0.00	0.13	50.00	0.16
	mean	37.86	34.43	0.00	0.01	27.69	0.01
$\boldsymbol{V}_{zz}$	min	0.00	0.00	99.78	0.00	0.00	0.00
	max	0.00	0.00	100.00	0.11	0.00	0.21
	mean	0.00	0.00	99.98	0.01	0.00	0.02
$\boldsymbol{V}_{xz}(*)$	min	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	max	0.03	0.14	0.14	100.00	0.06	100.00
	mean	0.00	0.01	0.01	48.28	0.00	51.70
$\boldsymbol{V}_{xy}(*)$	min	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	max	50.00	50.00	0.00	0.08	100.00	0.10
	mean	27.69	27.69	0.00	0.01	44.60	0.01
$\boldsymbol{V}_{yz}(*)$	min	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	max	0.11	0.15	0.21	100.00	0.09	100.00
	mean	0.00	0.01	0.02	51.70	0.01	48.26
(*) die Angaben beinhalten die Summe der Anteile aus $\boldsymbol{V}_{ij}$ und $\boldsymbol{V}_{ji}$							

linke Spalte zeigt das jeweilige Tensorelement, dessen Energie durch die Drehung auf die Tensorelemente rechts verlagert wird. Um die (vorwiegend breitenabhängige) Veränderung der Verlagerung deutlich zu machen, werden statistische Werte in Form des minimalen (min), maximalen (max) sowie mittleren (mean) Anteils der Komponente nach Drehung angegeben.

Es sei daran erinnert, dass die Komponenten $\boldsymbol{V}_{xx}$, $\boldsymbol{V}_{yy}$, $\boldsymbol{V}_{zz}$ sowie $\boldsymbol{V}_{xz}$ im Frequenzbereich der MBW GOCE-Gradienten enthalten, und die jetzige Betrachtung der Untersuchung deren Vermischung mit Modellgradienten in $\boldsymbol{V}_{xy}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$ dienen soll.

Die Energie von $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ bleibt speziell in Polnähe (Drehwinkel gegen Null) 'Komponenten-treu' und umfasst bis zu 100 %. Bei Drehwinkeln von 90° um die z-Achse sind x-Achse des GRF_{asc} und y-Achse des GRF_{desc} identisch, es erfolgt ein Energieaustausch zwischen beiden Komponenten und die Energie der Einzelkomponente kann bis auf 0 % sinken (= vollständig übertragen werden). Der Austausch zwischen $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ bewirkt auch eine Verlagerung von bis zu 50 % der $\boldsymbol{V}_{xx}$- bzw. $\boldsymbol{V}_{yy}$-Energie auf $\boldsymbol{V}_{xy}$. Dieser Fall tritt bei Drehwinkeln von etwa 45° ein. Im Mittel verlagert sich jeweils etwa 35 % der $\boldsymbol{V}_{xx}$- bzw. $\boldsymbol{V}_{yy}$-Energie auf $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ und gut 27 % gehen auf die - ansonsten rein Modell-basierte - Komponente $\boldsymbol{V}_{xy}$ über.

Die Energie in $\boldsymbol{V}_{zz}$ bleibt aufgrund der geringen Abweichungen zwischen den x-y-Ebenen beider Systeme beinahe vollständig Komponenten-treu (99.7 ... 100 %). Anders herum sind (in Summe) nie mehr als 0.3 % der Energie von $\boldsymbol{V}_{zz}$ anderen Ursprungs als aus $\boldsymbol{V}_{zz}$ selbst.

Für $\boldsymbol{V}_{xz}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$ zeigt sich ein gegenseitiger Austausch derer Energie. Beide enthalten im Mittel etwa 50 % der Energie der jeweils anderen Komponente, wobei die Energie zu 100 % vertauscht werden kann (Drehwinkel um 90°).

Ein Energieaustausch von $\boldsymbol{V}_{xy}$ findet mit $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ statt, wie bereits oben 'in die entgegengesetzte Richtung' beschrieben. Energie aus $\boldsymbol{V}_{xy}$ wird bis zu 50 % auf $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$

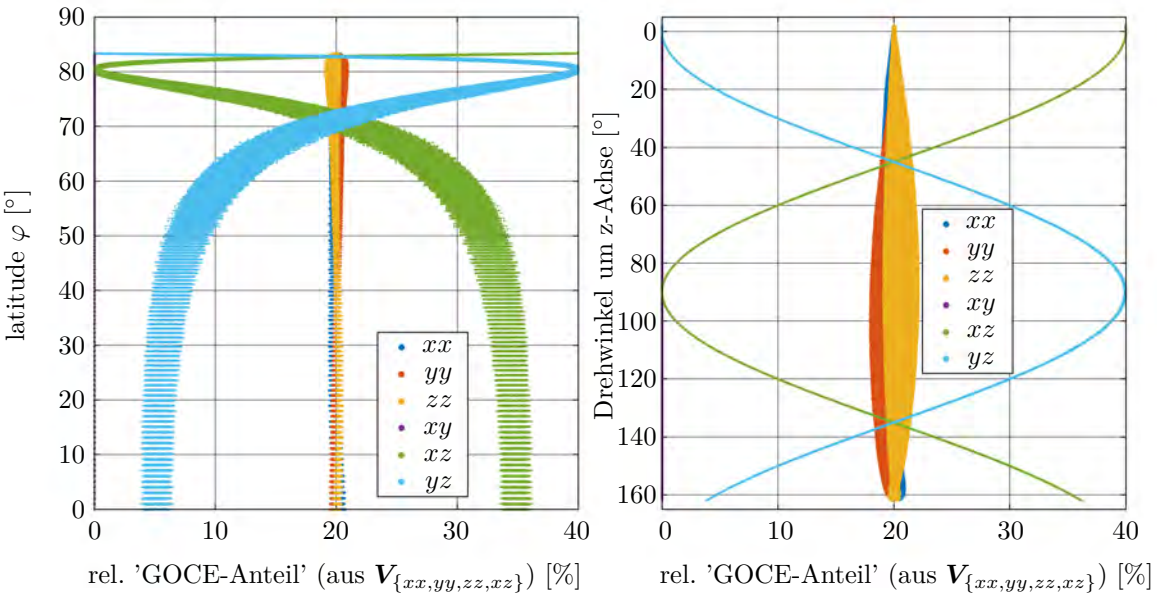


Abbildung 5.21: Relativer GOCE-Anteil der GGT-Komponenten $\boldsymbol{V}_{xx}$, $\boldsymbol{V}_{yy}$, $\boldsymbol{V}_{zz}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ nach Drehung zwischen GRF_{asc} und GRF_{desc} (ausschließlich basierend auf $\boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF}_{desc} \leftarrow \mathrm{GRF}asc}$). 100 % entsprechen dem gesamt GOCE-Anteil im GGT. $\boldsymbol{V}_{xz}$ enthält die Summe aus $\boldsymbol{V}_{xz}$ und $\boldsymbol{V}_{zx}$.

verlagert. Im Mittel bleiben 45 % 'Komponenten-treu' und jeweils etwa 27 % gehen auf $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ über.

Um die (vorwiegend breitenbhängigen) Verlagerungen der GOCE- und Modellinformation besser nachvollziehen zu können, zeigen Abbildungen 5.21 und 5.22 in welchen Breiten φ (links) bzw. unter welchen Drehwinkeln um die z-Achse (rechts) welche Anteile durch die Drehung auf welche GGT-Komponenten übertragen werden. Dabei werden unter 'GOCE-Anteil' die Komponenten $\boldsymbol{V}_{xx}$, $\boldsymbol{V}_{yy}$, $\boldsymbol{V}_{zz}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ und unter 'Modellanteil' die Komponenten $\boldsymbol{V}_{xy}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$ zusammengefasst. Beide Anteile werden getrennt voneinander untersucht. Die Abbildungen zeigen *relative* Anteile: Die Prozentangaben beziehen sich auf den Gesamtanteil der GOCE- bzw. Modellinformation im GGT, so dass sich die Summe der Einzelanteile jeweils zu 100 % ergibt. Die Angaben der Tensorelemente $\boldsymbol{V}_{ij}$ mit $i \neq j$ beinhalten entsprechend deren Angaben in Tabelle 5.15 jeweils die Summe der Anteile von $\boldsymbol{V}_{ij}$ und $\boldsymbol{V}_{ji}$.

Aus den Abbildungen ist auf Anhieb der nichtlineare Zusammenhang zwischen der geografischen Breite (latitude) und dem Drehwinkel zwischen den GRF (in etwa gleich dem Schnittwinkel der Bahnbögen) erkennbar. Die breitenabhängige Darstellung *links* stellt sich als 'gestauchte Version' der Darstellung in Abhängigkeit des Drehwinkels *rechts* dar. Dies ist auf die rasche Veränderung des Drehwinkels in hohen Breiten zurückzuführen: 0° in Breiten von 83.4°, 90° in Breiten von 80.5° und 135° in Breiten von 71.5°. Außerdem wird die starke Breitenabhängigkeit der Verlagerung aufgrund der Drehung deutlich.

Abbildung 5.21 zeigt den 'GOCE-Anteil': Der GOCE-Anteil in den Hauptdiagonalkomponenten bleibt nahezu konstant. Dies ist auf den überwiegend gegenseitigen Austausch zwischen diesen zurückzuführen. Ein deutlicher Übertrag findet zwischen $\boldsymbol{V}_{xz}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$ statt. Dieser bewirkt, dass $\boldsymbol{V}_{xz}$ in Breiten um $\varphi = 80.5°$ nahezu keine GOCE-Anteile mehr enthält. Sehr interessant und auf den ersten Blick ein Widerspruch gegenüber Tabelle 5.15 ist der GOCE-Anteil in $\boldsymbol{V}_{xy}$: Laut der Abbildung liegt dieser nahe Null und laut der Tabelle werden bis zu 50 % der Anteile aus $\boldsymbol{V}_{xx}$ bzw. $\boldsymbol{V}_{yy}$ übertragen. Bei genauerer Betrachtung wird jedoch klar, dass die Tensordrehung eine Verlagerung der Anteile aus $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ mit jeweils unterschiedlichem Vorzeichen bewirkt. Da $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ nahezu gleiche Werte aufweisen, kürzen sich deren Anteil $\boldsymbol{V}_{xy}$ gegenseitig heraus. $\boldsymbol{V}_{xy}$ besteht daher im Ergebnis nahezu vollständig aus Modellinformation, was auch anhand der vergleichsweise geringen Residuen in Abschnitt 6.2 deutlich wird.

Im Hinblick auf die Verlagerung des 'Modellanteils' (Abb. 5.22) zeigt sich, dass $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ in Breiten um 82.8° und 71.5° (Drehwinkel von 45° bzw. 135°) einen vergleichsweise

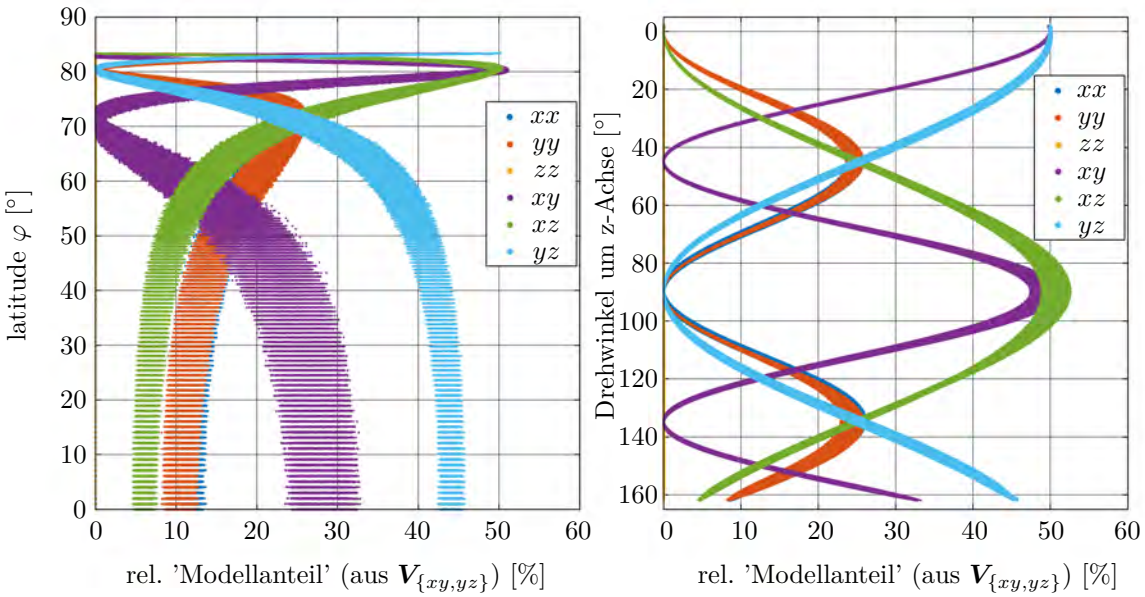


Abbildung 5.22: Relativer Modellanteil der GGT-Komponenten $\boldsymbol{V}_{xy}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$ nach Drehung zwischen GRF_{asc} und GRF_{desc} (ausschließlich basierend auf $\boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF}_{desc} \leftarrow \mathrm{GRF}asc}$). 100 % entsprechen dem gesamt Modellanteil im GGT. $\boldsymbol{V}_{ij}$ mit $i \neq j$ enthalten jeweils die Summe aus $\boldsymbol{V}_{ij}$ und $\boldsymbol{V}_{ji}$.

hohen Anteil an Modellinformation aus $\boldsymbol{V}_{xy}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$ enthalten. Dieser sinkt für Breiten von etwa $\pm 80.5°$ auf nahe Null und führt damit zu den absolut GOCE-reinsten $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ Komponenten in Breiten um $\pm 80.5°$. $\boldsymbol{V}_{zz}$ erhält annähernd keine Modellinformation aus den besagten beiden Komponenten und $\boldsymbol{V}_{xz}$ wird in Breiten um $\pm 80.5°$ (Drehwinkel von 90°) ein Großteil der Modellinformation aus $\boldsymbol{V}_{xy}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$ übertragen.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass ein Energieaustausch bei dominanter Drehung um die z-Achse des Systems zu Energieverschiebungen einerseits zwischen $\boldsymbol{V}_{xx}$, $\boldsymbol{V}_{yy}$ und $\boldsymbol{V}_{xy}$ bzw. $\boldsymbol{V}_{yx}$ und andererseits zwischen $\boldsymbol{V}_{xz}$ bzw. $\boldsymbol{V}_{zx}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$ bzw. $\boldsymbol{V}_{zy}$ führen. In $\boldsymbol{V}_{zz}$ findet durch die Drehungen kaum Energieverlagerung statt, so dass ihr ursprünglicher Energiegehalt (vor der Drehung) sehr stark dem Energiegehalt nach der Drehung entspricht (siehe auch Abb. 5.22). In Bezug auf die Vermischung von GOCE- und Modellinformation in die MBW bleibt $\boldsymbol{V}_{zz}$ die GOCE-reinste Komponente.

Es sei erwähnt, dass in Tabelle 5.15 sowie in den bisherigen Erläuterungen die unterschiedlich großen Beträge der einzelnen Tensorkomponenten vollkommen unberücksichtigt bleiben. Eine Betrachtung der frequenzabhängigen Anteile von GOCE- und Modellinformation sowie der Beträge einzelner Komponenten erfolgt im folgenden Abschnitt.

Getrennte Betrachtung der GOCE- und Modellanteile

Eine getrennte Betrachtung von GOCE-und Modellanteilen in den im Kreuzungspunkt beteiligten Systemen gelingt durch getrennte Drehung von Hochpass (GOCE) sowie Tiefpass (Modell) gefilterten Anteilen.

Die Matrizenmultiplikation ist mit der Matrizenaddition distributiv (Merziger und Wirth, 2002), so dass für die Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ mit der Drehmatrix $\boldsymbol{R}$ gilt

$$\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{R}' + \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R} \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{R}'. \tag{5.27}$$

Werden für $\boldsymbol{A}$ die Hochpass-gefilterten GOCE-Gradienten und für $\boldsymbol{B}$ die Tiefpass-gefilterten Modell-Gradienten eingesetzt, und beschreibt $\boldsymbol{R}$ die Drehung zwischen GRF_{asc} und dem GRF_{desc}, lassen sich auf diese Weise Signalanteile getrennt voneinander in das GRF_{desc} überführen. Die getrennte Überführung mit anschließender Kombination führt zu identischen Ergebnissen wie die Drehung der kombinierten GGT (siehe Gl. (5.21)). Darauf aufbauend werden zwei GGT-Zeitreihen erstellt: $\boldsymbol{V}^{XO}_{ij,GO-only}$ enthält ausschließlich GOCE-Information und

$\boldsymbol{V}^{XO}_{ij,MO-only}$ ist ausschließlich Modell-basiert. Sie ergeben sich zu

$$\boldsymbol{V}^{XO}_{ij,GO-only} = \begin{pmatrix} \mathrm{HP}(GO) & 0 & \mathrm{HP}(GO) \\ & \mathrm{HP}(GO) & 0 \\ sym. & & \mathrm{HP}(GO) \end{pmatrix}, \tag{5.28}$$

$$\boldsymbol{V}^{XO}_{ij,MO-only} = \begin{pmatrix} \mathrm{TP}(MO) & MO & \mathrm{TP}(MO) \\ & \mathrm{TP}(MO) & MO \\ sym. & & \mathrm{TP}(MO) \end{pmatrix}. \tag{5.29}$$

Die rein GOCE (GO) basierten Tensoren $\boldsymbol{V}^{XO}_{ij,GO-only}$ enthalten Hochpass (HP) gefilterte Signalanteile in den vier hochgenauen Tensorelementen. Die Modell (MO) basierten Tensoren $\boldsymbol{V}^{XO}_{ij,MO-only}$ beinhalten langwellige Signalanteile (nach Tiefpass (TP) Filterung) in den vier hochgenauen Tensorelementen und den vollen Signalgehalt in den Tensorelementen $\boldsymbol{V}_{xy}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$.

Durch die getrennte Drehung von GOCE- und Modellinformation gelingt eine Untersuchung, welche Signalanteile der gedrehten Tensoren auf GOCE- und welche auf Modellinformation beruhen.

Die Betrachtung der beiden Tensoren im Zeitbereich macht schnell deutlich, dass der langwellige Signalanteil in Bezug auf den Betrag der GGT-Elemente überwiegt. $\boldsymbol{V}^{XO}_{ij,MO-only}$ enthält Gradienteninformation in Größenordnung des Gesamtsignals (siehe Gl. (4.5), S. 82), wohingegen die GOCEanteile maximal eine Größenordnung von etwa ± 1.5 E aufweisen. Nichtsdestotrotz enthalten diese die relevante Information im Bereich der MBW. Aufgrund der starken Frequenzbhängigkeit erscheint auch hier eine Analyse der beiden Informationsbasen im Frequenzbereich sinnvoll.

Fuchs et al. (2013) untersuchen - nach ähnlicher Vorverarbeitung - den Modellgehalt nach Drehung vom GRF in das LNOF bzw. das LORF. Da diese Drehung punktweise für jeden Punkt der *Zeitreihe* erfolgt, kann ein Vergleich der getrennt gedrehten GOCE- und Modellanteile z.B. im LNOF stattfinden: Nach Filterung auf die MBW gelingt eine prozentuale Angabe der GOCE- und Modellanteile im 'Zielsystem'.

Wie bereits in Gleichungen (5.28) und (5.29) angedeutet, werden $\boldsymbol{V}^{XO}_{ij,GO-only}$ und $\boldsymbol{V}^{XO}_{ij,MO-only}$ hier in den Kreuzungspunkten (XO) betrachtet. Die Aufgabe der Drehung von GRF_{asc} in das GRF_{desc} ergibt sich nur im Kreuzungspunkt, so dass auch die damit induzierte Signalverlagerung (nur) in den Kreuzungspunkten erfolgen kann. Aufgrund der unregelmäßigen Anordnung der Kreuzungspunkte entlang der Bahnbögen bringt die Überführung in den Frequenzbereich jedoch einige Herausforderungen mit sich. Die Kreuzungspunkt-Dichte ist in Polnähe sehr hoch und nimmt in Richtung des Äquators ab. Auf Basis des 62.5-tägigen Datensatzes ergeben sich Kreuzungspunkte, die sehr nah beieinander liegen ($\Delta t \approx 0.001$ s, Polnähe) und in Äquatornähe einen Abstand von etwa 16 - 18 s aufweisen. Außerdem werden nur die Beobachtungen entlang aufsteigender Bahnen gedreht, so dass nur jeder zweite Bahnbogen 'besetzt' ist, bevor eine Lücke von etwa 2600 s folgt. Diese Ungleichabständigkeit erfordert eine besondere Analysestrategie.

Für die Bestimmung von ASDs auf Basis ungleichabständiger Daten wurden Periodogrammbasierte Methoden entwickelt (z.B. Lomb, 1976), die auf einer Kleinsten-Quadrate-Schätzung der Frequenzanteile beruhen. Diese haben jedoch keine zufriedenstellenden Ergebnisse hervorgebracht: die Schätzung von Signalamplituden für Frequenzen im Bereich der MBW führte stets zu einem vergleichsweise hohes Rauschniveau. Eine weitere Möglichkeit mit ungleichabständigen Daten zu arbeiten, ergibt sich mit der Interpolation auf gleichabständige Zeitpunkte (auch Resampling). Als Resampling-Rate wird 1 Hz ($\Delta t = 1$ s) gewählt, zu der neue Datenpunkte interpoliert werden. Da die 'großen' Lücken von 2600 s die klare Bestimmung der Signalamplituden einzelner Frequenzen in entscheidenden Frequenzbereichen verhindert, wurde die Überführung in den Frequenzbereich bahnbogenweise durchgeführt. Die gedrehten Tensorelemente entlang jedes Bahnbogens werden auf eine einheitliche Datenrate von 1 Hz interpoliert, und auf Basis der etwa 2600 s langen Zeitreihen ASDs berechnet. Da einzelne ASDs bei diesem Verfahren anfällig gegenüber Ausreißern sowie 'Artefakten' in den vergleichsweise

kurzen Zeitreihen sind, führt erst die Mittelbildung aller Einzel-ASDs zu einem aussagekräftigen Ergebnis. Im Falle des 62.5 Tage umfassenden Datensatzes liegen etwa 1000 Einzel-ASDs vor, von denen jeweils 50 in den folgenden Abbildungen dargestellt werden.

Bei der Analyse von $\boldsymbol{V}^{XO}_{ij,GO-only}$ und $\boldsymbol{V}^{XO}_{ij,MO-only}$ wurde deutlich, dass der Vergleich der vom GRF$_{asc}$ in das GRF$_{desc}$ gedrehten Anteile im Frequenzbereich weitere Anpassungen erfordert: Die 'Zielsysteme' in Form der GRF$_{desc}$ sind zu unterschiedlich. Die Orientierung jedes der GRF$_{desc}$ ist in dessen zeitlich lokalem Umfeld in Grenzen von etwa $\pm 3°$ um die Bewegungsrichtung des Satelliten orientiert. Entlang des jeweiligen absteigenden Bahnbogens ändert sich diese relative Orientierung zur Bewegungsrichtung nur sehr langsam (Steuerung mit Magnettorquer, siehe S. 53). Sollen Beobachtungen in den (zwar räumlich benachbarten) GRF$_{desc}$ verglichen werden, ist zu berücksichtigen, dass diese jedoch zeitlich u.U. weit auseinander liegen und daher als unkorreliert zu betrachten sind. Für die praktische Analyse bedeutet dies, dass zwei den aufsteigenden Bahnbogen (räumlich benachbart) kreuzende GRF$_{desc}$ eine um bis zu 6° voneinander unterschiedliche Orientierung aufweisen können. Im 62.5-tägigen Datensatz ergeben sich Orientierungsunterschiede benachbarter GRF$_{desc}$ von bis zu 4°. Diese bewirken eine starke Nichtlinearität zwischen den GRF$_{asc}$ entlang dem aufsteigenden Bahnbogen und den kreuzenden GRF$_{desc}$ und verhindert eine direkte Analyse im Frequenzbereich. Werden die Signale ungeachtet dessen bahnbogenweise in den Frequenzbereich überführt, wird die Signalverlagerung zwischen unterschiedlichen Frequenzen im Zuge der Drehung deutlich: Die Nichtlinearität bewirkt eine Verlagerung langwelliger Signalstrukturen in die MBW. Interessant dabei ist, dass die GOCE-basierten GGT $\boldsymbol{V}^{XO}_{ij,GO-only}$, die ausschließlich Signale im Frequenzbereich der MBW enthalten, nach entsprechender Drehung KEINE derartigen Verlagerungen zeigen. Diese enthalten 'keine' langwelligen Anteile. Es wird also erneut bestätigt, dass speziell langwellige Informationen in die MBW verlagert werden können. Dies hat entscheidenden Einfluss auf die Bestimmbarkeit des Modellanteils nach der Drehung. Eine Beurteilung der Modellanteile nach Drehung vom GRF$_{asc}$ in das GRF$_{desc}$ würde, wie beschrieben, aufgrund der starken Orientierungsunterschiede der GRF$_{desc}$ zu vollkommen verzerrten Ergebnissen und zur Überschätzung des Modellanteils führen. Um trotz der Einschränkungen eine frequenzabhängige Abschätzung von GOCE- und Modellanteilen zu erlauben, wird ein geringfügig abweichendes Zielsystem gewählt.

Eine Abschätzung des Modellanteils wird jedoch möglich, sofern eine Drehung der $\boldsymbol{V}^{XO,asc}_{ij}$ in das LORF der absteigenden Bahnbögen erfolgt. Dieses unterscheidet sich nur geringfügig vom GRF$_{desc}$ (etwa $\pm 3°$), so dass die Untersuchung einer entsprechenden Drehung einen repräsentativen Eindruck von der Verlagerung der einzelnen Anteile durch die Drehung ermöglicht. Das LORF ist entlang der Bahn orientiert, so dass sich Orientierungen zwar breitenabhängig, aber sehr harmonisch verändern und - im Gegensatz zu denen der GRF$_{desc}$ - nicht sprunghaft variieren.

Es sei herausgestellt, dass die Wahl des GRF_{desc} als Zielsystem nur für den Fall der ASD-Berechnung im oben beschriebenen Fall Probleme mit sich bringt. Der Vergleich von Gravitationsgradienten in Kreuzungspunkten findet ohne Einschränkungen weiterhin im GRF_{desc} statt. Einzig für die Abschätzung der GOCE- und Modellanteile im Frequenzbereich wird das $LNOF_{desc}$ genutzt.

In den folgenden Analysen wird das LORF-r zugrunde gelegt (siehe Abs. 3.4.1), dessen z-Achse am radial orientierten Positionsvektor ausgerichtet ist und dessen Orientierung sich aus Positions- und Geschwindigkeitsvektoren des Satelliten ableiten lässt. Eine Beziehung zwischen dem LNOF und dem LORF wird durch eine einfache Drehung um die z-Achse der Systeme entsprechend dem Winkel zwischen Geschwindigkeitsvektor und 'Nordrichtung' erreicht. Es ergibt sich $\boldsymbol{R}_{LORF_{desc} \leftarrow LNOF}$. Die Drehmatrix vom GRF$_{asc}$ in das LORF$_{desc}$ entsteht mit $\boldsymbol{R}_{LNOF \leftarrow GRF_{asc}} = \boldsymbol{R}'_{GRF_{asc} \leftarrow LNOF}$ (siehe Gl. (3.10)) nach

$$\boldsymbol{R}_{LORF_{desc} \leftarrow GRF_{asc}} = \boldsymbol{R}_{LORF_{desc} \leftarrow LNOF} \cdot \boldsymbol{R}_{LNOF \leftarrow GRF_{asc}}. \tag{5.30}$$

Nach getrennter Drehung von $\boldsymbol{V}^{XO}_{ij,GO-only}$ und $\boldsymbol{V}^{XO}_{ij,MO-only}$ in die LORF$_{desc}$ gelingt deren bahnbogenweise Überführung in den Frequenzbereich. Abbildung 5.23 zeigt in Anlehnung an (Brieden und Müller, 2010, Abb. 5) am Beispiel der yy-Komponente ASDs von rein GOCE (oben) sowie rein Modell basierten (unten) GGT vor (links) und nach (rechts) der Drehung

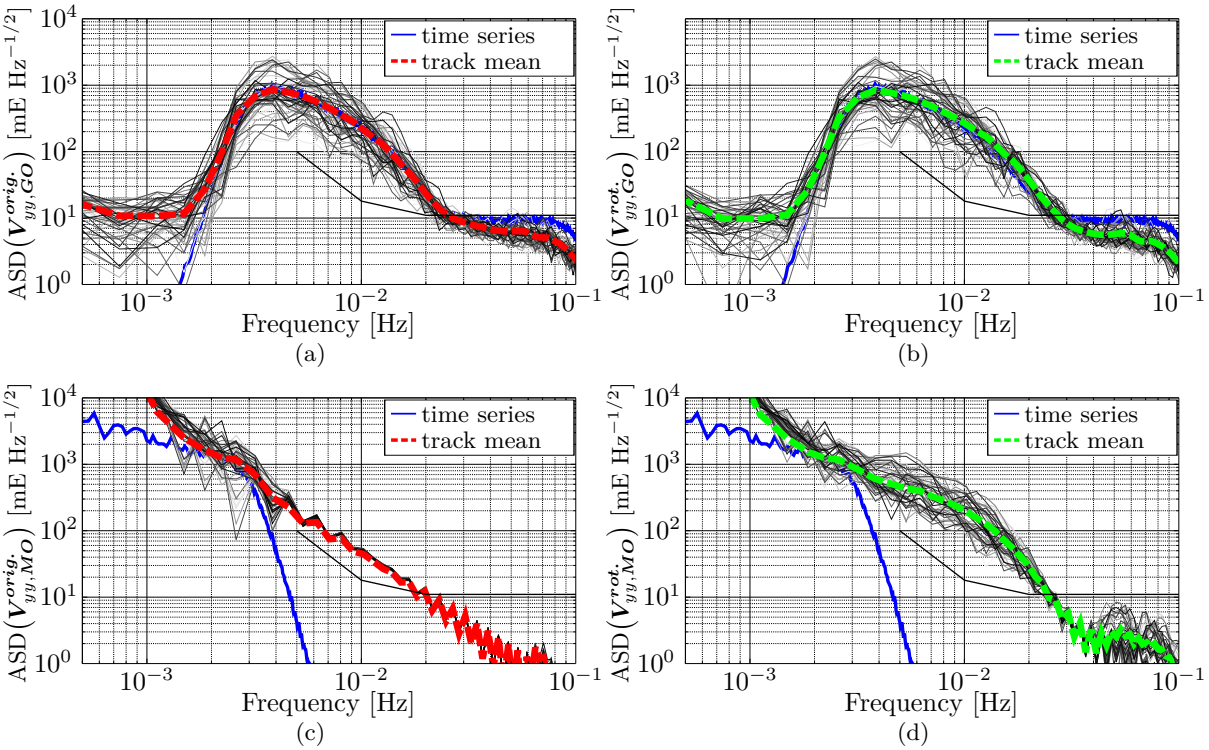


Abbildung 5.23: ASDs der GOCE-only Anteile (Gl. (5.28)) *oben* sowie der Modell-only Anteile (Gl. (5.29)) *unten*, jeweils vor (*links*) und nach (*rechts*) der Drehung vom GRF_{asc} in das LORF_{desc} am Beispiel der yy-Komponente. Von grau bis schwarz werden die bahnbogenweise bestimmten ASDs, deren gemittelter Verlauf (track mean, rot bzw. grün) sowie die auf Basis der gesamten $\boldsymbol{V}_{ij}$ Zeitreihe im originalen GRF bestimmte ASD (time series, blau) dargestellt.

vom GRF_{asc} in das $LORFdesc$. Von grau bis schwarz werden die bahnbogenweise bestimmten ASDs, deren gemittelter Verlauf (rot bzw. grün) sowie die auf Basis der gesamten $\boldsymbol{V}_{ij}$ Zeitreihe im originalen GRF bestimmte ASD (blau) dargestellt. Die bahnbogenweise bestimmten ASDs der $\boldsymbol{V}_{ij}^{XO,desc}$ zeigen aufgrund der geringen Anzahl an Beobachtungen eine vergleichsweise hohe Variabilität. Langwellige Signalgehalte können von ihnen nicht abgebildet werden. Dies zeigt sich unterhalb von etwa $2 \cdot 10^{-3}$ Hz: die Einzel-ASDs steigen im Vergleich zur ASD der gesamten Zeitreihe deutlich an. Ein ähnlicher Effekt tritt in den GOCE basierten Gradienten oberhalb von 2-3 $\cdot 10^{-2}$ Hz ein: die Einzel-ASDs unterschätzen die Signalstärke im Vergleich zur ASD auf Basis der gesamten Zeitreihe. Dies ist auf die wenigen Kreuzungspunkte im Äquatorbereich zurückzuführen. Auch eine Interpolation (Resampling) bringt keine zusätzliche Information in das Signal ein, so dass dieses ab 2-3 $\cdot 10^{-2}$ Hz nicht mehr die vollständige Signalstärke der Zeitreihe enthält. Im relevanten Frequenzbereich zwischen $2 \cdot 10^{-3}$ und 2-3 $\cdot 10^{-2}$ wird der Verlauf der Zeitreihen basierten ASD durch die Einzel-ASDs bzw. deren Mittlung sehr gut beschrieben.

In den Modell-basierten Zeitreihen werden schnell die Grenzen dieser Herangehensweise deutlich. Während der ASD-Verlauf der Zeitreihe zwischen 2 bis $3 \cdot 10^{-3}$ noch recht gut von den Einzel-ASDs abgebildet wird, ist deren Signalabfall in Richtung hoher Frequenzen bei weitem nicht so stark wie es die Zeitreihen-basierte ASD zeigt. Allerdings weisen sämtliche Einzel-ASDs einen sehr ähnlichen Verlauf auf. Alle Abschnitte der Zeitreihe weisen filterbedingt ein sehr ähnliches Verhalten auf, so dass dieser weniger steile Signalabfall schlicht auf die Kürze der einzelnen Zeitreihen zurückzuführen und damit ein Effekt der ASD-Bestimmung ist. Weiter zeigt sich der Signalaustausch von $\boldsymbol{V}_{yy}$ mit $\boldsymbol{V}_{xy}$ im Zuge der Drehung: Da $\boldsymbol{V}_{xy}$ vollen Modell-Signalgehalt aufweist, wird dieser bei der Drehung auf $\boldsymbol{V}_{yy}$ (und $\boldsymbol{V}_{xx}$) übertragen (siehe Tab. 5.15). Dies hat zur Folge, dass $\boldsymbol{V}_{yy}$ nach der Drehung im Bereich der gesamten MBW deutlich an Signalstärke gewinnt.

Abbildung 5.24 zeigt einen Vergleich der GOCE- und Modellanteile vor und nach der Drehung für alle Tensorkomponenten. Zu Vergleichszwecken sind ebenfalls die ASDs der Zeitreihen im 'originalen' GRF sowie die Spur-Requirements dargestellt. Es werden ausschließlich

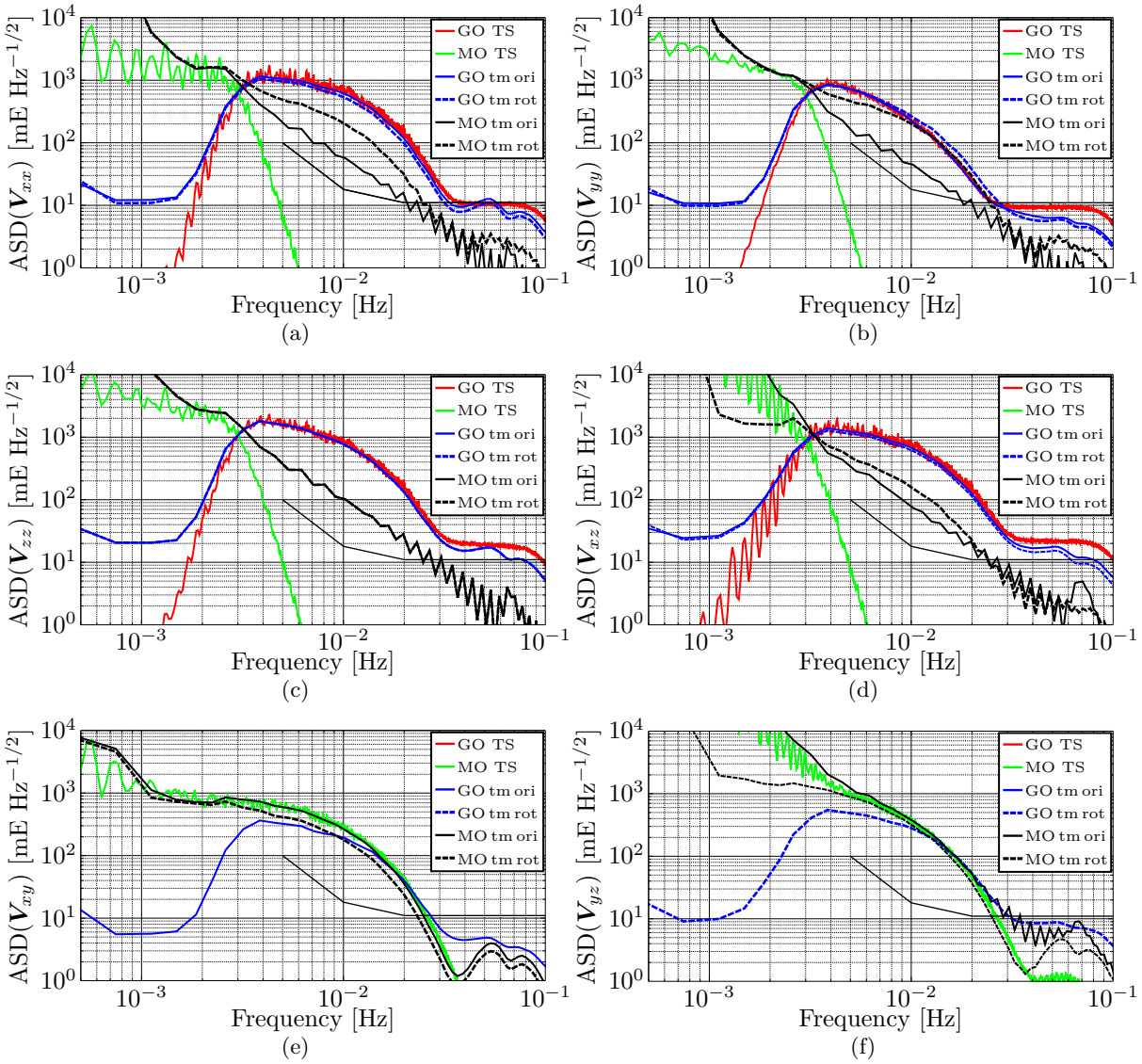


Abbildung 5.24: ASDs der GOCE- und Modellanteile vor und nach der Drehung für alle Tensorkomponenten $\boldsymbol{V}_{ij}$. Es werden die gemittelten ASDs der ursprünglich bahnbogenweise bestimmten ASDs (track mean, tm) - entsprechend den roten bzw. grünen Kurven in Abb. 5.23 - dargestellt, und zwar einerseits im 'originalen' GRF$_{asc}$ (*ori*) und andererseits im Zielsystem nach der Drehung, dem LORF$_{desc}$ (*rot*). Zu Vergleichszwecken sind außerdem die ASDs der Zeitreihen im 'originalen' GRF sowie die Spur-Requirements hinterlegt.

die gemittelten ASDs (Abb. 5.23, rot bzw. grün) gezeigt, wobei die gestrichelten Linien das Verhalten vor und die durchgezogenen Linien das Verhalten nach der Drehung beschreiben.

Wie zu erwarten ist, bewirkt die Drehung einen Anstieg des Modellanteils in der MBW - die ASDs nach der Drehung (gestrichelt schwarz) übersteigen die ASDs vor der Drehung (durchgezogene schwarze Linien). Dies trifft besonders für $\boldsymbol{V}_{xx}$, $\boldsymbol{V}_{yy}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ zu. Wie bereits diskutiert, findet aufgrund der 'Gleichheit' der z-Achsen beider Systeme nahezu kein Austausch der anderen Komponenten mit $\boldsymbol{V}_{zz}$ statt, so dass sich deren Signalgehalt vor und nach der Drehung 'nicht' unterscheidet. $\boldsymbol{V}_{yy}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$ bestehen vor der Drehung vollständig aus Modellinformation. Dies ändert sich nach der Drehung für den Bereich der MBW deutlich, so dass der GOCE-Anteil im oberen Bereich der MBW sogar deren Gesamt-Signalgehalt dominiert.

Um den GOCE- und Modellgehalt in den gedrehten GGT zu quantifizieren, wird der Signalgehalt $S(\boldsymbol{V}_{ij,GO}^{trackmean(\mathrm{ASD})})$ und $S(\boldsymbol{V}_{ij,MO}^{trackmean(\mathrm{ASD})})$ unterhalb der gemittelten GOCE- und Modell-PSD (=ASD^2) gemäß Gleichung (2.72) (S. 29) ermittelt. Da das Ziel dieser Arbeit die Validierung der Gradienten im Frequenzbereich der MBW ist, erfolgt auch der Vergleich der Anteile innerhalb der MBW, so dass der Signalgehalt zwischen 0.005...0.1 Hz integriert wird.

Tabelle 5.16: Modellanteile der $\boldsymbol{V}_{ij}$ in Prozent [%] im Zielsystem und auf Basis der bahnbogenweisen (track-wise) ASDs sowie Zeitreihen basiert (time series) im Ausgangssystem, dem GRF.

Koordinatensystem	Datenbasis	$\boldsymbol{V}_{xx}$	$\boldsymbol{V}_{yy}$	$\boldsymbol{V}_{zz}$	$\boldsymbol{V}_{xz}$	$\boldsymbol{V}_{xy}$	$\boldsymbol{V}_{yz}$
$LORF_{desc}$, Zielsystem	track-wise	30.29	41.04	14.95	24.16	61.37	63.73
GRF_{asc}, Ausgangssystem	track-wise	11.76	17.23	14.93	15.45	100.00	100.00
GRF, Ausgangssystem	time series	0.14	0.20	0.16	0.15	100.00	100.00

Der Modellanteil der gedrehten GGT lässt sich damit als Prozentsatz $p(\mathrm{MO})$ nach

$$p(\mathrm{MO})[\%] = \frac{\left|S\left(\boldsymbol{V}_{ij,\mathbf{MO}}^{trackmean(\mathrm{ASD})}\right)\right|}{\left|S\left(\boldsymbol{V}_{ij,\mathbf{GO}}^{trackmean(\mathrm{ASD})}\right)\right| + \left|S\left(\boldsymbol{V}_{ij,\mathbf{MO}}^{trackmean(\mathrm{ASD})}\right)\right|} \cdot 100. \tag{5.31}$$

bestimmen und ergibt sich gemäß der ersten Zeile von Tabelle 5.16. Danach zeigt sich ein Modellanteil der vier hochgenauen GGT-Komponenten in der MBW zwischen 15 % ($\boldsymbol{V}_{zz}$) und 40 % ($\boldsymbol{V}_{yy}$). Ein Teil der Modellinformation aus $\boldsymbol{V}_{xy}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$ ist auf die anderen Komponenten übergegangen, so dass nun bis zu $100 - 60 = 40$ % der weniger genauen Komponenten aus GOCE-Information besteht. Zeile 2 der Tabelle zeigt die Modellanteile der $\boldsymbol{V}_{ij}$ auf Grundlage der gleichen bahnbogenweisen (track-wise) Datenbasis im Ausgangssystem, dem GRF_{asc}. Zeile 3 enthält den Modellanteil im GRF basierend auf der vollen Zeitreihe. Zeilen 2 und 3 müssten identisch sein, weisen aufgrund der in den kurzen Bahnbögen schlecht abgebildeten niedrigen Amplituden der Modellgradienten jedoch große Differenzen auf. Wie in Abbildung 5.24 ersichtlich, werden die Signalamplituden nach der Drehung 'plausibel' erfasst, zeigen das sehr typische Signalverhalten der GOCE-Gradienten im Bereich der MBW und sind daher als geeignet für die Bestimmung der GOCE- und Modellanteile zu bewerten. Die einzige Ausnahme bildet $\boldsymbol{V}_{zz}$: Die bahnbogenweise Betrachtung der Gradienten im GRF_{asc} (Zeile 2) und im $LORF_{asc}$ (Zeile 1) führt im Hinblick auf $\boldsymbol{V}_{zz}$ zu nahezu identischen Ergebnissen. Dies wird auch aus Abbildung 5.24(c) deutlich und ist auf die geringe Verkippung zwischen x-y-Ebenen beider GRF zurückzuführen. Der Modellanteil wird aufgrund des nicht ausreichend steil abbildbaren Signalabfalls daher als deutlich zu hoch beurteilt und ist als 'Grenze des Potentials der Methode' bzw. der ASD-Berechnung zu betrachten.

Zusammenfassend, wird durch die Drehung der GGT zwischen den GRF sich kreuzender Bahnbögen Modellinformation in die MBW aller Tensorelemente eingebracht. Aufgrund der unterschiedlichen Orientierungen der den aufsteigenden Bahnbogen kreuzenden GRF_{desc} und deren Einfluss auf die Analyse im Frequenzbereich wurde die Drehung bedingte Verschiebung der Signalanteile in die sehr ähnlichen $LORF_{desc}$ untersucht. Die Ergebnisse zeigen, dass $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ nach Drehung in das $LORF_{desc}$ einen Modellanteil von etwa 25-30 % aufweisen. $\boldsymbol{V}_{yy}$ enthält mit etwa 40 % den größten Modellanteil. Der Modellanteil in $\boldsymbol{V}_{zz}$ ist äußerst gering, kann aufgrund des begrenzten Potentials der Methode jedoch nicht exakt angegeben werden. Er ist basierend auf Erfahrungen im Umgang mit den GOCE-GGT im unteren einstelligen Prozentbereich zu erwarten. Aufgrund besagter Grenzen der Methode kann der Modellanteil u.U. überschätzt werden (siehe $\boldsymbol{V}_{zz}$), so dass die Prozentwerte des Modellanteils als Maximalwerte zu interpretieren sind. Die Tensorelemente $\boldsymbol{V}_{xy}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$ bestehen nach der Drehung zu knapp 40 % aus GOCE-Information, so dass deren Modellanteil auf gut 60 % sinkt.

5.5.2 Translation des Tensors der GOCE-Gravitationsgradienten

In Abschnitt 5.5.1.4 wurde die Orientierung der beiden im Kreuzungspunkt beteiligten GRF einander angepasst. Aufgrund der leicht exzentrischen Bahn des GOCE-Satelliten sowie mancher Satellitenmanöver treten in den Kreuzungspunkten Höhenunterschiede zwischen den beteiligten GRF auf. Diese liegen für den bislang behandelten 62.5-tägigen Datensatz bei bis zu 13.6 km, können über die gesamte nominale Missionsdauer[11] (11.2009 - 07.2012) eine Größen-

[11] Bei dieser Betrachtung unberücksichtigt bleiben Missionsphasen, in denen - problembedingt - die GOCE-Bahn verändert wurde.

ordnung von bis zu 32 km (peak-to-peak) erreichen. Um den Vergleich beider GGT in *einem* Koordinatensystem zu ermöglichen, hat eine Berücksichtigung des Höhenunterschied bedingten Anteils der Gradienten $\Delta \boldsymbol{V}_{ij,\Delta h}^{XO}$ zu erfolgen. Dieser Schritt wird auch als Höhenreduktion der Gradienten bezeichnet.

Im Rahmen einer Studie haben Novák et al. (2013) GOCE-Beobachtungen (im wesentlichen Gravitationsgradienten) im Hinblick auf deren Nutzung im Bereich der Geophysik sowie zur Erforschung des Erdinneren untersucht. Ein Teil der Analysen umfasste die 'Überführung' (upward/downward continuation) gemessener GOCE-Gravitationsgradienten auf eine einheitliche mittlere Bahnhöhe (mean orbital sphere, MOS). Für diesen Schritt wird - gradientenbasiert - eine lineare Approximation einer Taylorreihe angesetzt zu

$$\boldsymbol{V}_{ij,MOS} = \boldsymbol{V}_{ij,real\ orbit} + \frac{\partial \boldsymbol{V}_{ij}}{\partial r} \Delta h, \tag{5.32}$$

mit $\Delta h = r_{MOS} - r_i$, der Höhendifferenz zwischen der Höhe der MOS r_{MOS} und der Höhe der zu überführenden Beobachtung r_i, sowie $\frac{\partial \boldsymbol{V}_{ij}}{\partial r}$, der radialen Ableitung der jeweiligen Tensorkomponente. Da die radialen Ableitungen höhenabhängig sind, stellt sich die Frage nach der Höhe des Berechnungspunktes.

Novák et al. (2013) verwenden fünf Punkte zwischen den 'Randpunkten' MOS und der jeweiligen GOCE-Position: jeweils einer auf Höhe besagter Randpunkte und drei weitere im Abstand von $\Delta r = |\Delta h|/4$ zwischen den Randpunkten. An allen fünf Punkten werden Gravitationsgradienten $\boldsymbol{V}_{ij}$ auf Basis eines rein GOCE-basierten Gravitationspotential-Modells (TIM-R3) bestimmt. Unter Anwendung einer numerischen Differentiation mit geeigneter Maske zur Gewichtung der einzelnen $\boldsymbol{V}_{ij}^k$ (mit $k = 1...5$) gelingt die Ermittlung der radialen Ableitungen $\frac{\partial \boldsymbol{V}_{ij}}{\partial r}$ gemäß

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_{ij}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_{ij}^1 & \boldsymbol{V}_{ij}^2 & \boldsymbol{V}_{ij}^3 & \boldsymbol{V}_{ij}^4 & \boldsymbol{V}_{ij}^5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}'. \tag{5.33}$$

Die radialen Ableitungen werden auf diese Weise individuell für jede Beobachtung berechnet. Der Vorteil dieser Herangehensweise wird in der Möglichkeit gesehen, Aussagen zur inneren Genauigkeit des Algorithmus machen zu können. Diese wird aus dem Vergleich der in beiden Fällen modellbasierten rechten und linken Seite von Gleichung (5.32) ermittelt. Ergebnisse zeigen einen Anstieg der 'inneren Ungenauigkeit' mit zunehmendem Δh, wobei selbst bei $\Delta h = 16$ km die Maxima mit etwa 0.1 mE im sub-mE Bereich und damit eine Größenordnung unterhalb der Genauigkeit der GOCE-Gradienten liegen (Sebera et al., 2014).

Jarecki (2010) behandelt die Höhenreduktion zwischen $\boldsymbol{V}_{ij}$ auf Höhe $h1$ und Höhe $h2$ im Kreuzungspunkt und stellt $\frac{\partial \boldsymbol{V}_{ij}}{\partial r} \Delta h$ (siehe Gl. (5.32)) am Beispiel der rr-Komponente dar als

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_{rr}}{\partial r}(h2 - h1) = \frac{\partial^3 \boldsymbol{V}}{\partial r^3}(h2 - h1) = \Delta \boldsymbol{V}_{rr}^{\Delta h}. \tag{5.34}$$

Um das Problem des Berechnungspunktes für $\frac{\partial \boldsymbol{V}_{ij}}{\partial r}$ zu umgehen, geht Jarecki (2010) auf eine direkte numerische Differentiation zweier Modell-GGT über, die sich allgemein für alle $\boldsymbol{V}_{ij}$ ergibt zu

$$\Delta \boldsymbol{V}_{ij,MO}^{XO,\Delta h} = \boldsymbol{V}_{ij,MO}^{XO,h2} - \boldsymbol{V}_{ij,MO}^{XO,h1}. \tag{5.35}$$

Diese Differentiation bildet auch die 'implizite Referenz' (den 'Soll-Wert') bei der Beurteilung der inneren Genauigkeit in Novák et al. (2013) und Sebera et al. (2014) (siehe oben). Ob $\Delta \boldsymbol{V}_{ij,MO}^{XO,\Delta h}$ - wie in den genannten Quellen - in radial orientierten Systemen ($zz = rr$) oder einem GRF bestimmt wird, ist auf Grundlage von Gleichung (5.27) unerheblich, da auch die Matrizen*subtraktion* mit der Matrizenmultiplikation distributiv ist, so dass gilt

$$\boldsymbol{V}_{rr}^{h1} - \boldsymbol{V}_{rr}^{h2} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{V}_{zz}^{h1} \cdot \boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{V}_{zz}^{h2} \cdot \boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R} \cdot \left(\boldsymbol{V}_{zz}^{h1} - \boldsymbol{V}_{zz}^{h2} \right) \cdot \boldsymbol{R}'. \tag{5.36}$$

Die rein modellbasierten Gradientendifferenzen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij,MO}^{XO,\Delta h}$ (Gl. (5.35)) werden im Folgenden angesetzt, um die höhenbedingten Gradientenunterschiede der Realdaten im Kreuzungspunkt

Tabelle 5.17: Fehler [mE/km] der Höhenreduktion in Abhängigkeit der Höhendifferenz. Bestimmt als Steigung einer Ursprungs-Geraden in Abb. 5.25, die 99 % aller $\delta \boldsymbol{V}^{XO,\Delta h}_{ij,MO_i-GOCO05s}$ unterschreiten.

EGM	$\boldsymbol{V}_{xx}$	$\boldsymbol{V}_{yy}$	$\boldsymbol{V}_{zz}$	$\boldsymbol{V}_{xz}$	$\boldsymbol{V}_{xy}$	$\boldsymbol{V}_{yz}$
EGM96	0.979	0.989	1.708	1.195	0.543	1.074
EGM2008	0.055	0.062	0.095	0.064	0.033	0.070
ITG-Grace2010s	0.066	0.066	0.105	0.075	0.034	0.074
GOCO05s	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
EGM_TIM_RL05	0.017	0.020	0.028	0.018	0.008	0.017

zu berücksichtigen. Entscheidend ist dabei die Wahl des Geopotentialmodells. Novák et al. (2013) legen für die Überführung der GOCE $\boldsymbol{V}_{ij}$ auf eine mittlere Bahnhöhe das (GOCE-only) TIM-R3 (Pail et al., 2011a) zu Grunde. Der Einfluss der Modellwahl auf $\Delta \boldsymbol{V}^{XO,\Delta h}_{ij,MO}$ kann durch Vergleich verschiedener $\Delta \boldsymbol{V}^{XO,\Delta h}_{ij,MO_i}$ (jeweils basierend auf EGM MO_i) untersucht werden. Als 'Referenzmodell' wird das GOCO05s (Mayer-Gürr et al., 2015) gewählt. Die Unterschiede $\delta \boldsymbol{V}^{XO,\Delta h}_{ij}$ zwischen den Gradientendifferenzen (Gl. (5.35)) ergeben sich gemäß

$$\delta \boldsymbol{V}^{XO,\Delta h}_{ij,MO_i-GOCO05s} = \Delta \boldsymbol{V}^{XO,\Delta h}_{ij,MO_i} - \Delta \boldsymbol{V}^{XO,\Delta h}_{ij,GOCO05s}. \tag{5.37}$$

Das GOCO05s stellt eines der derzeit besten ausschließlich Satelliten-basierten EGM dar und beruht u.a. auf den Daten der gesamten GOCE-Mission. Es wird daher davon ausgegangen, dass es die Qualität der GOCE-Gradienten realitätsgetreu widerspiegelt. Dessen Eignung als Referenzmodell zeigt sich auch beim Vergleich mit dem GOCE-only Modell EGM_TIM_RL05 (Brockmann et al., 2014) in Tabelle 5.17.

Abbildung 5.25 zeigt die Gradientenunterschiede $\delta \boldsymbol{V}^{XO,\Delta h}_{ij,ITG\text{-}Grace2010s-GOCO05s}$ als Funktion der Höhendifferenz Δh in den Kreuzungspunkten des besagten 62.5-tägigen Datensatzes. Die Abhängigkeit zur Höhendifferenz wird deutlich, stellt sich für die verschiedenen Tensorkomponenten jedoch leicht unterschiedlich dar. Mit dem Ziel, eine Aussage zur Fehlerzunahme in Abhängigkeit der Höhendifferenz machen zu können, wird vom Nullpunkt des Koordinatensystems in Abbildung 5.25 aus eine Gerade 'über' die Punkte gelegt und deren Steigung solange reduziert, bis 99 % aller Punkt zwischen Gerade und der Δh-Achse liegen. Unter Zuhilfenahme dieses Schwellwertes, mit dessen Hilfe einzelne Ausreißer im Datensatz unberücksichtigt bleiben, ergeben sich die Steigungen der Geraden gemäß Tabelle 5.17. Diese sind als Fehler der Höhenreduktion [mE/km] in Abhängigkeit der Höhendifferenz zu verstehen.

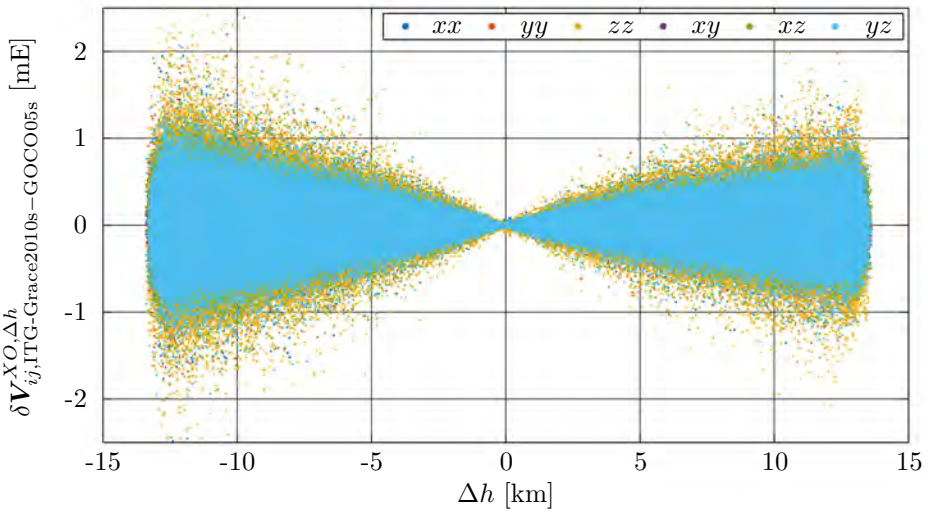


Abbildung 5.25: Unterschiede $\delta \boldsymbol{V}^{XO,\Delta h}_{ij,MO_i-GOCO05s}$ (Gl. (5.37)) zwischen modellbasierten Gradientendifferenzen in Abhängigkeit der Höhendifferenz in Kreuzungspunkten (62.5 tägiger Datensatz). Die Unterschiede basieren auf dem MO_i = ITG-Grace2010s und dem Referenzmodell GOCO05s.

Tabelle 5.18: Maximale Höhendifferenzen [km] im Kreuzungspunkt in Abhängigkeit maximal 'erlaubter' Fehler sowie des zu Grunde gelegten EGM. Referenzmodell: GOCO05s.

EGM	0.7 mE	2 mE	7 mE
EGM96	0.41	1.17	4.10
EGM2008	7.38	21.09	73.81
ITG-Grace2010s	6.66	19.03	66.60
GOCO05s	-	-	-
EGM_TIM_RL05	25.22	72.05	252.17

Es wird deutlich, dass sich die Fehler der Höhenreduktion für die Tensorkomponenten unterschiedlich ergeben. $\boldsymbol{V}_{xx}$, $\boldsymbol{V}_{yy}$ und in Einschränkungen $\boldsymbol{V}_{xz}$ zeigen ein ähnliches Fehlerverhalten. Der Einfluss der Höhenreduktion auf $\boldsymbol{V}_{zz}$ dominiert erwartungsgemäß. $\boldsymbol{V}_{xy}$ ist am wenigstens von der Höhenreduktion betroffen und $\boldsymbol{V}_{yz}$ vergleichbar stark wie $\boldsymbol{V}_{xz}$. Es zeigen sich ebenfalls die Unterschiede zwischen den Modellen. Das EGM96, welches auf keinerlei GRACE-Beobachtungen basiert, bringt auch die größten Differenzen zum GOCO05s hervor und ist daher wenig geeignet für die Höhenreduktion der GOCE $\boldsymbol{V}_{ij}$. Die GRACE-basierten Modelle EGM2008 und ITG-Grace2010s führen bereits zu deutlich 'ähnlicheren' $\Delta\boldsymbol{V}_{ij,MO_i}^{XO,\Delta h}$ und eignen sich daher (in gewissen Grenzen) als Basis für die Höhenreduktion. Erwartungsgemäß liefert das EGM_TIM_RL05 aufgrund der - die GOCE-Daten betreffend - gleichen Datenbasis zu sehr kleinen Fehlern.

Aufgrund der Dominanz des Einflusses auf $\boldsymbol{V}_{zz}$ bilden diese die Basis für maximale Höhendifferenzen: Um - von Ausreißern abgesehen - einen maximalen Fehlereinfluss der Höhenreduktion sicher zu unterschreiten, lassen sich - je nach Fehlergrenze - die Fehler aus Tabelle 5.17 auf eine maximal erlaubte Höhendifferenz umrechnen. Je nach Wahl des maximal 'erlaubten' Fehlers der Höhenreduktion sowie in Abhängigkeit vom gewählten Modell ergeben sich die maximalen Höhendifferenzen gemäß Tabelle 5.18.

Die maximalen Fehlergrenzen wurden gemäß den Überlegungen in Abschnitt 4.2 gesetzt: 0.7 mE entspricht der Fehlergrenze, wie sie für die Datenprodukte und Datenoperationen zugrunde gelegt wurde. 2 mE ergibt sich als geringste Rauschenergie gemäß Tabelle 4.4 (S. 78) und 7 mE stellt entsprechend das obere Rauschniveau dar.

Zu Beginn der Mission standen keine GOCE-basierten EGM-Modelle zur Verfügung, die für eine Höhenreduktion hätten eingesetzt werden können. Darüber hinaus kann es wünschenswert sein, die Beobachtungen zu validieren ohne auf ein Modell zu setzen, in das die selben Beobachtungen bereits eingeflossen sind. Damit einher geht ein Verzicht auf das GOCO05s sowie das EGM_TIM_RL05. Eine Unabhängigkeit von entsprechenden Modellen kann hier mit der Nutzung eines GOCE-freien Modells erreicht werden. Am Beispiel der EGM aus Tabelle 5.18 eignen sich das EGM2008 sowie das ITG-Grace2010s.

Erfolgt die Höhenreduktion auf Basis des EGM2008, so können - mit einem induzierten Fehler von maximal 0.7 mE - Gravitationsgradienten in Kreuzungspunkten höhenreduziert werden, deren Höhe sich um bis zu 7.38 km unterscheiden. In dem 62.5-tägigen Datensatz liegt die Höhendifferenz in 37 % der Kreuzungspunkte oberhalb von 7.38 km. Da die Höhenreduktion den letzten Schritt bei der Vorbereitung des Vergleichs in Kreuzungspunkten darstellt und die Gradienten im Anschluss keine weitere Datenverarbeitung durchlaufen, sollte der Grenzwert hier auf mindestens 2 mE 'gelockert' werden. Die maximale Höhendifferenz bei Einsatz des EGM2008 für die Höhenreduktion erhöht sich damit auf 21.09 km (100 % aller Kreuzungspunkte). Vergleichbare Werte liefert das ITG-Grace2010s, so dass beide (GOCE-freien) Modelle als geeignete Basis für die Höhenreduktion bewertet werden.

Sollten Höhendifferenzen auftreten, die den Grenzwert gemäß Tabelle 5.18 überschreiten, sind diese nicht notwendigerweise unbrauchbar. Wie in Abbildung 5.25 ersichtlich ist, führt die Nutzung der Kreuzungspunkte mit entsprechend großen Höhendifferenzen nicht unweigerlich zu einem großen Fehler. Daher wird im Gegensatz zu einer vollständigen Vernachlässigung besagter Kreuzungspunkte eine Herabgewichtung bzw. eine gesonderte Untersuchung der

Gradientendifferenzen in Kreuzungspunkten mit Höhendifferenzen oberhalb des Grenzwertes empfohlen.

5.5.3 Transformation und Diskussion

Nachdem in Abschnitt 5.5.1 die Drehung und in Abschnitt 5.5.2 die Translation der Gravitationsgradienten im Kreuzungspunkt untersucht wurden, kann hier die finale Transformation von GRF_{asc} (aufsteigender Bahnbogen) in das GRF_{desc} (absteigender Bahnbogen) erfolgen.

Die finalen Residuen $\Delta\boldsymbol{V}_{ij}^{XO}$ zwischen den Gradienten im Kreuzungspunkt ergeben sich im GRF_{desc} zu

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{V}_{ij}^{XO,desc} &= \boldsymbol{V}_{ij,komb}^{XO,desc} - \boldsymbol{V}_{ij,komb}^{XO,desc\overset{transform.}{\longleftarrow}asc} \\ &= \boldsymbol{V}_{ij,komb}^{XO,desc} - \left(\left(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{V}_{ij,komb}^{XO,asc}\cdot\boldsymbol{R}'\right) + \Delta\boldsymbol{V}_{ij,MO}^{XO,\Delta h,o:desc}\right).\end{aligned} \tag{5.38}$$

Dabei sind $\boldsymbol{V}_{ij,komb}^{XO,desc}$ die aus GOCE- und Modellinformation kombinierten GGT gemäß Gleichung (5.21) in Kreuzungspunkten entlang absteigender (*desc*) Bahnbögen und $\boldsymbol{V}_{ij,komb}^{XO,asc}$ deren Pendant entlang der aufsteigenden (*asc*) Bahnbögen. $\boldsymbol{R}$ steht in abgekürzter Schreibweise für $\boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF}_{desc}\leftarrow\mathrm{GRF}_{asc}}$ (Gl. (5.25)) und stellt die Drehmatrix zur Anpassung der Orientierung des GRF_{asc} auf die des GRF_{desc} dar, die gemäß Gleichung (5.26) erfolgt. $\Delta\boldsymbol{V}_{ij,MO}^{XO,\Delta h,o:desc}$ bezeichnen die höhenbedingten modellbasierten Gradientendifferenzen in Orientierung des absteigenden Bahnbogens (*o:desc*) gemäß Gleichung (5.35). Nach Rotation (Drehung) und Translation (Höhenreduktion) wurde $\boldsymbol{V}_{ij,komb}^{XO,asc}$ in das GRF_{desc} transformiert und liegt damit im Kreuzungspunkt im GRF des absteigenden Bahnbogens vor: $\boldsymbol{V}_{ij,komb}^{XO,desc\overset{transform.}{\longleftarrow}asc}$. Im identischen Koordinatensystem (GRF_{desc}) werden beide GGT miteinander verglichen.

Die finalen Residuen $\Delta\boldsymbol{V}_{ij}^{XO,desc}$ in den Kreuzungspunkten bilden die Zielgröße dieses Kapitels und werden in Kapitel 6 detailliert untersucht.

Anhand der Residuenanalyse entlang der Bahnbögen im Frequenzbereich wurde bereits in Abschnitt 5.5.1.4 diskutiert, dass eine sich 'harmonisch' ändernde Orientierung der GRF entlang der Bahnbögen eine Grundvoraussetzung für die Analyse im Frequenzbereich darstellt. Sollen Verläufe von Residuen in zeitlich lokalem Umfeld erfolgen, ist eine derartige, sich 'harmonisch' ändernde Orientierung ebenfalls notwendig. Aus diesem Grund werden die Residuen nicht nur im GRF_{desc}, sondern auch im GRF_{asc} untersucht. Mit Hilfe von Gleichung (5.38) gelingt die Bestimmung entsprechender Residuen $\Delta\boldsymbol{V}_{ij}^{XO,asc}$.

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{V}_{ij}^{XO,asc} &= \boldsymbol{V}_{ij,komb}^{XO,asc} - \boldsymbol{V}_{ij,komb}^{XO,asc\overset{transform.}{\longleftarrow}desc} \\ &= \boldsymbol{V}_{ij,komb}^{XO,asc} - \left(\left(\boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{V}_{ij,komb}^{XO,desc}\cdot\boldsymbol{R}\right) + \Delta\boldsymbol{V}_{ij,MO}^{XO,\Delta h,o:asc}\right).\end{aligned} \tag{5.39}$$

Die enthaltenen Größen lassen sich äquivalent zu denen in Gleichung (5.38) bestimmen. Die Drehmatrix $\boldsymbol{R}$ ist identisch und beschreibt auch hier die Drehung vom GRF_{asc} in das GRF_{desc}.

Bei der Interpretation der Residuen $\Delta\boldsymbol{V}_{ij}^{XO,desc}$ und $\Delta\boldsymbol{V}_{ij}^{XO,asc}$ ist zu berücksichtigen, dass die kombinierten GGT - wie in Abschnitt 5.5.1 ausführlich diskutiert - eine Mischung aus GOCE- und Modellinformation darstellen. Zusätzlich werden modellbasierte Gradientendifferenzen für die Höhenreduktion angesetzt (Abs. 5.5.2). Diese Tatsache sollte bei der Analyse der Residuen (Kap. 6) unbedingt beachtet werden.

Die Methodik der Gradienten-Validierung in Kreuzungspunkten umfasst eine Vielzahl von Berechnungsschritten, die in diesem Kapitel erläutert wurden. Deren Implementierung wurde in MATLAB umgesetzt und umfasst einige tausend Zeilen Programmcode. Um sicherzustellen, dass die Implementierung von Algorithmen und des allgemeinen Programmcodes keine Fehler aufweisen, werden die Programme im folgenden Abschnitt 5.6 einem 'Closed-loop' Test unterzogen.

Tabelle 5.19: Closed-Loop-Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO,desc}$ [mE].

Statistische Größen	$\boldsymbol{V}_{xx}$	$\boldsymbol{V}_{yy}$	$\boldsymbol{V}_{zz}$	$\boldsymbol{V}_{xz}$	$\boldsymbol{V}_{xy}$	$\boldsymbol{V}_{yz}$
Min	0.000	0.000	0.000	$-1.61 \cdot 10^{-15}$	$-3.23 \cdot 10^{-15}$	$-8.07 \cdot 10^{-16}$
Max	0.000	0.000	0.000	$3.23 \cdot 10^{-15}$	$3.23 \cdot 10^{-15}$	$8.07 \cdot 10^{-16}$
Mittel	0.000	0.000	0.000	$-8.19 \cdot 10^{-22}$	$-2.89 \cdot 10^{-20}$	$3.74 \cdot 10^{-21}$
Std.Abw.	0.000	0.000	0.000	$1.21 \cdot 10^{-17}$	$2.06 \cdot 10^{-17}$	$2.45 \cdot 10^{-18}$

5.6 Closed-Loop-Test

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine Fülle von Programmen zur Datenanalyse sowie Bestimmung der Residuen in Kreuzungspunkten implementiert. Um grobe Fehler in der Umsetzung der Algorithmen etc. sicher ausschließen zu können, ist eine Prüfung der Implementierung wünschenswert, wie sie mit dem im folgenden erläuterten 'Closed-Loop-Test' möglich wird.

Ziel der Validierung ist der Vergleich jeweils zweier GGT im Kreuzungspunkt. Da sich die verbleibenden Residuen im Idealfall zu Null ergeben, lässt sich problemlos eine geschlossene Prüfung - ein Closed-Loop-Test - durchführen: In Abbildung 5.1 (S. 86) wird eine Übersicht zum Ablauf der Gradienten-Validierung in Kreuzungspunkten gegeben. Im Rahmen des Closed-Loop-Tests werden als letzter Schritt der 'Vorverarbeitung' die GOCE-GGT $\boldsymbol{V}_{ij,GO}$ gegen rein modell-basierte GGT $\boldsymbol{V}_{ij,MO}$ ausgetauscht: $\boldsymbol{V}_{ij,GO} = \boldsymbol{V}_{ij,MO}$. Diese durchlaufen 'stellvertretend' für die GOCE-Gradienten den weiteren Berechnungsablauf.

Die finalen Residuen werden am Beispiel von $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO,desc}$ (Gl. (5.38)) untersucht. Tabelle 5.19 enthält die Statistik der Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO,desc}$ in [mE] als Ergebnis des Closed-Loop-Tests. Es wird deutlich, dass sich - wie erwartet - die Residuen zu Null ergeben. Die Implementierung ist damit, soweit in diesem Rahmen prüfbar, als richtig zu betrachten.

In Kapitel 6 werden nun die Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO,desc}$ (und $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO,asc}$) der realen GOCE-Gradienten im Detail untersucht.

6

Analyse der Kreuzungspunktdifferenzen

Die residualen GGT $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO,desc}$ und $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO,asc}$ stehen als Ergebnis der vorherigen Kapitel gemäß Gleichungen (5.38) und (5.39) zur Analyse bereit. Je nach Zielsetzung ist deren Untersuchung - wie bereits in Abschnitt 5.5.3 diskutiert - im GRF_{desc} und im GRF_{asc} durchzuführen.

Mit dem Ziel der Qualitätsbeurteilung der Gradienten sowie der Identifikation zeitlich sowie räumlich lokaler Artefakte in den GGT-Zeitreihen erfolgt deren Analyse in drei Kategorien:

1. Qualität des Gesamtdatensatzes,
2. Regionale Analysen und
3. Lokale Artefakte mit zeitlich begrenztem Einfluss auf die Gradienten.

Die Qualität des Gesamtdatensatzes gemäß Punkt 1. umfasst eine statistische Auswertung der Residuen und wird genau wie die Prüfung auf Korrelationen in verschiedenen Abhängigkeiten in Abschnitt 6.2 behandelt. Da die Gravitationsgradienten das Erdgravitationsfeld beschreiben, werden auch die Residuen im Hinblick auf regionale Auffälligkeiten analysiert (Punkt 2.). Darüber gelingt die Quantifizierung möglicher regionaler Einflussfaktoren auf die Beobachtungen, z.B. durch das Erdmagnetfeld (Abs. 6.3). Im Hinblick auf die weitere Nutzung der Gradientenzeitreihen zur Gravitationsfeldbestimmung ist die Identifikation von Ausreißern und zeitlich lokaler Artefakte in den Gradientenzeitreihen wichtig. Diese konnten beispielsweise, als Resultat unerwünschter 'Events' im Satelliten, Einfluss auf die Gradienten nehmen. Eine Untersuchung der GGT-Zeitreihen im Hinblick auf derartige (zeitlich lokale) Artefakte (Punkt 3.) wird in Abschnitt 6.4 behandelt. Abschnitt 6.5 enthält eine kurze Zusammenfassung und schließt das Kapitel mit einer Diskussion.

Die folgende Einleitung beschreibt einige grundlegende Gegebenheiten und Eigenschaften der GGT-Residuen im Kreuzungspunkt und geht auf die Handhabung bekannter sowie durch die Berechnungen induzierter Ausreißer ein.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird für Kreuzungspunkt [*cross-over*] (XO), auch dessen Abkürzung verwendet.

6.1 Einleitung

Eine Betrachtung der XO-Residuen kann grundsätzlich entlang aufsteigender oder entlang absteigender Bahnbögen erfolgen. In beiden Fällen sind Gradienten entlang zweier Bahnbögen beteiligt, denn Kreuzungspunkte der GOCE-Mission entstehen ausschließlich zwischen auf- und absteigenden Bahnbögen. Aufgrund der unterschiedlichen Orientierungen der GRF und der damit verbundenen Verlagerung der Residuenanteile in unterschiedliche GGT-Komponenten, ist deren Untersuchung sowohl entlang auf- als auch absteigender Bahnen sinnvoll.

Werden alle XO-Residuen sowohl im GRF_{asc} als auch im GRF_{desc} angesetzt, gelingt deren Untersuchung entlang der Zeitreihe: Residuen entlang aufsteigender Bahnbögen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO,asc}$ werden im GRF_{asc} und Residuen entlang absteigender Bahnbögen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO,desc}$ im GRF_{desc}

betrachtet. Sie werden damit jeweils in 'originaler' Orientierung des GOCE-Satelliten (GRF) untersucht. Wie bereits angedeutet, geht damit einher, dass alle Residuen 'doppelt' genutzt werden und sich die 'Gesamtzahl der Residuen' aus der doppelten Anzahl der XOs ergibt.

Die Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO,asc}$ (bzw. $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO,desc}$) beinhalten Ausreißer, die sich in zwei Gruppen einteilen lassen. Einerseits die *datenbedingten Ausreißer*, die sich aufgrund von Ausreißern etc. in den originalen Gradienten-Zeitreihen ergeben; andererseits *verfahrensbedingte Ausreißer*, die sich auf die XO-Bestimmung oder die bisherige Datenverarbeitung zurückführen lassen. Letztere sind unerwünscht und werden vor der Analyse aussortiert.

Verfahrensbedingte Ausreißer können an zwei Stellen im Berechnungsablauf auftreten: (1) bei der Bestimmung genäherter XO-Koordinaten und (2) bei der Ausgleichung der finalen XO-Positionen und XO-Zeitpunkte. Wie bereits in Abschnitt 5.2.2 erwähnt, entstehen Kreuzungspunkte in Polnähe unter sehr spitzen Winkeln. In nördlichsten bzw. südlichsten Breiten der GOCE-Bahn tritt der Umstand ein, dass Bahnbögen parallel zueinander verlaufen und in solchen Fällen keine oder zumindest keine eindeutig bestimmbare Kreuzung entsteht. Diese werden als 'unsicher' klassifiziert. Weitere Ausreißer können entstehen, wenn sich bei der Berechnung der finalen XO-Koordinaten sowie XO-Zeitpunkte ein schlecht konditioniertes System ergibt. Als einfaches und geeignetes Kriterium zur Aufdeckung entsprechender Ausreißer, hat sich der Rang der Normalgleichungsmatrix $\boldsymbol{N}$ $[dim\ 12 \times 12]$ (Gl. (5.10), S. 105) erwiesen. Kreuzungspunkte, deren $\boldsymbol{N}$-Matrix keinen Rang von 12 aufweisen oder als 'unsicher' klassifiziert wurden, werden von der weiteren Analyse ausgeschlossen.

Was den Umgang mit datenbedingten Ausreißern betrifft, so sollte je nach Zielsetzung auf deren Existenz reagiert werden. Soll beispielsweise eine statistisch begründete Aussage über die Qualität des Datensatzes gemacht werden, so kann es sinnvoll sein - sofern bekannt - Ausreißer nicht mit in die Berechnungen einzubeziehen. In diesem Fall könnten anstelle bekannter Ausreißer in den realen GGT-Zeitreihen beispielsweise neue Werte interpoliert werden, um den Berechnungsablauf (Filterung,...) nicht in unnötigem Umfang zu beeinflussen. Sollen andererseits explizit Artefakte (wie Ausreißer) mittels der Kreuzungspunktanalyse identifiziert werden, so müssen diese selbstverständlich Teil des Datensatzes sein. Im weiteren Verlauf werden, sofern nicht anders angegeben, die Zeitreihen und entsprechende GGT im XO inklusive der datenbedingten Ausreißer untersucht.

Um eine Vorstellung vom Anteil der Ausreißer zu bekommen, enthält Tabelle 6.1 die Anzahl der Ausreißer beider Gruppen, wobei die Anzahl der datenbedingten Ausreißer auf Basis der Flags ($Flags > 3$; siehe Tab. 3.3, S. 64) ermittelt wurde. Der Anteil an Ausreißern ist in beiden Gruppen sehr gering. Es sei hervorgehoben, dass sich die datenbedingten Ausreißer auf die ursprüngliche Zeitreihe beziehen, die verfahrensbedingten Ausreißer hingegen auf die Kreuzungspunkte.

Da einerseits die Flags der GGT komponentenweise ermittelt werden und andererseits einige verfahrensbedingte Ausreißer beide Kriterien eines 'Ausreißers' erfüllen, gleicht die 'SUMME' zwar der Gesamtzahl der Ausreißer, sie entspricht aber nicht der Summe der Einzelausreißer.

Als Datenbasis diese Kapitels dient erneut der etwa 62.5-tägige Datensatz zu Beginn der GOCE-Mission (02. November 2009 00:22 - 03. Januar 2010 23:33). Auf der Basis von 1011 aufsteigenden und 1010 absteigenden Bahnbögen ergeben sich insgesamt 1.083.692 Kreuzungspunkte, von denen nach Berücksichtigung der verfahrensbedingten Ausreißer 1.079.087 Kreuzungspunkte für die weiteren Analysen verbleiben.

6.2 Qualität des Gesamtdatensatzes

Dieser Abschnitt enthält statistische Untersuchungen der Residuen der Gravitationsgradienten $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO,asc}$ und $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO,desc}$ in den Kreuzungspunkten. Um statistisch begründete Aussagen machen zu können, ist die Verteilung der Residuen entscheidend. In Abbildung 6.1 werden Histogramme der Residuen aller GGT-Komponenten dargestellt. Der optische Eindruck deutet auf normalverteilte Residuen in allen Komponenten hin. Zur Prüfung der Normalverteilung eignet sich beispielsweise der Kolmogorov-Smirnov-Test (Hartung et al., 2005). Dabei wird ge-

Tabelle 6.1: Anzahl datenbedingter sowie verfahrensbedingter Ausreißer in den Kreuzungspunkten auf Basis des etwa 62.5-tägigen Datensatzes zu Beginn der GOCE-Mission.

Datenbedingte Ausreißer (5.442.909 $\hat{=}$ 100 %)						
	$\boldsymbol{V}_{xx}$	$\boldsymbol{V}_{yy}$	$\boldsymbol{V}_{zz}$	$\boldsymbol{V}_{xz}$	$\boldsymbol{V}_{xy}$	$\boldsymbol{V}_{yz}$
$Flags > 3$	147	96	24	18	57	12
'SUMME'	306 (0.006 %)					
Verfahrensbedingte Ausreißer (1.083.692 $\hat{=}$ 100 %)						
'unsicher'	3243 (0.30 %)					
$rang(\boldsymbol{N}) < 12$	2033 (0.19 %)					
'SUMME'	4605 (0.42 %)					

prüft, ob eine Zufallsvariable L einer angenommenen Wahrscheinlichkeitsverteilung entspricht. Die Nullhypothese des statistischen Tests ergibt sich unter Annahme der Normalverteilung N_0 zu

$$H_0: \qquad L \sim N_0(\mu_0, \sigma_0^2), \tag{6.1}$$

mit den Parametern der Normalverteilung Mittelwert μ_0 und Varianz σ_0^2. Das Testergebnis bestätigt im Falle aller Komponenten mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 0.95 (95 %) die Nullhypothese: Die Residuen sind normalverteilt.

Die beiden folgenden Abschnitte enthalten Untersuchungen der Residuen in Form statistischer Parameter (Abs. 6.2.1) sowie zu Abhängigkeiten und Korrelationen (Abs. 6.2.2).

6.2.1 Statistische Parameter

In diesem Abschnitt werden die Residuen $\Delta\boldsymbol{V}_{ij}^{XO,asc}$ (bzw. $\Delta\boldsymbol{V}_{ij}^{XO,desc}$) in den XOs mittels statistischer Kenngrößen sowie im Hinblick auf verschiedene Abhängigkeiten untersucht.

Statistische Kenngrößen (siehe Abs. 2.2.1) können anfällig sein für Ausreißer. Wie bereits einleitend erwähnt, ist davon auszugehen, dass die Gradientenzeitreihen und damit auch die Residuen in den Kreuzungspunkten Ausreißer enthalten. Daher sollten zur statistischen Beschreibung der GGT-Residuen (auch) robuste Parameter genutzt werden. In Abbildung 6.1 sind neben den Histogrammen auch die Perzentile $p1$ und $p99$ enthalten. Diese sind robust gegenüber Ausreißern, solange diese keinen zu großen Anteil (hier max. 2 %) der Residuen ausmachen. 98 % aller Residuen fallen in den Wertebereich zwischen $p1$ und $p99$.

Einen ersten Eindruck der statistischen Parameter der GGT-Residuen $\Delta\boldsymbol{V}_{ij}^{XO}$ vermitteln Tabelle 6.2 sowie die sogenannten Boxplots in Abbildungen 6.2 und 6.3: Die roten Linien innerhalb der Boxen geben den Median der Residuen an. Die Boxen beschreiben einen Bereich zwischen den Perzentilen $p25$ und $p75$. Die sogenannten 'Whisker' in Form der gestrichelten Linien bis zur oberen bzw. unteren waagerechten schwarzen Begrenzung kennzeichnen einen Abschnitt von etwa $\pm 2.7 \cdot \sigma_0$, mit σ_0 der empirischen Standardabweichung der Residuen (gemäß Gl. (2.49)), und beinhalten damit etwa 99.3 % aller Residuen. Alle Residuen außerhalb von $\pm 2.7\sigma$ werden (hier) als Ausreißer dargestellt (rote Kreuze).

Tabelle 6.2 sowie Abbildungen 6.2 und 6.3 basieren auf identischen Residuen-Datensätzen, die sämtliche (bekannten) datenbasierten Ausreißer enthalten und denen Modellinformation aus dem EGM2008 (Pavlis et al., 2008) zugrunde liegt.

Es zeigt sich ein unterschiedliches Verhalten der einzelnen GGT-Komponenten. $\Delta\boldsymbol{V}_{xx}^{XO}$ und $\Delta\boldsymbol{V}_{yy}^{XO}$ weisen mit gut 4 mE die geringste Standardabweichung (STD) (bzw. RMS) der hochgenauen Tensorelemente auf. Die STD von $\Delta\boldsymbol{V}_{zz}^{XO}$ und $\Delta\boldsymbol{V}_{xz}^{XO}$ liegen mit 8.93 mE und 8.03 mE etwa einen Faktor zwei oberhalb derjenigen von $\Delta\boldsymbol{V}_{xx}^{XO}$ und $\Delta\boldsymbol{V}_{yy}^{XO}$. $\Delta\boldsymbol{V}_{xy}^{XO}$ weist aufgrund des hohen Modellanteils die kleinste Standardabweichung auf und die STD von $\Delta\boldsymbol{V}_{yz}^{XO}$ liegt bei etwa 4.8 mE. Alle Komponenten haben einen Mittelwert nahe Null, was sich auch in nahezu identischen Werten von Standardabweichung und RMS widerspiegelt. Der (gegenüber

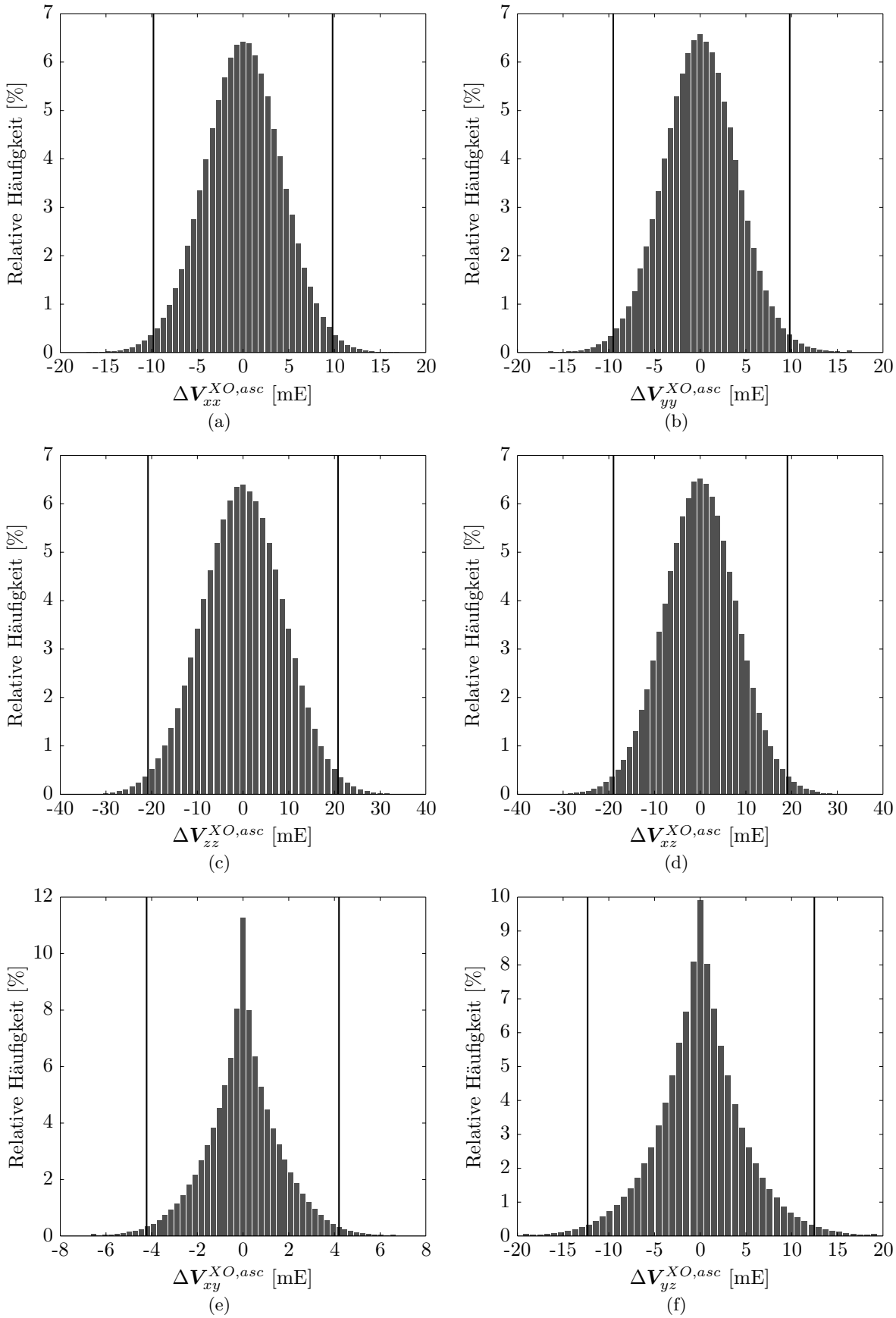


Abbildung 6.1: Histogramme der Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO,asc}$ (EGM: EGM2008). Die senkrechten Striche deuten die Perzentile $p1$ (links) und $p99$ (rechts) an.

Ausreißern robuste) Median ist beinahe gleich dem Mittelwert, was die Größe der Stichprobe bzw. den geringen Anteil an Ausreißern unterstreicht. Die Perzentile $p1$ und $p99$ geben die

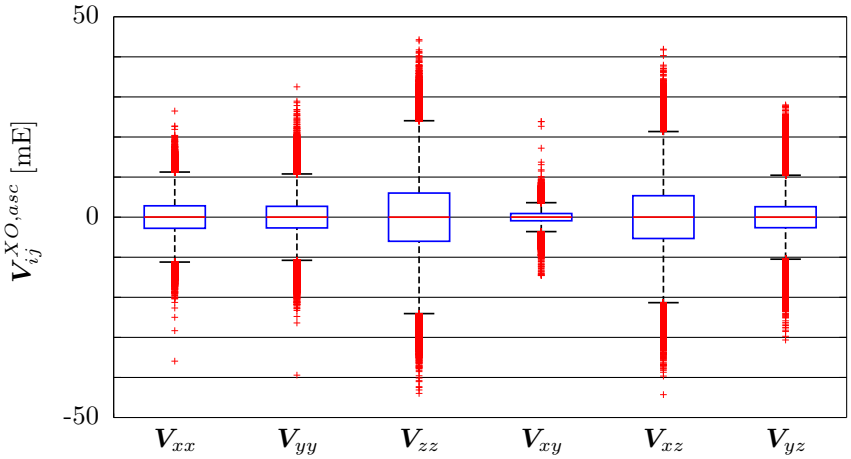


Abbildung 6.2: Boxplot der GGT-Residuen $\Delta V_{ij}^{XO,asc}$ [mE] entlang aufsteigender Bahnbögen (ASC). Residuen inkl. aller (bekannten) datenbasierten Ausreißer. Modellinformation aus EGM2008.

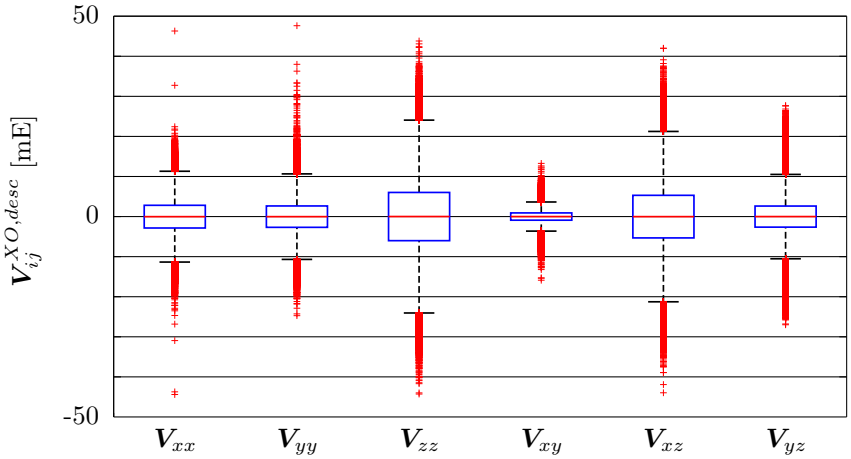


Abbildung 6.3: Boxplot der GGT-Residuen $\Delta V_{ij}^{XO,desc}$ [mE] entlang absteigender Bahnbögen (DESC). Residuen inkl. aller (bekannten) datenbasierten Ausreißer. Modellinformation aus EGM2008.

Werte an, die 1 % der Residuen unter- bzw. überschreiten und weisen nahezu identische Beträge auf, was erneut ein Zeichen normalverteilter Residuen mit einem Mittelwert nahe Null ist.

Die Extremwerte (Min bzw. Max) der Residuen zeigen deutliche Ausreißer, von denen einzelne sogar den dargestellten Wertebereich der Boxplots (±50 mE) übersteigen. Die Boxplots lassen es bereits vermuten: Keiner der Ausreißer liegt nahe der Grenzen des dargestellten Wertebereichs von ±50 mE. Diesen überschreiten bei Betrachtung entlang aufsteigender Bahnbögen lediglich zwei Residuen der xx-Komponente und ein Residuum der xz-Komponente. Im Falle der absteigenden Bahnbögen ist es jeweils genau einer (siehe Tab. 6.2).

In Gleichungen (5.38) und (5.39) wird deutlich, dass die Residuen einmal durch die Subtraktion $DESC - ASC$ und einmal nach $ASD - DESC$ entstehen. Es ist daher nicht verwunderlich, dass die Residuen $\Delta V_{ij}^{XO,desc}$ und $\Delta V_{ij}^{XO,asc}$ unterschiedliche Vorzeichen aufweisen. Da der Vergleich der GGT einmal im GRF$_{desc}$ und einmal im GRF$_{asc}$ erfolgt und sich etwaige Ausreißer in einzelnen Tensorelementen durch Drehung auch auf andere Elemente 'verteilen', haben die Residuen (und so auch die Extremwerte) keine identischen Beträge. Deren zeitliches Verhalten ist jedoch fast identisch, was auch in den sehr ähnlichen statistischen Parametern beim Vergleich der Residuen im GRF$_{desc}$ und GRF$_{asc}$ deutlich wird.

Tabelle 6.2: Statistische Parameter [mE] der GGT-Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO}$. Residuen inkl. aller (bekannten) datenbasierten Ausreißer unter Einfluss des EGM2008.

	Stat. Param.	$\Delta \boldsymbol{V}_{xx}^{XO}$	$\Delta \boldsymbol{V}_{yy}^{XO}$	$\Delta \boldsymbol{V}_{zz}^{XO}$	$\Delta \boldsymbol{V}_{xy}^{XO}$	$\Delta \boldsymbol{V}_{xz}^{XO}$	$\Delta \boldsymbol{V}_{yz}^{XO}$
DESC	**Min**	-44.40	-24.73	-44.28	-127.99	-43.97	-52.16
	Max	315.25	56.00	43.81	13.27	132.36	27.68
	Mittel	-0.03	-0.02	0.01	0.00	-0.01	-0.00
	Median	-0.02	-0.02	0.01	0.00	-0.02	-0.00
	Std.Abw.	4.24	4.01	8.93	1.68	8.03	4.78
	RMS	4.24	4.01	8.93	1.68	8.03	4.78
	$\boldsymbol{p1}$	-9.95	-9.46	-20.77	-4.33	-18.98	-12.58
	$\boldsymbol{p99}$	9.86	9.43	20.80	4.32	18.97	12.46
ASC	**Min**	-366.62	-39.43	-43.98	-14.58	-44.29	-30.65
	Max	26.48	32.52	44.29	23.87	142.24	28.01
	Mittel	0.03	0.02	-0.01	0.00	0.02	-0.01
	Median	0.03	-0.00	-0.01	-0.00	0.01	-0.00
	Std.Abw.	4.21	4.08	8.93	1.64	8.05	4.76
	RMS	4.21	4.08	8.93	1.64	8.05	4.76
	$\boldsymbol{p1}$	-9.80	-9.51	-20.80	-4.22	-18.97	-12.32
	$\boldsymbol{p99}$	9.80	9.80	20.78	4.20	19.09	12.50

Die bisherigen Ergebnisse basierten auf den GGT-Residuen in XOs (XO-Residuen), die auf Basis der $\boldsymbol{V}_{ij}$ Zeitreihen inkl. aller (bekannten) datenbasierten Ausreißer berechnet wurden. Diesen lag als EGM das EGM2008 zugrunde. Um den Einfluss der Ausreißer sowie der Modellwahl auf die Residuen zu quantifizieren, enthält Tabelle 6.3 ausgewählte statistische Parameter von XO-Residuen, zu deren Bestimmung einerseits verschiedenen EGM zugrunde gelegt wurden und bei denen andererseits an Stellen bekannter datenbasierter Ausreißer in den GGT-Zeitreihen eine Interpolation neuer Werte für die Gradienten erfolgte.

Werden an Stellen bekannter datenbasierter Ausreißer in den GGT Zeitreihen Werte interpoliert und XO-Residuen auf Basis des resultierenden Datensatzes bestimmt, so sinkt der Betrag der Extremwerte deutlich. Im Hinblick auf Mittelwert und RMS stellen sich keine Veränderungen ein, was den geringen Anteil der Ausreißer in der großen Stichprobe unterstreicht. Sehr vereinzelt zeigt sich der Effekt, dass einzelne Extremwerte nach Interpolation an Stellen bekannter Ausreißer zu größeren Residuen führen als auf Basis der unveränderten Zeitreihe: $min(\Delta \boldsymbol{V}_{xz})$ steigt nach der Interpolation an. Daraus ist zu schließen, dass die Interpolation nicht gut gelingt. Entweder hätten noch weitere $\boldsymbol{V}_{ij,komb}$ im Umfeld des Ausreißers ebenfalls als Ausreißer deklariert werden müssen, oder die (Spline-) Interpolation führt zu ungewolltem Überschwingen und ist damit hier nicht geeignet. Um das Problem zu umgehen, sind - sofern eine Analyse auf Basis der interpolierten Zeitreihe überhaupt angestrebt wird - alle interpolierten $\boldsymbol{V}_{ij,komb}$ sowie deren 'Umfeld' von der XO-Analyse auszuschließen bzw. XOs, die sich in deren Umfeld ergeben, nicht weiter zu berücksichtigen.

Im Hinblick auf die Wahl eines EGM, das zur Bestimmung der XO-Residuen zugrunde gelegt wird, deuten die statistischen Parameter in Tabelle 6.3 einen nur geringen Einfluss der Modellwahl an. Die größten Differenzen in puncto Mittelwert und RMS liegen maximal im Bereich von hundertstel mE. Die Extremwerte unterscheiden sich i.d.R. um maximal 0.7 mE. Eine Ausnahme bilden $\Delta \boldsymbol{V}_{xy}^{XO}$ und $\Delta \boldsymbol{V}_{xz}^{XO}$, deren Extremwerte - im Falle originaler, Ausreißer beinhaltender Zeitreihen - Differenzen von bis zu 4 mE zeigen. Differenzen zwischen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO}$ auf Basis verschiedener EGM können noch größere Beträge erreichen. Dies ist vor allem auf die lokalen Unterschiede der Modelle zurückzuführen, auf die bereits in Abschnitt 4.1.2 hingewiesen wurde und die in Abschnitt 6.3 erneut Gegenstand der Diskussion sind. Alle folgenden Ergebnisse basieren auf den XO-Residuen, die auf Basis der $\boldsymbol{V}_{ij}$ Zeitreihen inkl. aller (bekannten) datenbasierten Ausreißer ermittelt wurden.

Für ein erstes Résumé ist hervorzuheben, dass die Qualität der Tensorelemente $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ als hochwertig zu bestätigen ist. Aus den XO-Residuen ergibt sich ein RMS von etwa 4 mE, mit dem die 'Rauscherwartungen', wie sie mit 4.85 mE aus den Spur-Requirements hervorge-

Tabelle 6.3: Ausgewählte statistische Parameter [mE] der GGT-Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO,desc}$ entlang absteigender Bahnbögen unter Nutzung originaler GGT-Zeitreihen $\boldsymbol{V}_{ij,komb}$ inkl. bekannter datenbasierter Ausreißer (AR: orig.) sowie nach Interpolation der $\boldsymbol{V}_{ij,komb}$ an Stellen bekannter Ausreißer (AR: interp.). Außerdem wurden unterschiedliche EGM für die Modellgradienten zugrunde gelegt.

EGM	AR	[mE]	$\Delta \boldsymbol{V}_{xx}^{XO}$	$\Delta \boldsymbol{V}_{yy}^{XO}$	$\Delta \boldsymbol{V}_{zz}^{XO}$	$\Delta \boldsymbol{V}_{xy}^{XO}$	$\Delta \boldsymbol{V}_{xz}^{XO}$	$\Delta \boldsymbol{V}_{yz}^{XO}$
EGM2008	orig.	**Min**	-44.40	-24.73	-44.28	-127.99	-43.97	-52.16
		Max	315.25	56.00	43.81	13.27	132.36	27.68
		Mittel	-0.03	-0.02	0.01	0.00	-0.01	-0.00
		RMS	4.24	4.01	8.93	1.68	8.03	4.78
	interp.	**Min**	-32.47	-24.73	-44.28	-15.38	-52.11	-27.00
		Max	36.50	36.28	43.81	13.27	41.99	27.68
		Mittel	-0.03	-0.02	0.01	0.00	-0.01	-0.00
		RMS	4.23	4.01	8.93	1.67	8.03	4.78
GOCO05s	orig.	**Min**	-44.67	-24.69	-44.67	-128.51	-43.41	-52.29
		Max	314.74	55.95	44.29	9.47	132.66	27.19
		Mittel	-0.02	-0.02	0.01	0.00	-0.01	-0.00
		RMS	4.22	3.97	8.90	1.65	8.01	4.75
	interp.	**Min**	-32.35	-24.69	-44.67	-15.24	-51.81	-27.33
		Max	36.44	36.27	44.29	12.58	39.22	27.19
		Mittel	-0.02	-0.02	0.01	0.00	-0.01	-0.00
		RMS	4.21	3.97	8.90	1.64	8.01	4.75
ITG-Grace2010s	orig.	**Min**	-44.61	-24.67	-44.60	-128.71	-43.79	-52.69
		Max	315.13	55.92	44.27	10.20	133.00	27.52
		Mittel	-0.02	-0.03	0.01	-0.00	-0.01	-0.00
		RMS	4.23	4.00	8.91	1.68	8.03	4.78
	interp.	**Min**	-33.03	-24.67	-44.60	-14.87	-51.47	-27.47
		Max	36.54	36.78	44.27	12.06	39.10	27.52
		Mittel	-0.02	-0.03	0.01	-0.00	-0.01	-0.00
		RMS	4.22	4.00	8.91	1.67	8.03	4.78

hen (vgl. Tab. 4.4, S. 78), deutlich unterschritten werden. Die beiden weiteren hochgenauen Tensorelemente $\boldsymbol{V}_{zz}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ weisen mit einem Residuen-RMS zwischen 8 und 9 mE ein um den Faktor zwei erhöhtes Rauschniveau auf und liegen damit oberhalb der Erwartungen. Diese Tendenz entspricht dem Ergebnis des GOCE-Modell-Vergleichs aus Kapitel 4.

6.2.2 Korrelationen und Abhängigkeiten

In diesem Abschnitt werden die XO-Residuen auf ausgewählte Abhängigkeiten von verschiedenen Größen hin untersucht. Dabei geht es darum, auffällige Korrelationen zwischen den Residuen und Größen, wie der geografischen Breite, der Höhendifferenz im XO oder dem Drehwinkel zwischen GRF_{asc} und GRF_{desc} ($\approx$ Schnittwinkel der Bahnbögen) im XO, zu identifizieren.

Abbildung 6.4(a) zeigt die Abhängigkeit aller XO-Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO}$ von der geografischen Breite φ. Zur übersichtlicheren Darstellung wurden die Residuen der einzelnen GGT-Elemente um $i \cdot 100$ mE, mit $i = 0...5$ verschoben. In der Abbildung ist das unterschiedlich starke Rauschen der Komponenten sowie eine Zunahme der XO-Residuen in Richtung der Pole erkennbar, die sich sehr stark in $\Delta \boldsymbol{V}_{yz}^{XO}$ zeigt. Die Verteilung der Residuen (rechts) zeigt, dass in Polnähe auch die meisten Kreuzungen auftreten. Neben einzelnen Ausreißern werden einige Breitenbereiche mit Häufungen vergleichsweise großer Residuen deutlich, vor allem in $\Delta \boldsymbol{V}_{yy}^{XO}$: Im Bereich von $-50°... - 60°$, $-20°... + 10°$ sowie um $+30°$. Entsprechende Häufungen weisen in ähnlicher Form auch die xx-, xy- und yz-Komponenten auf. Etwaige Einflüsse auf $\Delta \boldsymbol{V}_{zz}^{XO}$ und $\Delta \boldsymbol{V}_{xz}^{XO}$ werden aufgrund des erhöhten Rauschniveaus dort nicht sichtbar. In den XO-Residuen der xy- sowie der xz-Komponente ist ein 'Einschnitt' in Breiten von etwa $\pm 80.5°$ zu

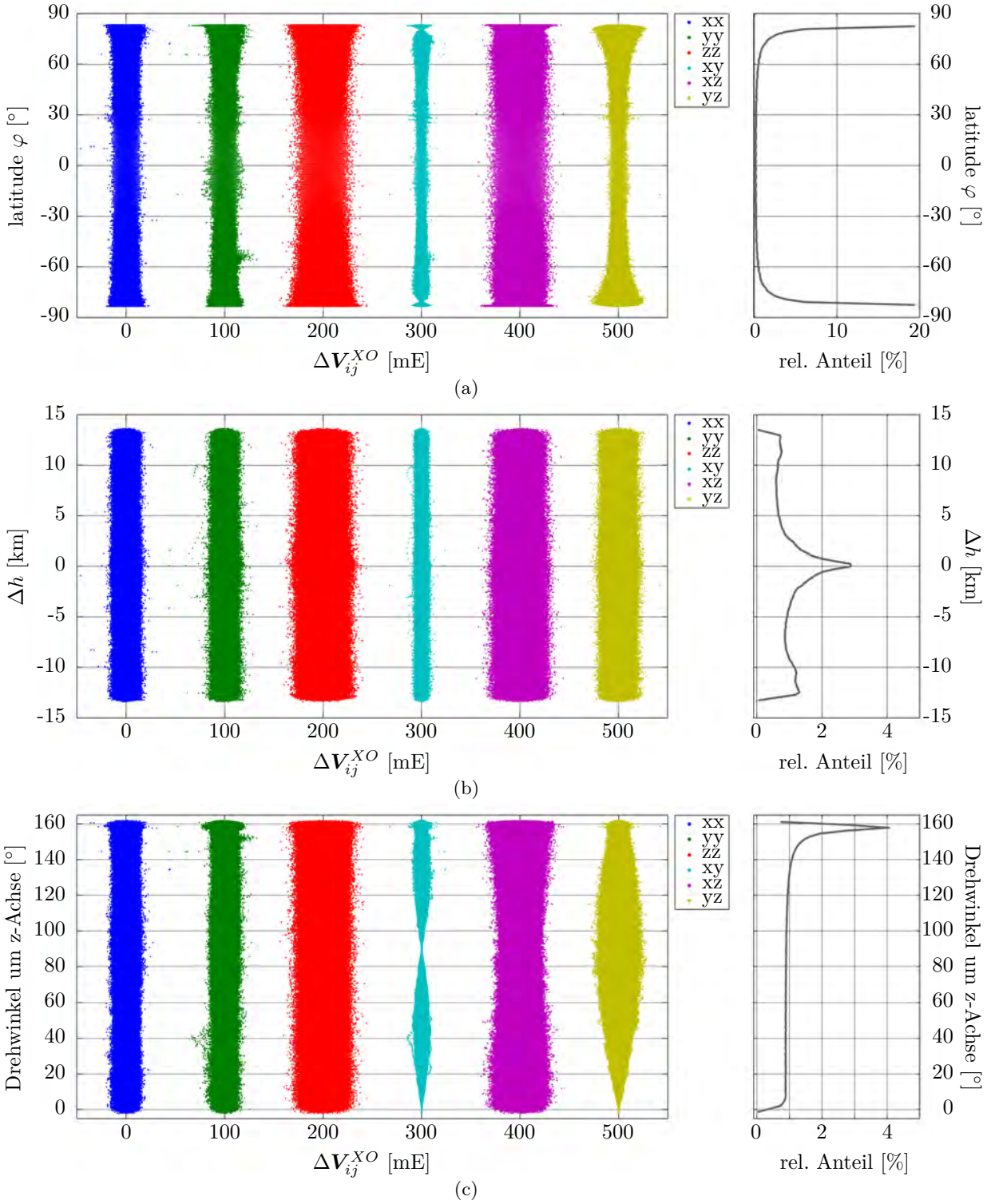


Abbildung 6.4: XO-Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO}$ in Abhängigkeit (a) der geografischen Breite φ, (b) der Höhendifferenz $\Delta h = r_{asc} - r_{desc}$ im XO und (c) des Drehwinkels [°] um die z-Achse, abgeleitet aus der Drehmatrix $\boldsymbol{R}_{GRF_{desc} \leftrightarrow GRF_{asc}}$. Zu Zwecken der Übersichtlichkeit wurden die Residuen komponentenweise verlagert. EGM: EGM2008.

sehen. Dessen Ursache ist ein vergleichsweise hoher Modellanteil bei Drehwinkeln (zwischen den GRF im XO) um 90° (siehe Abb. 5.22, S. 129). Zusammengefasst sind Häufungen mit Breitenabhängigkeit erkennbar, deren eingehende Analyse in den regionalen Untersuchungen in Abschnitt 6.3 erfolgt.

In Abbildung 6.4(b) werden die XO-Residuen komponentenweise in Abhängigkeit der Höhendifferenz Δh zwischen GRF_{asc} und GRF_{desc} dargestellt. Es zeigt sich kein Anstieg der

Residuen mit zunehmender Höhendifferenz. Die Verteilung der XOs über Δh ist vergleichsweise gleichmäßig, wobei sich eine relative Häufung um niedrige Δh ergibt.

Abhängigkeiten der XO-Residuen von den Drehwinkeln um die z-Achse des GRF zeigt Abbildung 6.4(c). Die Drehwinkel wurden aus den beiden Drehmatrizen $\boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF}_{desc} \leftarrow \mathrm{GRF}_{asc}}$ und $\boldsymbol{R}_{\mathrm{GRF}_{asc} \leftarrow \mathrm{GRF}_{desc}}$ abgeleitet und variieren zwischen 0° in Polnähe und 160° in der Nähe des Äquators. Einzelne Häufungen werden sichtbar, die auf räumlich lokale Effekte hindeuten und in der regionalen Untersuchung (Abs. 6.3) genauer betrachtet werden. Die Residuen von $\boldsymbol{V}_{xz}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$ lassen ein ansatzweise 'inverses Verhalten' erkennen: $\boldsymbol{V}_{xz}$ zeigt bei Drehwinkeln von 90° eine leichte Abnahme des Rauschens, wohingegen $\boldsymbol{V}_{yz}$ in diesem Bereich das größte Rauschen aufweist und in Richtungen 0° sowie 160° eine deutliche Abnahme der Residuen zu verzeichnen ist. Dies hängt - genauso wie die 'Einschnitte' in $\boldsymbol{V}_{xy}$ - ursächlich mit einem Anstieg des Modellanteils in Bereichen geringerer Residuen zusammen.

Auf den ersten Blick verwunderlich erscheint die Verteilung der Residuen mit einem größten relativen Anteil bei Drehwinkeln um 158°. Abbildung 6.4(a) weist darauf hin, dass die meisten XOs in Polnähe entstehen. Aufgrund des nicht-linearen Zusammenhanges zwischen geografischer Breite φ und Drehwinkel der Drehung zwischen den beiden GRF im XO um die z-Achse lassen sich beide Darstellungen erklären: Wie bereits im Zusammenhang mit Abbildung 5.22 (S. 129) diskutiert, steigen die Drehwinkel - in Polnähe ($\varphi_{max} = 83.4°$) beginnend mit 0° - innerhalb von nur etwa 3° geografischer Breitenänderung auf einen Drehwinkel von 90° an und erreichen bei $\varphi = 71.5°$ bereits einen Drehwinkel von 135°. Dieser rasche Anstieg führt dazu, dass sich alle Bahnbögen zwischen $\varphi = -60... + 60°$ in Winkeln zwischen 145...160° schneiden und sich damit in Abbildung 6.4(c) entsprechend gehäuft darstellen.

Im Zuge der XO-Bestimmung wurden kritisch spitze Schnittwinkel in Polnähe diskutiert (Abs. 5.2.1). Da in Polnähe einerseits sowohl vergleichsweise hohe Residuen auftreten als auch viele XOs entstehen, sich andererseits aber auch viele kleine Residuen ergeben, wird empfohlen, XOs unter kleinem Schnittwinkel nicht pauschal von der Analyse auszuschließen.

Vergleichsweise große Fehler in der Bestimmung der Längenkoordinate des XO λ_{XO} resultieren (in Polnähe) in nur geringen metrischen Entfernungen. Der Einfluss etwaig fehlerhafter XO-Positionen auf die Gradienten ist damit sehr gering. Ein Vorteil, den XOs in Polnähe außerdem haben, ist, dass sich die Orientierungen der GRF beider Bahnbögen kaum voneinander unterscheiden. Daher werden nur geringe Drehungen zur Angleichung der Koordinatensysteme notwendig und es findet wenig Vermischung von GOCE- und Modellanteilen statt. XOs, die in Polnähe entstehen, sollten daher - sofern nicht als verfahrensbedingte Ausreißer klassifiziert - für die Untersuchungen genutzt werden.

Zusammenfassend zeigen die Darstellungen einzelne räumlich lokale Häufungen größerer Residuen (Gegenstand der folgenden Abschnitte), allerdings sind keine Korrelationen in Form linearer Abhängigkeiten oder ähnliches zwischen XO-Residuen und der Höhendifferenz etc. erkennbar. Neben den hier dargestellten Korrelationsuntersuchungen wurden die Residuen auf Abhängigkeiten zu einigen weiteren Größen, wie zur Differenz der Kreuzungszeitpunkte etc. untersucht. In keiner dieser Untersuchungen konnten auffällige Korrelationen identifiziert werden.

6.3 Regionale Untersuchungen

Die regionalen Untersuchungen haben zum Ziel, räumlich lokale Häufungen vergleichsweise großer XO-Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO}$ aufzudecken. Deren Ursachen können regionale Besonderheiten, wie die Einflussnahme des Magnetfeldes auf die Gradienten, sein. Der Fokus der regionalen Untersuchungen liegt dabei auf Gebieten hoher Residuen, deren Ursache(n) 'dauerhaften' Einfluss auf die Gradienten nehmen und sich damit in 'allen' Gradienten in besagtem Bereich zeigen.

Da die $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO}$ komponentenweise untersucht werden, ist deren Vergleich in einem 'einheitlichen' Koordinatensystem erforderlich. Was die 'Herstellung' einer einheitlichen Höhe der XO-Residuen betrifft (Höhenreduktion), so sind keine Anpassungen erforderlich: Die Höhen-

reduktion der beteiligten Gradienten erfolgt gemäß Gleichung (5.35) (S. 135) mit Hilfe von Modellgradienten-Differenzen. Würden beide im XO beteiligten $\boldsymbol{V}_{ij}$ auf eine mittlere Bahnhöhe 'reduziert', würde - ausgehend vom bisherigen 'Vergleichsort', einem der GRF - die gleiche Modellgradienten-Differenz an beiden $\boldsymbol{V}_{ij}$ angebracht. Bei der Differenzenbildung würde dieser Anteil wieder herausfallen, womit sich auch der Einfluss der absoluten Höhe herauskürzt.

In puncto 'einheitlicher' Orientierung der Koordinatensysteme ergeben sich zwischen räumlich benachbarten GRF ähnliche Unterschiede, wie in Abschnitt 5.5.1.4 bereits diskutiert: Die GRF sind im Bereich von etwa $\pm 3°$ um die lokale Bewegungsrichtung des Satelliten (LORF) herum orientiert. Die Orientierung zweier räumlich benachbarter GRF kann sich daher um bis zu 6° unterscheiden. In dem 62.5-tägigen Datensatz liegen die Orientierungsdifferenzen räumlich benachbarter GRF bei maximal 4°.

Regionale Untersuchungen wären - neben dem GRF - im LORF entlang auf- bzw. absteigender Bahnbögen oder im LNOF möglich. Die Überführung der Residuen kann aufgrund der Distributivität gemäß Gleichungen (5.27) und (5.36) durch direkte Drehung des Residuen-GGT erfolgen. GRF und LORF unterscheiden sich maximal um die beschriebenen 3°. Aufgrund der vergleichsweise kleinen Beträge der Residuen unterscheiden sich die GGT (62.5-tägiger Datensatz) vor und nach der Drehung im Mittel um ± 0.2 mE (hochgenaue Komponenten) bzw. ± 0.3 mE (weniger genaue Komponenten). Einzig sehr vereinzelte Ausreißer erreichen Größenordnungen von maximal 1.7 mE (hochgenaue Komponenten) bzw. ± 2.7 mE (weniger genaue Komponenten). Eine Drehung in das LORF verändert die XO-Residuen damit kaum und bewirkt maximal eine leichte Veränderung ihres 'Grundrauschens'.

Eine Drehung in das LNOF brächte eine vollständige Vermischung aller Tensorelemente des Residuen-GGT mit sich. Beide GGT oder äquivalent der Residuen-GGT müssten gedreht werden. Zu verfolgen, wohin sich im Zuge der Drehung die Modellanteile der Tensoren verlagern, ist bei einer Einzeldrehung noch möglich (siehe Abs. 5.5.1.4), dies wird aber unmöglich, sobald beide Tensoren im XO (unterschiedliche) Drehungen erfahren. Nach deren Kombination (Subtraktion) ist eine Interpretation, welche Komponenten bzw. Frequenzen Signal- und welche Modellanteile enthalten, ausgeschlossen.

Um die Nachvollziehbarkeit der GOCE- und Modellanteile auch noch in den Residuen zu ermöglichen, wird der regionale Vergleich in den GRF entlang der Bahnbögen durchgeführt. Das erhöhte 'Grundrauschen', das damit in Kauf genommen wird, liegt - wie beschrieben - in einer tolerierbaren Größenordnung. Ein weiterer entscheidender Vorteil des GRF als Koordinatensystem der regionalen Untersuchungen ist, dass die Gradienten in ihrem 'ursprünglichen' Koordinatensystem untersucht werden. Dies ist eine notwendige Voraussetzung zur Ableitung etwaiger Gradiometer-spezifischer Einflüsse auf einzelne GGT-Komponenten.

In den folgenden Abbildungen werden XO-Residuen dargestellt, wobei die betragsmäßig größten Residuen jeweils 'zuoberst' dargestellt werden. Abbildung 6.5 zeigt geografische Darstellungen farbkodierter XO-Residuen $\Delta\boldsymbol{V}_{yy}^{XO}$ im GRF entlang aufsteigender Bahnbögen, wobei drei unterschiedliche EGM für deren Berechnung zugrunde gelegt wurden: EGM2008 (Pavlis et al., 2008), ITG-Grace2010s (Mayer-Gürr et al., 2010) und GOCO05s (Mayer-Gürr et al., 2015). Es werden einerseits Häufungen großer Residuen in Polnähe sichtbar und andererseits treten einige regionale Häufungen auf, die sich - je nach zugrunde gelegtem EGM - zum Teil deutlich voneinander unterscheiden. Zwischen den Residuen auf Basis des ITG-Grace2010s und dem GOCO05s (Abb. 6.5(b) und 6.5(c)) zeigen sich kaum Unterschiede, und Häufungen größerer Residuen stellen sich in den gleichen Regionen dar. Ganz anders sieht es beim Vergleich mit den Residuen auf Basis des EGM2008 aus. Diese weisen deutliche Häufungen in Regionen auf, die auf Basis der anderen Modelle unauffällig waren: Südamerika, Afrika sowie Gebiete in Indien und dem westlichen China. Da entsprechende Häufungen in den Residuen auf Basis der anderen Modelle nicht enthalten sind, und das GOCO05s derzeit als eines der global besten EGM einzuschätzen ist, ist die Ursache dieser Häufungen im EGM2008 zu suchen. Dessen Datenbasis enthält neben 'ersten' GRACE-Beobachtungen vor allem terrestrische Schweredaten. In den auffälligen Regionen stehen nur wenige terrestrische Datensätze zur Verfügung. Das EGM2008 ist damit in den genannten Regionen in dem hier untersuchten Frequenzbereich als vergleichsweise ungenau zu betrachten.

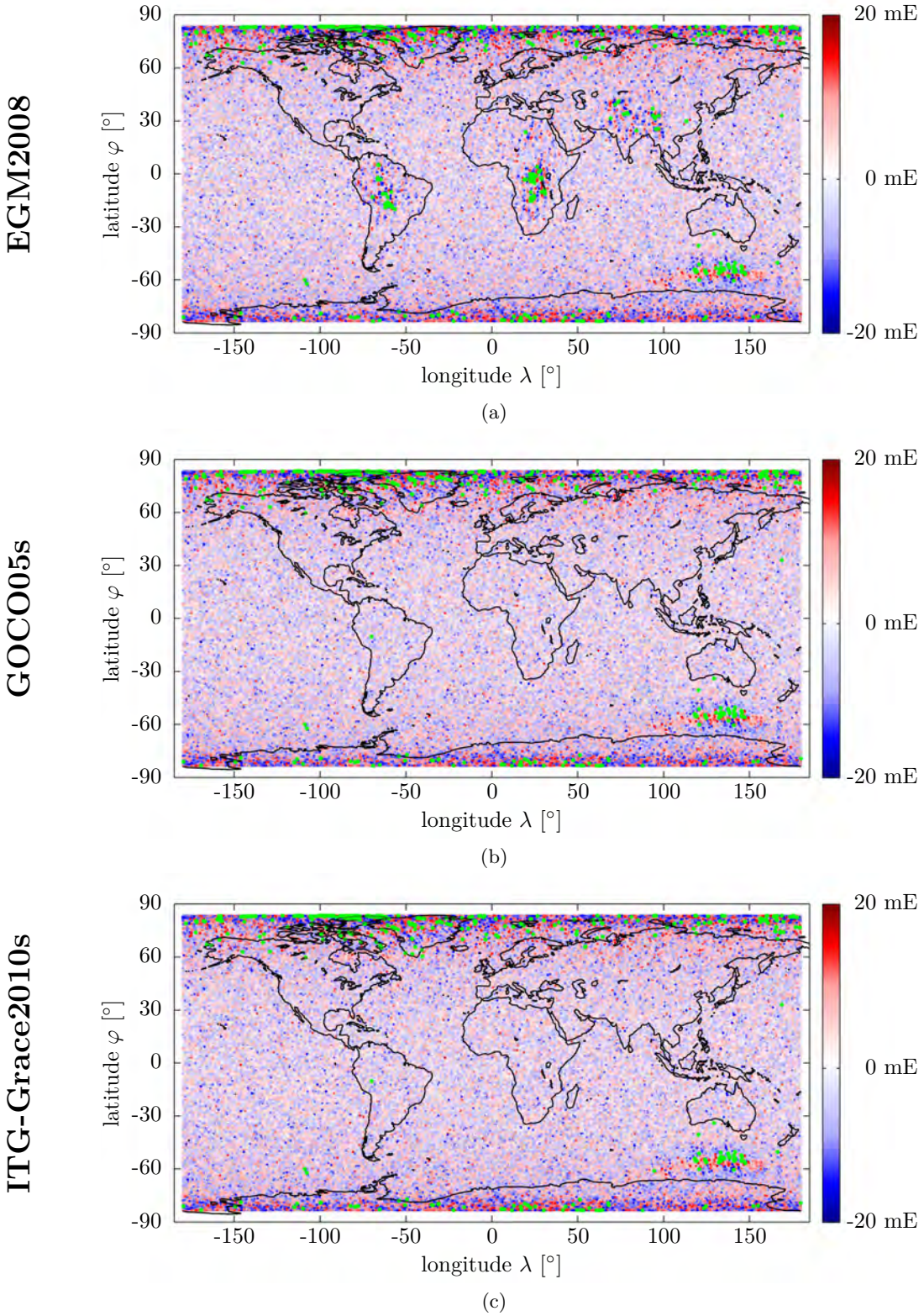


Abbildung 6.5: Geografische Darstellung farbkodierter XO-Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{yy}^{XO,asc}$ auf Grundlage verschiedener EGM: (a) EGM2008; (b) GOCO05s; (c) ITG-Grace2010s. Ausreißer (4σ) werden grün dargestellt.

Die genannten Häufungen wurden bereits in anderen Studien identifiziert. Siemes (2014) zeigt, dass eine Komponente der ICM systematische Fehler aufweist, wodurch die *common mode* Beschleunigung $a_{com,25,y}$ (vgl. Gl. (3.5), S. 50) auf die GGT-Komponente $\boldsymbol{V}_{yy}$ projiziert wird. Dies führt zu den genannten regionalen Auffälligkeiten. Durch Interpolation der Kalibrationsfaktoren konnte deren Einfluss in der Reprozessierung deutlich verringert werden. Wie die Analysen in dieser Arbeit zeigen, ist der Effekt aber weiterhin enthalten. Ince und Pagiatakis

(2016) zeigen in neusten Analysen, dass die Störungen auf starke ionosphärische Aktivität zurückzuführen sind.

Ein Vergleich der Regionen höherer Residuen auf Basis des EGM2008 (Abb. 6.5(a)) mit Abbildung 6.4(a) (ebenfalls EGM2008 basiert) macht deutlich, dass die geografischen Breiten sowie die Regionen mit auffällig hohen Residuen identisch sind.

Schlussfolgernd ist zu unterstreichen, dass die Modellwahl bei der Validierung der GOCE-Gradienten entscheidend ist. Dieser Hinweis ergibt sich bereits aus den Diskussionen in Kapitel 4.1.2 sowie Abbildung 4.6 (S. 76). Auch wenn in den Untersuchungen zur Güte des Gesamtdatensatzes in Abschnitt 6.2 auf Grundlage statistischer Parameter kein signifikanter Unterschied zwischen den Residuen auf Basis der zugrunde gelegten Modelle ermittelt werden konnte (siehe Tabelle 6.3), zeigen sich - im Hinblick auf die Gradientenvalidierung - die Schwächen des EGM2008 bei der regionalen Untersuchung. Es wird daher empfohlen, eines der anderen beiden Modelle für die Validierung heranzuziehen.

Das GOCO05s ist als eines der EGM mit der derzeit global höchsten Genauigkeit anzusehen. In dessen Bestimmung sind unter anderen die Daten der gesamten GOCE-Mission eingeflossen. Falls das GOCO05s als Grundlage für die Validierung der GOCE-GGT herangezogen werden sollte, würde 'Gleiches mit Gleichem' verglichen. Um dies zu umgehen und da die Residuen auf Basis des GOCO05s und des ITG-Grace2010s nahezu identisch sind, **wird empfohlen, das ITG-Grace2010s als EGM für die Validierung zugrunde zu legen**. Dieses basiert ausschließlich auf GRACE-Beobachtungen und erlaubt eine vollständig GOCE-Modell-unabhängige Validierung.

Wie die XO-Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{yy}^{XO,asc}$ unter Einfluss des ITG-GRACE2010s in Abbildung 6.5(c) zeigen, ist neben der Häufung größerer Residuen in Polnähe vor allem eine Häufung südlich von Australien auffällig. Als regionaler Einflussfaktor kommt das Erdmagnetfeld in Form des *magnetischen Südpols* in Frage, dessen Position im Jahre 2010 etwa bei $(\lambda, \varphi)_{\text{mag.SP}} = (137.32°, -64.43°)$ lag (Thébault et al., 2015) und damit recht gut in das 'Zentrum' der Region hoher Residuen fällt. Dies trifft in erster Näherung auch für vergleichsweise hohe XO-Residuen um den *magnetischen Nordpol*[1] zu. Eines der Ziele dieser Arbeit ist die Identifikation und Beschreibung 'auffälliger' Gradienten. Eine weiterführende Interpretation ihrer Ursachen ist jedoch nicht Gegenstand der Untersuchungen.

Abbildung 6.5 enthält neben den eigentlichen - farbkodierten - Residuen einzelne grüne Punkte, die Positionen von 'Ausreißern' markieren. Diese wurden mit Hilfe der 4σ-Regel identifiziert (vgl. Abs. 2.2.1, S. 23). Ihre Verteilung deutet neben einzelnen Ausreißern auch auf Regionen höherer Residuen hin.

Ob die regionalen Auffälligkeiten in anderen Tensorelementen an ähnlichen Positionen auftreten, wird in Abbildung 6.6 deutlich, die geografische Darstellungen farbkodierter XO-Residuen aller GGT-Komponenten zeigt. Im Gegensatz zu Abbildung 6.5 werden die Residuen hier im GRF_{asc} dargestellt. Aufgrund der 'umgekehrten' Subtraktion der GGT (GRF_{asc}: $\boldsymbol{V}_{ij}^{XO,\boldsymbol{asc}} - \boldsymbol{V}_{ij,komb}^{XO,desc} \overset{transform.}{\longleftarrow} {}^{asc}$ bzw. GRF_{desc}: $\boldsymbol{V}_{ij}^{XO,\boldsymbol{desc}} - \boldsymbol{V}_{ij,komb}^{XO,asc} \overset{transform.}{\longleftarrow} {}^{desc}$; vgl. Gl. (5.38) und 5.39) unterscheiden sich die Residuen in erster Linie durch ihr Vorzeichen. Es sei außerdem darauf hingewiesen, dass die Farbskala der Residuen der zz- und xz-Komponenten im Vergleich zu den anderen einen doppelt so großen Wertebereich umspannen.

Es zeigt sich, dass die Ursache der Häufung höherer Residuen südlich von Australien ausschließlich Einfluss auf die yy-Komponente und in Ansätzen auf die xy-Komponente (Häufung der 'Ausreißer') zu nehmen scheint. Aufgrund des Drehung-bedingten Signalaustauschs wird yy-Information vor allem zwischen $\boldsymbol{V}_{xx}$, $\boldsymbol{V}_{yy}$ und $\boldsymbol{V}_{xy}$ übertragen. Da die Häufungen am deutlichsten in $\boldsymbol{V}_{yy}$ sichtbar sind, wird der Ursprung der vergleichsweise hohen Residuen in $\boldsymbol{V}_{yy}$ gesehen.

Ansatzweise ist in den Residuen der xz- und yz-Komponenten der Verlauf des magnetischen Äquators erkennbar. Eine Einflussnahme auf die Gradienten wäre entweder über einen direkten

[1] Der *magnetische Nordpol* lag im Jahre 2010 laut Thébault et al. (2015) bei $(\lambda, \varphi)_{\text{mag.NP}} = (-132.84°, 85.02°)$.

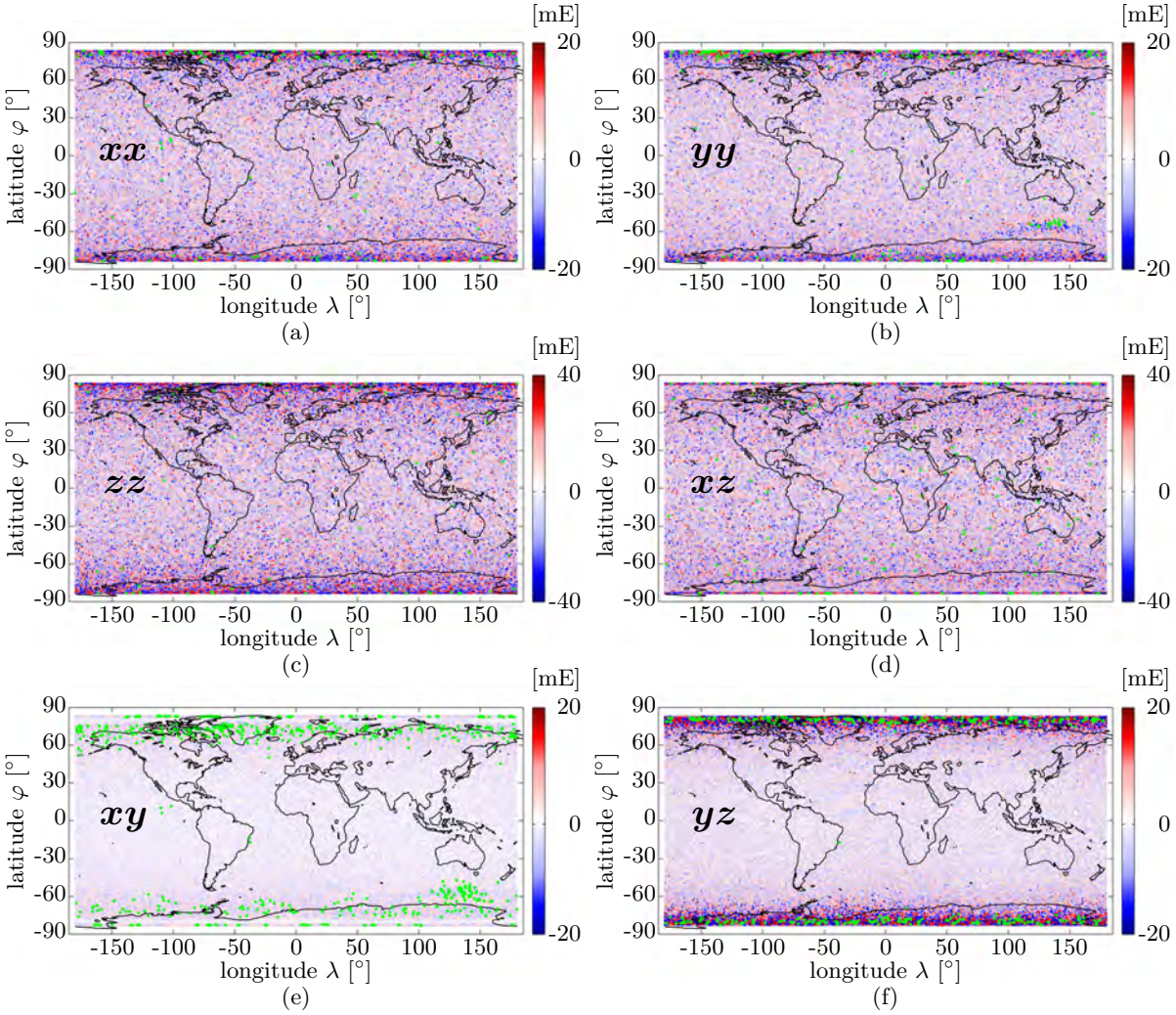


Abbildung 6.6: Geografische Darstellung farbkodierter XO-Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO,desc}$ auf Grundlage des ITG-Grace2010s. Ausreißer (4 σ) werden grün dargestellt.

Einfluss auf das Gradiometer denkbar oder könnte über kleinste Orientierungsänderungen des Satelliten beim Passieren des magnetischen Äquators induziert worden sein. In diesem Fall wäre die Kalibration des Gradiometers nicht gut genug, um diesen Effekt abzufangen, oder die Orientierungen sind nicht gut genug bestimmt. Da die Größenordnung dieses Einflusses auf die Gradienten äußerst gering ausfällt, ist keine signifikante Verminderung ihrer Qualität zu befürchten.

Wie in Abbildung 6.6 ersichtlich, ist eine deutliche Häufung vergleichsweise großer Residuen in Polnähe zu verzeichnen. Brieden und Müller (2014a) untersuchen XO-Residuen in den Polregionen und zeigen deren starke räumliche Korrelation mit den magnetischen Polen. Die XO-Residuen der xz-, xy- und yz-Komponenten zeigen in Polnähe auffällige 'Breiten-Bänder' mit vergleichsweise geringen Residuen (vgl. auch Abb. 6.4(a)). Diese ergeben sich in Regionen, in denen der Modellanteil in den GGT hoch ist. Daraus kann gefolgert werden, dass sich in Bereichen (Frequenzen, Regionen, ...), in denen beide $\boldsymbol{V}_{ij}$ im XO vergleichsweise viel Modell beinhalten, kleine Residuen ergeben (siehe auch Closed-loop Test, Abs. 5.6).

In Polnähe häufen sich aber nicht nur recht große Residuen, auch die Anzahl der XOs ist dort mit Abstand am größten (siehe Abb. 6.4(a), rechts). Einzelne Ausreißer oder Kreuzungen mit 'erhöhten' Residuen bilden sich daher vermehrt dort ab, wo viele XOs entstehen. Brieden und Müller (2014b) untersuchten XO-Residuen in verschiedenen Breitenbändern und zeigten, dass nur etwa 26 % aller XOs in Breiten zwischen $\pm 70°$ liegen. Der Großteil ergibt sich in (absoluten) Breiten von $> 70°$. Werden ausschließlich Residuen im Bereich des Äquators ($\varphi = \pm 50°$) untersucht, reduziert sich deren RMS für $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ um bis zu 1/3.

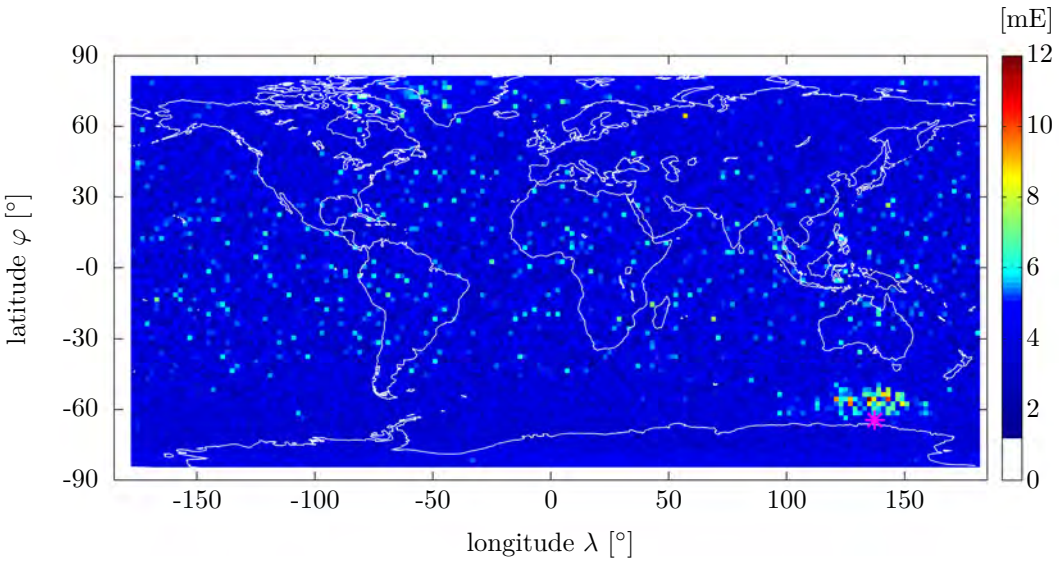


Abbildung 6.7: RMS der XO-Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{yy}^{XO,asc}$ in jeder 2° × 2° Gitterzelle. Der violette Stern gibt die Position des magnetischen Südpols im Jahre 2010 an (Thébault et al., 2015).

Die RMS von $\boldsymbol{V}_{zz}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ bleiben nahezu unverändert, womit die weniger stark ausgeprägte Breitenabhängigkeit der Residuen unterstrichen wird (siehe Abb. 6.6(c) und 6.6(d)).

Wie eingangs bereits erwähnt, liegt der Fokus der regionalen Untersuchung auf Regionen, in denen die Gradienten eine 'dauerhafte' Beeinflussung zeigen. Um derartige Gebiete zu identifizieren, sollte auch die Anzahl der XOs je Region berücksichtigt werden. Dies gelingt durch Einteilung der XOs in ein geografisches Gitter. Werden die Residuen der Kreuzungspunkte innerhalb jeder Gitterzelle statistisch ausgewertet, sind Gitterzellen mit den größten Residuen, genauso wie Zellen mit großer Streuung o.ä., leicht auszumachen.

Am Beispiel des 62.5-tägigen Datensatzes eignet sich eine Gittergröße von 2° × 2°. Diese Größe sollte nicht unterschritten werden, da aufgrund der vergleichsweise wenigen XOs in Äquatornähe einzelne Zellen (2° × 2°) bereits nur 10 XOs enthalten. In Polnähe entfallen - trotz der aufgrund der Projektion kleineren Fläche - auf eine 2° × 2° große Gitterzelle bis zu 1275 XOs.

Abbildung 6.7 zeigt die geografische Darstellung der RMS-Werte der $\Delta \boldsymbol{V}_{yy}^{XO,asc}$ in jeder Gitterzelle (2° × 2°). Die polnahen Regionen, in denen in Abbildung 6.5 auffällig viele relativ große Residuen zeigt, weisen überwiegend geringe RMS auf. In einem breiten Band (±45°) um den Äquator ist die Variabilität der RMS hoch.

Vor dem Hintergrund der Eigenschaften der RMS ist zu folgern, dass in Polnähe die meisten Residuen vergleichsweise kleine Beträge aufweisen und sich die (optische) Häufungen großer Residuen (siehe Abb. 6.5) überwiegend auf verhältnismäßig 'wenige Ausreißer' zurückführen lässt. Der RMS ist robust gegen einen geringen Anteil großer Residuen in der Stichprobe und zeigt daher in Polnähe kaum Auffälligkeiten. Im Band um den Äquator ist die Anzahl der XOs weitaus geringer und einzelne Ausreißer haben starken Einfluss auf den RMS, so dass dieser stark variiert.

In zwei Regionen werden Häufungen großer RMS deutlich: im besagten Bereich südlich von Australien und (weniger scharf) im Gebiet um die Baffin Bay im Bereich von Grönland und dem Kanadisch-Arktischen Archipel. Die Ursache der regionalen Häufung südlich von Australien sind wahrscheinlich Einflüsse durch das Erdmagnetfeld: Die Position des magnetischen Südpols im Jahre 2010 ist in Form eines violetten Sterns in Abbildung 6.7 enthalten. Eine etwaige Magnetfeld-verursachte Einflussnahme zeigt sich jedoch ausschließlich in der yy-Komponente des GGT. Dies gilt auch für die Region um die Baffin Bay, wobei eine tiefer gehende Interpretation der Ursachen nicht Gegenstand dieser Untersuchungen ist.

6.4 Lokale Artefakte mit zeitlich begrenztem Einfluss auf die Gradienten

Die XO-Residuen werden in diesem Abschnitt im Hinblick auf lokale Artefakte mit zeitlich begrenztem Einfluss auf die GGT-Zeitreihen untersucht. Darunter fallen Ausreißer genauso wie kurzwellige Oszillationen etc., die die Gradienten beeinflussen. Deren Ursachen sind meist satellitenspezifischer Natur und können sich als Folge von *Beam-Outs* (vgl. Abs. 3.3, S. 54) ergeben. Brieden und Müller (2011) untersuchten bekannte 'Ereignisse' mit Einfluss auf die GGT-Zeitreihen, sogenannte 'Special Events'. Diese umfassen auch Beam-Outs, sind der ESA meist bekannt und werden dokumentiert. Brieden und Müller (2011) zeigten, dass sich der Einfluss von 'Special Events' sehr unterschiedlich in den XO-Residuen abbilden kann, so z.B. als deutliche Oszillationen oder in Form eines Versatzes.

Die beschriebenen Artefakte sind 'ursprünglich' in den GGT-Zeitreihen enthalten. Um sie anhand von XO-Residuen identifizieren zu können, muss sich deren Einfluss auf die beteiligten Gradienten in XOs fortgepflanzt haben. Durch die ungleiche geografische Verteilung der XOs (Häufung in Polnähe, wenige im Äquatorbereich) gelingt deren Identifikation unterschiedlich deutlich: In Polnähe treten derart viele XOs auf, dass sich zwischen den 1 Hz Stützstellen in der originalen GGT-Zeitreihe bis zu drei XOs ergeben. Im Äquatorbereich ist die 'XO-Dichte' so gering, dass der zeitliche Abstand der XOs im Durchschnitt etwa 16 s beträgt (jeweils 62.5-tägiger Datensatz). Artefakte können daher in Polnähe auf Basis einer deutlich größeren Anzahl an 'Stützstellen' leichter und sicherer identifiziert werden.

In der ursprünglichen GGT-Zeitreihe kann sich der Einfluss der Artefakte u.U. auf nur sehr wenige Stützstellen der Zeitreihe beschränken. Dies macht - speziell in Äquatornähe - eine Identifikation schwierig und zeigt die Grenzen des Verfahrens. Werden die Untersuchungen jedoch auf eine größere Datenbasis gestützt, ergeben sich auch in Äquatornähe mehr XOs und die Wahrscheinlichkeit einer Identifikation steigt.

Darüber hinaus sind die Vorverarbeitungsschritte (Interpolation und Filterung) entscheidend, die zur Identifikation von Artefakten gleichermaßen störend und hilfreich sind: Wie in Abschnitt 5.3.3 bereits angedeutet, bewirken sowohl Interpolation als auch Filterung einerseits eine Verringerung der Amplitude etwaiger Artefakte, wodurch diese in den XO-Residuen weniger deutlich abgebildet werden; andererseits sorgt die Filterung der GGT-Zeitreihe dafür, dass zeitlich sehr begrenzte Artefakte ('einzelne Ausreißer') auf einen 'breiteren' Bereich der Zeitreihe Einfluss nehmen. Dadurch bilden sich selbst im Äquatorbereich einzelne Ausreißer in den XO-Residuen ab und eine Identifikation wird wahrscheinlicher.

Wie in Abschnitt 5.5.1.2 erläutert, werden die GOCE GGT-Zeitreihen im Zuge der Datenverarbeitung zuerst Hochpass (Grenzfrequenz: 0.003 Hz) und - als mit Modellgradienten kombinierten Zeitreihe - anschließend Tiefpass (Grenzfrequenz: 0.1 Hz) gefiltert. Um eine Identifikation im Ausgangssignal der zweiten Filterung zu erlauben, sollte dessen Form bekannt sein. Dieses ergibt sich durch Faltung der Ausgangssignale beider Filter (siehe Abb. 5.11 und 5.16) nach Anregung mit der Dirac-Funktion. Wie bereits im Umfeld der Abbildungen diskutiert, verkleinert sich die Amplitude eines Ausreißers auf etwa 20 % und entstehen sich Nebenkeulen ('Nebenschwingungen') in dessen Umfeld. Die ersten Nebenkeulen bilden sich als Reaktion auf die Hochpass-Filterung bei 0.003 Hz im Abstand von etwa 230 s vom Ausreißer entfernt (siehe Abb. 5.16). Die Tiefpass-Filterung bei 0.1 Hz resultiert in Nebenkeulen im Abstand von etwa 7 s (siehe Abb. 5.11). Beide sind wichtig, um etwaige Schwingungen in den Residuen richtig zu interpretieren.

Für die Interpretation und die Identifikation von Artefakten in den Zeitreihen der XO-Residuen ist es entscheidend, dass jedes XO-Residuum als Differenz zweier Gravitationsgradienten im XO entstanden ist. Ergibt sich ein 'großes' Residuum, kann dessen ursächlicher GGT entweder entlang des aufsteigenden (asc) Bahnastes oder entlang des absteigenden (desc) Bahnastes liegen. Aus der reinen Differenz ist keine Zuordnung (*asc* oder *desc*) möglich. Daher werden auch die Residuen entlang der beteiligten Bahnbögen bzw. im zeitlichen Umfeld des jeweiligen Kreuzungszeitpunktes entlang beider Bahnbögen untersucht. Abbildung 6.8 zeigt alle XO-Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{yy}^{XO}$ des 62.5-tägigen Datensatzes entlang aufsteigender (GRF_{asc}) sowie

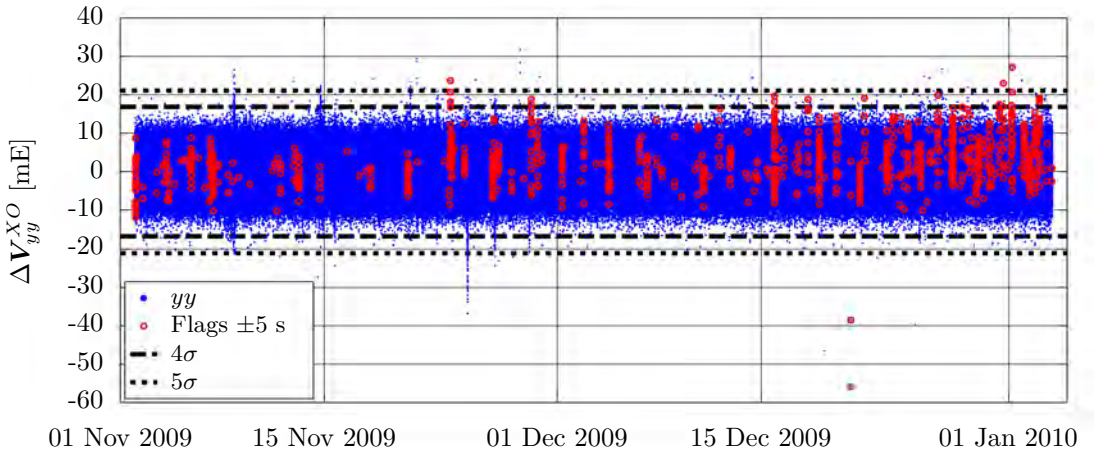


Abbildung 6.8: $\Delta \boldsymbol{V}_{yy}^{XO}$ entlang der Residuen-Zeitreihe des 62.5-tägigen Datensatzes. XOs im Umfeld (±5 s) datenbedingter Ausreißer sind rot markiert. Die 4σ sowie 5σ Grenzen sind ebenfalls dargestellt.

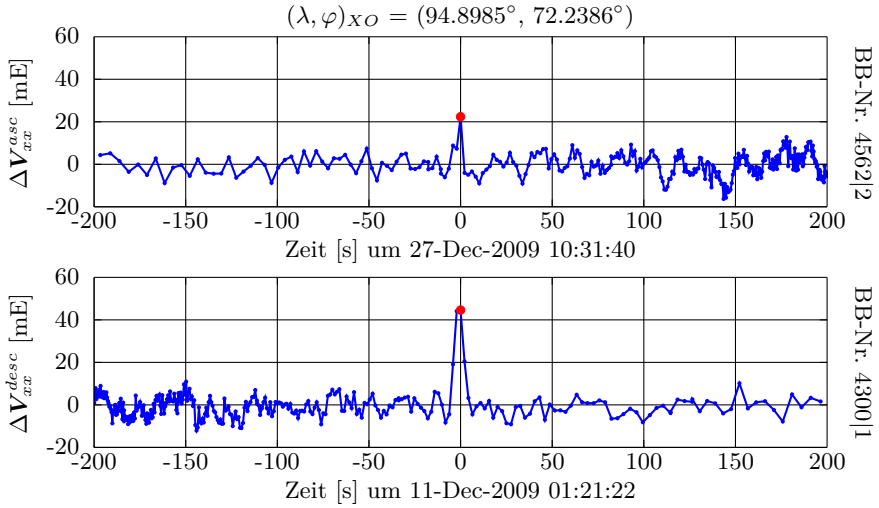
absteigender (GRF_{desc}) Bahnbögen. Es werden deutliche Häufungen vergleichsweise großer Residuen zu einigen Zeiten deutlich. In rot werden diejenigen XOs dargestellt, die in das zeitliche Umfeld von ±5 s um datenbedingte Ausreißer fallen (Flags > 3, Tab. 3.3). Im Falle der hier betrachteten *yy*-Komponente sind dies im Umfeld der 306 datenbedingten Ausreißer (siehe Tab. 6.1) insgesamt 1073 XOs. Teilweise stimmen datenbedingte Ausreißer und vergleichsweise große Residuen überein, an vielen Stellen ist dies nicht der Fall. Ursachen könnten sein, dass die datenbedingten Ausreißer - die sich auf die originalen GGT-Zeitreihen beziehen - nicht auf die XO-Residuen 'übertragen' wurden, oder sich - beispielsweise aufgrund ihrer geringen Größenordnung - auf Basis der XO-Residuen nicht bestätigen lassen. Außerdem ist zu beachten, dass im Umfeld aller 306 datenbedingten Ausreißer XOs markiert wurden, von denen nur 96 direkt auf $\boldsymbol{V}_{yy}$ entfallen (siehe Tab. 6.1). Auf der anderen Seite treten Häufungen großer Residuen auf, in deren Umfeld keine datenbedingten Ausreißer ausgemacht werden konnten. Die folgenden Betrachtungen behandeln Beispiele einiger dieser Fälle.

Eine einfache Art der Identifikation vergleichsweise großer Residuen bietet die $4\sigma - 5\sigma$ Regel. Entsprechende 'Grenzen' sind in Abbildung 6.8 erkennbar. Werden diese 'Grenzen' überschritten, werden potentielle Artefakte in den Residuen-Zeitreihen vermutet und es erfolgt eine Untersuchung entlang beider an der Kreuzung beteiligten Bahnbögen.

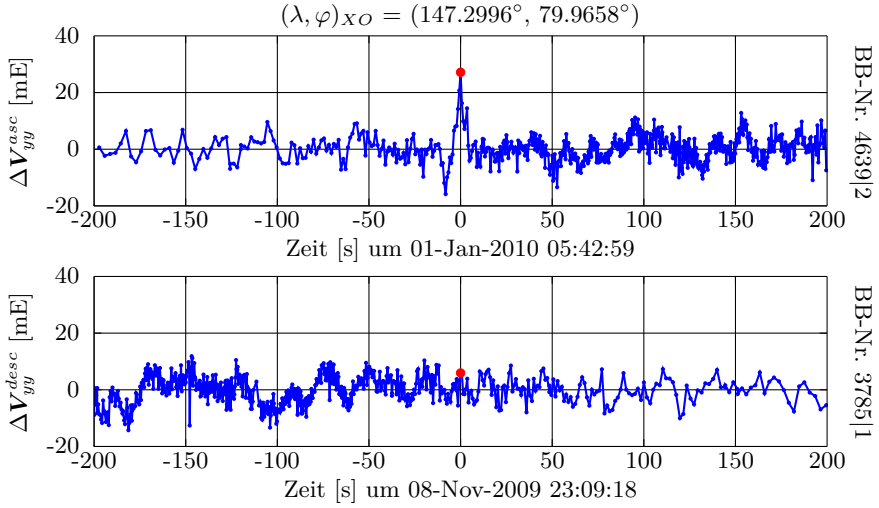
Einzelne Ausreißer

Abbildung 6.9 zeigt zwei Beispiele, wie sich datenbedingte Ausreißer (geflaggt, Flag > 3) in den XO-Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{xx}^{XO}$ bzw. $\Delta \boldsymbol{V}_{yy}^{XO}$ darstellen können. Die obere Abbildung enthält jeweils die Residuen entlang des aufsteigenden (*asc*) Bahnbogens, die untere entsprechend die entlang des absteigenden (*desc*) Bahnbogens. Der zentrale Punkt (rot) ist als Ausreißer identifiziert worden und stellt den Punkt dar, in dem sich die beteiligten Bahnbögen kreuzen. Die Abbildungen zeigen die zeitlich ungleichen Abstände zwischen den XOs. Diese entstehen aufgrund der ungleichen geografischen Verteilung der XOs und führen zu zeitlich sehr nahen XOs in Polnähe. Im betrachteten Zeitfenster von ±200 s um den Ausreißer treten daher entsprechende Häufungen auf.

Wie bereits diskutiert, ist die Frage zu klären, welchem der beiden Bahnbögen das Artefakt ursprünglich entstammt. Im Falle von Abbildung 6.9(a) ist der absteigende Bahnbogen der 'ausreißerbehaftete', im Falle von Abbildung 6.9(b) der aufsteigende Bahnbogen. Die unterschiedlichen Amplituden der Ausreißer ergeben sich aufgrund der unterschiedlichen Orientierungen der hier betrachteten GGT-Komponenten: GRF_{asc} im Falle der $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO,asc}$ und GRF_{desc} im Falle der $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO,desc}$.



(a)



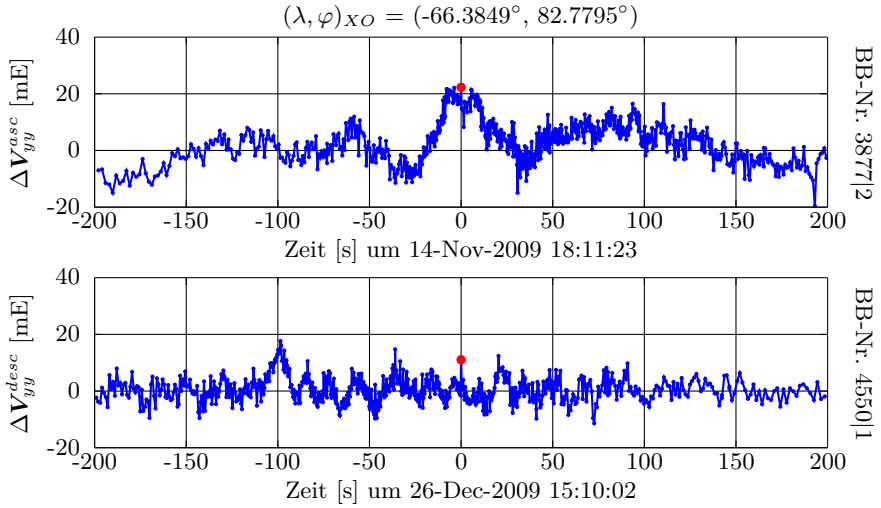
(b)

Abbildung 6.9: Einzelne Ausreißer in den XO-Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO}$, die beide als datenbasierte Ausreißer 'geflagged' wurden. Die Positionsangaben $(\lambda, \varphi)_{XO}$ erlauben eine räumliche Zuordnung der Artefakte. Die Bahnbogennummern (BB-Nr.) beziehen sich auf den Bahnbogen des zentralen Punktes und ermöglichen - ergänzend zu Datum und Zeit selbst - eine zeitliche Einordnung.

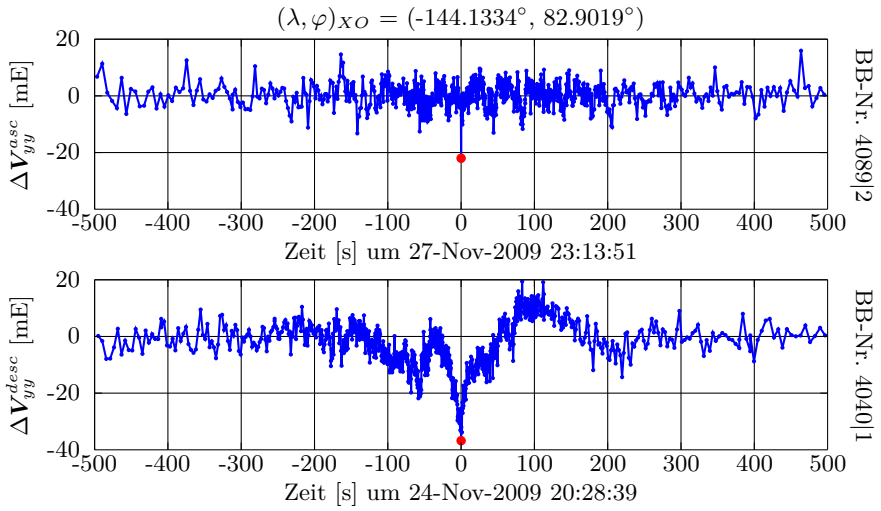
Bei den einzelnen Ausreißern gemäß Abbildung 6.9 handelt es sich in beiden Fällen um den Einfluss datenbedingter Ausreißer (geflaggt). Beide können auf Basis der XO-Residuen identifiziert und als Ausreißer bestätigt werden.

Sequentielle Ausreißer

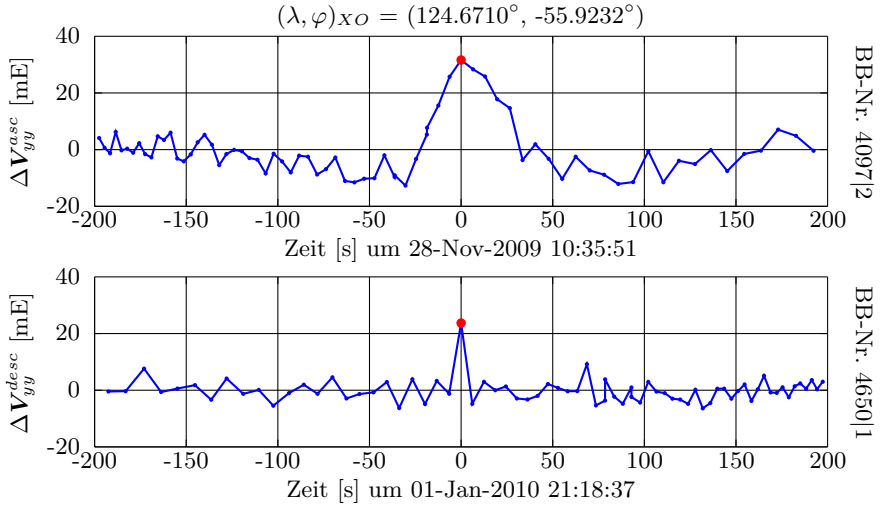
Abbildung 6.10 zeigt weitere ausgewählte Beispiele von Ausreißern (4σ) in den XO-Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{yy}^{XO,desc}$, in deren Umgebung keine Beobachtung als datenbasierter Ausreißer klassifiziert wurde. Im Vergleich zu Abbildung 6.9 wird deutlich, dass es sich hier nicht um einzelne Ausreißer handelt, sondern Artefakte über einen größeren Bereich der GGT-Zeitreihe erkennbar sind. Jarecki (2010) bezeichnet derartige Artefakte als 'sequentielle Ausreißer'. Ausreißer- bzw. artefaktbehaftete Bahnbögen lassen sich leicht ausmachen: Jeweils der aufsteigende Bahnbogen in Abbildungen 6.10(a) und 6.10(c) und der absteigende Bahnbogen in Abbildung 6.10(b). Abbildungen 6.10(a) und 6.10(b) zeigen XO-Residuen in Polnähe (Nordpol). Abbildung 6.10(c) beinhaltet Residuen entlang eines Bahnbogens, der das Gebiet erhöhter Residuen südlich von Australien kreuzt. Die 'Spitzen' der Residuen-Verläufe sind unter anderen in Abbildungen 6.5(c) und 6.6(b) als 'Ausreißer' (4σ, grün) markiert.



(a)



(b)



(c)

Abbildung 6.10: Sequentielle Ausreißer in den XO-Residuen ΔV_{yy}^{XO}, von denen keiner als datenbasierter Ausreißer 'geflagged' wurde. Die Positionsangaben $(\lambda, \varphi)_{XO}$ erlauben eine räumliche Zuordnung der Artefakte. Die Bahnbogennummern (BB-Nr.) beziehen sich auf den Bahnbogen des zentralen Punktes und ermöglichen - ergänzend zu Datum und Zeit selbst - eine zeitliche Einordnung.

Wie in Abbildung 6.10 ersichtlich, bilden sich diese sequentiellen Ausreißer zum Teil sehr unterschiedlich in den XO-Residuen ab: Im Falle von Abbildung 6.10(a) als abklingende Schwingung um den als Ausreißer markierten Zentralpunkt; als deutlicher Anstieg der Residuen über etwa einer Minute der GGT-Zeitreihe (Abb. 6.10(c)) oder in Form einiger anscheinend überlagerter Schwingungen (Abb. 6.10(b)).

Alle zeigen klare 'Signalstrukturen' in den Residuen, die von einem 'Rauschen' überlagert sind. Speziell in Polnähe werden diese von vielen XOs bestätigt. Neben den Artefakt-Anteilen in direkter Umgebung der Ausreißer enthalten die Residuen weitere längerperiodische Anteile, wie beispielsweise in Abbildung 6.10(a) (Maximum zur Zeit des Ausreißers) sowie Abbildung 6.10(c) (Minimum zur Zeit des Ausreißers) erkennbar.

Ein Ziel dieser Arbeit war die Identifikation und Beschreibung von Artefakten in den Zeitreihen der GOCE-Gravitationsgradienten. Beides gelingt, wie in den vorangehenden Abschnitten beschrieben, auf Basis der GGT-Residuen in Kreuzungspunkten. Eine Interpretation der Artefakte ist zwar - speziell im Hinblick auf sequentielle Ausreißer - interessant, geht jedoch über das Ziel dieser Arbeit hinaus.

Je nach weitergehender Analyse sollte die Modellierung der Artefakte erfolgen. Entsprechend kann eine punktweise Nutzung der XO-Residuen sinnvoll sein oder deren lokaler Verlauf beispielsweise mittels einiger überlagerter Sinus- und Kosinusfunktionen beschrieben werden.

6.5 Zusammenfassung und Diskussion

In den vorangehenden Abschnitten wurden GOCE-Gravitationsgradienten in Kreuzungspunkten (XOs) verglichen. Die Analyse der XO-Residuen $\Delta \boldsymbol{V}_{ij}^{XO}$ erfolgte in den Kategorien *Qualität des Gesamtdatensatzes*, *regionale Untersuchungen* und *zeitlich lokale Artefakte*. Die Residuen werden dabei 'doppelt' betrachtet, in dem sie sowohl entlang des aufsteigenden Bahnbogens (im GRF_{asc}) als auch entlang des absteigenden Bahnbogens (im GRF_{desc}) analysiert werden. Da sowohl die Bahnbögen selbst, als auch die Orientierungen der GRF_{asc} und GRF_{desc} in Polnähe nahtlos ineinander übergehen, ist die Analyse der Residuen 'entlang der Zeitreihe' möglich. Dabei ist zu berücksichtigen, dass sich die XOs nicht in gleichen zeitlichen Abständen ergeben.

Das Ziel der XO-Analyse ist die Qualitätsbeurteilung der GOCE-Gradienten. In den Kreuzungspunkten werden allerdings nicht die ursprünglichen Beobachtungen miteinander verglichen. Vielmehr ist jedes XO-Residuum aus der Kombination von jeweils vier Stützpunkten entlang jedem der beiden Bahnbögen entstanden (je 4 GGT/Bahnbogen), wobei jeder GGT zudem durch Tensordrehung und Höhenreduktion modifiziert wurde. Da jeweils mehrere GGT beteiligt sind, kann - im Sinne der Fehlerfortpflanzung - die Präzision des einzelnen GOCE-Gradienten höher sein als sich aus der XO-Analyse ergibt. Auf eine zur genauen Beurteilung notwendige detaillierte Fehlerfortpflanzung wird an dieser Stelle verzichtet. Es sein aber festgehalten, dass die XO-Analyse aufgrund des Vergleichs abgeleiteter Größen nur eine 'indirekte' Beurteilung der Präzision der originalen GOCE-Gradienten erlaubt.

Die Untersuchungen der Qualität des Gesamtdatensatzes bestätigen eine Normalverteilung der Residuen, zeigen aber auch unterschiedliche Qualitäten der einzelnen Tensorkomponenten auf: $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ weisen mit 4 mE einen RMS auf, der die Erwartungen der Tensor-Spur unterschreitet. Der RMS der beiden weiteren hochgenauen Komponenten $\boldsymbol{V}_{zz}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ ist im Vergleich etwa um einen Faktor zwei höher und ergibt sich auf Basis der XO-Residuen zu 8 - 9 mE. Die Untersuchungen der Abhängigkeiten unterstreichen die Häufung der XOs in Polnähe und deuten dort auf eine Häufung vergleichsweise großer Residuen hin. Darüber hinaus können keine Korrelation zur Höhendifferenzen im Kreuzungspunkt o.ä. identifiziert werden.

Die regionale Analyse zeigt einzelne Regionen mit Häufungen vergleichsweise großer Residuen. Diese sind z.T. abhängig von der Wahl des zugrunde gelegten EGM. Um die Unabhängigkeit von GOCE-basierten Modellen sicherzustellen, wird empfohlen, aktuelle GRACE-basierte Modelle (z.B. ITG-Grace2010s) zu nutzen. Auf deren Basis werden Regionen entspre-

chend großer Residuen südlich von Australien sowie in Polnähe sichtbar. Als Ursache werden Wechselwirkungen mit dem Erdmagnetfeld vermutet. Die Auswirkungen stellen sich in den Tensorkomponenten unterschiedlich dar. Am deutlichsten sind diese in $\Delta \boldsymbol{V}_{yy}^{XO}$ erkennbar.

Die Untersuchung der Residuen in regionalen Gitterzellen ($2° \times 2°$) bestätigt einen dauerhaften Einfluss auf die Gradienten (vor allem $\boldsymbol{V}_{yy}$) südlich von Australien, der sich in einem erhöhten Rauschniveau äußert. Was die Häufung größerer Residuen in Polnähe betrifft, so lässt sich kein dauerhafter Einfluss auf die Gradienten bestätigen. Die Häufung ist auf wenige Artefakte in den Zeitreihen zurückzuführen, die jedoch in Polnähe vermehrt auftreten.

Im Rahmen der Untersuchung lokaler Artefakte in den XO-Residuen werden sowohl einzelne Ausreißer als auch Artefakte mit Einfluss auf einen Bereich der GGT-Zeitreihe, sogenannte sequentielle Ausreißer, identifiziert. In puncto einzelne Ausreißer ist eine Grenze der Identifizierbarkeit mit Hilfe des hier entwickelten Verfahrens erreicht, falls Ausreißer zu weit von einem XO entfernt liegen. Nur im Falle einer Einflussnahme des Ausreißers auf den GGT im XO ist dessen Identifikation möglich. Abhilfe schafft die Erweiterung des Datensatzes, der mit einer höheren 'Dichte' an Kreuzungspunkten auch im Äquatorbereich einhergeht.

Für die Identifikation von sequentiellen Ausreißern in den Daten ist vor allem die Analyse der Gradienten in XOs in hervorragender Weise geeignet. Wie ein Vergleich mit bekannten 'datenbasierten Ausreißern' - die aus einer offiziellen Daten-Voranalyse der ESA hervorgegangen sind - zeigt, werden sequentielle Ausreißer darin nicht erkannt. Auf Basis der XO-Residuen lassen sich diese jedoch präzise beschreiben.

Diskussion

Die Analyse von Gravitationsgradienten in Kreuzungspunkten ist ein relatives Verfahren. Dabei wird implizit zugrunde gelegt, dass ein Großteil der Gradienten richtig und fehlerfrei ist und auffällig große Residuen einem der beiden Beobachtungen im Kreuzungspunkt zugeordnet werden kann. Es handelt sich daher um eine Möglichkeit der Konsistenzprüfung mit dem Ziel der Validierung der Gradienten. Eine Erweiterung der Prüfung ist möglich, indem auf Grundlage eines bereits validierten Datensatzes 'neue' Daten in gemeinsamen Kreuzungspunkten untersucht werden.

Aufgrund der Vorverarbeitung erlaubt das Verfahren die Qualitätsbeurteilung der Gradienten in einem bestimmten Frequenzbereich, hier zwischen 0.003 Hz und 0.1 Hz. Der Vergleich in XOs ist als unabhängiges Verfahren zu betrachten, wobei als einzige 'externe Information' ein Gravitationsfeldmodell (EGM) genutzt wird. Im Rahmen der Untersuchungen wurde diskutiert, dass das EGM explizit nicht GOCE-basiert gewählt werden sollte, was auch nicht notwendig ist. Ein 'aktuelles' GRACE-basiertes Modell reicht als Basis der Analyse vollkommen aus.

Die Analyse der XO-Residuen dient der Qualitätsbeurteilung des GGT-Datensatzes und erlaubt die Identifikation auffälliger Regionen sowie zeitlicher Bereiche in der GGT-Zeitreihe. Besonderes Potential hat das Verfahren zur Identifikation sequentieller Ausreißer, die vom Algorithmus der offiziellen ESA Daten-Voruntersuchung nicht als solche klassifiziert wurden.

Ein Ansatz, bei dem ebenfalls eine Vergleich von GOCE-Gravitationsgradienten in Bahnhöhe stattfindet, ist die Validierung entlang kollinear verlaufender Bahnen (*collinear tracks*). Dieser wurde in Brieden und Müller (2016) vorgestellt und sieht vor, Gradienten entlang jeweils benachbarter auf- bzw. absteigender Bahnbögen miteinander zu vergleichen. Was die Punkte Filterung und Höhenreduktion betrifft, gleicht die Methodik der Validierung entlang kollinearer Bahnen der der Kreuzungspunktanalyse. Ein Vorteil des Vergleichs entlang kollinearer Bahnen ist der geringe Orientierungsunterschied zwischen den Koordinatensystemen der zu vergleichenden Gradiententensoren; ein Nachteil ist die zusätzlich zur Höhenreduktion notwendige 'Lagereduktion': Da die Entfernungen der Bahnbögen - speziell am Äquator - immer einige Kilometer voneinander entfernt verlaufen, muss auch diese unterschiedliche Lage der Bahnen bei der Validierung berücksichtigt werden. Aufgrund der sehr ähnlichen Orientierungen der Gradiometer-Koordinatensysteme gleichen sich beide Verfahren in Polnähe und gehen dort 'ineinander über'.

7

Gradiometerkonzepte zukünftiger Schwerefeld-Satellitenmissionen

Die Entwicklung von Konzepten für zukünftige Schwerefeld-Satellitenmissionen wurde in den vergangenen Jahren von vielen Institutionen unterstützt und gefördert. Von der ersten Idee eines Missionskonzeptes über verschiedene Analysestufen bis hin zur etwaigen Realisierung sind viele Entscheidungen zu treffen. Dieser Prozess kann sich über Jahrzehnte hinziehen. Nach den bisherigen Missionen Champ (2000-2010), GRACE (2002-heute) und GOCE (2009-2013) wird derzeit die GRACE Follow-On Mission vorbereitet, deren Start für 2017 prognostiziert wird.

Für potentielle Nachfolgemissionen wäre es jetzt an der Zeit, geeignete Konzepte zu entwickeln. Erste Fragen sollten sein, welche Ergebnisse eine Mission erbringen sollte und welche Anforderungen an sie gestellt werden müssten? Welche Anforderungen werden an die Mission gestellt? Was die Satellitenmissionen zur Bestimmung des Schwerefeldes ('richtiger' wäre: des Gravitationsfeldes) betrifft, so stellen sich Fragen zur räumlichen und zeitlichen Auflösung, meist eng verbunden mit dem Fokus auf Optimierung der Mission zur Bestimmung statischer oder zeitvariabler Lösungen. Diese Lösungen werden von vielen 'Parametern' (Instrumente, Satellitenbahn, ...) beeinflusst, die gegenseitig stark voneinander abhängen. Bei der Missionplanung ist es daher wichtig, die Interaktionen und Wechselwirkungen der Parameter zu analysieren und für die Anforderungen an das Zielprodukt zu optimieren. Abschnitt 7.1 gibt einen Einblick in die Missionsplanung und dokumentiert entscheidende Ergebnisse bisheriger Studien.

Die meisten aktuellen Studien empfehlen GRACE-ähnliche Instrumentenkonzepte, die auf einem ll-SST (low-low satellite-to-satellite tracking) Instrument als Hauptsensor beruhen. Dabei sind - wie bereits bei GRACE Follow-On als Demonstrator integriert (Sheard et al., 2012) - oftmals laserbasierte Instrumente zur Bestimmung von Entfernungsänderungen zwischen meist zwei Satelliten vorgesehen.

Das Hauptinstrument der GOCE-Mission zur Bestimmung eines hochaufgelösten Gravitationsfeldes war das elektrostatische Gravitationsgradiometer (EGG, Abs. 3.2). GOCE-basierte Gravitationsfeldmodelle stellen die derzeit global am höchsten aufgelösten statischen Modelle mit homogener globaler Genauigkeit dar (z.B. EGM_TIM_RL05 (Brockmann et al., 2014) oder GOCO05s (Mayer-Gürr et al., 2015)). Dies zeigt das Potential der Satellitengradiometrie und unterstreicht in beeindruckender Weise die Eignung eines Gradiometers zur Bestimmung des Gravitationsfeldes. Aufgrund des bisherigen Erfolgs sollen in diesem Kapitel Gradiometriekonzepte für zukünftige Gravitationsfeld-Satellitenmissionen diskutiert werden. In Abschnitt 7.2 werden unterschiedliche Technologien vorgestellt, die sich für die Entwicklung von Beschleunigungsmessern bzw. deren Kombination zu Gradiometern eignen.

Am Beispiel eines Missionskonzeptes werden in Abschnitt 7.3 die Kombination unterschiedlicher Beobachtungskonzepte (ll-SST, Gradiometrie) sowie die Bestimmung dritter Ableitungen des Gravitationspotentials diskutiert. Abschnitt 7.4 schließt das Kapitel mit einer Zusammenfassung.

7.1 Missionsplanung und bisherige Studien

Am Anfang jeder Missionsplanung sollte die Frage stehen, welche Anforderungen seitens der Nutzer sowie der Wissenschaft an die Mission gestellt werden. Pail und IUGG Writing Team (2015) untersuchen entsprechende Anforderungen für die Bereiche Hydrologie, Ozean, Kryosphäre und flüssige Erde auf Basis vergangener und aktueller Studien. Konsequent werden die Anforderungen in die Parameter räumliche und zeitliche Auflösung sowie geforderte Messgenauigkeit transformiert.

Aufbauend auf diesen Anforderungen beginnt die eigentliche Missionsplanung. Dabei müssen viele 'Parameter' berücksichtigt werden, die alle Einfluss auf die Ergebnisse in Form von Gravitationsfeldlösungen haben. (Reubelt et al., 2014, Abs. 21.1.3) geben einen guten Überblick über die technischen Herausforderungen und Bedingungen, die sich zwischen verschiedenen Parametern ergeben. Entscheidend ist u.a. das Zusammenspiel der folgenden Parameter (ohne Anspruch auf Vollständigkeit):

- **Satellitenbahn**
  - **Höhe:** Eine niedrige Bahnhöhe führt zur Verstärkung des Gravitationsfeldsignals, bringt aber auch einen Anstieg atmosphärischen Widerstandes mit sich.
  - **Inklination:** Um das Gravitationsfeld der gesamten Erde zu vermessen, sind Inklinationen nahe 90° (polare Bahn) notwendig. Damit geht - je nach Konstellation und Anzahl der Satelliten - in der Regel eine vergleichsweise schlechte räumliche und zeitliche Auflösung der Beobachtungen speziell in Äquatornähe einher. Außerdem können Randbedingungen, z.B. eine geforderte sonnensynchrone Bahn (wie im Falle von GOCE), die Wahl der Inklination beeinflussen.
  - **Formationen:** Werden zwei oder mehr Satelliten eingesetzt, können diese in unterschiedlichen Formationen 'fliegen'. Im Vergleich zu Inline-Bahnen (GRACE-Typ) können zwei Satelliten auch auf Pendel-Bahnen operieren, die es erlauben, Komponenten des Gravitationsfeldes quer zur Bewegungsrichtung des Satellitenpaares zu erfassen. Der Effekt streifiger Fehlermuster, wie er aufgrund der 'einseitigen Beobachtungsrichtung' von Inline-Bahnen üblicherweise auftritt, kann mit Hilfe von Pendel-Bahnen (sowie Bender-Konfigurationen, Bender et al., 2008) deutlich reduziert werden. Realisiert werden Pendel-Bahnen durch eine leichte Verdrehung der Bahnebenen beider Satelliten zueinander. Je größer der Winkel zwischen den Bahnebenen wird, desto größere Relativgeschwindigkeiten treten zwischen den Satelliten auf, die den Einsatz manchen Instrumentariums limitieren. Erfordert das Instrumentarium außerdem eine ständige gegenseitige Ausrichtung der Satelliten zueinander, werden Pendel-Bahn-bedingt vergleichsweise starke Orientierungsänderungen innerhalb jeden Umlaufs notwendig. Diese stellen wiederum eine Herausforderung für die Lageregelung in Verbindung mit einer langen Missionsdauer dar.
- **Anzahl der Satelliten:** Je nach Beobachtungskonzept sind (meist) ein oder zwei Satelliten erforderlich. Mit Hilfe von zwei Paaren (Bender-Konfiguration, Bender et al., 2008) lassen sich zeitliche und räumliche Auflösung entscheidend verbessern und besagte streifige Nord-Süd-Fehlerstrukturen deutlich reduzieren.
- **Instrumentarium**
  - **Hauptinstrument:** Die Wahl des Hauptinstrumentes in Verbindung mit dem Beobachtungskonzept beeinflusst die Anzahl der Satelliten und limitiert mögliche Relativgeschwindigkeiten sowie maximale Abstände zwischen Satelliten. Im Hinblick auf derzeit diskutierte Laser-Entfernungsmessungen zwischen zwei Satelliten können weitere Randbedingungen wichtig werden: Da Energie an Bord des Satelliten nur in begrenztem Umfang zur Verfügung steht, ist die Laserleistung entsprechend anzupassen. Um dennoch Entfernungsänderungen über eine Distanz von 100...200 km bestimmen zu können, wird die Divergenz des Laserstrahls einge-

schränkt. Damit geht wiederum einher, dass die Ausrichtung der Satelliten zueinander - im Vergleich zu mikrowellenbasierten Verfahren - genauer erfolgen muss.

– **Weitere Instrumente:** Je nach Hauptinstrument sind weitere Instrumente notwendig, um z.B. nicht-gravitative Beschleunigungen zu erfassen oder eine genaue Lagebestimmung und Lageregelung des Satelliten zu ermöglichen. Die Instrumente dürfen sich gegenseitig nicht stören und feinste Vibrationen durch Kreisel (Reaktionsräder) sollten beispielsweise die Beschleunigungsmessung nicht negativ beeinflussen.

Vor dem Hintergrund des komplexen Zusammenspiels vieler Parameter stellt sich eine Missionsplanung meist als iterativer Prozess dar. Dabei ist es entscheidend, immer das 'ganzheitliche Konzept' vor dem Hintergrund aller Einflussfaktoren zu berücksichtigen.

Bisherige Studien

In den vergangenen Jahren wurden einige Studien zur Realisierung von Schwerefeld-Satellitenmissionen durchgeführt. Eine übersichtliche Darstellung der Studien unter Nennung wesentlicher und jeweils im Fokus stehender Aspekte ist in GFZ (2016) zu finden:

- 2008 - 2010: einige Studien des Deutschen GeoForschungsZentrums (GFZ);
- 2010: E.motion (Earth System Mass Transport Mission) wurde als Missionsvorschlag zum ESA Explorer Opportunity Mission Call EE8 eingereicht;
- 2009 - 2011: ESA ITT NG2 (Invitation To Tender, Next generation Gravity mission), in dessen Rahmen Simulatoren für zukünftige Schwerefeld-Satellitenmissionen entwickelt wurden;
- 2009 - 2012: BMBF Geotechnologien-Projekt 'Future Gravity Field Satellite Missions', in dem innovative Konzepte zur Schwerefeldbestimmung entwickelt wurden, wobei ein Schwerpunkt auf die Bestimmung zeitvariabler Effekte gelegt wurde;
- NGGM-D (Next Generation Gravity Mission - Deutschland), mit dem Ziel eines Missionskonzeptes zur langfristigen Beobachtung des zeitvariablen Schwerefeldes.

Die Ergebnisse der genannten Studien wurden in Abschlussberichten (u.a. Reubelt et al., 2014; Gruber et al., 2014b; Anselmi et al., 2010) sowie sonstigen Veröffentlichungen (z.B. Elsaka et al., 2014) publiziert. Die Studien sehen ausnahmslos ein oder zwei Paare von Satelliten vor, wobei die Haupt-Beobachtungsgröße die Messung der Abstandsänderungen zwischen zwei Satelliten (ll-SST) ist. Die ll-SST Beobachtung wird oftmals laserbasiert vorgeschlagen, wodurch eine - im Vergleich zu mikrowellenbasierten Verfahren - höhere Genauigkeit der Messung der Abstandsvariationen erwartet wird (Reubelt et al., 2014). Die Konstellationen sind damit GRACE-ähnlich, wenn einige Konzepte auch leichte Pendel-Bahnen beinhalten oder im Falle der NGGM-D Studie eine Bender-Konfiguration (2 Paare: ein polares und ein inkliniertes Paar) vorsehen.

Der Fokus der meisten der genannten Studien liegt auf der Bestimmung zeitvariabler Anteile des Erdschwerefeldes. Diese bilden sich vor allem in langwelligen Signalanteilen ab. Bouman et al. (2012) untersuchen, in welcher Größenordnung sich der (Eis-)Massenverlust in Grönland sowie große Erdbeben auf die GOCE-Gravitationsgradienten auswirken. Es wird ersichtlich, dass selbst diese vergleichsweise riesigen zeitvariablen Signale in GOCE-Bahnhöhe maximal die Größenordnung von 1 mE erreichen und meist deutlich darunter liegen. Sie sind daher in den GOCE-Gradienten nicht identifizierbar. Dies ist auch der Tatsache geschuldet, dass sich - wie angedeutet - die zeitvariablen Anteile in langwelligen Signalanteilen überwiegend unterhalb der GOCE-MBW widerspiegeln. Pail et al. (2011b) sehen daher eher die Bahnen von GOCE als Träger zeitvariabler Information. Visser et al. (2014) untersuchen zeitvariable Schwerefeldanteile auf Basis von GOCE GPS-Bahnen und common-mode Beschleunigungen. Deren Ergebnisse zeigen, dass die kinematischen Bahnlösungen zwar genau genug sein sollten, um Anteile zeitvariabler Effekte zu beinhalten, sich deren Identifikation aber als

Herausforderung darstellt und von hoher Sonnenaktivität und ionosphärischen Störungen auf den GPS-Receiver beeinflusst wird.

In Ergänzung zu den rein ll-SST basierten Konzepten als Ergebnis der genannten Studien, kommen weiterhin Gradiometriekonzepte für die Bestimmung des Erdschwerefeldes in Frage. Um diese nicht aus den Augen zu verlieren, wird der Fokus dieses Kapitels auf die Satellitengradiometrie als Haupt-Beobachtungskonzept gelegt. Dabei sind sowohl rein gradiometerbasierte Konzepte (Gradiometer als Hauptinstrument, Abs. 7.2), als auch Kombinationen von ll-SST und Gradiometrie denkbar (Abs. 7.3).

7.2 Gradiometriekonzepte und Technologien

Die Satellitengradiometrie beruht auf der Beobachtung von Differenzen von Beschleunigungen an zwei Orten im Satelliten. Im Verhältnis zu deren Abstand und unter Berücksichtigung von Winkelgeschwindigkeiten, die das System erfährt, lassen sich aus diesen Beschleunigungsdifferenzen zweite Ableitungen des Gravitationspotentials bestimmen (siehe Gl. (3.3) und 3.4, S. 50).

Gegenüber der Beobachtung von Abstandsänderungen zwischen zwei Satelliten (low-low SST, ll-SST), aus denen beispielsweise im Falle von GRACE und GRACE-FO Informationen für die Gravitationsfeldbestimmung gezogen werden, weist die Satellitengradiometrie zwei wesentliche **Vorteile** auf:

1. Mit den Beschleunigungsdifferenzen kann 'direkt' ein Funktional des Gravitationsfeldes in Form seiner zweiten Ableitungen beobachtet werden, so dass bei der Bestimmung feiner Strukturen des Gravitationsfeldes als Vorteile eine Richtungsabhängigkeit und detailreiche Signale erwartet werden können.

2. Es wird nur ein Satellit benötigt. Folglich reicht - je nach Größe und Gewicht des Gradiometer-Satelliten - ein kleinerer und damit meist preiswerterer Launcher aus, um den Satelliten in seine Umlaufbahn zu befördern. Im Hinblick auf die Launcher-Kosten ist dies speziell im Vergleich zu einer Bender-Konstellation von Vorteil, bei der voraussichtlich zwei Launcher benötigt würden, damit beide Paare 'zeitnah' ihre gewünschte Inklination erreichen.

Ein weitere Vorteil ergibt sich im Vergleich zu einer Pendel-Mission: Die Herausforderung einer 'dauerhaft' anzupassenden gegenseitigen Orientierung (Pendel-Mission) wird im Falle einer Gradiometrie-Mission nicht benötigt. Das Gradiometer kann Gravitationsfeld-Komponenten quer zur Bewegungsrichtung direkt erfassen.

Einige **Nachteile** sollten jedoch nicht verschwiegen werden. Aufgrund der Dämpfung des Gravitationsfeldsignals mit zunehmender Entfernung vom Geozentrum ist eine vergleichsweise niedrige Umlaufbahn erforderlich, um speziell feinräumige Strukturen des Gravitationsfeldes erfassen zu können. Je nach Zielsetzung kann ein System zur Kompensation nicht-gravitativer Störungen notwendig werden, wie es mit dem IPA (*Ion Propulsion Assembly*) für GOCE entwickelt wurden. Dieses erlaubt einerseits eine konstante niedrige Bahnhöhe und schafft andererseits die Voraussetzung für eine Verringerung der Messbandbreite des Gradiometers, die im Allgemeinen mit einer Steigerung der Sensitivität einhergeht. Entsprechende Systeme benötigen Treibstoff, deren begrenzter Vorrat die Lebensdauer einer Mission oftmals limitiert. Darüber hinaus sind sowohl Systeme, wie das IPA als auch das Gradiometer selbst, in ihrer Realisierung verhältnismäßig teure Komponenten.

Technologien

Im Lauf der Zeit wurden verschiedene Technologien zur Realisierung von Gradiometern untersucht. Allen ist das Ziel gemein, eine differentielle Beschleunigungsmessung zu realisieren. Da die direkte Beobachtung differentieller Beschleunigungen aufgrund verschiedenster Umwelteinflüsse in der Regel höchstens eingeschränkt gelingt, setzten sich Gradiometer meist aus Beschleunigungsmessern zusammen. Deren Beobachtungen werden kombiniert und die

gewünschten differentiellen Beschleunigungen rechnerisch bestimmt. Aus diesen lassen sich gemäß Abschnitt 3.2.2 zweite Ableitungen des Gravitationspotentials ableiten.

Die beiden derzeit intensiv untersuchten Technologien für Gravitationsgradiometer bzw. Beschleunigungsmesser in Schwerefeld-Satellitenmissionen sind die (vorwiegend elektrostatische) Lagebestimmung und -regelung einer festen Testmasse sowie Methoden auf Basis der Atominterferometrie. Beiden werden in den folgenden Abschnitten vorgestellt und diskutiert.

7.2.1 Feste Testmassen und deren Lagebestimmung sowie Lageregelung

Das GOCE-Gradiometer besteht aus sechs Beschleunigungsmessern, deren Funktionsprinzip auf elektrostatischer Schwebung beruht. Eine Testmasse (TM) wird dabei unter Einsatz von Elektroden, die ein elektrisches Feld erzeugen, im Zentrum eines Gehäuses gehalten. Die Lageregelung der TM erfolgt elektrostatisch, die Lagebestimmung kapazitiv. Die Beschleunigungen (gravitative und nicht-gravitative), die die Testmasse erfährt, sind proportional zur Kraft, die notwendig ist, um die TM im Zentrum des Gehäuses zu halten. Aus differentiellen Beschleunigungen lassen sich direkt zweite Ableitungen des Gravitationspotentials, die Gravitationsgradienten, ableiten (siehe auch Abs. 3.2).

Derzeitige Grenzen elektrostatischer Beschleunigungsmesser

Zhu et al. (2013) zeigen, dass das systeminterne Rauschen des Gradiometers die Hauptfehlerquelle der Gravitationsgradienten darstellt. Heruntergebrochen auf die Ebene der Beschleunigungsmesser, setzt sich deren Gesamtrauschen δa_{acc} gemäß Zhu et al. (2013) und basierend auf Marque et al. (2008) maßgeblich aus drei Gruppen von Rauschquellen zusammen:

$$\delta a_{acc} \approx \delta a_{TM} + \delta a_{detect} + \delta a_{read}, \tag{7.1}$$

mit der residualen Beschleunigungsstörung δa_{TM} auf die TM, dem Rauschen der Lagebestimmung der TM δa_{detect} sowie dem Messrauschen δa_{read} aufgrund der Quantifizierung bei der Analog-Digital-Wandlung.

δa_{TM} dominiert das Rauschen am unteren Ende der MBW und ist auf die Dämpfung durch den Golddraht zurückzuführen, der zur Ladungskontrolle der Testmasse verwendet wird. Zusätzlich bewirken kleinste Temperaturschwankungen eine Veränderung der Dämpfung durch den Golddraht und verstärken besagtes Rauschen. δa_{detect} entsteht durch Rauschen des kapazitiven Positionssensors der TM und stellt den dominierenden Rauschanteil an der oberen Grenze der MBW dar. δa_{read} beinhaltet den größten Rauschanteil im mittleren Bereich der MBW.

Abbildung 7.1 enthält eine schematische Darstellung des farbigen Gesamtrauschens δa_{acc} eines elektrostatischen Beschleunigungsmessers. Dieses zeigt mit einem möglichst niedrigem 'weißen Rauschniveau' im entscheidenden Frequenzbereich (bei GOCE die MBW) und einem Anstieg des Rauschens in Richtung hoher wie auch niedriger Frequenzen ein typisches Verhalten. Wie oben beschrieben und in der Abbildung angedeutet, dominieren einzelne Rauschquellen das Gesamtrauschen in bestimmten Frequenzbereichen. Soll das Rauschen daher beispielsweise im Frequenzbereich unterhalb (oberhalb) der MBW verringert werden, ist für eine Reduzierung von δa_{TM} (δa_{detect}) zu sorgen, so dass der blau (orange) markierte Bereich der Rauschverbesserung entspricht. Der Annahme der Verbesserungsbereiche wurde zugrunde gelegt, dass sich δa_{read} als annähernd weißes Rauschen darstellt und im Falle einer ausschließlichen Verringerung von δa_{TM} bzw. δa_{detect} als Rauschlevel (gestrichelte Linien) bestehen bleibt. Gelingt zusätzlich eine Reduzierung von δa_{read}, kann das Gesamtrauschen δa_{acc} über den gesamten Frequenzbereich gesenkt werden und es ergibt sich eine Rauschreduzierung entsprechend dem grün markierten Bereich.

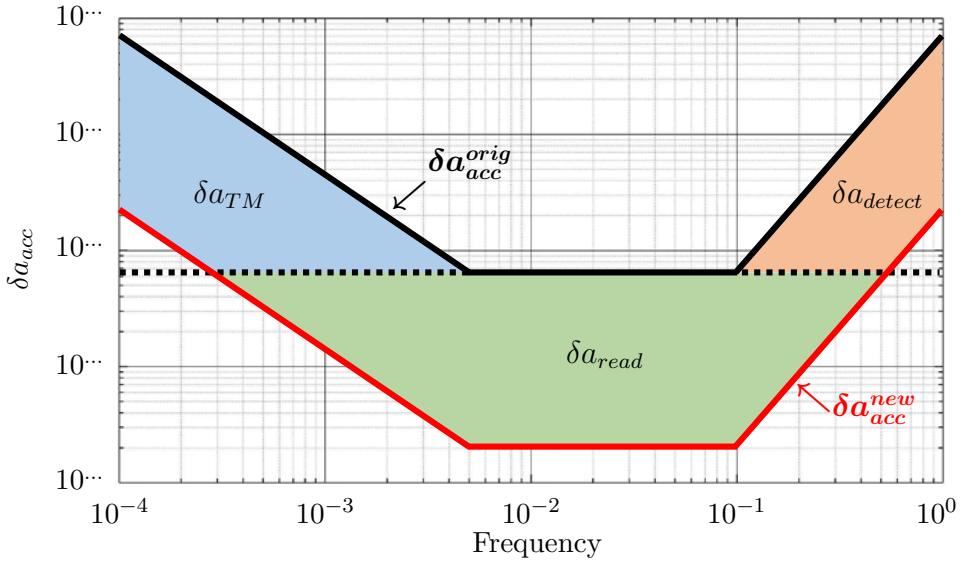


Abbildung 7.1: Schematische Darstellung des Gesamtrauschens δa_{acc} eines Beschleunigungsmessers. Der Frequenzbereich wurde beispielhaft entsprechend der GOCE-MBW gewählt. Aufgrund des schematischen Charakters sind Einheit und Größenordnung des Rauschens nicht weiter spezifiziert. Werden alle dominierenden Rauschquellen reduziert, gelingt eine Absenkung des ursprünglichen Gesamtrauschens δa_{acc}^{orig} (schwarz) auf das Niveau von δa_{acc}^{new} (rot).

Weiterentwicklungen elektrostatischer Beschleunigungsmesser

Im Hinblick auf Weiterentwicklungen elektrostatischer Beschleunigungsmesser sehen Zhu et al. (2013) Potential einer weiteren Leistungssteigerung durch Modifikation der im Folgenden aufgelisteten Punkte. Dabei werden Abhängigkeiten zwischen den Rauschquellen gemäß Gleichung (7.1) sowie entscheidenden Parameter elektrostatischer Beschleunigungsmesser und möglichen Veränderungen dieser Parameter diskutiert.

1. **Einschränkung des Messbereichs der Beschleunigungsmesser**
   Der Messbereich der GOCE-Beschleunigungsmesser wurde laut Zhu et al. (2013) etwa sechsmal größer gewählt, als für die Beobachtung der maximalen Signale (gravitative Beschleunigungen) notwendig gewesen wäre. Bei der Analog-Digital-Wandlung (meist mit 24-bit-Auflösung) wird ein kontinuierliches Signal diskretisiert und nimmt dabei eine begrenzte Anzahl möglicher Werte an. Durch Verkleinerung des Messbereiches kann die Messung der Spannungen im Sinne einer Steigerung der Anzahl möglicher Werte höher aufgelöst werden. Damit wird δa_{read} reduziert und die Präzision des Beschleunigungsmessers erhöht. Es ist jedoch zu berücksichtigen, dass, im Falle einer Einschränkung des Messbereiches, die Satellitensteuerung derart angepasst werden muss, dass weder gravitative noch (residuale) nicht-gravitative Beschleunigungen zur Überschreitung des Messbereichs führen. Zhu et al. (2013) empfehlen daher eine Reduzierung des Messbereiches von $\pm 6.5 \cdot 10^{-6}$ m/s^2 auf $\pm 3.1 \cdot 10^{-6}$ m/s^2.

2. **Abstand zwischen TM und Elektroden sowie Reduzierung der Spannung**
   Im Falle eines eingeschränkten Messbereiches können weitere Parameter des Beschleunigungsmessers modifiziert werden. Dazu zählen der Abstand zwischen TM und den Elektroden im Beschleunigungsmesser-Gehäuse und die Reduzierung der maximalen Spannung, mit der ein elektrisches Feld aufgebaut wird. Wird der Abstand zwischen TM und Elektroden verringert, genügt eine niedrigere Spannung, um den Schwebezustand der Testmasse zu garantieren. Die Spannungsreduzierung ist wünschenswert, da der Fehler der Spannungsmessung von der absolut induzierten Spannung abhängt. Wählt man also einen schmaleren Messbereich aus, kann der Abstand zwischen TM und Elektroden verkleinert werden und die maximal benötigte Spannung wird reduziert. Es erhöht sich die Präzision des Beschleunigungsmessers. Auf der anderen Seite geht mit der Verringerung des Abstandes zwischen TM und Elektroden ein Anstieg der Rauschquellen δa_{read} und δa_{detect} einher. Letztlich muss die Wahl beider Parameter (Abstand, Spannung) unter

gegenseitiger Abstimmung erfolgen und dafür gesorgt werden, dass weder das Rauschen noch die maximale Spannung 'kritische' Größenordnungen erreichen.

3. **Veränderte Geometrie der TM**
   Im Falle von GOCE wies die TM eine Dimensionen von etwa $4 \times 1 \times 1$ cm^3 und ein Gewicht von etwa 0.32 kg auf. Zhu et al. (2013) empfehlen, die TM als Würfel mit einer Kantenlänge von 4 cm zu realisieren und damit die Masse auf 1.28 kg zu vervierfachen. Diese Geometrie soll einerseits die Präzision erhöhen und andererseits die Möglichkeit eröffnen, die Beschleunigungsmessung in drei Achsen hochgenau zu realisieren.

   Durch die Gewichtserhöhung wird der Einfluss der Dämpfung durch den Golddraht reduziert, δa_{TM} sinkt und die Präzision wird gesteigert. Um jedoch eine schwerere TM auch unter 'extremen' Beschleunigungen im Schwebezustand zu halten, werden höhere Spannungen notwendig, die wiederum Einfluss auf andere Rauschquellen haben.

   Für Beschleunigungsmesser mit drei hochgenauen Achsen ergibt sich das Problem, dass deren Kalibration auf der Erde, unter dem Einfluss von 1 g, nicht durchgeführt werden kann. Gerade wenn die Masse der TM im Vergleich zu GOCE weiter erhöht wird, werden noch größere Spannungen notwendig, um deren Schwebezustand unter 1 g zu ermöglichen. Ein Fehler in Abhängigkeit der absoluten Spannung würde sich damit weiter vergrößern. Der Schlüssel zum Einsatz dreiachsig hochgenauer Beschleunigungsmesser scheint daher in der Kalibration in Satellitenhöhe zu liegen. Eine Diskussion zu dieser Thematik wird in einem der folgenden Abschnitte geführt.

4. **Kontrolle der Ladung der TM**
   In den GOCE-Beschleunigungsmessern wurde ein Golddraht genutzt, um die Ladung der Testmassen im elektrostatischen Feld zu kontrollieren. Um diese Rauschquelle, die das Rauschen in Frequenzbereichen unterhalb der MBW dominiert (siehe Abb. 7.1), zu verbessern, wird der Einsatz ultravioletten Lichtes vorgeschlagen. Dessen Eignung zur Steuerung der Ladung einer TM wurde in Schulte et al. (2009) für die LISA Pathfinder Mission sowie in Gerardi et al. (2014) zum Einfluss auf Beschleunigungsmesser in zukünftigen Missionen untersucht.

Über die in Zhu et al. (2013) genannten Veränderungen der Beschleunigungsmesser hinaus ist eine **getrennte Betrachtung der Lagebestimmung und Lageregelung der Testmassen** denkbar. Eine auf Laserinterferometern basierte Lagebestimmung könnte dabei mit der weiterhin elektrostatischen Lageregelung verknüpft werden. Abbildung 7.2 zeigt die Skizze einer Testmasse sowie eine mögliche Anordnung von Elektroden und Laserinteferometer am Beispiel einer Fläche bzw. Bewegungsrichtung der Testmasse. Ausgehend von der Annahme, dass die Oberfläche der TM geeignete Reflexionseigenschaften aufweist, kann die Bestimmung der Lage sowie der Verkippung der Testmasse mit nur einem Laserinterferometer je Raumrichtung gelingen: Die Entfernungsänderungen der TM im Verhältnis zur optischen Bank des Laserinterferometers kann interferometrisch ermittelt werden. Die Erfassung der Verkippung der Testmasse um die beiden zum Laser senkrecht verlaufenden Achsen kann über Differential Wavefront Sensing (vgl. Sheard et al., 2012) erfolgen. Damit ergibt sich ein weiterer Punkt mit Potential zur Leistungssteigerung der Beschleunigungsmesser:

5. **Laserinterferometer zur Lagebestimmung der TM**
   Wie bereits bei der LISA Pathfinder Mission erprobt (Armano et al., 2016), gelingt mit Hilfe eines Laserinterferometers eine äußerst präzise Lagebestimmung einer Testmasse. Auch wenn im Bereich des Lagrange-Punktes L1, den LISA Pathfinder umkreist, die Randbedingungen für eine ungestörte Bestimmung einer Testmassenbewegung deutlich geeigneter erscheinen als in einem Orbit um die Erde (LEO), wird erwartet, dass die auf Laserinterferometrie basierende Lagebestimmung einer TM - im Vergleich zur elektrostatischen Bestimmung - eine höhere Auflösung und ein geringeres Rauschen aufweist. Das Rauschen δa_{detect}, das δa_{acc} im oberen Bereich sowie oberhalb der MBW begrenzt, soll damit deutlich reduziert werden (orangefarbener Bereich in Abb. 7.1).

   Die Realisierung eines entsprechenden Instrumentes, das in der Lage ist, Bewegungen von TM in sechs Freiheitsgraden zu bestimmen, setzt jedoch einige technologische Entwicklungen voraus. Im Falle von LISA Pathfinder wird die Relativbewegung zweier Test-

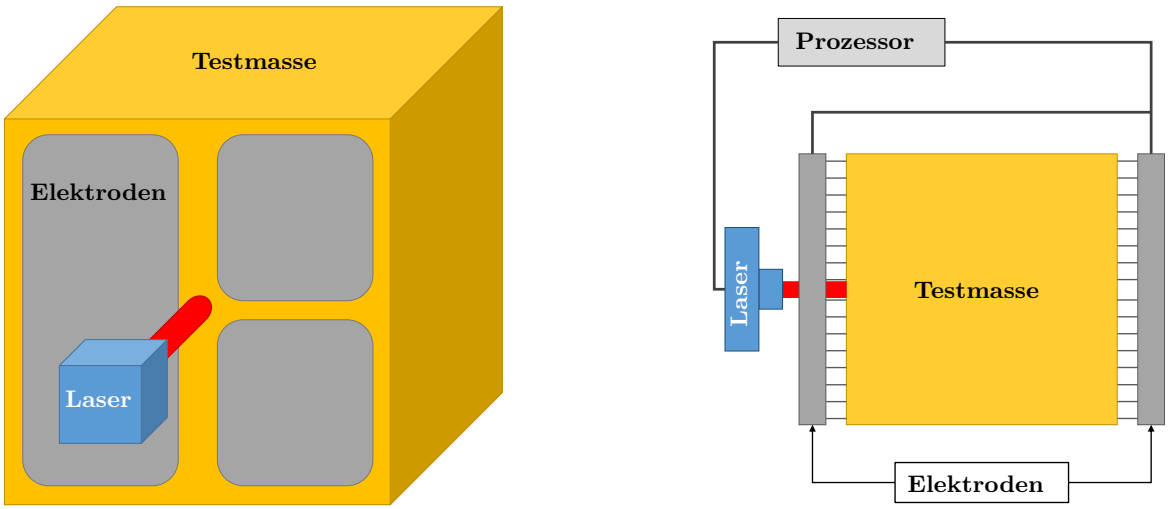


Abbildung 7.2: Skizze einer Testmasse mit getrennter Laserinterferometrie-basierter Lagebestimmung und kapazitiver Lageregelung für eine Beschleunigungsmesser-Achse. (a) Perspektivische Darstellung einer möglichen Anordnung von Elektroden und Laserinterferometer gegenüber der Testmasse (TM) sowie (b) vereinfache Darstellung der Regelungsschleife inkl. Prozessor, der die Verarbeitung und Regelung aller Komponenten übernimmt.

massen entlang *einer Achse* beobachtet. Das dazu verwendete Laserinterferometer wurde auf einer optischen Bank realisiert, die in ihren Ausmaßen einen entscheidenden Anteil der Größe des Instrumentes ausmacht. Um die Bewegung einer TM in allen Freiheitsgraden zu erfassen, wären mindestens drei Laserinterferometer notwendig, und zwar für jeden Beschleunigungsmesser. Diese wären in der Summe zu groß, zu schwer und schließlich nicht realisierbar. Derzeit wird im Rahmen des SFB *geo-Q*[1] in Hannover an der Entwicklung sogenannter mehrkanaliger Interferometer gearbeitet. Dabei sollen unter Anwendung aktueller Techniken (z.B. *deep phase modulation interferometry*, Heinzel et al., 2010) kompakte mehrkanalige Laserinterferometer entwickelt werden, die eine Erfassung der Bewegungen einer Testmasse in sechs Freiheitsgraden erlauben. Diese sollen die Grundlage für eine vollständig Laserinterferometrie-basierte Lagebestimmung der TM legen.

Zusammenfassend lassen sich die drei Rauschquellen gemäß Gleichung (7.1) sowie Abbildung 7.1 durch Änderungen der genannten Parameter bzw. durch den Einsatz neuer Technologien verringern: Im Frequenzbereich unterhalb der MBW, in dem δa_{TM} Golddraht-bedingt das Rauschen dominiert, kann entweder die Masse der TM erhöht und damit deren Einfluss verringert werden, oder ultraviolettes Licht zur Steuerung der Ladung der TM eingesetzt werden. Das Quantifizierungsrauschens δa_{read} kann durch Vergrößerung des Abstandes zwischen TM und Elektroden sowie durch Erhöhung der Masse der TM abgeschwächt werden. Die stärkste Reduzierung von δa_{read} kann jedoch durch Verringerung des Messbereiches erreicht werden. Oberhalb der MBW dominiert das Rauschen des kapazitiven Positionssensors δa_{detect}, dessen Reduktion in Grenzen ebenfalls durch Vergrößerung des Abstandes zwischen TM und Elektroden sowie durch Erhöhung der Masse der TM gelingt. Das höchste Potential zu einer drastischen Reduzierung von δa_{detect} wird allerdings in der laserinterferometrieschen Lagebestimmung der TM gesehen.

Wie bereits diskutiert, führen sowohl die Vergrößerung des Abstandes zwischen TM und Elektroden als auch die Erhöhung der Masse der TM dazu, dass größere Spannungen in das Kraftfeld induziert werden müssen, um den Schwebezustand der TM zu erhalten. Damit steigt auch die Ungenauigkeit der Spannungsregulierung. Beide Parameter (Abstand, Masse) sollten daher mit Vorsicht und unter Berücksichtigung der Folgen gewählt werden. Um das Rauschniveau in allen Frequenzbereichen deutlich zu reduzieren, werden die sonstigen oben genannten

[1]SFB 1128: Relativistic geodesy and gravimetry with quantum sensors - modeling, geo-metrology, and future technology -.

Methoden (ultraviolettes Licht, Verringerung des Messbereiches, Lagebestimmung mittels Laserinterferometer) empfohlen.

Auch wenn die Zusammenhänge hier nur angedeutet werden, ist offensichtlich, dass es sich um ein komplexes Zusammenspiel vieler Parameter handelt. Bei der Entwicklung von Beschleunigungsmessern ist daher ein ganzheitlicher Blick auf alle Einflussgrößen erforderlich.

Kalibration der Beschleunigungsmesser

Wie bereits in Abschnitt 3.2.1 erläutert, müssen die Beschleunigungsmesser auf der Erde und damit unter dem Einfluss von 1 g kalibriert werden. Koop et al. (2001) bezeichnen diese Kalibration als Pre-flight Calibration und beschreiben sie als ersten von drei notwendigen Schritten zur Kalibration des GOCE-Gravitationsgradiometers. Einer etwaig ausschließlich im Orbit stattfindende Kalibrierung würde zu dem Problem führen, dass keine 'Soll-Beschleunigungen' auf den Satelliten ausgeübt werden können, denn auch die Düsen sowie deren exakte Ausrichtung lassen sich nicht vor dem Start kalibrieren. Bisher gelingt eine iterative Kalibration der Düsensysteme auf Basis des 'vorkalibrierten' Gradiometers. Erst auf Basis eines ausreichend gut kalibrierten Düsensystems wird auch die Kalibration des Gradiometers möglich. Bisher sind keine geeigneten Methoden zur vollständigen In-Orbit-Kalibration eines Gradiometers bekannt.

Ein weiteres Beschleunigungsmesserkonzept, das sich speziell im Hinblick auf die Lageregelung der Testmasse von bisherigen Konzepten unterscheidet, beschreibt Conklin (2015) mit dem sogenannten **Drift-Mode Accelerometer (DMA)**. Ähnlich dem Konzept von LISA Pathfinder wird vorgesehen, eine TM über einen bestimmten Zeitraum frei fliegen zu lassen. Die gravitativen Einflüsse auf Satellit bzw. TM, die sich in Relativbewegungen zwischen TM und deren Gehäuse widerspiegeln, werden mittels Laserinterferometrie bestimmt. Die Lage der Testmasse wird kapazitiv gemessen und geregelt, wobei die Frequenz der Lageregelung derart hoch gewählt wird, dass diese keinen Einfluss auf interessierende Frequenzbereiche nehmen kann. Conklin (2015) empfiehlt eine Lageregelung im Intervall von $\Delta t = 5$ s. Um eine 'freie' Bewegung der Testmasse zu ermöglichen, sieht das Konzept eine Vergrößerung des Abstandes zwischen TM und Elektroden auf 1 mm vor (etwa einen Faktor 6 größer als bei GRACE).

Das Konzept unterscheidet sich von den bisherigen Beschleunigungsmesser-Konzepten, bei denen ein geschlossener Regelkreis realisiert wurde, so dass feinste Lageänderungen umgehend korrigiert werden und sich die TM daher faktisch 'nicht' bewegt. Im Falle des DMA werden Bewegungen der TM explizit vorgesehen und die parabelförmige Bewegungstrajektorie der TM für die Auswertung zugrunde gelegt. Da die Form der Bewegungstrajektorie der Testmasse sehr gut berechnet werden kann, können Abweichungen zur 'Solltrajektorie' auf nicht-gravitative Beschleunigungen zurückgeführt werden. In Verbindung mit dem vergrößerten Abstand zwischen TM und deren Gehäuse könnte sich das Konzept damit - laut Conklin (2015) - auch als Ersatz für Drag-free Kontrollsysteme (DFACS) eignen und diese in zukünftigen Missionen überflüssig machen.

7.2.2 Atominterferometrie auf Basis kalter Atome

Beschleunigungen lassen sich auch mit Methoden der Quantenmechanik[2] bestimmen. Für den Einsatz quantenmechanischer Techniken in zukünftigen Satellitengradiometern setzen derzeitige Studien (Carraz et al., 2014 oder CAI Team, 2016) auf die Nutzung von Atominterferometern auf Basis kalter Atome. Dabei wird eine Wolke kalter Atome in verschiedene quantenmechanische Zustände versetzt. Unter dem Einfluss von Gravitation ergibt sich eine Phasenverschiebung zwischen den Atomen unterschiedlichen Zustandes. Diese ist proportional zur Beschleunigung, die das System erfährt. Atominterferometer weisen eine beeindruckende

[2]Die Theorie der Quantenmechanik beschreibt die Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten von Materie. Eine ihrer Hauptideen umfasst den Wellen-Teilchen-Dualismus, der beinhaltet, dass sich Teilchen (z.B. Elektronen) wie Wellen (z.B. Licht) verhalten und Wellen als Teilchen betrachtet werden können (Bresson et al., 2006).

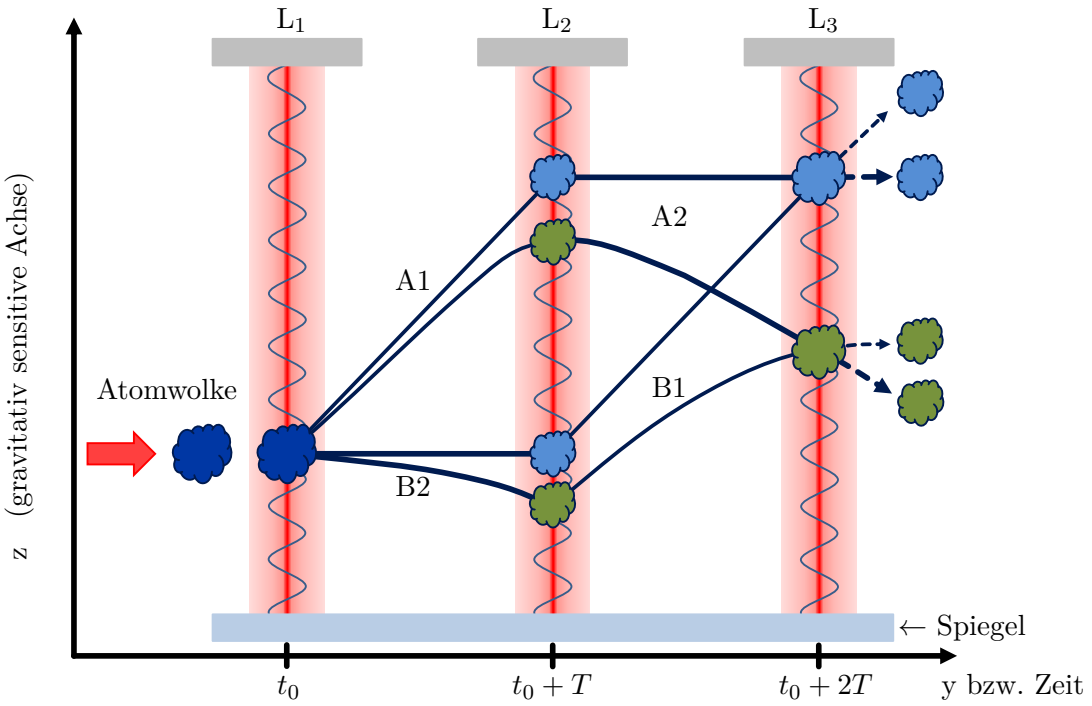


Abbildung 7.3: Skizze eines Atominterferometers des Mach-Zehnder-Typs (Chu-Bordé oder Bordé-Chu Interferometer). Es werden zwei Szenarien des Verhalten von Atomwolken dargestellt, eines ohne Einfluss von Gravitation (hellblaue Wolken) und eines unter Einfluss von Gravitation (grüne Wolken). Erstellt in Anlehnung an Peters et al. (2001, Abb. 2) und Tino et al. (2013, Abb. 2).

Sensitivität differentieller Beschleunigungen auf (Bresson et al., 2006) und haben speziell im Hinblick auf ihr Rauschverhalten vielversprechende Eigenschaften (Carraz et al., 2015).

Die folgenden Ausführungen basieren - sofern nicht anders angegeben - auf Peters et al. (2001) und Carraz et al. (2014).

Funktionsweise

Atominterferometer für Schwerefeld-Satellitenmissionen, wie sie in aktuellen Untersuchungen entwickelt werden, beruhen auf einem Atominterferometer des Mach-Zehnder-Typs, das auch als Chu-Bordé (oder Bordé-Chu) Interferometer bezeichnet wird. Die 'Testmasse' stellt dabei eine Wolke kalter Atome (heute meist Rubidium) dar, die im Vakuum 'hergestellt' und bewegt wird. Zur Herstellung dieser Wolke werden Atome in einer magneto-optischen Falle 'gefangen' und unter Einsatz von Lasern, die den Atomen ihr kinetische Energie entziehen, abgekühlt. Man spricht daher auch von *laser cooled atoms*.

In Abbildung 7.3 ist ein Raum-Zeit-Diagramm (Zeit auf waagerechter Achse) dargestellt, das den weiteren Ablauf skizziert. Die Wolke kalter Atome wird durch einen (Laser-)Impuls angestoßen (angedeutet durch roten Pfeil) und zu drei Zeiten $t = \{0, T, 2T\}$ durch Laserimpulse (Raman Laser) 'modifiziert'. Die Laserimpulse bewirken eine Veränderung des Moments der Atome, wodurch ein Übergang der Atome in einen anderen Zustand erfolgt. Die Übergangseigenschaften werden durch den Laser gesteuert und sind davon abhängig, in welcher Phasenlage die Atomwolke die Laserimpulse passiert.

Der erste Laserstrahl L_1 regt einen Teil der Atome an ihren Zustand zu ändern und bewirkt eine Aufspaltung der Atomwolke (Strahlteiler) in zwei (Teil-)Wolken, die sich daraufhin entlang unterschiedlicher Pfade A und B bewegen. Die Zustände (1 bzw. 2) der Atome entlang A und B unterscheiden sich. Der zweite Laserstrahl L_2 führt eine Zustandsänderung der Atome in beiden Teilwolken herbei: Teilwolke A wird in Zustand 2 versetzt und Teilwolke B in Zustand 1 (Spiegel). Die Wolken laufen wieder 'zusammen'. Deren Wege kreuzen sich im dritten Laserstrahl L_3, der beide Teilwolken 'rekombiniert' (Strahlteiler).

Entscheidend ist, dass die Atome ihre quantenmechanischen Zustände speichern. Die (quantenmechanische) Phase der Atome ist abhängig von der Phase der Laserimpuls an der Stelle, an der die Atome den Laserstrahl passiert haben. Diese Phasenlage ist 'in den Atomen gespeichert'. Nachdem die Atomwolken den letzten Laserstrahl L_3 passiert haben, wird deren Anteil in den jeweiligen Zuständen bestimmt. Daraus kann eine Phasenverschiebung (Phasendifferenz) $\Delta\phi_{acc}$ zwischen Pfad A und B abgeleitet werden, die proportional ist zur gravitativen Beschleunigung g in Richtung der Laserstrahlen. $\Delta\phi_{acc}$ ergibt sich zu

$$\Delta\phi_{acc} = k_{eff} \cdot g \cdot T^2, \tag{7.2}$$

mit der effektiven Phasenanzahl k_{eff}, die ein Maß für die Zustandsänderung der Atome durch die (Raman) Laser und der Interaktionszeit T zwischen den interferometrischen Impulsen (siehe Abb. 7.3) ist.

In Abbildung 7.3 werden geradlinige (hellblaue Wolken) sowie gekrümmte (grüne Wolken) Pfade der Atomwolken dargestellt. Die geradlinigen ergeben sich im Falle fehlender Gravitation, und die gekrümmten stellen sich unter dem Einfluss von Gravitation ein. Im Falle eines idealen Instrumentes und Gravitationslosigkeit ist die Phasendifferenz $\Delta\phi_{acc} = 0$. Ist ein gravitativer Anteil in Richtung der Laserstrahlen vorhanden, werden die Atome in ihren Zuständen verschieden stark davon beeinflusst, passieren an unterschiedlichen Stellen die Laserstrahlen, und es tritt eine Phasenverschiebung $\Delta\phi_{acc} \neq 0$ zwischen den Atomen entlang Pfad A und B auf.

Aus Gleichung (7.2) ist ersichtlich, dass sich die Sensitivität der Phasenverschiebung proportional zum Quadrat der Interaktionszeit T verhält, die zwischen den Laserimpulsen verstreicht. Wird T verlängert, können sich die atomaren Teilwolken unter dem Einfluss der Gravitation längere Zeit ihrem Zustand entsprechend verlagern. Bei terrestrischen Anwendungen wird T zu etwa $100 - 200$ ms gewählt. Vibrationen der Umgebung und Schwankungen der Schwere (z.B. durch Tiden) stören die Beobachtungen derart stark, dass längere Beobachtungszeiträume auf der Erde nicht möglich sind. Ein großer Vorteil des Einsatzes von Atominterferometern im Weltraum wird sein, dass entsprechende Störungen dort nicht auftreten (ausschließlich Mikrogravitation) und die Interaktionszeit T daher auf einige Sekunden verlängert werden kann. Damit kann die Sensitivität gegenüber terrestrischen Anwendung deutlich gesteigert werden.

Auf der anderen Seite führt eine Verlängerung der Interaktionszeit aber auch dazu, dass sich die ursprüngliche Temperatur der Atomwolke von einigen nK oder μK im Lauf der Zeit erhöht. Damit geht einher, dass die Atome kinetische Energie aufnehmen und sich der 'Wolkendurchmesser' vergrößert ($\sim$ 1 mm/s), wodurch der Phasenkontrast sinkt. Weiter ist zu berücksichtigen, dass ein typischer LEO-Satellit innerhalb von z.B. $2T = 10$ s bereits eine Distanz von etwa 70 km zurücklegt, die beobachtete Gravitation also eher einen Mittelwert über die 70 km darstellt. Carraz et al. (2014) beschreiben ein Gradiometriekonzept auf Basis eines Atominterferometers und empfehlen nach Abwägung der genannten Vor- und Nachteile eine Interaktionszeit von $2T = 10$ s.

Das Gradiometriekonzept von Carraz et al. (2014) sieht außerdem eine Kombination von insgesamt vier Atominterferometern zu einem ein-achsigen Atomgradiometer vor, mit dem auch die Bestimmung einer Winkelgeschwindigkeitskomponente und eines Hauptdiagonalelementes des GGT möglich wird. Dazu werden einerseits zwei Wolken kalter Atome erzeugt und zur gleichen Zeit von unterschiedlichen Seiten durch die drei Laser(impulse) geleitet (zwei Atominterferometer (AI)). Über einen Vergleich der resultierenden Phasen gelingt die Bestimmung der Winkelgeschwindigkeiten ω_x um die Senkrechte zur y-z-Ebene (siehe Abb. 7.3). Dieser Ansatz entspricht dem Konzept eines Laserinterferometers, wie es z.B. für Kreiselmessungen untersucht wird. Andererseits wird ein zweites 'doppelseitiges' Interferometer entlang der z-Achse in der Ebene der Laser(impulse) integriert (2×2 AI). Durch Kombination der quantenmechanischen Phasen der entlang in der Laser-Ebene versetzten Atominterferometer und unter Kenntnis ihres genauen Abstandes gelingt die Bestimmung der 'Kraft' γ, die gemäß Gleichung (7.3) eine Kombination aus dem Hauptdiagonalelement des GGT (Zielgröße, hier am Beispiel von $\boldsymbol{V}_{zz}$) und der Drehrate des Instrumentes $\Omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2$ darstellt.

$$\gamma = \boldsymbol{V}_{zz} - \Omega^2 \tag{7.3}$$

Werden drei der beschriebenen ein-achsigen Atomgradiometer in einem Satelliten kombiniert, können alle drei Winkelgeschwindigkeitskomponenten ω_x, ω_y und ω_z abgeleitet und die drei Hauptdiagonalelemente des GGT analog zu Gleichung (7.3) bestimmt werden. Carraz et al. (2014) prognostizieren eine Sensitivität des beschriebenen drei-achsigen Atomgradiometers unterhalb einer Frequenz $f = \frac{1}{2T}$ von 4.7 mE/$\sqrt{\text{Hz}}$ für die Hauptdiagonalelemente des GGT und 35 prad/s/$\sqrt{\text{Hz}}$ für die Winkelgeschwindigkeiten. Allerdings wurden bei den Analysen weder nicht-gravitative Kräfte, noch Einflüsse durch das Magnetfeld (das die Atome beeinflusst) oder die Satellitensteuerung etc. berücksichtigt.

Die entscheidenden **Vorteile** des Einsatzes von Atominterferometern für satellitengradiometrische Beobachtungen liegen in der Langzeitstabilität des Instrumentes sowie der hohen Genauigkeit, mit der einzelne Winkelgeschwindigkeitskomponenten gemessen werden können. Es wird erwartet, dass das Instrument ein annähernd weißes Rauschen in Frequenzbereichen auch deutlich unterhalb der bisherigen MBW-Grenze (3 mHz) aufweist. Damit könnten - gradiometerbasiert - auch zeitvariable Anteile des Gravitationspotentials beobachtet werden.

CAI Team (2016) sehen eine sich verändernde Orientierung des Satelliten (z.B. erdgerichtet) als äußerst kritischen Aspekt an: Im Zeitraum $2T$, in denen die Atome das Interferometer passieren, würde eine Verdrehung um die gravitativ sensitive Achse bewirken, dass die Atomwolken u.U. die Ebene der Laser verlassen und nicht mehr detektiert werden. Noch entscheidender und problematischer wären Verdrehungen des Satelliten um die y-Achse bzw. die x-Achse (senkrecht zu y und z, siehe Abb. 7.3) des Systems. Diese würden dazu führen, dass die Phasen der Laserimpulse nicht ausreichend stabil sind. Der Spiegel in Abbildung 7.3 dient als eine Art Referenz des Systems: Wird diese Referenz verkippt (Drehungen um x- oder y-Achse) verändert sich die Phasenlage der Laserimpulse, was wiederum Einfluss auf die Zustände der passierenden Atome hat und ein eindeutiges Ableiten der gesuchten Phasenverschiebung verhindert.

Aufgrund der genannten Einschränkungen propagieren CAI Team (2016) eine Möglichkeit der Realisierung in der Wahl einer raumfesten Satellitenorientierung, so dass - eine entsprechend genaue Lageregelung des Satelliten vorausgesetzt - keine 'zu großen' Orientierungsänderungen auftreten. Eine weitere Möglichkeit könnte auch der Einsatz eines ein-achsigen Atomgradiometers zur Beobachtung der yy-Komponente des GGT sein. Die gravitativ sensitive Achse des AI wäre dann etwa senkrecht zur Bahnebene des Satelliten orientiert und könnte u.U. auch im Falle einer erdgerichteten Satellitenorientierung eingesetzt werden. Um $\boldsymbol{V}_{yy}$ aus den Beobachtungen ableiten zu können (vgl. Gl. (7.3)), müsste vor allem die Winkelgeschwindigkeitskomponente ω_z auf anderem Wege bestimmt werden.

Darüber hinaus werden auch Systeme diskutiert, die eine 'stufenweise' erdgerichtete Orientierung vorsehen: Ähnlich dem Konzept des *Drift-Mode Accelerometers* (S. 169) könnten einige Messungen in raumfester Orientierung erfolgen, bevor das System (bzw. der Satellit) in ein erdgerichtete Orientierung versetzt wird und danach erneut für einige Zeit Messungen in einer unveränderten raumfesten Orientierung erfolgen können. Diese Idee setzt ein sorgfältig ausgearbeitetes System zur Lageregelung des Satelliten voraus.

Für die zu realisierenden Missionskonzepte gilt grundsätzlich, dass auch hier ein ganzheitlicher Blick auf alle Einflussfaktoren zu erfolgen hat. Dazu sind noch detailliertere Analysen und technologische Entwicklungen notwendig. Für den Einsatz in Satelliten müssen Atominterferometer u.a. deutlich verkleinert und kompakter realisiert werden. Abgesehen davon sind die Eigenschaften in Form des langwellig (in weiten Bereichen) weißen Rauschlevels und der sehr genau bestimmbaren Winkelgeschwindigkeitskomponente äußerst vielversprechend, so dass vor dem Hintergrund bisheriger Untersuchungen weitergehende Analysen ausdrücklich empfohlen werden können.

7.3 Kombinierte Beobachtungskonzepte und Anordnungen von Beschleunigungsmessern zur Bestimmung dritter Ableitungen

Im Rahmen einer Aufrufs des Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) zum Entwurf eines Missionskonzeptes im Bereich "neuer weltraumgestützter Erdbeobachtungskonzepte" wurde von einem nationalen Konsortium unter Hannoveraner Leitung der Vorschlag zur *OPTical Interferometry for global MAss change detection from space* (OPTIMA) Mission eingereicht. Das Missionskonzept sah ll-SST Beobachtungen zwischen zwei Satelliten (GRACE ähnlich) in Verbindung mit einem Satellitengradiometer in mindestens einem der Satelliten vor (Abb. 7.4). Die Kombination beider Beobachtungskonzepte sollte es ermöglichen, größten Nutzen aus den Vorteilen beider Technologien zu ziehen. OPTIMA wurde seitens des DLR nicht gefördert, allerdings im Rahmen des BMBF Förderprogramms Geotechnologien im Projekt 'Future Gravity Field Satellite Missions' weiter untersucht (Brieden et al., 2010).

Anhand von OPTIMA werden in diesem Abschnitt im wesentlichen zwei Aspekte zukünftiger Schwerefeld-Satellitenmissionen diskutiert: Die Kombination verschiedener Beobachtungskonzepte und die Anordnung von Beschleunigungsmessern zur Beobachtung dritter Ableitungen des Gravitationspotentials der Erde.

Kombination verschiedener Beobachtungskonzepte

Die Idee der Verknüpfung verschiedener Beobachtungskonzepte zur Bestimmung des Gravitationspotentials kann in mehrfacher Hinsicht von Interesse sein. Einerseits können durch Kombination von ll-SST Beobachtungen und Satellitengradiometrie die Stärken beider Technologien ausgenutzt werden. Da im Hinblick auf zukünftige Missionen technologische Entwicklungen erforderlich sind und diese ihr Tauglichkeit zur Anwendung im Weltraum oftmals noch unter Beweis stellen müssen, sind andererseits in der Phase der Erprobung dieser Technologien auch hybride Lösungen vorstellbar. Ein besonders geeignetes Beispiel dafür ist GRACE Follow-on: In Ergänzung zur mikrowellenbasierten Beobachtung der Abstandsänderungen zwischen beiden Satelliten wird zum Zwecke der Technologiedemonstration das Laser Ranging Instrument (LRI), ein Laserinterferometer, zur laserbasierten Beobachtung der Abstandsänderungen eingesetzt.

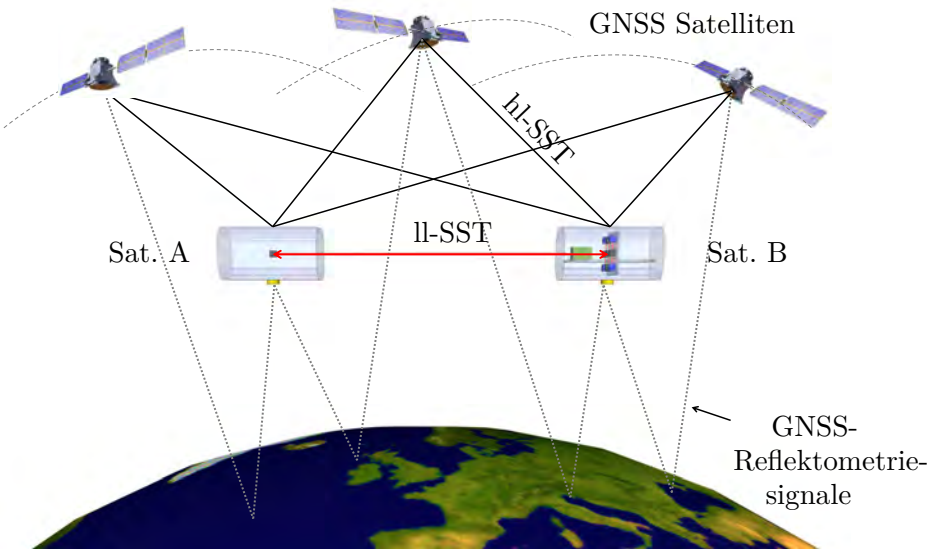


Abbildung 7.4: Missionsvorschlag OPTIMA: Kombination von ll-SST zwischen zwei Satelliten (A und B) und einem Gradiometer (Satellit rechts). Der Vorschlag sah außerdem die Nutzung von GNSS Reflektometrie-Beobachtungen vor, ein Ansatz zur Bestimmung der Höhe der Meeresoberfläche. GNSS-Beobachtungen (hl-SST) werden zur Positionierung der Satelliten sowie zur Zeitsynchronisation genutzt.

Die Stärken von ll-SST Beobachtungen liegen in der sehr genauen Bestimmung langwelliger Anteile des Gravitationsfeldes, die auch die größeren zeitvariablen Anteile enthalten. Die Satellitengradiometrie hingegen weist Stärken in der Bestimmung feiner Strukturen des Gravitationsfeldes auf. Bereits Flokstra et al. (2005) betrachten beide Beobachtungsverfahren als komplementär und sehen in deren Kombination ein vielversprechendes Konzept für zukünftige Schwerefeld-Satellitenmissionen.

Aktuelle Missionsvorschläge (siehe bisherige Studien, S. 163) setzen als Hauptmessgröße auf ll-SST Beobachtungen, wobei einige eine Pendel-Bahn der Satelliten vorsehen. Diese bewirkt, dass die Entfernungsänderungen zwischen den Satelliten nicht nur Komponenten des Gravitationsfeldes in Bewegungsrichtung, sondern auch quer zur Bahnebene enthalten. Diese Satellitenkonstellation hätte den Vorteil, dass sich GRACE-typische Fehlermuster (Nord-Süd Streifen) als Resultat der Inline-Konfiguration, deutlich reduzieren lassen. In erster Näherung gilt, dass sich mit zunehmendem Winkel zwischen den Bahnebenen beider Satelliten auch die besagten Fehlermuster weiter verringern. Mit größeren Winkeln geht allerdings auch eine Vergrößerung der Relativgeschwindigkeiten zwischen den Satelliten einher, die Einfluss auf die Instrumentenwahl haben kann.

Je nach Wahl der Technologie (Mikrowelle oder Laserinterferometrie), die für die ll-SST Beobachtungen verwendet wird, ist eine dauerhaft exakte gegenseitige Ausrichtung der Instrumente aufeinander sicherzustellen - eine Voraussetzung, um überhaupt eine Messung durchführen zu können. Für die gegenseitige Ausrichtung sind im Wesentlichen zwei Konzepte denkbar: Einerseits die Ausrichtung beider Satelliten aufeinander, womit eine sehr präzisen Lageregelung der Satelliten verbunden ist, oder andererseits die Orientierung der Instrumente zueinander. Im Falle des Laserinterferometers wären drehbare Spiegel in der jeweils dem anderen Satelliten zugewandten Seite vorstellbar. Allerdings wird aufgrund des äußerst empfindlichen Instrumentariums versucht, weitestgehend auf bewegliche Teile an Bord des Satelliten zu verzichten. Außerdem müsste ein entsprechender Spiegel äußerst genau gesteuert werden können, um in 100-200 km Entfernung den anderen Satelliten 'zu treffen'. Aus diesem Grund wird voraussichtlich die Variante der Ausrichtung der gesamten Satelliten (Satellite Pointing) favorisiert. Damit würde einhergehen, dass innerhalb eines jeden Umlaufs eine maximale Orientierungsänderung beider Satelliten erforderlich wäre: Entlang aufsteigender Bahnen wäre die Orientierungsdifferenz (vorwiegend um die radiale Achse) gegenüber der Bewegungsrichtung in Äquatornähe in eine Richtung maximal und entlang dem absteigenden Bahnbogen in Äquatornähe in die andere Richtung maximal. Die Orientierung des Satellit müsste also dauerhaft angepasst und deren Änderungsrichtung in Äquatornähe jeweils umgekehrt werden. Damit sind höchste Ansprüche an die Lageregelung genau so verbunden wie ein hoher Treibstoffverbrauch.

Das OPTIMA-Konzept sieht dagegen in erster Näherung identische Bahnebenen für beide Satelliten vor, die möglichst polar (i nahe 90°) verlaufen. Zusätzlich zum laserbasierten ll-SST beinhaltet das Konzept ein Gradiometer, mit dem 'Querkomponenten' des Gravitationsfeldes (quer zur Bewegungsrichtung des Satelliten) beobachtet werden können. Mit diesen gelingt es, die GRACE-typischen streifenförmigen Fehlermuster (als Resultat reiner Inline-Beobachtungen) deutlich zu reduzieren. Ein Schwerpunkt des Gradiometers könnte daher auf die Bestimmung der Querkomponente $\boldsymbol{V}_{yy}$ gelegt werden und die Anordnung der Beschleunigungsmesser vor allem im Hinblick darauf optimiert werden (Abb. 7.5 sowie nächster Abschnitt). Anhand dieser Überlegung wird ersichtlich, dass das Gradiometer im Vergleich zu GOCE u.U. nicht 'vollständig' - im Sinne der Möglichkeit den GGT vollständig bestimmen zu können - aufgebaut sein muss. Die unterschiedlichen Technologien sollten sich in den Bereichen unterstützen, in denen sie Stärken und andere Technologien Schwächen aufweisen. 'Überlappen' sich Informationen und werden von mehreren Technologien erfasst, eignen sich diese zur gegenseitigen Validierung.

Werden, wie am Beispiel des OPTIMA-Missionsvorschlages in Abbildung 7.5 gezeigt, ll-SST und Gradiometrie in einem Satelliten kombiniert, stellt sich die Frage nach dem Referenzpunkt der Beobachtungen. Betrachtet man beide Satelliten als Punktmassen, deren Abstandsänderungen ermittelt und diese wiederum um nicht-gravitative Beschleunigungen korrigiert werden, stellen die Massenmittelpunkte (center of mass) der Satelliten die Referenzpunkte dar. Wird nur ein einzelner Beschleunigungsmesser zur Bestimmung der nicht-gravitativen Be-

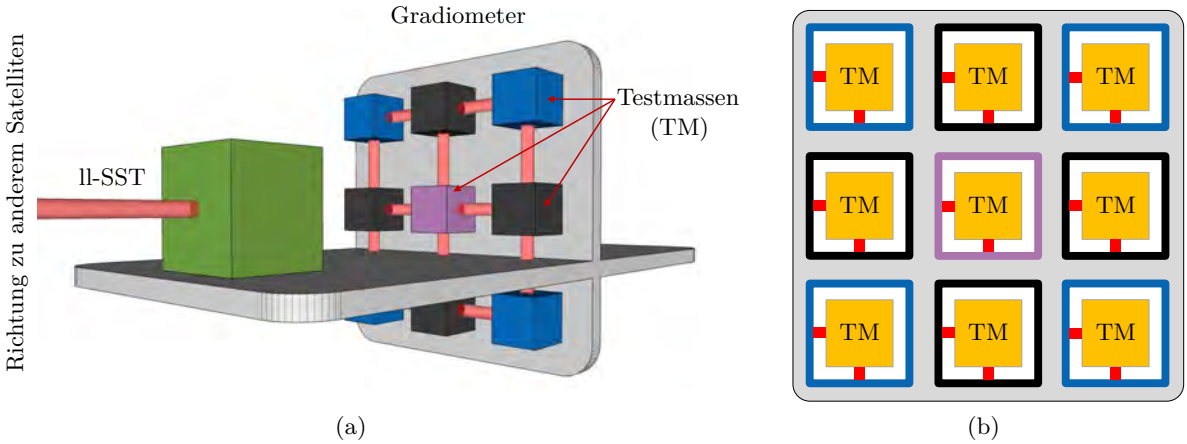


Abbildung 7.5: Instrumentelle Hauptkomponenten der OPTIMA Mission. (a) In einem Satelliten werden Laserinterferometer zum ll-SST und Gradiometer kombiniert. Es wird ein Gradiometeraufbau aus bis zu neun Testmassen (TM) in einer Ebene dargestellt. (b) Die Bestimmung der Lage der Testmassen (TM) in jedem Beschleunigungsmesser erfolgt mittels Laserinterferometern. Zwei der zur vollständigen Lage- und Orientierungsbestimmung einer TM notwendigen drei Laser sind angedeutet. Elektroden zur elektrostatischen Lageregelung sind nicht dargestellt.

schleunigungen genutzt (GRACE, GRACE Follow-on), muss dieser im Massenmittelpunkt des Satelliten positioniert werden. Damit ist der Massenmittelpunkt baulich besetzt und die Abstandsmessung kann nicht direkt zwischen den beiden Massenmittelpunkten erfolgen. Da die Auswertung der Beobachtungen Entfernungsänderungen zwischen den Massenmittelpunkten (Sichtlinie [*Line-Of-Sight*] (LOS)) erforderlich macht, ist entweder eine Projektion der beobachteten Entfernungsänderungen auf die LOS durchzuführen (Bandikova, 2015) oder - wie im Falle von GRACE Follow-On für das LRI realisiert - der Referenzpunkt virtuell in den Massenmittelpunkt zu legen (siehe *triple mirror assemly (TMA)* in Sheard et al., 2012).

Im Falle eines Gradiometers, dass aus zwei oder mehr Beschleunigungsmessern besteht, gelingt deren Anordnung um den Massenmittelpunkt herum, ohne diesen baulich zu besetzen. Cesare und Sechi (2013) zeigen ein Missionskonzept, das die laserbasierte Beobachtung der Abstandsänderungen direkt zwischen den Massenmittelpunkten vorsieht. Zur Beobachtung nicht-gravitativer Beschleunigungen werden zwei (bzw. vier) Beschleunigungsmesser, einer oberhalb und einer unterhalb (bzw. zusätzlich 'rechts' und 'links') des Massenmittelpunktes, in die Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung des Satelliten platziert. Der Einsatz aller vier erlaubt die Bestimmung der Gravitationsgradienten $\boldsymbol{V}_{yy}$ und $\boldsymbol{V}_{zz}$ sowie eine präzisere Bestimmung linearer Beschleunigungen sowie Winkelbeschleunigungen. Der Massenmittelpunkt bleibt daher 'frei' und kann durch das Laserinterferometer 'besetzt' werden.

Anordnung von Beschleunigungsmessern und Beobachtung dritter Ableitungen des Gravitationspotentials

Die Wahl der Anordnung von Beschleunigungsmessern in einem Gradiometer ist äußerst entscheidend: Sie legt fest, welche Elemente des GGT bestimmt werden können und welche nicht bzw. nur mit verminderter Genauigkeit. In diesem Abschnitt werden kurz ausgewählte Anordnungen diskutiert und bis auf weiteres drei hochgenaue Achsen eines jeden Beschleunigungsmessers vorausgesetzt.

Wie im vorangehenden Abschnitt erläutert, ist keine symmetrische Anordnung von Beschleunigungsmessern in einem Gradiometer erforderlich, wie sie im Falle der Diamantkonfiguration für die GOCE-Mission gewählt wurde. Eine mögliche Anordnung, wie sie für OPTIMA vorgeschlagen wurde, zeigt Abbildung 7.5(a). Diese sieht vor, alle Beschleunigungsmesser in der Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung des Satelliten anzuordnen und beinhaltet verschiedene 'Optionen': Basisoption ist eine Anordnung von vier Beschleunigungsmessern (schwarz). Diese entspricht der von Cesare und Sechi (2013) vorgeschlagenen Variante sowie einem 'Ausschnitt' des GOCE Gradiometers. Mit ihr würde - wie beschrieben - die Bestim-

mung zweier Hauptdiagonalelemente des GGT sowie einiger Winkelgeschwindigkeiten bzw. -beschleunigungen gelingen. Durch Erweiterung der Konstellation um einen Beschleunigungsmesser im Zentrum (violett) würde sich die Möglichkeit eröffnen, auch dritte Ableitungen des Gravitationsfeldes ($\boldsymbol{V}_{yyy}, \boldsymbol{V}_{zzz}$) zu bestimmen. Durch die zusätzliche Integration der vier blauen Beschleunigungsmesser würden sich weitere dritte Ableitungen ableiten lassen.

Was die Technologie zur Lagebestimmung der Testmassen in Abbildung 7.5 betrifft, so wird davon ausgegangen, dass eine direkte Beobachtung differentieller Bewegungen von Testmassen, wie in Abbildung 7.5(a) angedeutet, in einer Low Earth Orbit (LEO)-Bahn nicht umgesetzt wird. Dieses Konzept könnte nur dann Vorteile mit sich bringen, wenn eine Art Drift-Mode-Accelerometer (siehe S. 169) realisiert würde. Zum jetzigen Zeitpunkt erscheint es wahrscheinlicher, dass eine Laserinterferometrie-basierte Lagebestimmung jeder Testmasse in 'ihrem' Gehäuse erfolgt, wie es in Abbildung 7.5(b) für die beiden Richtungen in Zeichenebene dargestellt ist.

Die Konstellationen von Beschleunigungsmessern gemäß Abbildung 7.5 lassen sich gedanklich weiter ergänzen und bis auf 27 Beschleunigungsmesser in drei Ebenen erweitern: Würfelförmig in Konstellation von $3 \times 3 \times 3$ Beschleunigungsmessern. Damit wäre theoretisch die Bestimmung aller dritten Ableitungen möglich (siehe auch S. 16). Praktisch werden die technologischen Herausforderungen der Realisierung eines derartigen Gradiometers jedoch als erheblich betrachtet.

Dritte Ableitungen des Gravitationspotentials haben den besonderen Vorteil, nicht - wie bei den zweiten Ableitungen - aus einer gemessenen Kombination Gradienten und rotatorische Anteile trennen zu müssen. Sie sind invariant gegenüber Drehungen. Da ein Gradiometer jedoch nie perfekt realisiert werden kann, sollte eine Sensitivitätsanalyse dritter Ableitungen gegenüber Fehlausrichtungen, Skalierungsfaktoren etc. der einzelnen Beschleunigungsmesser durchgeführt werden. Es wird vermutet, dass diese nach derzeitigem Stand zu groß sind bzw. zu ungenau kalibriert werden können, um aktuell großen Nutzen aus dritten Ableitungen zu ziehen. Sie sind außerdem betragsmäßig sehr klein und nehmen im Falle von $\boldsymbol{V}_{zzz}$ (größte Komponente) eine maximale Größenordnung von etwa 1.2 mE/m/$\sqrt{\text{Hz}}$ an. Alle sonstigen Elemente sind z.T. deutlich kleiner. Die Bestimmung dritter Ableitungen erfordert daher auch weitere technologische Entwicklungen.

7.4 Zusammenfassung

Die Satellitengradiometrie ist ein bewährtes Verfahren zur Bestimmung des Gravitationsfeldes der Erde und eignet sich zur 'direkten' Beobachtung zweiter Ableitungen des Gravitationspotentials. Diese enthalten detailreiche Informationen und erlauben es, speziell räumlich hochaufgelöste Gravitationsfeldlösungen zu bestimmen.

Derzeit werden unterschiedliche Technologien entwickelt, auf deren Basis Gradiometer hergestellt werden können. Wie in diesem Kapitel gezeigt, wird einerseits an Verbesserungen testmassenbasierter Systeme gearbeitet (Abs. 7.2.1), andererseits wird die Eignung von Atominterferometern zur Messung (differentieller) Beschleunigungen untersucht (Abs. 7.2.2).

Im Hinblick auf testmassenbasierte Systeme wird vor allem an der Verbesserung der Instrumentenparameter gearbeitet, die die Genauigkeit bisher limitieren. Dazu zählen sowohl eine etwaige Verkleinerung des Messbereiches, aus der eine Sensitivitätssteigerung hervorgeht, als auch der Austausch einiger technischer Komponenten. Äußerst vielversprechend sind dabei die Ladungskontrolle der Testmasse mittels ultraviolettem Licht ('Ersatz' für Golddraht) sowie die Lagebestimmung der Testmasse mittels Laserinterferometern (präzisere Bestimmung der TM-Lage). Gelingt es, die bisher limitierenden Rauschquellen zu umgehen und das Rauschen besonders unterhalb der bisherigen MBW (GOCE) zu reduzieren, können auch mit testmassenbasierten Systemen zeitvariable Anteile 'sichtbar' werden.

Eine weitere derzeit sehr intensiv untersuchte Technologie zur Nutzung in Schwerefeld-Satellitenmissionen stellt die Atominterferometrie dar. Die beinhaltet den Austausch der 'bisherige Testmasse' durch eine Wolke kalter Atome. Die Atome werden in unterschiedliche

Zustände versetzt und ihr verschiedenartiges Verhalten unter dem Einfluss von Gravitation beobachtet. Ein Vergleich ihrer quantenmechanischen Phasen liefert Informationen über die gesuchte gravitative Beschleunigung. Die Technologie ist äußerst interessant, da dem Instrument ein nahezu weißes Rauschen über weite Frequenzbereiche vor allem im Bereich niedriger Frequenzen - prognostiziert wird. Diese Eigenschaft legt die Basis für eine gleichzeitige Bestimmung zeitvariabler sowie räumlich hochaufgelöster (statischer) Anteile des Gravitationsfeldes. Eine intensive Untersuchung zum Einsatz eines Atominterferometers in einem Satelliten auf einer LEO-Bahn steht bisher noch aus. Es ist aber bereits abzusehen, dass Umwelteinflüsse die Beobachtungen beeinträchtigen. Aufgrund der besonderen Eigenschaften, wie dem überwiegend weißen Rauschen, wird ausdrücklich empfohlen, Atominterferometer weiter zu entwickeln und für den Einsatz in zukünftigen Gradiometriemissionen zu untersuchen.

Da beide Technologien im Hinblick auf die derzeit im Fokus stehende Bestimmung zeitvariabler Gravitationsfeldanteile weiterentwickelt werden, sollte die Gradiometrie für zukünftige Schwerefeld-Satellitenmissionen weiter in Betracht gezogen werden. Wie in diesem Kapitel dargestellt, erfordert die Entwicklung einer Satellitenmission die Berücksichtigung vieler Einflussgrößen. Für einen zielführenden Missionsentwurf ist daher ein ganzheitlicher Blick auf alle Einflüsse und Parameter erforderlich. Viele der Gerätschaften müssen außerdem deutlich miniaturisiert werden, um ihren Einsatz in einem Satelliten zu erlauben.

Für weit in der Zukunft liegende Konzepte kann auch die Beobachtung dritter Ableitungen des Gravitationspotentials in Betracht gezogen werden. Diese haben neben einem höheren Detailgrad der Messungen den Vorteil, unabhängig von rotatorischen Einflüssen des Satelliten zu sein. Allerdings wird der Einfluss von Instrumentenfehlern als kritisch eingeschätzt und muss noch genauer untersucht werden. Die Sensitivität aktuell diskutierter Instrumente ist für die Bestimmung dritter Ableitungen zu gering. Dazu wären sowohl technologische Entwicklungen, als auch Untersuchungen relevanter Fehlereinflüsse erforderlich.

Wie in Abschnitt 7.3 am Beispiel der OPTIMA-Mission ausgeführt, sollten für zukünftige Missionen auch hybride Lösungen in Betracht gezogen werden, bei denen unterschiedliche Technologien zur Gravitationsfeldbestimmung kombiniert werden. Dabei ist sowohl eine Kombination von Technologien denkbar, deren ausschließlich gemeinsame Nutzung die Bestimmung eines Gravitationsfeldes ermöglicht, als auch ein Einsatz 'neuartiger' Instrumente zum Zwecke der Technologiedemonstration - komplementär zu weiterem Instrumentarium - vorstellbar und wünschenswert. Auf diese Weise kann größtmöglicher Nutzen aus den Vorteilen aller Technologien gezogen und das Potential neuer Instrumente untersucht werden. Etwaige 'Überschneidungen' eignen sich zur Validierung der Beobachtungen.

8

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

Die GOCE-Mission war die erste Mission des ESA Earth Explorer Programms und die erste Satellitengradiometriemission überhaupt. Sie wurde am 17. März 2009 gestartet und trat nach genau 1700 Tagen, am 11. November 2013, wieder in die Erdatmosphäre ein. Die ursprünglich geplante Missionsdauer von 20 Monaten konnte damit nahezu verdreifacht werden. Durch die 'direkte' Beobachtung zweiter Ableitungen des Gravitationspotentials der Erde $\boldsymbol{V}_{ij}$ gelang die Bestimmung statischer Schwerefelder mit einer globalen, zuvor nicht erreichten räumlichen Auflösung und Genauigkeit.

In Anbetracht des Mangels an globalen Vergleichswerten entsprechend hoher Qualität stellt sich die Frage nach geeigneten Methoden zur Qualitätsbeurteilung. In dieser Arbeit wurde eine Methode zur globalen Qualitätsprüfung der Gravitationsgradienten weiterentwickelt und bezüglich der Validierung von Realdaten grundlegend überarbeitet: Der Vergleich von GOCE-Gravitationsgradienten in Satellitenspurkreuzungspunkten, die Kreuzungspunktanalyse.

Vor der eigentlichen Kreuzungspunktanalyse wurde das **'Genauigkeitsniveau' der Gravitationsgradienten** im Messband des Gradiometers bestimmt. Dieses wurde auf Basis des Vergleichs mit einem geeigneten GOCE-Modell (GOCO05s, Mayer-Gürr et al., 2015) zwischen 3.0 mE ($\boldsymbol{V}_{yy}$) und 6.9 mE ($\boldsymbol{V}_{zz}$) bestimmt. Dabei zeigte sich, dass das komponentenindividuelle Rauschen der $\boldsymbol{V}_{ij}$ (mit $ij = \{xx, yy, zz, xy, xz, yz\}$) sehr gut aus den GOCE-Modell-Residuen abzuleiten war. Dieser Vergleich ergab ein frequenzabhängiges Rauschen von $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ gemäß den Erwartungen (Requirements) und ein um einen Faktor 2 erhöhtes Rauschen der beiden weiteren hochgenauen Tensorkomponenten $\boldsymbol{V}_{zz}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$. Auf Basis des Genauigkeitsniveaus wurde der Grenzwert eines maximalen Fehlers der Datenverarbeitung auf die Gradienten zu 0.7 mE festgelegt und in Fehlergrenzen anderer Datenprodukte transformiert. So ergab sich beispielsweise eine maximal tolerierbare Positionsunsicherheit des Satelliten von 0.55 m sowie ein Grenzwert für die Unsicherheit der Zeitstempel von 7×10^{-5} s. Aufbauend auf diesen Fehlergrenzen wurden für die Kreuzungspunktanalyse geeignete Algorithmen ausgewählt, mit denen eine Unterschreitung der Fehlergrenzen gelang und durch die eine kritische Beeinflussung der Gradienten sicher ausgeschlossen werden konnte.

Die eigentliche **Kreuzungspunktanalyse** begann mit der Bestimmung der Kreuzungspunkte, die sich jeweils als Kreuzung zweier Satellitenspuren und - im Falle von GOCE - immer zwischen einem aufsteigenden und einem absteigenden Bahnast ergab. In einem Zeitraum von etwa zwei Monaten (5.4 Millionen Beobachtungen, Datenrate 1 Hz) ergaben sich 1.06 Millionen Kreuzungspunkte, ein Großteil davon in Polnähe. Im Vergleich zu den grundlegenden Untersuchungen von Jarecki (2010) mussten aufgrund der Behandlung von Realdaten einige Sonderfälle berücksichtigt werden: Jeder Bahnbogen erstreckte sich über einen Längenbereich von mehr als 180°, sodass zwischen einzelnen Paaren von Bahnbögen zwei Kreuzungen entstanden. Zusätzlich trat die Situation ein, dass - speziell in Polnähe - Bahnbögen parallel verliefen (= 'ineinander lagen') und sich aufgrund leicht unterschiedlicher Inklinationen der Bahn keine Kreuzung ergab. Auf Grundlage linear interpolierter Kreuzungspunktpositionen, als Ergebnisse der Kreuzungspunktbestimmung, erfolgte die Interpolation der finalen Kreu-

zungspunktpositionen und der Kreuzungszeitpunkte in einem gemeinsamen Ausgleichungsschritt.

Auf Grundlage ihrer Zeitstempel wurden alle weiteren Datenprodukte zu den Kreuzungszeitpunkten interpoliert. Aufbauend auf identischen Ansätzen zur Bestimmung der genäherten Kreuzungspunkte unterscheiden sich die Ansätze dieser Arbeit von denen von Jarecki (2010) beginnend mit dem Schritt der Berechnung der finalen Kreuzungspunktpositionen. Es folgte der Kernpunkt der Unterschiede: Die unterschiedliche Behandlung von Lage- und Orientierungsunterschieden zwischen den beteiligten Systemen im Kreuzungspunkt.

Der Vergleich der beiden Gravitationsgradiententensoren (GGT) im XO muss im selben Koordinatensystem erfolgen. Um eine Untersuchung instrumentenspezifischer Fehlereinflüsse auf die Gradienten zu ermöglichen, wurden die Gradiometer-Referenzsysteme (GRF) als Vergleichskoordinatensysteme gewählt. Jeweils einer der im XO beteiligten GGT wurde daher transformiert.

Die Transformation umfasste die beiden Schritte der Rotation (Drehung) und Translation. Aufgrund der langwelligen Ungenauigkeiten und der beiden weniger genauen Elemente der GGT hätte eine Drehung der originalen Tensoren eine Qualitätsminderung aller Gradienten bewirkt und eine Validierung auf dem angestrebten Genauigkeitsniveau zunichte gemacht. Daher wurden alle weniger genauen Anteile des GGT gegen Modellgradienten, abgeleitet aus einen Gravitationsfeldmodell der Erde (EGM), ausgetauscht. $\boldsymbol{V}_{xy}$ und $\boldsymbol{V}_{yz}$ wurden vollständig durch Modellinformation ersetzt. Die Gradientenzeitreihen der vier hochgenauen GGT-Komponenten $\boldsymbol{V}_{xx}$, $\boldsymbol{V}_{yy}$, $\boldsymbol{V}_{zz}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ wurden einem Filterungsprozess unterzogen: Die Zeitreihen der GOCE-Gradienten wurden Hochpass gefiltert, die der Modellgradienten Tiefpass gefiltert. Die gewünschten Filtereigenschaften (rascher Signalabfall nahe der Grenzfrequenz unter möglichst geringer zeitlicher Einflussnahme auf die Zeitreihe) wurden mit einem IIR-Filter 5. Ordnung erreicht, eine geeignete Grenzfrequenz zu 0.003 Hz ermittelt. Nach der Kombination der beiden gefilterten Zeitreihen entstand eine Zeitreihe vollen Signalgehaltes, deren Qualität sowohl im unteren als auch im oberen Frequenzbereich hochwertig war. Untersuchungen zeigten, dass auch hier die Modellwahl entscheidend war: Um keine (z.B. regionalen) Modellfehler in den GGT einzubringen, sind globale Gravitationsfeldmodelle zu bevorzugen, deren Qualität homogen ist. Um außerdem von GOCE-Modellen unabhängig zu sein und nicht Gefahr zu laufen, Gleiches (GOCE-Gradienten) mit Gleichem (Modell auf Basis der GOCE-Gradienten) zu vergleichen, wurden für die Validierung GRACE-basierte Modelle herangezogen. Als äußerst geeignet erwies sich das ITG-Grace2010s (Mayer-Gürr et al., 2010). Die kombinierten Gradientenzeitreihen erlaubten die Drehung der Tensoren, die ohne Genauigkeitsverlust erfolgen konnte.

Die Translation, also die Berücksichtigung der Gradientendifferenz, die sich aufgrund der unterschiedlichen Höhen des GOCE-Satelliten im Kreuzungspunkt ergaben, erfolgte durch Anbringen der Gradientendifferenz zweier Modellgradienten. Der mit diesem Schritt induzierte Fehler steigt mit zunehmender Höhendifferenz an. Je nachdem, welches EGM genutzt wurde, ergaben sich maximale Höhendifferenzen, die im Kreuzungspunkt nicht überschritten werden sollten, um einen Vergleich der GGT auf dem gewünschten Genauigkeitsniveau sicherzustellen. Innerhalb von zwei Monaten variierte die Höhe des GOCE-Satelliten (nominelle Bahnhöhe) im Bereich von ± 14 km. Bei Einsatz des ITG-Grace2010s ergab sich ein maximaler Fehler von 2 mE bei einer Höhendifferenz von etwa ± 19 km, so dass der Fehler durch die Höhenreduktion für *alle* Kreuzungspunkte weniger als 2 mE betrug.

Bei der Transformation jeweils eines GGT im Kreuzungspunkt wurden GOCE und Modellanteile vermischt. Diese Tatsache war im Hinblick auf die Interpretation der Ergebnisse zu berücksichtigen. Dabei ist entscheidend, dass sich die notwendige Drehung zwischen den beiden im Kreuzungspunkt beteiligten Koordinatensystemen beinahe ausschließlich auf eine Drehung um die z-Achse des Systems ($\approx$ in Richtung des Erdmittelpunktes) beschränkt. Diese zeigt eine starke Abhängigkeit von der geografischen Breite, in der sich die Kreuzung ergibt, wodurch eine Interpretation der Ergebnisse in Abhängigkeit vom Modellanteil möglich ist. Der Modellanteil wurde für die vier weniger genauen $\boldsymbol{V}_{ij}$ bestimmt: Es konnte gezeigt werden, dass $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ nach der Drehung in der MBW im Durchschnitt etwa 30 % bzw. 40 % Modellinformation enthalten. Der Modellanteil in $\boldsymbol{V}_{xz}$ wurde zu etwa 25 % bestimmt. Aufgrund der

Dominanz der Drehung um die z-Achse der Systeme blieb $\boldsymbol{V}_{zz}$ die mit Abstand GOCE-reinste Komponente mit einem Modellanteil im unteren einstelligen Prozentbereich.

Die Residuen der GGT im Kreuzungspunkt (cross-over, XO) stellten eine erste 'Zielgröße' der Kreuzungspunktanalyse dar und waren die Grundlage für alle weiteren Untersuchungen. Die Richtigkeit der Implementierung und des Kombinationsschrittes wurde durch einen 'Closed-Loop-Test' der Methode bestätigt: Die Residuen im Kreuzungspunkt ergaben sich auf Basis von ausschließlich Modellgradienten zu Null.

Die **Analyse der XO-Residuen** erfolgte sowohl im Koordinatensystem des beteiligten GGT entlang des aufsteigenden, als auch entlang des absteigenden Bahnbogens. Da die Bahnen und gleichermaßen die Orientierungen der Koordinatensysteme in Polnähe nahtlos ineinander übergehen, konnten die Residuen auch entlang der Zeitreihe betrachtet werden. Dabei war zu berücksichtigen, dass sich die XOs nicht in gleichem zeitlichen Abstand ergaben. Die Untersuchungen erfolgten in drei Kategorien: 1. Qualität des Gesamtdatensatzes, 2. regionale Analysen und 3. lokale Artefakte mit zeitlich begrenztem Einfluss auf die Zeitreihe.

Im Rahmen der Qualitätsbeurteilung des Gesamtdatensatzes wurde die Normalverteilung der XO-Residuen bestätigt. Die Residuen wiesen bei einer getrennten Betrachtung entlang auf- und absteigender Bahnen keine Unterschiede in den statistischen Streuungsparametern auf. Der RMS der Residuen ergab sich für $\boldsymbol{V}_{xx}$ und $\boldsymbol{V}_{yy}$ im Bereich von 4 mE und für $\boldsymbol{V}_{zz}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ zu 8.9 mE bzw. 8 mE. Es zeigte sich erneut ein um den Faktor 2 erhöhtes Rauschniveau der GGT-Komponenten $\boldsymbol{V}_{zz}$ und $\boldsymbol{V}_{xz}$ gegenüber $\boldsymbol{V}_{xx}$ bzw. $\boldsymbol{V}_{yy}$. Die XO-Residuen wurden außerdem auf Abhängigkeiten zu einigen Parametern, wie der geografischen Breite, der Höhendifferenz im XO oder dem Drehwinkel zwischen den beteiligten Koordinatensystemen hin untersucht. Die Ergebnisse waren unauffällig und zeigten keine Korrelationen in Form linearer Abhängigkeiten o.ä. zwischen den XO-Residuen und den weiteren Größen. Bei dieser Art der Qualitätsangaben ist zu beachten, dass es sich bei diesen Größen um die Präzision der XO-Residuen handelt. Die Präzision der originalen GOCE-GGT ist daraus nicht direkt ableitbar, denn jedes Residuum stellt das Ergebnis der Kombination jeweils vierer GGT entlang beider beteiligter Bahnbögen dar. Die Präzision eines einzelnen GOCE-GGT kann daher durchaus höher sein.

Regionale Analysen der XO-Residuen erfolgten vor dem Hintergrund der regionalen Häufung größerer Residuen. In den Residuen von $\boldsymbol{V}_{yy}$ wurden einzelne auffällige Regionen identifiziert: Die deutlichsten Häufungen zeigten sich in Bereichen südlich von Australien sowie - weniger stark - im Norden Kanadas. Diese sind vermutlich auf Interaktionen zwischen Magnetfeld und Ionosphäre zurückzuführen, die einen Einfluss auf die Gradienten ausüben. Weitere Komponenten des GGT zeigten keine regionalen Auffälligkeiten. Bei den Analysen wurde erneut deutlich, wie entscheidend die Modellwahl ist: Im Falle des EGM2008 (Pavlis et al., 2008) traten räumliche Korrelationen großer Residuen in Regionen auf, in denen die terrestrische Datenbasis des EGM2008 bekanntermaßen weniger gut ist. Es sollten daher Modelle zugrunde gelegt werden, die eine möglichst homogene Qualität aufweisen. Andere Modelle wie das ITG-Grace2010s zeigten keine modellabhängigen Auffälligkeiten, wodurch die Eignung aktueller GRACE-basierter Modelle und die Empfehlung zu deren Einsatz in der GOCE-Validierung unterstrichen wird.

Die dritte Kategorie der Residuenanalyse beinhaltete die Identifikation zeitlich lokaler Artefakte in den XO-Residuen. Dabei wurden sowohl einzelne Ausreißer in den Gradientenzeitreihen identifiziert, als auch sogenannte sequentielle Ausreißer aufgedeckt, die sich durch eine Häufung vergleichsweise hoher Residuen über einen Zeitraum von einigen Minuten zeigen. Einzelne Ausreißer lassen sich oftmals über einfache Schwellwertverfahren und Differenzenbildung identifizieren. Dies trifft für sequentielle Ausreißer jedoch nicht zu, deren Identifikation aber hervorragend mit Hilfe der Kreuzungspunktanalyse gelingt.

Die Validierung von GOCE-Gravitationsgradienten in Kreuzungspunkten hat gezeigt, dass die GOCE-Gradienten eine hohe Qualität aufweisen. Entgegen den Erwartungen weist die $\boldsymbol{V}_{zz}$ (und $\boldsymbol{V}_{xz}$) ein im Verhältnis zu $\boldsymbol{V}_{xx}$ oder $\boldsymbol{V}_{yy}$ um den Faktor 2 erhöhtes Rauschen auf. Auf Basis der Kreuzungspunktanalyse gelang die Beurteilung der Qualität des Gesamtdatensatzes, die Identifikation von Regionen, in denen die Qualität einzelner Gradientenkomponenten vermindert ist, und es konnten Ausreißer in den Gradientenzeitreihen identifiziert werden. Speziell

die Identifikation sequentieller Ausreißer wird als ein Alleinstellungsmerkmal der Methode betrachtet.

Basierend auf den Untersuchungen in dieser Arbeit ergeben sich Antworten auf die eingangs (Abs. 1.3) gestellten **Forschungsfragen**:

1. Ja, die Validierung realer GOCE-Gradienten erfordert gegenüber Jarecki (2010) eine grundlegende Neuentwicklung des Ansatzes. Wie dargestellt, wurde für die Bestimmung der finalen Kreuzungspunktposition eine abweichende Herangehensweise gewählt. Als zentraler Unterschied ist die Behandlung der Orientierungsunterschiede zwischen den Koordinatensystemen im GGT zu nennen. Diese ist notwendig und unumgänglich.

2. Die Kreuzungspunktanalyse erlaubt eine Abschätzung der Qualität der GOCE-Gradienten etwa im Frequenzbereich der MBW. Die Zeitreihen der GOCE-Gradienten werden zweimal gefiltert: Hochpass bei 0.003 Hz und Tiefpass bei 0.1 Hz. Unter Berücksichtigung eines 'flachen' Signalabfalls im Frequenzbereich der genannten Grenzfrequenzen bestehen die Gradientenzeitreihen zwischen 0.005 Hz und 0.08 Hz beinahe ausschließlich aus GOCE-Information, so dass die Qualitätsbeurteilung in diesem Frequenzbereich erfolgte. Damit geht auch einher, dass etwaige periodische Fehler mit Periodenlängen länger als $2/0.005$ Hz $= 400$ s nicht mehr in den Zeitreihen enthalten sein können.

3. Aussagen zur Qualität der Gradienten erlaubt die Kreuzungspunktanalyse indirekt auf Basis statistischer Parameter der XO-Residuen. Daraus lassen sich Qualitätsaussagen ableiten, die sich aufgrund der Beteiligung von insgesamt acht GGT (4 GGT/Bahnbogen) an jedem Residuum als 'gemittelte Präzision' der Gradienten ergeben. Die Präzision eines einzelnen Gradienten kann durchaus höher sein. Dennoch gelingt auf Basis der XO-Residuen die Beurteilung der Qualität des Gesamtdatensatzes. Aufgrund der großen Zahl an Kreuzungspunkten ist diese Angabe weitgehend robust gegenüber Ausreißern, die in der Regel nur einen Bruchteil der Residuen beeinflussen.

4. Im Hinblick auf Fehlerarten erlaubt es die Kreuzungspunktanalyse, kurzperiodische Schwankungen sowie Ausreißer in den GGT-Zeitreihen zu identifizieren. Diese können sich entweder gehäuft in bestimmten Regionen abbilden oder als zufällige einzelne oder sequentielle Ausreißer auftreten. Speziell die Identifikation von fehlerbehafteten Beobachtungen, die sich über mehr als einen Wert erstrecken, gelingt mit der Kreuzungspunktanalyse ausgezeichnet. Dies ist ein zentrales Alleinstellungsmerkmal des Verfahrens.

Der zweite Teil dieser Arbeit, mit deutlich geringerem Umfang, widmete sich **Gradiometriekonzepten für zukünftige Schwerefeld-Satellitenmissionen** und hatte eher Ausblickscharakter. Darin wurde herausgearbeitet, dass bei der Planung einer Mission eine Vielzahl von Parametern und Bedingungen zusammenspielen. Für ein erfolgversprechendes Konzept ist daher ein ganzheitlicher Blick auf Einflussgrößen, Abhängigkeiten und Randbedingungen erforderlich. Die meisten aktuellen Studien zukünftiger Missionen beruhen auf ein oder zwei Satellitenpaaren in GRACE ähnlichen Konstellationen und konzentrieren sich auf die Messung der Abstandsänderungen zwischen zwei Satelliten (low-low satellite-to-satellite-tracking, ll-SST). Sie verfolgen das primäre Ziel der Erfassung zeitvariabler Anteile des Erdgravitationsfeldes. Gegenüber diesen ll-SST Konzepten liegen die Stärken der Satellitengradiometrie eher in der Bestimmung räumlich hochaufgelöster Gravitationsfelder. Gradiometriekonzepte haben den Vorteil der 'direkten' Beobachtung eines Funktionals des Gravitationsfeldes in Form seiner zweiter Ableitungen. Dadurch wurden viele Feinstrukturen des Gravitationsfeldes messbar. Ein weiterer Vorteil ist, dass für Gradiometriemissionen nur ein Satellit benötigt wird.

Aktuelle Konzepte für zukünftige Gradiometer wurden in zwei technologische Kategorien eingeteilt: 1. Testmassenbasierte Systeme, bei denen die Lage einer Testmasse beobachtet und kontrolliert wird, und 2. Atominterferometer, bei denen eine Wolke kalter Atome die 'Testmasse' darstellt, deren Verhalten unter dem Einfluss gravitativer Beschleunigung beobachtet wird.

Die Grundlage der ersten Kategorie bilden die Beschleunigungsmesser der GOCE-Mission. Deren Genauigkeit wurde bislang durch verschiedene Faktoren limitiert. Im Hinblick auf zukünftige Konzepte sollten sowohl Verbesserungen bisheriger Instrumente als auch die Nutzung neuer Technologien in Betracht gezogen werden. Vielversprechend sind der Einsatz ultravioletten Lichts zur Ladungskontrolle der Testmasse (Ersatz des Golddrahts), die Verkleinerung des Messbereichs des Beschleuigungsmessers (bzw. Gradiometers) mit dem Ziel einer Sensitivitätssteigerung sowie die Lagebestimmung der Testmasse unter Nutzung von Laserinterferometern. Die Entwicklung dazu notwendiger Technologien und Instrumentenkonzepte hat bereits begonnen. Gelingt die Reduzierung bisher limitierender Rauschquellen speziell in Richtung langwelliger Signalanteile, könnten auch mit testmassenbasierten Systemen zeitvariable Anteile erfassbar werden.

Neueste Gradiometriekonzepte sehen den Einsatz von Atominterferometern auf Basis kalter Atome vor. Es wird erwartet, dass diese ein nahezu weißes Rauschen über große Bereiche des Frequenzraums aufweisen. Speziell in Frequenzen unterhalb der GOCE-MBW (< 0.005 Hz), in denen vergleichsweise große zeitvariable Anteile des Gravitationsfeldes enthalten sind, soll das Rauschen weiß sein und auf einem niedrigen Niveau liegen. Ein entscheidender Vorteil der Atominterferometrie beruht zweifellos auf diesen besonderen Rauscheigenschaften.

Ferner wurden 'hybride Systeme' zur Beobachtung der Gravitationsfeldes analysiert. Diese sehen den gleichzeitigen Einsatz mehrere Technologien vor, um vollen Nutzen aus ihren Vorteilen schöpfen zu können. Dabei wurde die Kombination von ll-SST und Satellitengradiometrie diskutiert, mit der sowohl langwellige (ll-SST) als auch kurzwellige Anteile (Gradiometrie) des Gravitationsfeldes präzise bestimmt werden könnten. Am Beispiel der OPTIMA-Mission, die zusätzlich zur Messung der Abstandsänderungen zwischen zwei Satelliten eine Gradiometriekomponente in der Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung der Satelliten beinhaltet, wäre die Erfassung von Querkomponenten des Gravitationsfeldes möglich. Damit könnte es gelingen, streifige GRACE-typische Fehlermuster in den Gravitationsfeldlösungen zu reduzieren, ohne auf Pendel-Bahnen (*pendulum orbits*) und die damit verbundenen Anforderungen an das Instrumentarium angewiesen zu sein. Um auch für Feinstrukturen des Gravitationsfeldes ausreichend sensitiv zu sein, wäre damit - aller Wahrscheinlichkeit nach - auch eine Absenkung der Bahnhöhe und der Einsatz von drag-free Systemen erforderlich. Damit wird erneut deutlich, dass der ganzheitliche Blick auf alle Parameter und Bedingungen eine Grundvoraussetzung ist.

Da die Prüfung vieler dieser Technologien bisher nicht in Satelliten erfolgte, werden für zukünftige Missionen hybride Systeme ähnlich der GRACE Follow-on Mission favorisiert: Instrumente wie das Laserinterferometer zum ll-SST werden zur Demonstration der Technologie den sonstigen Sensorsystemen hinzugefügt. Auf diesem Wege können neuartige Instrumente ihre Tauglichkeit in der Praxis unter Beweis stellen und sich für den alleinigen Einsatz in zukünftigen Missionen bewähren.

Antworten auf die **Forschungsfragen** zu zukünftigen Gradiometriekonzepten:

5. Wie erwähnt, eignen sich sowohl testmassenbasierte System als auch Atominterferometer, um in Satellitengradiometern eingesetzt zu werden. Testmassenbasierte Systeme wurden mit dem GOCE-Gradiometer bereits realisiert und praktisch erprobt. Atominterferometer müssen zwar noch genauer auf Wechselwirkungen zu Umwelteinflüssen hin untersucht werden, versprechen aber äußerst geeignete Rauscheigenschaften und sollten daher unbedingt weiterentwickelt werden.

6. Verbesserungen GOCE-ähnlicher, testmassenbasierter Systeme werden vor allem durch den Einsatz ultravioletten Lichtes zur Ladungskontrolle der Testmasse sowie durch Nutzung von Laserinterferometern zur Bestimmung aller sechs Freiheitsgrade der Testmasse erwartet. Diese sollten zu einer deutlichen Genauigkeitssteigerung führen.

Satellitengradiometer sind durch die Nutzung neuerer Technologien vielversprechende Instrumente, um sowohl zeitvariable Anteile als auch Feinstrukturen des Gravitationsfeldes der Erde zu beobachten. Die weiterführende Untersuchung entsprechender Missionskonzepte und die Weiterentwicklung der Instrumente wird daher dringend empfohlen.

Ausblick

Zukünftige Arbeiten im Zusammenhang mit der Kreuzungspunktanalyse sollten zwei Schwerpunkte verfolgen: (1.) Interpretation und Ursachenforschung der identifizierten Artefakte und Ausreißer in den Gradientenzeitreihen, und (2.) Weiterentwicklung der Software für einen routinemäßigen Einsatz.

(1.) Die Ergebnisse dieser Arbeit umfassen u.a. die Identifikation von Ausreißern (Artefakten). Um weiteren Nutzen aus den gefundenen Ausreißern ziehen zu können, sind deren Ursachen zu untersuchen. Wann treten diese auf? Unter welchen Randbedingungen? Sind einzelne Parameter der Gradiometerkalibration für die Ausreißer verantwortlich? Gelingt es, etwaige Einflussfaktoren durch einen Parameter in der Gradientenbestimmung abzufangen? Derartiges Wissen ist die Voraussetzung, um das Gesamtsystem noch besser zu verstehen. Im Falle einer klar identifizierbaren Ursache der Ausreißer könnte dieses Wissen in eine Reprozessierung der GOCE-Gradienten einfließen, die derzeit diskutiert wird, und dazu beitragen, die Qualität der GOCE-Gradienten und der GOCE-Gravitationsfeldmodelle weiter zu verbessern.

(2.) Die Software, wie sie zur Kreuzungspunktanalyse der GOCE-Gradienten in dieser Arbeit genutzt wurde, ist prototypisch implementiert und wird bisher ausschließlich auf einem PC (personal computer) betrieben. Um die praktische Nutzbarkeit des Ansatzes zu erhöhen, wären einige Weiterentwicklungen bezüglich der folgenden Punkte sinnvoll: (a) Das Abfangen weiterer Sonderfälle im Programmablauf, wie sie bei Realdatenverarbeitung recht häufig auftraten und bislang zum Programmabsturz führten. (b) Der Einsatz von Großcomputern, mit größerem Arbeitsspeicher, so dass gleichzeitig größere Datenmengen verarbeitet werden können. Damit wäre eine gleichzeitige Analyse der gesamten Daten der GOCE-Mission denkbar. Bisher können nur Datensätze im Umfang jeweils weniger Monate verarbeitet werden. (c) Um die Software außerdem für einen ungeübten Nutzer zugänglich zu machen, wäre beispielsweise der Einsatz eines GUI (graphical user interface) empfehlenswert.

Würde die Software speziell für die Punkte (a) und (b) weiterentwickelt, käme ein weiteres Anwendungsgebiet in Betracht, und zwar ihre Nutzung als 'Ausreißer-Such-Tool'. Vor jeder Gravitationsfeldprozessierung wird die Datenbasis nach Ausreißern durchsucht, um diese von den Berechnungen auszuschließen. Dies kann - aufgrund des großen Datenumfangs - nicht manuell erfolgen und wird bisher meist über Schwellwertverfahren o.ä. gelöst. Tendenziell werden dabei zu viele Messwerte eliminiert, um den negativen Einfluss minderwertigen Datenmaterials sicherer vermeiden zu können. An dieser Stelle kann die Kreuzungspunktanalyse dazu beitragen, automatisiert einzelne sowie sequentielle Ausreißer in den Daten zu identifizieren und präzise deren Einflussbereich auf die Zeitreihe der Gradienten zu quantifizieren. Darüber hinaus ist die Anwendung der Kreuzungspunktanalyse zur Validierung von Gravitationsgradienten auch auf zukünftige Gradiometriemissionen zu empfehlen. Sollte es gelingen, Beschleunigungsmesser zu entwickeln, die drei hochgenaue Achsen aufweisen, vereinfacht sich die Bestimmung der Kreuzungspunktresiduen im Vergleich zu GOCE sogar und gelingt noch effizienter.

Bezüglich neuer Gradiometriekonzepte für zukünftige Schwerefeld-Satellitenmissionen wird der Einsatz der in Kapitel 7 diskutierten neuartigen Technologien empfohlen. Diese beinhalten großes Potential, um zeitvariable Anteile des Erdgravitationsfeldes auch mit Satellitengradiometern messbar zu machen. Vor allem die laserinterferometrische Lagebestimmung einer festen Testmasse sowie die Atominterferometrie sollten daher weiterentwickelt und unter angemessener Berücksichtigung der Umwelteinflüsse auf einer LEO-Bahn untersucht werden.

Die Erprobung neuer Technologie könnte entsprechend dem prominenten Beispiel der GRACE Follow-on Mission erfolgen: Neue Technologien werden zu Demonstrationszwecken Teil ansonsten eigenständiger Missionskonzepte und können ihre Tauglichkeit unter Beweis stellen. Eine große Chance wird außerdem in hybriden Konzepten gesehen, in denen unterschiedliche Technologien gemeinsam eingesetzt werden. Auf diese Weise könnten die Konzepte des ll-SST und der Satellitengradiometrie kombiniert und die Vorteile beider Technologien verknüpft werden, um gleichzeitig zeitvariable Anteile sowie Feinstrukturen des Gravitationsfeldes zu beobachten.

Bezüglich der Umsetzung eines Missionskonzeptes ist die Entscheidung einer Weltraumagentur für oder gegen die Realisierung einer Mission nicht zuletzt dadurch motiviert, ob sie in den Rahmen bestehender Raumfahrtprogramme passt - oder nicht. GOCE war der erste Satellit des *Earth Explorer* Programms der ESA, das darauf ausgerichtet ist, neue Erkenntnisse über unseren Planeten zu gewinnen und nicht etwa die dauerhafte Beobachtung eines 'Erdparameters' zu unterstützen. Die Erdsystemforschung profitiert jedoch besonders von langzeitlichen Beobachtungen des Gravitationsfeldes. Um eine konstante Erfassung zeitlicher Veränderungen des Erdgravitationsfeldes sicherzustellen, wäre die Aufnahme in ein langfristig konzipiertes Raumfahrtprogramm sinnvoll. Gelänge die Aufnahme von Gravitationsfeldmissionen beispielsweise in das *Copernicus Programm* der ESA, wäre eine langfristige Beobachtung des Gravitationsfeldes sichergestellt und damit ein entscheidender Schritt in Richtung eines ganzheitlichen Verständnisses des Systems Erde vollzogen - eine über technologische Entwicklungen hinausgehende Herausforderung.

Abkürzungsverzeichnis

Notation	Bezeichnung
AI	Atominterferometer
ASD	Amplitudendichtespektrum [*Amplitude Spectral Density*]
CoM	Massenmittelpunkt [*Center of Mass*]
DFACS	Drag-Free and Attitude Control System
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
DMA	Drift-Mode Accelerometer
EFRF	Earth Fixed Reference Frame
EGG	Electrostatic Gravity Gradiometer
EGM	Erdgravitationsmodell [*Earth's Gravitational Model*]
EOQ	Earth-Orientation-Quaternions
ESA	European Space Agency
GG	Gravitationsgradienten
GGT	Gravitationsgradiententensor
GNSS	Globale Navigationssatellitensysteme [*Global Navigation Satellite Systems*]
GPS	Global Positioning System
GRACE	Gravity Recovery and Climate Experiment
GRF	Gradiometer Reference Frame
hl-SST	high-low Satellite-to-Satellite Tracking
IAQ	Inertial-Attitude-Quaternions
ICM	Inverse Calibration Matrix
ICRF	International Celestial Reference Frame
ICRS	International Celestial Reference System
IERS	International Earth Rotation and Reference Systems Service
IPA	Ion Propulsion Assembly
IRF	Inertial Reference Frame
ITRF	International Terrestrial Reference Frame
ITRS	International Terrestrial Reference System
LASD	Logarithmisches Amplitudendichtespektrum [*Logarithmic Amplitude Spectral Density*]
LEO	Low Earth Orbit
LNOF	Local North Oriented Frame
LORF	Local Orbital Reference Frame
LOS	Sichtlinie [*Line-Of-Sight*]
LRI	Laser Ranging Instrument
LRR	Laser Retro Reflector
MBW	Measurement Bandwidth
PPS	Puls pro Sekunde [*Pulse Per Second*]
PSD	Leistungsdichtespektrum [*Power Spectral Density*]
PSO	Precise Science Orbit
RMS	Root-Mean-Square
SLR	Satellite Laser Ranging
SNR	Signal-Rausch-Verhältnis [*Signal-to-Noise Ratio*]

Notation	**Bezeichnung**
SST	Satellite-to-Satellite Tracking
STD	Standardabweichung
TAI	Internationale Atomzeit
TM	Testmasse
UTC	Koordinierte Weltzeit
VLBI	Very Long Basline Interferometry
XML	Extensible Markup Language
XO	Kreuzungspunkt [*cross-over*]

Literaturverzeichnis

Albertella, A., Migliaccio, F., Sansó, F., und Tscherning, C. (2000). The space-wise approach - Overall scientific data strategy. ESA-Projekt "From Eötvös to mGal", Abschlussbericht, WP 1, ESA/ESTEC, Contract No. 13392/98/NL/GD.

Altamimi, Z., Collilieux, X., und Métivier, L. (2011). ITRF2008: an improved solution of the international terrestrial reference frame. *Journal of Geodesy*, 85(8):457–473.

Anselmi, A., Cesare, S., Cossu, F., Parisch, M., Sechi, G., van Dam, T., Sneeuw, N., Reubelt, T., Gruber, T., Murböck, M., Visser, P., Ditmar, P., da Encarnacao, J. T., Christophe, B., Renard, M., und Altés, B. (2010). Assessment of a Next Generation Mission for Monitoring the Variations of Earth's Gravity. Technischer Bericht SD-RP-AI-0668, Thales Alenia Space.

Armano, M., Audley, H., Auger, G., Baird, J. T., Bassan, M., Binetruy, P., Born, M., Bortoluzzi, D., Brandt, N., Caleno, M., Carbone, L., Cavalleri, A., Cesarini, A., Ciani, G., Congedo, G., Cruise, A. M., Danzmann, K., de Deus Silva, M., De Rosa, R., Diaz-Aguiló, M., Di Fiore, L., Diepholz, I., Dixon, G., Dolesi, R., Dunbar, N., Ferraioli, L., Ferroni, V., Fichter, W., Fitzsimons, E. D., Flatscher, R., Freschi, M., García Marín, A. F., García Marirrodriga, C., Gerndt, R., Gesa, L., Gibert, F., Giardini, D., Giusteri, R., Guzmán, F., Grado, A., Grimani, C., Grynagier, A., Grzymisch, J., Harrison, I., Heinzel, G., Hewitson, M., Hollington, D., Hoyland, D., Hueller, M., Inchauspé, H., Jennrich, O., Jetzer, P., Johann, U., Johlander, B., Karnesis, N., Kaune, B., Korsakova, N., Killow, C. J., Lobo, J. A., Lloro, I., Liu, L., López-Zaragoza, J. P., Maarschalkerweerd, R., Mance, D., Martín, V., Martin-Polo, L., Martino, J., Martin-Porqueras, F., Madden, S., Mateos, I., McNamara, P. W., Mendes, J., Mendes, L., Monsky, A., Nicolodi, D., Nofrarias, M., Paczkowski, S., Perreur-Lloyd, M., Petiteau, A., Pivato, P., Plagnol, E., Prat, P., Ragnit, U., Raïs, B., Ramos-Castro, J., Reiche, J., Robertson, D. I., Rozemeijer, H., Rivas, F., Russano, G., Sanjuán, J., Sarra, P., Schleicher, A., Shaul, D., Slutsky, J., Sopuerta, C. F., Stanga, R., Steier, F., Sumner, T., Texier, D., Thorpe, J. I., Trenkel, C., Tröbs, M., Tu, H. B., Vetrugno, D., Vitale, S., Wand, V., Wanner, G., Ward, H., Warren, C., Wass, P. J., Wealthy, D., Weber, W. J., Wissel, L., Wittchen, A., Zambotti, A., Zanoni, C., Ziegler, T., und Zweifel, P. (2016). Sub-Femto-g Free Fall for Space-Based Gravitational Wave Observatories: LISA Pathfinder Results. *Physical Review Letters*, 116:231101.

Arsov, K. (2012). GOCEPARSER - A program to parse GOCE level 1b and level 2 data. Poster bei der EGU General Assembly 2012, Wien, Österreich. online: https://earth.esa.int/c/document_library/get_file?folderId=466622&name=DLFE-6505.pdf, letzter Zugriff 08.06.2017.

Bandikova, T. (2015). *The role of attitude determination for inter-satellite ranging.* Dissertation, Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie u. Geoinformatik der Leibniz Universität Hannover, Nr. 318, Identisch mit DGK, Reihe C, Heft Nr. 758.

Barthelmes, F. (2009). Definition of functionals of the geopotential and their calculation from spherical harmonic models: theory and formulas used by the calculation service of the International Centre for Global Earth Models (ICGEM). Scientific Technical Report STR 09/02, Deutsches GeoForschungsZentrum GFZ. http://icgem.gfz-potsdam.de, letzter Zugriff 01.03.2017.

Becker, M. und Hehl, K. (2012). *Geodäsie.* Geowissen Kompakt. Wissenschaftliche Buchgesellschaft (WBG), Darmstadt.

Bender, P., Wiese, D., und Nerem, R. (2008). A Possible Dual-GRACE Mission With 90 Degree And 63 Degree Inclination Orbits. In Fletcher, K. (Hrsg.), *Proceedings of the 3rd International Symposium on Formation Flying, Missions and Technologies, April 2008, ESA/ESTEC, Noordwijk, The Netherlands*, ESA Publication SP-654. ESA/ESTEC.

Benning, W. (2011). *Statistik in Geodäsie, Geoinformation und Bauwesen.* 4. überarbeitete und erweiterte Auflage. Wichmann Heidelberg.

Beutelspacher, A. (2014). *Lineare Algebra*. Springer Spektrum, Wiesbaden.

Bigazzi, A. und Frommknecht, B. (2010). Note on GOCE instruments Positioning. Technischer Bericht XGCE-GSEG-EOPG-TN-09-0007, Issue 3.1, European Space Agency (ESA). https://earth.esa.int/c/document_library/get_file?folderId=14194&name=DLFE-582.pdf, letzter Zugriff 01.06.2017.

Bock, H. (2003). *Efficient Methods for Determining Precise Orbits of Low Earth Orbiters Using the Global Positioning System*. Dissertation, Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, Volume 65, Schweizerische Geodätische Kommission. http://www.sgc.ethz.ch/sgc-volumes/sgk-65.pdf, letzter Zugriff 21.12.2016.

Bock, H., Jäggi, A., Beutler, G., und Meyer, U. (2014). GOCE: precise orbit determination for the entire mission. *Journal of Geodesy*, 88(11):1047–1060.

Bock, H., Jäggi, A., Švehla, D., Beutler, G., Hugentobler, U., und Visser, P. (2007). Precise orbit determination for the GOCE satellite using GPS. *Advances in Space Research*, 39(10):1638–1647.

Bosch, W. (1998). Berechnung von Kreuzungspunktdifferenzen. DGFI-Bericht, Revision 1.1, Stand: 15.01.1998, Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut (DGFI).

Bosch, W. (2007). Discrete Crossover Analysis. In Tregoning, P. und Rizos, C. (Hrsg.), *Dynamic Planet*, Volume 130 of *International Association of Geodesy Symposia*, Seiten 131–136. Springer Berlin Heidelberg.

Bouman, J. (2007). Alternative method for rotation to TRF. Technischer Bericht GO-TN-HPF-GS-0193, Issue 1.0, SRON Netherlands Institute for Space Research.

Bouman, J., Fuchs, M., Haberkorn, C., Lieb, V., Schmidt, M., Broerse, T., Schrama, E., Vermeersen, B., und Visser, P. (2012). The Earth's time-varying gravity field observed by GOCE. Vortrag beim GOCE Solid Earth Workshop, 16.10.2012, Enschede, The Netherlands. online: https://earth.esa.int/c/document_library/get_file?folderId=355957&name=DLFE-4632.pdf, letzter Zugriff 03.12.2016.

Bresson, A., Bidel, Y., Bouyer, P., Leone, B., Murphy, E., und Silvestrin, P. (2006). Quantum mechanics for space applications. *Applied Physics B*, 84(4):545–550.

Brieden, P. und Müller, J. (2010). Two Methods for Quality Assessment of GOCE Gradients. In Lacoste-Francis, H. (Hrsg.), *Proceedings of the ESA Living Planet Symposium, 28. Juni–2. Juli 2010, Bergen, Norway*, ESA Publication SP-686. ESA/ESTEC.

Brieden, P. und Müller, J. (2011). Current results of GOCE in-orbit validation via the crossover approach. In Ouwehand, L. (Hrsg.), *Proceedings of the 4th International GOCE USER Workshop, 31 March–1 April 2011, Munich, Germany*, ESA Publication SP-696. ESA/ESTEC.

Brieden, P. und Müller, J. (2012). Quality assessment of REAL GOCE gravitational gradients using cross-overs. Poster bei Abschlussseminar: "Weltraum Phase III", online: http://www.ife.uni-hannover.de/uploads/tx_tkpublikationen/WP210_-_Brieden_Mueller___IfE___RealGOCE_StatusSem2012_Poster_FINAL.pdf, letzter Zugriff 01.06.2017.

Brieden, P. und Müller, J. (2016). Quality assessment of GOCE gradients by in-orbit comparison. Poster bei der GGHS 2016, International Symposium on Gravity, Geoid and Height Systems, 19.–23. September 2016, Thessaloniki, Griechenland.

Brieden, P., Müller, J., Flury, J., und Heinzel, G. (2010). The mission option OPTIMA – novelties and benefit. In Münch, U. und Dransch, W. (Hrsg.), *GEOTECHNOLOGIEN Science Report No. 17, Potsdam*, Seiten 134–139.

Brieden, P. und Müller, J. (2014a). Cross-Overs Assess Quality of GOCE Gradients. In Flechtner, F., Sneeuw, N., und Schuh, W.-D. (Hrsg.), *Observation of the System Earth from Space - CHAMP, GRACE, GOCE and future missions: GEOTECHNOLOGIEN Science*

Report No. 20, Advanced Technologies in Earth Sciences, Seiten 123–129. Springer Berlin Heidelberg.

Brieden, P. und Müller, J. (2014b). Validation of GOCE Gravitational Gradients in Satellite Track Cross-Overs. In Rizos, C. und Willis, P. (Hrsg.), *Earth on the Edge: Science for a Sustainable Planet: Proceedings of the IAG General Assembly, Melbourne, Australia, 28. Juni – 2. Juli 2011*, Volume 139 of *International Association of Geodesy Symposia*, Seiten 399–405. Springer Berlin Heidelberg.

Brockmann, J., Schuh, W., Krasbutter, I., und Gruber, T. (2012). TIM RL01 gravity field determination with reprocessed EGG_NOM_2 data. Technischer Bericht, GO-TN-HPF-GS-0301, Issue 1.0. GOCE High Level Processing Facility (GOCE–HPF).

Brockmann, J. M., Zehentner, N., Höck, E., Pail, R., Loth, I., Mayer-Gürr, T., und Schuh, W.-D. (2014). EGM_TIM_RL05: An independent geoid with centimeter accuracy purely based on the GOCE mission. *Geophysical Research Letters*, 41(22):8089–8099.

CAI Team (2016). TN2 - Study of a CAI Gravity Gradiometer Sensor and Mission Concepts, Doc Number: CAI-TN2. Technischer Bericht, ESA Contract No. 4000112677/14/NL/MP.

Carraz, O., Siemes, C., Massotti, L., Haagmans, R., und Silvestrin, P. (2014). A Spaceborne Gravity Gradiometer Concept Based on Cold Atom Interferometers for Measuring Earth's Gravity Field. *Microgravity Science and Technology*, 26(3):139–145.

Carraz, O., Siemes, C., Massotti, L., Haagmans, R., und Silvestrin, P. (2015). Measuring the Earth's gravity field with cold atom interferometers. In Ouwehand, L. (Hrsg.), *Proceedings of the 5th International GOCE User Workshop, 25-28 November 2014, Paris, France*, ESA Publication SP-728. ESA/ESTEC.

Casotto, S. und Fantino, E. (2008). Gravitational gradients by tensor analysis with application to spherical coordinates. *Journal of Geodesy*, 83(7):621–634.

CEOS/WGCV, C. (2015). Definition of Calibration and Validation. online: http://ceos.org/ourwork/workinggroups/wgcv/, letzter Zugriff 04.03.2015.

Cesare, S. (2008). Performance Requirements and Budgets for the Gradiometric Mission. Technischer Bericht, GO-TN-AI-0027, Issue 4, Thales Alenia Space.

Cesare, S. und Sechi, G. (2013). Next Generation Gravity Mission. In D'Errico, M. (Hrsg.), *Distributed Space Missions for Earth System Monitoring*, Volume 31 of *Space Technology Library*, Seiten 575–598. Springer New York.

Conklin, J. W. (2015). Drift mode accelerometry for spaceborne gravity measurements. *Journal of Geodesy*, 89(11):1053–1070.

Coviello, R. (2007). Satellite Mechanical ICD. Technischer Bericht, GO-IC-AI-0002, Issue 04. Thales Alenia Space.

Crossley, D., de Linage, C., Boy, J.-P., Hinderer, J., und Chang, J. (2009). Validation of GRACE data using GGP stations from Europe and Asia. *Bulletin d'Information Marées Terrestres*, 145:11741–11750.

de Boor, C. (1978). *A Practical Guide to Splines*. ISBN 978-0-387-95366-3. Springer New York.

Deuflhard, P. und Hohmann, A. (2008). *Numerische Mathematik 1 - Eine algorithmisch orientierte Einführung*. De Gruyter Berlin New York.

Diebel, J. (2006). Representing Attitude: Euler Angles, Unit Quaternions, and Rotation Vectors. online: https://www.astro.rug.nl/software/kapteyn/_downloads/attitude.pdf, letzter Zugriff 07.06.2017.

Drinkwater, M., Haagmans, R., Muzi, D., Popescu, A., Floberghagen, R., Kern, M., und Fehringer, M. (2007). The GOCE Gravity Missions: ESA's First Core Earth Explorer. In *Proceedings of the 3rd International GOCE User Workshop, 6.-8. November 2006, ESA/ES-*

RIN, Frascati, Italy, ESA Publication SP-627, Seiten 1–8. ESA/ESTEC.

Drinkwater, M. und Kern, M. (2006). GOCE Calibration & Validation Plan for L1b Data Products, Issue 1.2. EOP-SM/1363/MD-md, ESTEC, Nordwijk, The Netherlands.

Edwards, C. H., Wallace, N. C., Tato, C., und van Put, P. (2004). The T5 Ion Propulsion Assembly for Drag Compensation on GOCE. In *Proceedings of the Second International GOCE User Workshop "GOCE, The Geoid and Oceanography", 8.-10, März 2004, ESA/ESRIN, Frascati, Italy*, ESA Publication SP-569. ESA/ESTEC.

Elsaka, B., Raimondo, J.-C., Brieden, P., Reubelt, T., Kusche, J., Flechtner, F., Iran Pour, S., Sneeuw, N., und Müller, J. (2014). Comparing seven candidate mission configurations for temporal gravity field retrieval through full-scale numerical simulation. *Journal of Geodesy*, 88(1):31–43.

ESA (1999). Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Mission, ESA SP-1233(1), Report for Mission Selection of the Four Candidate Earth Explorer Missions. ESA Publications Division, ESTEC, Noordwijk, The Netherlands.

ESA (2003). File Format Standard, Earth Explorer, Ground Segment, Technischer Bericht, PE-TN-ESA-GS-0001. Earth Observation Programs System Support Division, ESTEC, Noordwijk, The Netherlands.

ESA (2008). GOCE, ESA's Gravity Mission, ESA Publication SP-1314 (DVD). ESA Communication Production Office, ESTEC, Noordwijk, The Netherlands.

ESA (2015a). Der Satellit und seine Instrumente. online: http://www.esa.int/ger/ESA_in_your_country/Germany/Der_Satellit_und_seine_Instrumente, letzter Zugriff 20.05.2015.

ESA (2015b). GOCE Gradiometer. online: http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2008/03/GOCE_gradiometer, letzter Zugriff 01.09.2015.

Eshagh, M. (2010). Alternative expressions for gravity gradients in local north-oriented frame and tensor spherical harmonics. *Acta Geophysica*, 58(2):215–243.

Eshagh, M. und Abdollahzadeh, M. (2012). Software for generating gravity gradients using a geopotential model based on an irregular semivectorization algorithm. *Computers & Geosciences*, 39(0):152 – 160.

Flechtner, F. (2010). Improved GRACE Level-1 and Level-2 Products and Their Validation by Ocean Bottom Pressure. In Flechtner, F. M., Gruber, T., Güntner, A., Mandea, M., Rothacher, M., Schöne, T., und Wickert, J. (Hrsg.), *System Earth via Geodetic-Geophysical Space Techniques*, Advanced Technologies in Earth Sciences, Seiten 95–104. Springer Berlin Heidelberg.

Flokstra, J., Cuperus, R., Wiegerink, R., Sesé, J., Hemmes, H., und Sotin, C. (2005). Gravity Gradient Sensor Technology for Future Planetary Missions, Executive Summary. Technischer Bericht, ESA ITT AO/1-3829/01/NL/ND.

Forsberg, R. und Olesen, A. (2010). Airborne Gravity Field Determination. In Xu, G. (Hrsg.), *Sciences of Geodesy - I*, Seiten 83–104. Springer Berlin Heidelberg.

Forsberg, R., Olesen, A., Alshamsi, A., Gidskehaug, A., Ses, S., Kadir, M., und Peter, B. (2012). Airborne Gravimetry Survey for the Marine Area of the United Arab Emirates. *Marine Geodesy*, 35(3):221–232.

Frommknecht, B., Lamarre, D., Meloni, M., Bigazzi, A., und Floberghagen, R. (2011). GOCE level 1b data processing. *Journal of Geodesy*, 85(11):759–775.

Fuchs, M. J. und Bouman, J. (2011). Rotation of GOCE gravity gradients to local frames. *Geophysical Journal International*, 187(2):743–753.

Fuchs, M. J., Bouman, J., Broerse, T., Visser, P., und Vermeersen, B. (2013). Observing coseismic gravity change from the Japan Tohoku-Oki 2011 earthquake with GOCE gravity gradiometry. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 118(10):5712–5721.

Gerardi, D., Allen, G., Conklin, J. W., Sun, K.-X., DeBra, D., Buchman, S., Gath, P., Fichter, W., Byer, R. L., und Johann, U. (2014). Advanced drag-free concepts for future space-based interferometers: acceleration noise performance. *Review of Scientific Instruments*, 85(1):1–14.

GFZ (2016). Gravity Missions Studies. online: http://www.gfz-potsdam.de/en/section/global-geomonitoring-and-gravity-field/topics/development-operation-and-analysis-of-gravity-field-satellite-missions/gravity-missions-studies/, letzter Zugriff 03.12.2016.

GOCE FCT (2014). GOCE Flight Control Team (HSO-OEG), GOCE End-of-Mission Operations Report. Technischer Bericht GO-RP-ESC-FS-6268, European Space Agency (ESA).

GOCE Projektbüro (2016). GOCE Satellit und Instrumente. online: http://www.goce-projektbuero.de/8052--~goce~Goce~Mission~Vorgaengermission~index.html, letzter Zugriff 24.08.2016.

Grombein, T., Seitz, K., und Heck, B. (2010). Untersuchungen zur effizienten Berechnung topographischer Effekte auf den Gradiententensor am Fallbeispiel der Satellitengradiometriemission GOCE. Technischer Bericht, KIT Scientific Reports: 7547, KIT Scientific Publishing, Karlsruhe.

Gruber, T., Abrikosov, O., Hugentobler, U., und EGG-C Partner (2014a). GOCE Standards. Technischer Bericht, GO-TN-HPF-GS-0111, Issue: 3, Revision: 2, GOCE High Level Processing Facility (GOCE–HPF).

Gruber, T., Murböck, M., und NGGM-D, T. (2014b). e2.motion - Earth System Mass Transport Mission (Square) - Concept for a Next Generation Gravity Field Mission. Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe B (Angewandte Geodäsie), Heft Nr. 318, C.H. Beck.

Gruber, T., Rummel, R., Abrikosov, O., van Hees, R., und EGG-C Partner (2014c). GOCE Level 2 Product Data Handbook. Technischer Bericht, GO-MA-HPF-GS-0110, Issue 5.0, GOCE High Level Processing Facility (GOCE–HPF).

Hamáčková, E., Šprlák, M., Pitoňák, M., und Novák, P. (2016). Non-singular expressions for the spherical harmonic synthesis of gravitational curvatures in a local north-oriented reference frame. *Computers & Geosciences*, 88:152 – 162.

Hartung, J., Elpelt, B., und Klösener, K. (2005). *Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*. R. Oldenbourg Verlag München Wien.

Heck, B. (2003). *Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung*. 3. neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Wichmann Verlag Heidelberg.

Heinzel, G., Cervantes, F. G., Marín, A. F. G., Kullmann, J., Feng, W., und Danzmann, K. (2010). Deep phase modulation interferometry. *Optics Express*, 18(18):19076–19086.

Heinzel, G., Rüdiger, A., und Schilling, R. (2002). Spectrum and spectral density estimation by the Discrete Fourier Transform (DFT), including a comprehensive list of window functions and some new at-top windows. online: http://hdl.handle.net/11858/00-001M-0000-0013-557A-5, letzter Zugriff: 26.06.2017.

Heiskanen, W. und Moritz, H. (1967). *Physikal Geodesy*. W.H. Freeman and Company, San Francisco.

Hilst, R. V. D. (2004). 12.201 Essentials of Geophysics, Fall 2004. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, online: http://ocw.mit.edu/courses/earth-atmospheric-and-planetary-sciences/12-201-essentials-of-geophysics-fall-2004, letzter Zugriff 10.09.2015.

Hofmann-Wellenhof, B. und Moritz, H. (2006). *Physical Geodesy*. Springer Wien.

IERS (2016). Leap Second, International Earth Rotation and Reference Systems Service. online: https://hpiers.obspm.fr/iers/bul/bulc/Leap_Second.dat, letzter Zugriff 03.03.2016.

Ince, E. S. und Pagiatakis, S. D. (2016). Effects of space weather on GOCE electrostatic gravity gradiometer measurements. *Journal of Geodesy*, 90(12):1389–1403.

Jäggi, A. (2003). *Pseudo-Stochastic Orbit Modeling of Low Earth Satellites Using the Global Positioning System*. Dissertation, Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, Volume 73, Schweizerische Geodätische Kommission. online: http://www.sgc.ethz.ch/sgc-volumes/sgk-73.pdf, letzter Zugriff 07.06.2017.

Jäggi, A., Bock, H., Pail, R., und Goiginger, H. (2008). Highly-reduced dynamic orbits and their use for global gravity field recovery: A simulation study for GOCE. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 52(3):341–359.

Jäggi, A., Bock, H., Prange, L., Meyer, U., und Beutler, G. (2011). GPS-only gravity field recovery with GOCE, CHAMP, and GRACE. *Advances in Space Research*, 47(6):1020–1028.

Jarecki, F. (2010). *Spurkreuzungspunktdifferenzen zur Validierung satellitengradiometrischer Messungen*. Dissertation, Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie u. Geoinformatik der Leibniz Universität Hannover, Nr. 286.

Josselin, V., Touboul, P., und Kielbasa, R. (1999). Capacitive detection scheme for space accelerometers applications. *Sensors and Actuators A: Physical*, 78(2):92–98.

Kammeyer, K.-D. und Kroschel, K. (2009). *Digitale Signalverarbeitung - Filterung und Spektralanalyse mit MATLAB®-Übungen*. 7. Edition. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, Germany. ISBN 978-3-8348-0610-9.

Kaula, W. M. (1966). *Theory of Satellite Geodesy: Applications of Satellites to Geodesy*. Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts.

Koop, R. (1993). *Global gravity modelling using satellite gravity gradiometry*. Dissertation, Netherlands Geodetic Commision, Publications on Geodesy, New Series, Number 38.

Koop, R., P.Visser, und C.C.Tscherning (2001). Aspects of GOCE Calibration. In *Proceedings of the First International GOCE Workshop, 23.–24. April 2001, ESA/ESTEC, Noordwijk, The Netherlands*, ESA Publication WPP-188. online: http://earth.esa.int/workshops/goce04/first_igw/papers/Koop_etal.pdf, letzter Zugriff 07.06.2017.

Lemoine, F. G., Smith, D. E., Kunz, L., Smith, R., Pavlis, E. C., Pavlis, N. K., Klosko, S. M., Chinn, D. S., Torrence, M. H., Williamson, R. G., Cox, C. M., Rachlin, K. E., Wang, Y. M., Kenyon, S. C., Salman, R., Trimmer, R., Rapp, R. H., und Nerem, R. S. (1997). The Development of the NASA GSFC and NIMA Joint Geopotential Model EGM96. In Segawa, J., Fujimoto, H., und Okubo, S. (Hrsg.), *Gravity, Geoid and Marine Geodesy: International Symposium No. 117 Tokyo, Japan, 30. September – 5. Oktober 1996*, Volume 117 of *International Association of Geodesy Symposia*, Seiten 461–469. Springer Berlin Heidelberg.

Lomb, N. R. (1976). Least-squares frequency analysis of unequally spaced data. *Astrophysics and Space Science*, 39(2):447–462.

Mansfeld, W. (2004). *Satellitenortung und Navigation*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden.

Marque, J.-P., Christophe, B., Liorzou, F., Bodoville, G., Foulon, B., Guérard, J., und Lebat, V. (2008). The Ultra Sensitive Accelerometers of the ESA GOCE Mission. In *59th International Astronautical Congress, IAC-08-B1.3.7*. online: https://iafastro.directory/iac/archive/file/IAC-08/abstract/IAC-08.B1.3.7.pdf, letzter Zugriff 07.06.2017.

Mayer-Gürr, T., Kurtenbach, E., und Eicker, A. (2010). ITG-Grace2010. online: http://www.igg.uni-bonn.de/apmg/index.php?id=itg-grace2010, letzter Zugriff 23.06.2016.

Mayer-Gürr, T., Pail, R., Gruber, T., Fecher, T., Rexer, M., Schuh, W.-D., Kusche, J., Brockmann, J.-M., Rieser, D., Zehentner, N., Kvas, A., Klinger, B., Baur, O., Höck, E., Krauss, S., und Jäggi, A. (2015). The combined satellite gravity field model GOCO05s. Vortrag bei der EGU 2015, Wien.

Mayrhofer, R., Pail, R., und Fecher, T. (2010). Quicklook gravity field solutions as part of the GOCE quality assessment. In Lacoste-Francis, H. (Hrsg.), *Proceedings of the ESA Living Planet Symposium, 28 June–2 July 2010, Bergen, Norway*, ESA Publication SP-686. ESA/ESTEC.

McCarthy, D. D. und Klepczynski, W. J. (1999). GPS and Leap Second, Time to Change? *GPS World*, 11(November 1999):50–57.

McCarthy, D. D. und Petit, G. (Hrsg.) (2003). *IERS Conventions (2003)*. IERS Technical Note No. 32, Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main.

Merziger, G., Mühlbach, G., Wille, D., und Wirth, T. (2001). *Formeln + Hilfen zur Höheren Mathematik*. 4. Auflage. Binomi Verlag Springe.

Merziger, G. und Wirth, T. (2002). *Repetitorium der Höheren Mathematik*. 4. Auflage. Binomi Verlag Springe.

Meyer, M. (2014). *Signalverarbeitung: Analoge und digitale Signale, Systeme und Filter*. Springer Fachmedien Wiesbaden.

Müller, J. (2001). *Die Satellitengradiometriemission GOCE*. Habilitation, Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe C, Heft Nr. 541.

Müller, J., Jarecki, F., und Wolf, K. I. (2003). External calibration and validation of GOCE gradients. In Tziavos, I. N. (Hrsg.), *Gravity and Geoid: Proceedings of 3rd Meeting of the International Gravity and Geoid Commission*. Editions ZITI.

Montenbruck, O. und Gill, E. (2005). *Satellite Orbits: Models, Methods, Applications*. Springer Berlin Heidelberg New York.

Moritz, H. (1990). *The Figure of the Earth: Theoretical Geodesy and the Earth's Interior*. Wichmann Karlsruhe.

Moritz, H. (2000). Geodetic Reference System 1980. *Journal of Geodesy*, 74(1):128–133.

Murböck, M., Pail, R., Fuchs, M., und Bouman, J. (2011). GOCE gravity gradients: a new satellite observable. In Ouwehand, L. (Hrsg.), *Proceedings of the 4th International GOCE User Workshop, 31 March–1 April 2011, Munich, Germany*, ESA Publication SP-696. ESA/ESTEC.

Murböck, M., Stummer, C., Pail, R., Yi, W., Gruber, T., und Rummel, R. (2014). GOCE Gravity Gradients: Reprocessed Gradients and Spherical Harmonic Analyses. In Flechtner, F., Sneeuw, N., und Schuh, W.-D. (Hrsg.), *Observation of the System Earth from Space - CHAMP, GRACE, GOCE and future missions*, GEOTECHNOLOGIEN Science Report No. 20, Advanced Technologies in Earth Sciences, Seiten 81–88. Springer Berlin Heidelberg.

Niemeier, W. (2008). *Ausgleichungsrechnung, Statistische Auswertemethoden*. 2. überarbeitete und erweiterte Auflage. De Gruyter Berlin New York.

Novák, P., Sebera, J., Vaľko, M., Šprlák, M., Martinec, Z., Sneeuw, N., Roth, M., Vermerseen, B., van der Wal, W., Baur, O., und Tsoulis, D. (2013). Towards a better understanding of the Earth's interior and geophysical exploration research. Final report: AO/1-6367/10/NL/AF STSE – GOCE+, University of West Bohemia. online: https://www.researchgate.net/profile/Wouter_Van_der_Wal/publication/258623173_Towards_a_better_understanding_of_the_Earth%27s_interior_and_geophysical_exploration_research/links/53fdb11b0cf2364ccc08ee19/Towards-a-better-understanding-of-the-Earths-interior-and-geophysical-exploration-research.pdf, letzter Zugriff: 14.11.2016.

Olesen, A., Forsberg, R., Keller, K., und Gidskehaug, A. (2000). Airborne gravity survey of Lincoln sea and Wandel Sea, North Greenland. *Physics and Chemistry of the Earth, Part A: Solid Earth and Geodesy*, 25(1):25 – 29.

Oppenheim, A., Buck, J., und Schafer, R. (2004). *Zeitdiskrete Signalverarbeitung.* 2. überarbeitete Auflage. Pearson Deutschland.

Pail, R., Bruinsma, S., Migliaccio, F., Förste, C., Goiginger, H., Schuh, W.-D., Höck, E., Reguzzoni, M., Brockmann, J. M., Abrikosov, O., Veicherts, M., Fecher, T., Mayrhofer, R., Krasbutter, I., Sansò, F., und Tscherning, C. C. (2011a). First GOCE gravity field models derived by three different approaches. *Journal of Geodesy*, 85(11):819–843.

Pail, R., Fecher, T., Jäggi, A., und Goiginger, H. (2011b). Can GOCE help to improve temporal gravity field estimates? In Ouwehand, L. (Hrsg.), *Proceedings of the 4th International GOCE User Workshop, 31 March–1 April 2011, Munich, Germany*, ESA Publication SP-696. ESA/ESTEC.

Pail, R., Goiginger, H., Mayrhofer, R., Schuh, W.-D., Brockmann, J. M., Krasbutter, I., Höck, E., und Fecher, T. (2010). GOCE gravity field model derived from orbit and gradiometry data applying the time-wise method. In Lacoste-Francis, H. (Hrsg.), *Proceedings of the ESA Living Planet Symposium, 28 June–2 July 2010, Bergen, Norway*, ESA Publication SP-686. ESA/ESTEC.

Pail, R. und IUGG Writing Team (2015). Observing Mass Transport to Understand Global Change and Benefit Society: Science and User Needs. Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe B (Angewandte Geodäsie), Heft Nr. 320, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.

Pail, R., Metzler, B., Preimesberger, T., Lackner, B., und Wermuth, M. (2007). GOCE quick-look gravity field analysis in the framework of HPF. In Fletcher, K. (Hrsg.), *Proceedings of the 3rd International GOCE User Workshop, November 2006, ESA/ESRIN, Frascati, Italy*, ESA Publication SP-627, Seiten 325–332. ESA/ESTEC.

Pail, R. und Wermuth, M. (2003). GOCE SGG and SST quick-look gravity field analysis. *Advances in Geosciences*, 1:5–9.

Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C., und Factor, J. K. (2008). An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008. Präsentation bei der Generalversammlung der European Geosciences Union (EGU), Wien, Österreich, April 13-18, 2008, online: http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/NPavlis&al_EGU2008.ppt, letzter Zugriff: 01.06.2016.

Peters, A., Chung, K., und Chu, S. (2001). High-precision gravity measurements using atom interferometry. *Metrologia*, 38(1):25.

Petit, G. und Luzum, B. (Hrsg.) (2010). *IERS Conventions (2010).* IERS Technical Note No. 36, Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main.

PTB (2016a). Die Sekundendefinition von 1967. online: https://www.ptb.de/cms/ptb/fachabteilungen/abt4/fb-44/ag-441/realisierung-der-si-sekunde/die-geschichte-der-zeiteinheit.html#c3500, letzter Zugriff 02.03.2016.

PTB (2016b). Schaltsekunden. online: https://www.ptb.de/cms/ptb/fachabteilungen/abt4/fb-44/ag-441/darstellung-der-gesetzlichen-zeit/schaltsekunden.html, letzter Zugriff 03.03.2016.

Reigber, C., Jochmann, H., Wünsch, J., Petrovic, S., Schwintzer, P., Barthelmes, F., Neumayer, K.-H., König, R., Förste, C., Balmino, G., Biancale, R., Lemoine, J.-M., Loyer, S., und Perosanz, F. (2005). Earth Gravity Field and Seasonal Variability from CHAMP. In Reigber, C., Lühr, H., Schwintzer, P., und Wickert, J. (Hrsg.), *Earth Observation with CHAMP: Results from Three Years in Orbit*, Seiten 25–30. Springer Berlin Heidelberg.

Reigber, C., Lühr, H., Grunwaldt, L., Förste, C., König, R., Massmann, H., und Falck, C. (2006). CHAMP Mission 5 Years in Orbit. In Flury, J., Rummel, R., Reigber, C., Rothacher, M., Boedecker, G., und Schreiber, U. (Hrsg.), *Observation of the Earth System from Space*, Seiten 3–15. Springer Berlin Heidelberg.

Reubelt, T., Sneeuw, N., Pour, S., Hirth, M., Fichter, W., Müller, J., Brieden, P., Flechtner, F., Raimondo, J.-C., Kusche, J., Elsaka, B., Gruber, T., Pail, R., Murböck, M., Doll, B., Sand, R., Wang, X., Klein, V., Lezius, M., Danzmann, K., Heinzel, G., Sheard, B., Rasel, E., Gilowski, M., Schubert, C., Schäfer, W., Rathke, A., Dittus, H., und Pelivan, I. (2014). Future Gravity Field Satellite Missions. In Flechtner, F., Sneeuw, N., und Schuh, W.-D. (Hrsg.), *Observation of the System Earth from Space - CHAMP, GRACE, GOCE and future missions*, GEOTECHNOLOGIEN Science Report No. 20, Advanced Technologies in Earth Sciences, Seiten 165–230. Springer Berlin Heidelberg.

Rummel, R. (1986). Satellite gradiometry. In Sünkel, H. (Hrsg.), *Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy: Lectures delivered at the Fourth International Summer School in the Mountains on Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy Admont, Österreich, 25. August - 5. September 1986*, Seiten 317–363. Springer Berlin Heidelberg.

Rummel, R. und Gruber, T. (2010). Gravity and Steady-State Ocean Circulation Explorer GOCE. In Flechtner, F. M., Gruber, T., Güntner, A., Mandea, M., Rothacher, M., Schöne, T., und Wickert, J. (Hrsg.), *System Earth via Geodetic-Geophysical Space Techniques*, Advanced Technologies in Earth Sciences, Seiten 203–212. Springer Berlin Heidelberg.

Rummel, R., Yi, W., und Stummer, C. (2011). GOCE gravitational gradiometry. *Journal of Geodesy*, 85(11):777–790.

Savcenko, R. und Bosch, W. (2012). EOT11a - empirical ocean tide model from multi-mission satellite altimetry, DGFI-Report No.89. Technischer Bericht, DGFI-TUM.

Schödlbauer, A. (2011). *Geodätische Astronomie, Grundlagen und Konzepte*. De Gruyter Berlin Boston.

Schneider, M. (1988). *Satellitengeodäsie*. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim.

Schulte, M. O., Shaul, D. N. A., Hollington, D., Waschke, S., Sumner, T. J., Wass, P. J., Pasquali, L., und Nannarone, S. (2009). Inertial sensor surface properties for LISA Pathfinder and their effect on test mass discharging. *Classical and Quantum Gravity*, 26(9):094008.

Sebera, J., Šprlák, M., Novák, P., Bezděk, A., und Vaľko, M. (2014). Iterative Spherical Downward Continuation Applied to Magnetic and Gravitational Data from Satellite. *Surveys in Geophysics*, 35(4):941–958.

Sechi, G., Buonocore, M., Cometto, F., Saponara, M., Tramutola, A., Vinai, B., Andrè, G., und Fehringer, M. (2011). In-Flight Results from the Drag-Free and Attitude Control of GOCE Satellite. In *Preprints of the 18th IFAC 2011 World Congress, Milano*, Seiten 733–740.

Seeber, G. (1989). *Satellitengeodäsie - Grundlagen, Methoden und Anwendungen*. de Gruyter Berlin New York.

SERCO/DATAMAT Consortium (2008). GOCE L1b products user handbook. Technischer Bericht, GOCE-GSEG-EOPG-TN-06-0137, Issue 2.

Shargorodsky, V. (2004). GOCE-LRR Laser Retro Reflector. Technischer Bericht, K01-∋147-00-00 TO, Scientific Research Institute for Precision Instruments, A Federal State Unitary Enterprise, Moscow.

Sheard, B. S., Heinzel, G., Danzmann, K., Shaddock, D. A., Klipstein, W. M., und Folkner, W. M. (2012). Intersatellite laser ranging instrument for the GRACE follow-on mission. *Journal of Geodesy*, 86:1083–1095.

Siemes, C. (2014). GOCE gradiometer calibration and Level 1b data processing, ESA Working Paper EWP-2384. Technischer Bericht, ESA, ESTEC, Noordwijk, The Netherlands.

Smith, S. W. (1999). *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. California Technical Publishing, 2. edition. online: http://www.dspguide.com/, letzter Zugriff 08.06.2017.

Sneeuw, N. (2000). *A semi-analytical approach to gravity field analysis from satellite observations*. Dissertation, Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe C, Heft Nr. 527.

Šprlák, M., Gerlach, C., und Pettersen, B. (2015). Validation of GOCE global gravitational field models in Norway. In *Newton's Bulletin, Issue N. 5, June 2015 - Assessment of GOCE Geopotential Models*, Seiten 13–24. International Association of Geodesy and International Gravity Field Service.

Šprlák, M. und Novák, P. (2014). Integral formulas for computing a third-order gravitational tensor from volumetric mass density, disturbing gravitational potential, gravity anomaly and gravity disturbance. *Journal of Geodesy*, 89(2):141–157.

Steiger, C., Romanazzo, M., Emanuelli, P. P., Floberghagen, R., und Fehringer, M. (2013). Flying at the Edge - Extremely Low Altitude Operations for ESA's Drag-Free Gravity Mission GOCE. In *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conference, August 2013, Boston, Massachusetts*. American Institute of Aeronautics and Astronautics. online: https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2013-4772, letzter Zugriff 08.06.2017.

Stummer, C., Siemes, C., Pail, R., Frommknecht, B., und Floberghagen, R. (2012). Upgrade of the GOCE Level 1b gradiometer processor. *Advances in Space Research*, 49(4):739–752.

Stummer, C. S. (2013). *Gradiometer data processing and analysis for the GOCE mission*. Dissertation, Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe C, Heft Nr. 695.

Tapley, B. D., Bettadpur, S., Watkins, M., und Reigber, C. (2004). The gravity recovery and climate experiment: Mission overview and early results. *Geophysical Research Letters*, 31(9):1–4. L09607.

Tato, C., Palencia, J., und de La Cruz, F. (2004). The Power Control Unit for the Propulsion Engine of GOCE Program. In Wilson, A. (Hrsg.), *4th International Spacecraft Propulsion Conference, June 2004, Cagliari, Sardinia, Italy*, ESA Publication SP-555, Seitenanzahl 6. ESA/ESTEC.

Thébault, E., Finlay, C. C., Beggan, C. D., Alken, P., Aubert, J., Barrois, O., Bertrand, F., Bondar, T., Boness, A., Brocco, L., Canet, E., Chambodut, A., Chulliat, A., Coïsson, P., Civet, F., Du, A., Fournier, A., Fratter, I., Gillet, N., Hamilton, B., Hamoudi, M., Hulot, G., Jager, T., Korte, M., Kuang, W., Lalanne, X., Langlais, B., Léger, J.-M., Lesur, V., Lowes, F. J., Macmillan, S., Mandea, M., Manoj, C., Maus, S., Olsen, N., Petrov, V., Ridley, V., Rother, M., Sabaka, T. J., Saturnino, D., Schachtschneider, R., Sirol, O., Tangborn, A., Thomson, A., Tøffner-Clausen, L., Vigneron, P., Wardinski, I., und Zvereva, T. (2015). International Geomagnetic Reference Field: the 12th generation. *Earth, Planets and Space*, 67(1):79.

Tino, G., Sorrentino, F., Aguilera, D., Battelier, B., Bertoldi, A., Bodart, Q., Bongs, K., Bouyer, P., Braxmaier, C., Cacciapuoti, L., Gaaloul, N., Gürlebeck, N., Hauth, M., Herrmann, S., Krutzik, M., Kubelka, A., Landragin, A., Milke, A., Peters, A., Rasel, E., Rocco, E., Schubert, C., Schuldt, T., Sengstock, K., und Wicht, A. (2013). Precision Gravity Tests with Atom Interferometry in Space. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 243:203–217.

Torge, W. und Müller, J. (2012). *Geodesy*. 4th edition. De Gruyter Berlin Boston.

Tóth, G. (2005). The gradiometric-geodynamic boundary value problem. In Jekeli, C., Bastos, L., und Fernandes, J. (Hrsg.), *Gravity, Geoid and Space Missions: GGSM 2004 IAG International Symposium Porto, Portugal, 30. August – 3. September 2004*, Volume 129 of *International Association of Geodesy Symposia*, Seiten 352–357. Springer Berlin Heidelberg.

Touboul, P., Foulon, B., und Willemenot, E. (1999). Electrostatic space accelerometers for present and future missions. *Acta Astronautica*, 45(10):605–617.

Tröbs, M. und Heinzel, G. (2006). Improved spectrum estimation from digitized time series on a logarithmic frequency axis. *Measurement*, 39(2):120–129.

Visser, P. N. A. M., van der Wal, W., Schrama, E. J. O., van den IJssel, J., und Bouman, J. (2014). Assessment of observing time-variable gravity from GOCE GPS and accelerometer

observations. *Journal of Geodesy*, 88(11):1029–1046.

Voigt, C. (2013). *Astrogeodätische Lotabweichungen zur Validierung von Schwerefeldmodellen*. Dissertation, Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie u. Geoinformatik der Leibniz Universität Hannover, Nr. 305, Identisch mit DGK, Reihe C, Heft Nr. 702.

Voigt, C. und Denker, H. (2015). Validation of GOCE Gravity Field Models in Germany. In *Newton's Bulletin, Issue N. 5, June 2015 - Assessment of GOCE Geopotential Models*, Seiten 37–48. International Association of Geodesy and International Gravity Field Service.

Švehla, D. und Rothacher, M. (2003). Kinematic and reduced-dynamic precise orbit determination of low earth orbiters. *Advances in Geosciences*, 1:47–56.

Švehla, D. und Rothacher, M. (2005). Kinematic precise orbit determination for gravity field determination. In Sansò, F. (Hrsg.), *A Window on the Future of Geodesy*, Volume 128 of *International Association of Geodesy Symposia*, Seiten 181–188. Springer Berlin Heidelberg.

Wallace, N., Jameson, P., Saunders, C., Fehringer, M., Edwards, C., und Floberghagen, R. (2011). The GOCE Ion Propulsion Assembly - Lessons Learnt from the First 22 Months of Flight Operations. In *The 32nd International Electric Propulsion Conference, Wiesbaden, Germany, 11.–15. September 2011, Paper: IEPC-2014-327*, Seiten 1–21.

Welch, P. D. (1967). The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 15(2):70–73.

Wenzel, H.-G. (1985). *Hochauflösende Kugelfunktionsmodelle für das Gravitationspotential der Erde*. Habilitation, Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 137.

Wermuth, M. K. (2009). *Gravity field analysis from the satellite missions CHAMP and GOCE*. Dissertation, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, TU München.

Werner, M. (2012). *Digitale Signalverarbeitung mit MATLAB®*. 5. Auflage. Vieweg+Teubner Verlag Wiesbaden.

Wikipedia (2015). Logischer Operator — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. online: https://de.wikipedia.org/wiki/Logischer_Operator, letzter Zugriff 10.12.2015.

Wu, H. (2016). *Global gravity field recovery from GOCE data*. Dissertation, Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie u. Geoinformatik der Leibniz Universität Hannover, Nr. 324, Identisch mit DGK, Reihe C, Heft Nr. 777.

Zhu, Z., Zhou, Z., Cai, L., Bai, Y., und Luo, J. (2013). Electrostatic gravity gradiometer design for the future mission. *Advances in Space Research*, 51(12):2269 – 2276.