Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVIII. Jahrgang 1908.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1909.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über den Legendre-Besselschen Kettenbruch.

Von **Niels Nielsen.**

(*Eingelaufen 4. Juli.*)

Herr Perron hat neuerdings einen strengen Beweis der Legendre-Besselschen Kettenbruchentwicklung für den Quotienten zweier Zylinderfunktionen gegeben.[1]) Immerhin dürfte der folgende Beweis, den ich in meinen Universitätsvorlesungen zu benützen pflege, wegen seiner relativen Kürze und Einfachheit vielleicht nicht ganz ohne Interesse sein:

Bezeichnet a eine willkürliche endliche Zahl, die jedoch weder Null noch negativ ganz sein darf, so ist die Potenzreihe

$$(1)\quad \varphi(a,x) = 1 + \frac{x^2}{1!\,a} + \frac{x^4}{2!\,a(a+1)} + \frac{x^6}{3!\,a(a+1)(a+2)} + \cdots$$

beständig konvergent; aus (1) erhält man unmittelbar die Fundamentalgleichung:

$$(2)\qquad \varphi(a,x) - \varphi(a+1,x) = \frac{x^2}{a(a+1)} \cdot \varphi(a+2,x).$$

Setzt man demnach:

$$(3)\qquad \psi(a,x) = \frac{x^2}{a} \cdot \frac{\varphi(a+1,x)}{\varphi(a,x)},$$

so ergibt sich wegen (2):

$$\psi(a,x) = \frac{x^2}{a + \psi(a+1,x)},$$

woraus man in ganz formaler Weise den unendlichen Kettenbruch

$$(4)\qquad \psi(a,x) = \left(0; \frac{x^2}{a}, \frac{x^2}{a+1}, \frac{x^2}{a+2}, \ldots\right)$$

herleitet.

---

[1]) Sitzungsberichte d. Münchener Akad. Bd. 37 (1907), p. 483–504.

Um nun in aller Strenge die Richtigkeit dieser Entwicklung nachzuweisen, haben wir diejenige aus den Annäherungsbrüchen des Kettenbruches rechterhand in (4) gebildete Zahlenfolge

$$\frac{y_1}{z_0}, \frac{y_1}{z_1}, \frac{y_2}{z_2}, \ldots, \frac{y_n}{z_n}, \ldots \tag{5}$$

zu untersuchen. Direkt findet man:

$$y_1 = x^2,\ y_2 = (a+1)x^2, \qquad y_3 = (a+1)(a+2)x^2 + x^4$$
$$z_1 = a,\ z_2 = a(a+1) + x^2,\ z_3 = a(a+1)(a+2) + 2(a+1)x^2,$$

und die Rekursionsformeln

$$y_n = (a+n-1)\,y_{n-1} + x^2\,y_{n-2},$$
$$z_n = (a+n-1)\,z_n + x^2\,z_{n-2}$$

ergeben dann allgemein:

$$z_n = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \binom{n-s}{s} \cdot C_{n-2s}(a+s)\,x^{2s}, \tag{6}$$

wo der Kürze halber

$$C_\nu(a) = a(a+1)\ldots(a+\nu-1), \quad C_0(a) = 1$$

gesetzt worden ist, während y_n aus z_{n-1} gebildet wird, indem man $a+1$ anstatt a einführt und den so erhaltenen Ausdruck mit x^2 multipliziert. Setzt man nunmehr:

$$F_n(a,x) = 1 + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(n-s)(n-s-1)\ldots(n-2s+1)}{(a+n-1)(a+n-2)\ldots(a+n-s)} \cdot \frac{x^{2s}}{s!\,a(a+1)\ldots(a+s+1)}, \tag{7}$$

so ergibt sich wegen (6) nach einer einfachen Umformung:

$$z_n = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)\cdot F_n(a,x),$$

und somit hat man für jedes $n > 1$

$$\frac{y_n}{z_n} = \frac{x^2}{a} \cdot \frac{F_{n-1}(a+1,x)}{F_n(a,x)}, \tag{8}$$

so daß uns nur übrig bleibt, das Verhalten von $F_n(a, x)$ für unbegrenzt wachsendes n zu untersuchen, indem a weder Null noch negativ ganz angenommen wird.

Bezeichnet u_s das allgemeine Glied unter dem Summenzeichen rechterhand in (7), so hat man:

$$\frac{u_s}{u_{s+1}} = \frac{(n-s)(n-s-1+a)}{(n-2s)(n-2s-1)} \cdot \frac{(s+1)(a+s)}{x^2}; \tag{9}$$

wählt man demnach s groß, daß $s - 1 \geqq |a|$ ist, so hat man offenbar:

$$|n-s-1+a| \geqq n-s-1-|a| \geqq n-2s, \quad |a+s| \geqq s-|a| \geqq 1,$$

woraus wegen (9):

$$\left|\frac{u_s}{u_{s+1}}\right| \geqq \frac{n-s}{n-2s-1} \cdot \frac{s+1}{|x|^2} > \frac{s+1}{|x|^2}; \tag{10}$$

d. h. für hinlänglich große n nehmen die absoluten Beträge der Glieder u_s von einem gewissen Stellenzeiger an, ihren Quotienten nach, rascher ab als die Glieder der für $e^{|x|^2}$ erhaltenen Potenzreihe. Weiter ergibt sich, daß diese Glieder u_s sämtlich **endlich** sein müssen, und diese Eigenschaften bestehen übrigens unabhängig von der Wahl von a und n. Es sei nun m eine solche positive ganze Zahl, die zwar mit n über jede Grenze hinaus wächst, aber jedoch so, daß der Quotient $m : n$ verschwindet, z. B.:

$$m \leqq \sqrt[3]{n} < m+1;$$

dann ist es möglich, eine solche positive ganze Zahl N_1 zu bestimmen, daß für $n \geqq N_1$ immer

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{11}$$

wird, indem ε eine vorgegebene, willkürlich kleine positive Größe bezeichnet. Um nun auch die Summe

$$1 + u_1 + u_2 + \cdots + u_m$$

zu untersuchen, setzen wir der Kürze halber:

$$(12)\qquad \begin{aligned} A_s &= \frac{(n-s)(n-s-1)\ldots(n-2s+1)}{(a+n-1)(a+n-2)\ldots(a+n-s)} \\ &= \prod_{p=1}^{p=s}\left(1-\frac{a+s-1}{a+n-p}\right), \end{aligned}$$

und erhalten somit:

$$(13)\ 1+u_1+u_2+\cdots+u_m = 1+\sum_{s=1}^{s=m} A_s\cdot\frac{x^{2s}}{s!\,a(a+1)\ldots(a+s-1)};$$

aus (12) ergibt sich aber:

$$|\log A_s| \leq \sum_{p=1}^{p=n}\left|\log\left(1-\frac{a+s-1}{a+n-p}\right)\right| = \sum_{p=1}^{p=s}\frac{s+|a|-1}{n-p-|a|}\cdot\delta_p,$$

wo δ_p für unbegrenzt wachsendes n dem Grenzwerte 1 zustrebt; ist daher δ obere Grenze der δ_p, so ergibt sich:

$$|\log A_s| < \delta\cdot\frac{s(s+|a|-1)}{n-s-|a|} < \frac{2\sqrt[3]{n^2}}{n-2\sqrt[3]{n}}\cdot\delta.$$

Setzt man daher $A_s = 1+\lambda_{s,n}$, so verschwindet $\lambda_{s,n}$ mit unbegrenzt wachsendem n, und man hat wegen (1) und (13), weil (1) beständig konvergiert,

$$(14)\qquad 1+u_2+u_2+\cdots+u_m = \varphi(a,x)+\delta_n',$$

wo für $n \geqq N_2$ immer $|\delta_n'| < \frac{1}{2}\cdot\varepsilon$ wird; aus (11) und (14) ergibt sich daher:

$$(15)\qquad F_n(a,x) = \varphi(a,x)+r_n,$$

wo für $n \geqq N$ immer $|r_n| < \varepsilon$ wird; d. h. es ist:

$$(16)\qquad \lim_{n=\infty} F_n(a,x) = \varphi(a,x),$$

und also hat man auch, wenn x keine Wurzel der Gleichung $\varphi(a,x) = 0$ bezeichnet,

$$(17)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{y_n}{z_n} = \frac{x^2}{a}\cdot\frac{\varphi(a+1,x)}{\varphi(a,x)} = \psi(a,x),$$

d. h. die Richtigkeit der Entwicklung (4) ist nachgewiesen; außerdem liegt auf der Hand, daß die Fundamentalreihe (5) für alle endliche x und a gleichmäßig gegen seinen Grenzwert $\psi(a,x)$ konvergiert.