# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

## Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1948

München 1949

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

# Über die Erweiterung eines Inhaltes zu einem Maße.

Von

**Otto Haupt** und **Christian Y. Pauc**
in Erlangen in Cap Town.

Vorgelegt am 4. Juni 1948.

## 1. Formulierung des Erweiterungsproblems.

Im folgenden handelt es sich durchweg um Inhalte und Maße,[1] deren Definitionsbereiche Boolesche Verbände bzw. Boolesche $\sigma$-Verbände[1] sind; diese sollen ihrerseits Unterverbände eines festen Booleschen $\sigma$-Verbandes $U$ sein, in welchem sich alle Betrachtungen und Konstruktionen abspielen. Der Einfachheit wegen setzen wir hier stets die Existenz eines Einselementes im (Grund-) Verband $U$ voraus und nehmen die Inhalte bzw. Maße als beschränkt an.

In der Maßtheorie behandelt man unter anderem die Aufgabe,[2] einen *absolut additiven*[1] *Inhalt* $i|V$ zu dem (in $U$ kleinsten) *voll-*

[1] Betr. Verbände und speziell Boolesche Verbände, hier kurz *B-Verbände*, vgl. z. B. C. Carathéodory, Reelle Funktionen, 2. Bd. (noch nicht erschienen). – Wir sprechen von einem *$\sigma$-Verband* bzw. *$\delta$-Verband*, wenn $\sigma$-Bildung bzw. $\delta$-Bildung, d. h. Bildung der Vereinigung bzw. des Durchschnittes abzählbar vieler Elemente, stets Elemente des Verbandes liefert. Ein $\sigma$-B-Verband ist immer auch ein $\delta$-B-Verband. – Unter einem *Inhalt* $i|V$ wird eine nicht negative (endlich oder evtl. auch absolut) additive Funktion mit einem B-Verband $V$ als Definitionsbereich verstanden und unter einem *Maß* $i|W$ eine nicht-negative absolut additive Funktion mit einem $\sigma$-B-Verband als Definitionsbereich (*endlich* bzw. *absolut additiv* heißt: Die Summe der Inhalte endlich vieler bzw. abzählbar vieler fremder Elemente ist gleich dem Inhalte der Vereinigung dieser Elemente). Ein Inhalt (Maß) heißt *positiv*, wenn einzig das Nullelement den Inhalt (das Maß) Null besitzt.

[2] Vgl. z. B. (a) Haupt-Aumann, Differential- und Integralrechn., 3. Bd., Berlin 1938. I. Abschn. – (b) B. Jessen, Abstrakt Maal- og Integralteori, Kopenhagen 1947, 1 ff. – (c) S. Saks, Theory of the integral, Warschau-New York 1937, und die dort zitierte Literatur (bei Saks handelt es sich meist um die sofortige Gewinnung des Lebesgueschen Maßes), ebenso bei H. M. MacNeille, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 24 (1938), S. 188–193. – (d) D. Kappos, Math. Ann. 120 (1947), S. 59 ff. und die dort ziiterte Literatur. – Zusatz bei der Korrektur. Inzwischen erschien das grundlegende Werk H. Hahn – A. Rosenthal, Set functions (Albuquerque, New Mexico, 1948).

*ständigen Maß* $i|V''$ zu *erweitern*, d.h. zu einem Maß, bei dem *jeder* Teil $x \in U$ eines $i$-Nullelementes $n \in V'' = V''(i)$, d. h. eines Elementes $n$ mit $i(n) = 0$, selbst ein Element von $V''$ ist (mit $i(x) = 0$).

Es entspricht der Natur der Sache, die Lösung dieser Aufgabe in *zwei Schritte* zu gliedern, nämlich: *Erstens* in die Erweiterung des Inhaltes $i|V$ zum Borelschen Maß $i|V'$, d. h. in die Erweiterung von $i|V$ zu einem Maß $i|V'$, wobei $V'$ den Borelschen $\sigma$-B-Verband über $V$ bezeichnet, nämlich den kleinsten $\sigma$-B-Verband über $V$ (in $U$); wir sprechen von $V'$ auch kurz als von der Borelschen Erweiterung von $V$. *Zweitens* in die Erweiterung des Borelschen Maßes $i|V'$ zum Lebesgueschen Maß $i|V''$, d. h. in die (in $U$) kleinste Erweiterung von $i|V'$ zu einem vollständigen Maß; wir sprechen von $V'' = V''(i; V) = V''(i)$ auch kurz als von der Lebesgueschen Erweiterung von $i|V$ (oder von $i|V'$) in $U$. Sowohl das Borelsche als das Lebesguesche Maß sind durch $i|V$ *eindeutig* bestimmt[2] – ihre, jetzt zu beweisende, Existenz natürlich vorausgesetzt.

Man bemerke hierbei, daß die *Borelsche Erweiterung* $V'$ *über* $V$ *unabhängig von* $i$, d.h. für jedes $i|V$ die gleiche ist; denn die Borelsche Erweiterung von $V$ (in $U$) wird in abzählbar vielen Schritten durch abwechselnde $\sigma$- und $\delta$-Bildung aus $V$ erzeugt, ist also durch $V$ rein verbandsalgebraisch definiert. Im Gegensatz dazu wird die *Lebesguesche Erweiterung* $V'' = V''(i|V)$ wesentlich – nicht nur durch $V$, sondern auch – durch $i$ mitbestimmt; für irgend zwei Inhalte $i|V$ und $j|V$ nämlich werden im allgemeinen die $\sigma$-Ideale der in $V'$ enthaltenen $i$-Nullelemente bzw. $j$-Nullelemente nicht identisch sein; man gelangt aber von $i|V'$ zu $i|V''(i)$ bzw. von $j|V'$ zu $j|V''(j)$ gerade durch Adjunktion aller Teile der $i$- bzw. $j$-Nullelemente von $V'$ und Bildung des kleinsten $\sigma$-B-Verbandes $V''(i)$ bzw. $V''(i)$ über $V'$, welcher alle diese Teile umfaßt.

## 2. Fragestellung.

Nach dem eben (in Nr. 1) Gesagten ist (innerhalb $U$) die Konstruktion des Lebesgueschen aus dem Borelschen Maß (bei

Dort wird (S. 74 ff.) auch (für beliebiges, absolut additives $i|V$) die Erweiterung von $i|V$ auf $i|V_\sigma$ betrachtet und als absolut additiv nachgewiesen, dann aber sogleich zu $i|V''$ übergegangen.

gegebenem $i|V$) immer möglich.[2a] Die eigentliche Schwierigkeit bei der Erweiterungsaufgabe liegt somit in der Konstruktion des Borelschen Maßes.[3] Die schon (in Nr. 1) erwähnte Erzeugung der Borelschen Erweiterung von $V$ durch abwechselnde $\sigma$- und $\delta$-Bildung[1] legt es (wie der eine von uns [P.] bemerkt hat) nahe, auch das Borelsche Maß $i|V'$ in abzählbar vielen Schritten zu konstruieren, also jedem $\sigma$- bzw. $\delta$-Schritt in der Konstruktion von $V'$ eine Erweiterung von $i$, zunächst aus $V$, sodann aus dem jeweils vorliegenden $\delta$- bzw. $\sigma$-Verband zum jeweils kleinsten $\sigma$- bzw. $\delta$-Oberverband entsprechen zu lassen. Eine (von uns nicht veröffentlichte) Durchführung dieses Gedankens ins einzelne zeigte, daß in der Tat auf diesem Wege (mit Hilfe transfiniter Induktion) das Borelsche Maß (in abzählbar vielen Schritten) konstruiert werden kann. Inzwischen erkannten wir aber, daß sich diese Konstruktion auf (im wesentlichen) zwei Schritte reduzieren und damit das ganze Verfahren erheblich sich vereinfachen läßt.

Der hiermit angedeutete (konstruktive) Existenzbeweis für das Borelsche Maß (über einem absolut additiven Inhalt) entwickelt sich, wie aus den folgenden Ausführungen zu entnehmen, zwangsläufig aus einem einfachen Grundgedanken und läßt, was für manche Anwendungen nützlich ist, den Unterschied zwischen Borelscher und Lebesguescher Erweiterung deutlich hervortreten. Da der Beweis unseres Wissens bisher nicht bekannt ist, soll darüber nachstehend, ohne Eingehen auf alle Einzelheiten, berichtet werden. Eine ausführliche Darstellung wird an anderer Stelle erscheinen.[3]

## 3. Gedankengang der Erweiterungskonstruktion.

**3.1.** Die in Nr. 2 angedeutete Konstruktion des Borelschen Maßes $i|V'$ in abzählbar vielen Schritten vereinfacht sich ganz von selbst außerordentlich, falls $i|V$ ein totalpositiver Inhalt ist; dabei wird ein Inhalt $i|V$ als totalpositiv (in $U$) bezeich-

[2a] Es wird nämlich $V''$ von genau denjenigen Elementen $x \in U$ gebildet, zu denen für beliebiges $\varepsilon > 0$ solche $y', z' \in V'$ existieren, daß $y' < x < z'$ und $i(z' - y') < \varepsilon$. Vgl. a. a. O[2].

[3] Haupt-Aumann-Pauc, Differential- und Integralrechnung, 2. Aufl. 3. Bd., Berlin.

net, wenn nicht nur $i|V$ selbst, sondern auch das zugehörige Lebesguesche Maß $i|V''(i)$ (vorausgesetzt, daß $i|V''(i)$ existiert) positiv ist; dies ist der Fall, *wenn und nur wenn das Borelsche Maß $i|V'$ positiv* ist. Wir bemerken dazu, daß im allgemeinen ein positiver Inhalt nicht auch totalpositiv ist; dies zeigt schon der elementare, für den B-Verband der Maschenaggregate eines Gitters im euklidischen $E_n$ erklärte Inhalt, bei welchem (absteigende) Folgen von Aggregaten existieren, deren algebraischer Limes[4] nicht leer ist, während ihre Inhalte gegen Null konvergieren, so daß also schon in $V_\delta$ nicht leere $i$-Nullelemente auftreten, obwohl der ursprüngliche Inhalt über dem Aggregatenverband positiv war.

Die erwähnte Vereinfachung der Konstruktion des Borelschen Maßes, das übrigens hier, d. h. bei positivem $i|V'$, mit dem Lebesgueschen identisch wird, ergibt sich aus der folgenden Tatsache:

Vor. Es sei $i|V$ ein *totalpositiver, absolut additiver Inhalt* (in $U$). Ferner sei $V_\sigma$ bzw. $V_\delta$ der kleinste $\sigma$- bzw. $\delta$-Verband (in $U$) über $V$ und $V_{\sigma\delta}$ bzw. $V_{\delta\sigma}$ der kleinste $\delta$- bzw. $\sigma$-Verband über $V_\sigma$ bzw. über $V_\delta$.

Beh. 1. *Die Konstruktion der Borelschen Erweiterung $V'$ von $V$ (in $U$) bricht schon mit dem zweiten Schritte ab; genauer: es ist $V_{\sigma\delta} = V_{\delta\sigma} = V'$;*

2. *Die Lebesguesche Erweiterung $V'' = V''(i)$ von $V$ bzw. $V'$ ist ebenfalls unabhängig von $i$, nämlich gleich der Borelschen Erweiterung $V'$; also $V'' = V_{\sigma\delta} = V_{\delta\sigma}$.*

1. Anmerkung. Es existiert zu jedem $a \in V'' = V' = V_{\sigma\delta} = V_{\delta\sigma}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $s \in V_\sigma$ und ein $d \in V_\delta$ mit $d \leq a \leq s$ und mit $i(s-d) < \varepsilon$. Jedes $a \in V''$ ist algebraischer Limes einer Folge von Elementen aus $V$; dies ist übrigens, wie Herr Kappos allgemein für o-topologische Verbände $V$ gezeigt hat, eine Folge lediglich von $a \in V_{\sigma\delta} V_{\delta\sigma}$.

2. Anmerkung. In der Beh. 1 ist eine *notwendige Bedingung enthalten* dafür, daß die Borelsche Erweiterung $V'$ eines Boole-

[4] Mit lim alg und als algebraischer Limes wird der in der Verbandsalgebra gebräuchliche Limes einer Elementenfolge verstanden (Vereinigung der Durchschnitte schließlich aller Elemente der Folge gleich Durchschnitt der Vereinigungen schließlich aller Elemente der Folge).

schen Verbandes $V$ *Definitionsbereich eines positiven Maßes* sein kann oder, was das gleiche, daß der Boolesche Verband $V$ als *Träger eines totalpositiven* (absolut additiven) *Inhaltes* in Betracht kommt.[4a]

Die vorstehenden Aussagen decken sich mit dem Inhalt eines bekannten (meist wohl nur für den Fall des klassischen Lebesgueschen Maßes im euklidischen $E_n$ formulierten[5]) Satzes, wenn man ihn für den Fall ausspricht, daß nur das leere Element das Maß Null hat. Demgegenüber ist zu bemerken, daß bei dem von uns beabsichtigten Beweise des Erweiterungssatzes die vorstehenden Aussagen im Laufe der Konstruktion erst bewiesen werden müssen (vgl. Nr. 4).

**3.2.** Es gilt nun, die für den Fall totalpositiver Inhalte gemachte Feststellung nutzbar zu machen für den (allgemeinen) Fall eines nicht-totalpositiven Inhaltes. Dies gelingt, indem man vermöge Restklassenbildung den letzten Fall auf den ersten zurückführt. Und zwar handelt es sich um Restklassenbildung nach dem totalen $i$-Nullideal $N'' = N''(i)$ über $V$ (in $U$), d. h. nach dem $\sigma$-Ideal gebildet aus allen, in der gesuchten Lebesgueschen Erweiterung $V''(i)$ auftretenden Elementen vom Maße Null. Bei der durch diese Restklassenbildung definierten homomorphen Abbildung von $U$ auf $\tilde{U} = U/N''$ entsprechen nämlich einander $V$ und $\tilde{V} = V/N''$ sowie $i|V$ und $i|\tilde{V}$, ferner gilt $\tilde{V}_\sigma = V_\sigma/N''$ sowie $\tilde{V}_{\sigma\delta} = V_{\sigma\delta}/N''$ usw., und schließlich ist die Borelsche bzw. Lebesguesche Erweiterung $\tilde{V}'$ bzw. $\tilde{V}''$ von $\tilde{V}$ in $\tilde{U}$ bezüglich $i|\tilde{V}$ gleich $V'/N'' = \tilde{V}'$ bzw. $V''/N'' = \tilde{V}''$; überdies muß aber $i|\tilde{V}$ totalpositiv sein in $\tilde{U}$, gemäß der Definition von $N''$.

**3.3.** Zufolge Nr. 3.1 und 3.2 reduziert sich daher die Lösung der Erweiterungsaufgabe auf: *Erstens* die Konstruktion des totalen $i$-Nullideals (in $U$) über $V$; *zweitens* die Erweiterung von $i|\tilde{V}$ auf $i_\sigma = i|\tilde{V}_\sigma$ und auf $i_\delta = i|\tilde{V}_\delta$; denn jedes $a \in V''$ ist (gemäß Nr. 3.1, Beh. (2)) zwischen $s \in \tilde{V}_\sigma$ und $d \in \tilde{V}_\delta$ ein-

---

[4a] Betr. eine rein algebraische notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Boolescher $\sigma$-Verband Träger eines positiven Maßes ist, vgl. D. Maharam, Ann. of Math. 48 (1947), 154 ff.

[5] Vgl. z. B. Saks, a. a. O. [2], S. 69.

chließbar derart, daß die Maße $i_\sigma(s)$ und $i_\delta(d)$ beliebig wenig verschieden sind, also $i(a)$ im Sinne unserer Aufgabe konstruierbar wird; *drittens* Zurückgehen von $\tilde{U}$ und $\tilde{V}$ zu $U$ und $V$; dies liefert dann wegen der Homomorphie zwischen $\tilde{U}$ und $U$ die Erweiterung von $i|V$ zum Borelschen bzw. Lebesgueschen Maß in $U$.

Wie sich die Durchführung der beiden ersten Konstruktionsschritte des näheren gestaltet, soll in der nachstehenden Nr. 4 noch skizziert werden.

## 4. Durchführung der Konstruktion.

**4.1.** Konstruktion des totalen $i$-Nullideals $N''(i)$ über $V$.

Zur Gewinnung von $N'' = N''(i)$ gehen wir von der Bemerkung aus, daß jedes Element $b \in N''$ enthalten ist in einem Element $x = x(a; \varepsilon) \in V_\sigma$ mit $i(x) < \varepsilon$, wobei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zur Definition von $i(x)$ genügt es dabei, *$i|V$ zu erweitern auf den kleinsten $\sigma$-Verband $V_\sigma$*, also zu $i_\sigma|V_\sigma = i|V_\sigma$. Folglich *kann $N''$ als bekannt gelten, sobald $i|V_\sigma$ konstruiert ist.*

**4.2.** Konstruktion und Eigenschaften von $i|V_\sigma$ und $i|V_\delta$.

Die Konstruktion von $i|V_\sigma$ gestaltet sich etwa so: Da jedes Element $x \in V_\sigma$ darstellbar ist als Vereinigung abzählbar vieler fremder Elemente $x_\nu \in V$, so muß gesetzt werden $i_\sigma(x) = \sum i(x_\nu)$. Man zeigt dann, daß $i_\sigma(x)$ durch diese Definition eindeutig bestimmt ist als nicht-negative, absolut additive Erweiterung von $i|V$ auf $V_\sigma$. Entsprechend konstruiert man $i_\delta|V_\delta$ als Erweiterung von $i|V$. Man beweist dann unter anderem: (I) Für $s \in V_\sigma$, $d \in V_\delta$ und $d \subseteq s$ gilt $s - d \in V_\sigma$ sowie $i_\sigma(s-d) = i_\sigma(s) - i_\delta(d)$. Ferner (II) den[6] *Eingrenzungssatz* (vgl. Nr. 3.1): Jedes Element $a$ aus der Borelschen Erweiterung $V'$ von $V$ ist von oben bzw. von unten her aus $V_\sigma$ bzw. aus $V_\delta$ beliebig genau $i$-eingrenzbar, d. h. zu beliebigem $a \in V'$ und beliebigem $\varepsilon > 0$ existiert $s = s(a; \varepsilon) \in V_\sigma$ und $d = d(a; \varepsilon) \in V_\delta$ mit $d \subseteq a \subseteq s$ und $i_\sigma(s-d) < \varepsilon$. Zufolge der Definition der Lebesgueschen Erweiterung $V'' = V''(i)$ gilt der Eingrenzungs-

[6] Vgl. auch Haupt und Pauc, Arch. der Math. 1 (1948), S. 23 ff.

satz von selbst auch für jedes $b \in V''$ (vorausgesetzt, daß $V''$ existiert).

**4.3.** Erweiterung totalpositiver Inhalte. Zufolge des Eingrenzungssatzes (Nr. 4.2) ist nach Konstruktion von $i_\sigma | V_\sigma$ das totale $i$-Nullideal $N'' = N''(i)$ von $i|V$ in $U$ ebenfalls konstruierbar und somit auch $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ sowie der total positive, absolut additive Inhalt $i|\tilde{V}$. Für $i|\tilde{V}$ kann man aber (gemäß Nr. 4.2) die Erweiterungen $i_\sigma|\tilde{V}_\sigma$ und $i_\delta|\tilde{V}_\delta$ von $i|\tilde{V}$ konstruieren. Aus dem wiederum gültigen Eingrenzungssatz entnimmt man jetzt: Zu jedem $a \in \tilde{V}'$ existiert eine absteigende bzw. aufsteigende Folge von Elementen $s_n \in \tilde{V}_\sigma$ bzw. $d_n \in \tilde{V}_\delta$ mit $d_n \subseteq a \subseteq s_n$ und $\lim i_\sigma(s_n - d_n) = 0$. Es sei[4] nun $d = \lim \text{alg}\, d_n$ und $s = \lim \text{alg}\, s_n$, also $d_n \subseteq d \subseteq a \subseteq s \subseteq s_n$ und $d \in \tilde{V}_{\delta\sigma}$, $s \in \tilde{V}_{\sigma\delta}$. Wegen $s - d \subseteq s_n - d_n \in \tilde{V}_n$ besitzt daher $q = s - d$ Oberelemente in $\tilde{V}_\sigma$ von beliebig kleinem Maß $i_\sigma$; daher ist $q \in \tilde{N}''(i)$, wobei $\tilde{N}'' = \tilde{N}''(i)$ das totale $i$-Nullideal über $\tilde{V}$ in $\tilde{U}$ bezeichnet. Wegen der totalen Positivität von $i|\tilde{V}$ in $\tilde{U}$ ist aber das Nullelement das einzige Element in $\tilde{N}''$. Somit gilt $d=a=s$, also $a \in \tilde{V}_{\sigma\delta}\tilde{V}_{\delta\sigma}$ für jedes $a \in \tilde{V}'$. Mithin ist $\tilde{V}' \subset \tilde{V}_{\sigma\delta}\tilde{V}_{\delta\sigma} \subset \tilde{V}'$ und folglich $\tilde{V}_{\sigma\delta} = \tilde{V}_{\delta\sigma} = \tilde{V}'$. Demgemäß erhält man $i|\tilde{V}'$ einfach vermöge der Festsetzung $i(a) = \lim i_\sigma(s_n) = \lim i_\delta(d_n)$. Man zeigt, daß durch diese Festsetzung tatsächlich ein (positives) Maß in $\tilde{V}'$ gewonnen wird, das Erweiterung von $i|\tilde{V}$ ist.

Schließlich zeigt man, daß das (nicht leere) System der Elemente $a \in \tilde{U}$, die aus $\tilde{V}_\sigma$ bzw. $\tilde{V}_\delta$ von oben bzw. unten $i$-eingrenzbar sind, ein σ-B-Verband $\tilde{V}^*$ ist. Die zum Beweis von $\tilde{V}' = \tilde{V}_{\sigma\delta}$ verwendeten Schlüsse ergeben jetzt, daß $\tilde{V}^* = \tilde{V}' = \tilde{V}''$ ist. Daraus folgt insbesondere, daß jedes $b \in \tilde{V}$ algebraischer Limes eine Folge von Elementen aus $\tilde{V}$ ist.

**4.4.** In bekannter Weise[7] ergibt sich übrigens noch: Jedes $a \in V''$ ist aus $V$ heraus beliebig genau $i$-approximierbar, d. h. zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existieren $z \in V$ mit $i(a \dotplus z) < \varepsilon$.

[7] Vgl. z. B. Kappos, a. a. O.[2] und die dort zitierten Arbeiten von O. Nikodym und F. Wecken.