

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1916. Heft I

Januar- bis März-sitzung

München 1916

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Über abnorme Hörbarkeit.

Von R. Emden.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 3. Juni 1916.

Durch zufällige, größere Explosionen, die Lufterschütterungen bei Vulkanausbrüchen und namentlich durch den Donner der schweren Geschütze im gegenwärtigen Kriege konnte mit Sicherheit festgestellt werden, daß von dem Gebiete normaler Hörbarkeit getrennt durch eine bis zu 100 Kilometer breite Zone des Schweigens sich häufig in einem begrenzten, wahrscheinlich in Windrichtung gelegenen Sektor (gleichzeitige Windbeobachtungen aus der Höhe liegen nicht vor) wieder ein Gebiet deutlicher Hörbarkeit einstellt. Bei der Belagerung von Antwerpen erstreckte sich das Gebiet normaler Hörbarkeit über eine Kreisfläche von rund 100 Kilometer Radius; in nordöstlicher Richtung begann dann in 160 Kilometer Entfernung eine neue Zone der Hörbarkeit, um bei 200 Kilometer am stärksten aufzutreten und in 230 Kilometer Entfernung wieder zu verschwinden. Die kühne Hypothese von dem Bornes, die Schallstrahlen durch eine akustisch dünnere, in Höhen von über 60 Kilometer angenommene Wasserstoffatmosphäre total reflektieren zu lassen, wurde durch W. Schmidt durch den Hinweis widerlegt, daß auf diesem Wege nur ein verschwindend kleiner Bruchteil der ausgesandten Schallenergie den Erdboden wieder erreichen kann. Von verschiedenen Seiten wurden mit der Höhe wechselnde Windströmungen zur Erklärung beigezogen, ohne aber diesem Gedanken die wünschenswerte, präzise Fassung zu geben.¹⁾ Ich werde im folgenden zeigen, daß durch

¹⁾ Siehe Anmerkung am Schlusse.

die normalen, mit der Höhe sich stetig ändernden Temperaturen und Windgeschwindigkeiten die beobachteten, scheinbar abnormen Verhältnisse sich qualitativ und quantitativ vollständig erklären lassen.

Jede Strahlung bewegt sich bekanntlich in Gebieten stetig veränderlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit c in stetig gekrümmten Bahnen. Ist das durchstrahlte Medium horizontal geschichtet, so ist der Krümmungsradius σ der einfach gekrümmten Bahnkurve

$$1) \quad \sigma = - \frac{c}{\left(\frac{dc}{d\sigma}\right)} = - \frac{c}{\frac{dc}{dz} \sin i}$$

$\left(\frac{dc}{d\sigma}\right)$ ist der Gradient von c parallel σ , z die nach oben gerichtete Vertikale, i der Winkel der Wellennormalen mit der Vertikalen; σ selbst und der Gradient $\frac{dc}{dz}$ sind entgegengesetzt gerichtet. Aus 1) folgt bekanntlich, daß längs des Strahles

$$2) \quad \frac{c}{\sin i} = \text{konst.} = A$$

sein muß. In einem vollkommenen Gase, das der Zustandsgleichung $pv = RT$ folgt, ist $c = \sqrt{\gamma RT}$. Die Krümmung eines Schallstrahles in der Atmosphäre ist durch die Temperaturverteilung längs der Vertikalen gegeben.

Gegeben sei eine polytrope Atmosphäre von der Klasse n . Dann ändert sich die Temperatur linear mit der Höhe nach dem Gesetze

$$a) \quad dT = - \frac{g dz}{(n+1)R}$$

und die Höhe der polytropen Atmosphäre ist

$$b) \quad H_n = \frac{(n+1)RT}{g}$$

Für $n = 0$ und $T = 273$ ist $H_0 = 8000$ m. Zu Temperaturgradienten zwischen $0,85^\circ$ und $0,49^\circ$ auf 100 m ge-

hören n zwischen 3 und 6 und Höhen H_n zwischen 32 000 und 56 000 m; für $T = 273$.

Dann ergibt sich leicht

$$3) \quad \sigma = + \frac{2 H_n}{\sin i}$$

Das heißt: In jeder polytropen Atmosphäre ist an jeder Stelle der Krümmungsradius des horizontal streichenden Strahles gleich der doppelten Höhe der polytropen Atmosphäre. Für den Strahl folgt aus 2) die Gleichung

$$\operatorname{tg} i = \frac{dx}{dz} = \frac{c}{\sqrt{A^2 - c^2}},$$

die sich leicht integrieren läßt und eine Cykloide ergibt. Eine einfachere Bahnkurve folgt, wenn man in c (mit genügender

Genauigkeit) $\left(\frac{z}{H_n}\right)^2$ gegen 1 vernachlässigt. Dann ergibt sich die Kettenlinie

$$4) \quad z = -2 H_n + 2 H_n \frac{e^{\frac{x}{2 H_n}} + e^{-\frac{x}{2 H_n}}}{2}$$

H_n gebildet an der Stelle $x = 0$, $z = 0$. Handelt es sich um keine zu großen Spannweiten, so kann die Kettenlinie durch den Krümmungskreis vom Radius $\sigma = 2 H_n$ ersetzt werden. Liegt die Schallquelle auf dem Erdboden, so beschreibe man von einem um die Strecke $2 H_n$ höher gelegenen Punkte den die Erde tangierenden Kreisbogen. Sieht man von Störungen durch den Erdboden, sowie von Beugungserscheinungen an dieser Grenzkurve ab, so ist das Gebiet zwischen beiden eine Zone des Schweigens. Sie beginnt für ein Ohr in der Höhe $z m$ in einer Entfernung $D = \sqrt{2 \cdot 2 H_n \cdot z}$, für $z = 1,5 m$ in rund $D = \frac{1}{2}$ Kilometer. Ein Wind von konstanter Stärke würde, wie sich aus den unten gegebenen Formeln folgern läßt, die Grenzkurve in Windrichtung niederdrücken, in entgegengesetzter Richtung heben. Für gleiche Höhe wird auf der Leeseite die Zone der Hörbarkeit wachsen, auf der anderen Seite abnehmen. Stets aber würde sich die Grenzkurve nach größeren Höhen

verlängern, eine neue Zone der Hörbarkeit könnte nicht auftreten. Temperaturzunahme nach oben könnte den in die Höhe strebenden Strahl wieder nach der Tiefe umlenken; in der dazu erforderlichen Stärke würde sie aber nur äußerst selten vorhanden sein. Im Folgenden soll gezeigt werden, daß die in der Regel auftretende Windzunahme nach oben die Temperaturabnahme überkompensieren und den Strahl wieder in die Tiefe leiten kann.

Daß Windzunahme nach oben einen horizontal streichenden Strahl nach der Tiefe abbiegen kann, ist leicht einzusehen.

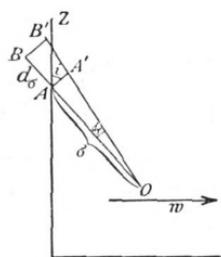


Fig. 1

Ein vertikal stehendes Element der Wellenfläche wird durch den Wind mitgeführt, die obere Kante rascher wie die untere Kante. Die Wellennormale neigt sich nach abwärts und der Strahl geht in die Tiefe. Die Größe und Lage des Krümmungsradius läßt sich, falls die Schallgeschwindigkeit c (Temperatur) und die Geschwindigkeit w des horizontal streichenden Windes beide mit der Höhe sich ändern, leicht ermitteln (Fig. 1).

Die Normale eines Elementes AB , $AB = d\sigma$, der Wellenfläche bildet mit der Vertikalen den Winkel i . Die untere Kante A verschiebt sich in der Zeit dt in Richtung der Normalen um die Strecke $(c + w \sin i) dt = W dt$, die obere Kante B um die Strecke $\left(W + \left(\frac{dW}{d\sigma} \right) d\sigma \right) dt$. Nach Ablauf der Zeit dt hat sich das Element um den Winkel $d\varphi = \left(\frac{dW}{d\sigma} \right) dt$ gedreht, und wir erhalten, da $AA' = W dt = \sigma d\varphi = \sigma \left(\frac{dW}{d\sigma} \right) dt$

$$5) \quad \sigma = - \frac{W}{\left(\frac{dW}{d\sigma} \right)} = - \frac{W}{\frac{dW}{dz} \sin i} = - \frac{c + w \sin i}{\frac{d(c + w \sin i)}{dz} \sin i}.$$

In einer polytropen Atmosphäre von der Klasse n können wir nach a), b) den Temperaturgang darstellen in der Form

$$T = T_0 \left(1 - \frac{z}{H_n} \right).$$

H_n die im Niveau $z = 0$ errichtete Höhe der polytropen Atmosphäre. Daraus folgt für die Schallgeschwindigkeit der Gang

$$c = \sqrt{\kappa RT} = c_0 \sqrt{1 - \frac{z}{H_n}} = c_0 \left(1 - \frac{z}{2H_n} \right) = c_0 (1 - \beta z);$$

$$\beta = \frac{1}{2H_n}.$$

Denn die quadratischen Glieder können mit genügender Genauigkeit vernachlässigt werden. Setzen wir weiter die Windgeschwindigkeit linear mit Höhe an in der Form

$$w = w_0 (1 + \alpha z),$$

so folgt

$$6) \quad \sigma = - \frac{w_0 (1 + \alpha z) \sin i + c_0 (1 - \beta z)}{(w_0 \alpha \sin i - c_0 \beta) \sin i}.$$

Haben wir es nur mit nahezu horizontal streichenden Strahlen zu tun, so kann $\sin i = 1$ gesetzt werden

$$6') \quad \sigma = - \frac{w_0 + c_0 + (w_0 \alpha - c_0 \beta) z}{w_0 \alpha - c_0 \beta}$$

und da die Gradienten kleine und entgegen gerichtete Größen sind, folgt schließlich mit hinreichender Genauigkeit

$$7) \quad \sigma = - \frac{w_0 + c_0}{w_0 \alpha - c_0 \beta}.$$

Je nachdem $w_0 \alpha \geq c_0 \beta$ überwiegt die Wind- oder die Temperaturverteilung, ist der Krümmungsradius nach unten oder nach oben gerichtet. Bereits schwache Windzunahme nach oben kann die Temperaturabnahme kompensieren. Denn zu dem starken Temperaturgradienten $0,85^\circ/100 \text{ m}$, $n = 3$, gehört ein H_n von rund 33000 m , $\beta = \frac{1}{66000}$. Für den kompensierenden Windgradienten ergibt sich $w_0 \alpha = \frac{330}{66000} = \frac{1}{200}$. Eine Windzunahme von nur 5 m pro Kilometer würde bereits einen geradlinigen Strahl liefern.

Formel 6) gilt für das Verhalten des Strahles in Windrichtung; in der entgegengesetzten Richtung haben wir w_0 mit

neg. Vorzeichen anzusetzen; die beiden Gradienten unterstützen sich, wodurch sich stark gekrümmte Strahlen ergeben können. Auf gleichmäßigen Wind können wir durch $a = 0$ spezialisieren.

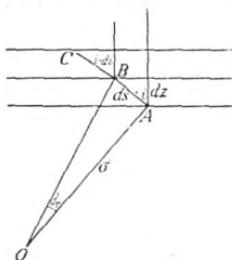


Fig. 2

Die Kurve, deren Krümmungsradien durch 5) dargestellt werden, kann auch auf folgendem Wege entwickelt werden (Fig. 2). Wir betrachten 2 aufeinander folgende dünne Schichten von der Dicke dz . Zwei aufeinander folgende Wellennormalen AB und BC von der Länge ds bilden mit der Vertikalen die Winkel i und $i + di$. Die Figur liefert die Beziehungen

$$ds = -\sigma d\varphi = -\sigma di = \frac{dz}{\cos i}; \quad \sigma \text{ war} = -\frac{W}{\frac{dW}{dz} \sin i}.$$

Daraus folgt
$$\frac{dW}{W} = \frac{\cos i di}{\sin i}$$

und schließlich

$$8) \quad \frac{W}{\sin i} = \frac{c}{\sin i} + w = \text{konst.} = A.$$

Für $w = 0$ ergibt sich Gl. 2). Diese Gleichung liefert das Brechungsgesetz, falls Schallgeschwindigkeit und Windgeschwindigkeit gleichzeitig sich ändern.

Der Kurvenzug, der durch die Gl. 8) definiert ist, wird gebildet durch die aufeinander folgenden Elemente der Wellennormalen und darf nicht mit dem Strahle, dem Wege des Energietransportes, der für unser Problem in erster Linie in Betracht kommt, verwechselt werden. Jeder Wind trennt Normalengang und Strahlengang. Dies läßt sich am einfachsten durchblicken, wenn eine ebene Welle, die bei konstantem Winde vertikal nach oben geht, vorliegt. Die Ebene bleibt sich parallel, alle Normalenelemente sind vertikal gestellt; aber durch den Wind getragen verschoben sich die Ebenen in sich selbst, und jedes Ebenenelement verschiebt sich auf einer Geraden, dem Strahle, die in Windrichtung um den Winkel i'' , $\text{tg } i'' = \frac{w}{c}$

geneigt ist. (In diesem Falle lassen sich die Elemente der zusammengehörigen Elemente der Wellennormalen nicht mehr zu Bahnen zusammensetzen.)

Um in dem allgemeinen Falle den Zusammenhang zwischen Normale und Strahl, sowie die Strahlgleichung festzustellen, leiten wir das Brechungsgesetz 8) nochmals ab für den Übergang zwischen 2 Schichten I und II, wobei in jeder Schicht konstante Geschwindigkeiten c und w , herrschen sollen, die sich an der Berührungsstelle sprunghaft ändern (Fig. 3).

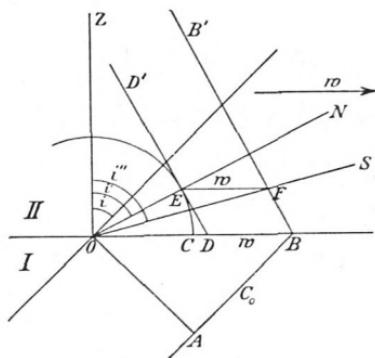


Fig. 3

In diesem Falle kann die Schicht I auch als ruhend angenommen werden.

Eine ebene Welle OA falle unter einem Winkel i ein; ihre Geschwindigkeit sei $AB = c_0$. In der Schicht II schlagen wir mit der herrschenden Geschwindigkeit $OC = c$ um O einen Kreis, gehen von B um die Strecke $BD = w$ dem Winde entgegen und legen von D die Tangente an den Kreis; der Berührungspunkt sei E . (Fällt der Punkt D in den Kreis, also links von c , so ist die Tangente nicht mehr möglich, und es tritt Totalreflexion ein.) Nach Ablauf der Zeit 1 hat sich unter Einfluß des Windes DD' parallel mit sich selbst nach BB' verschoben. BB' stellt die gebrochene Wellenfront dar, die Wellennormale N , die Verlängerung von OE , bildet mit der Vertikalen den Winkel i' , und die Konstruktion gibt das Brechungsgesetz der Normalen

$$\frac{c}{\sin i'} + w = \frac{c_0}{\sin i} = \text{konst.}$$

Da die linke Seite der Gleichung konstant bleibt, wenn wir c und w beliebig ändern, und w die Relativgeschwindigkeit der Schicht II gegen die Schicht I bedeutet, haben wir

auch bei dem Durchgang durch beliebig viele Schichten wiederum Gl. 8)

$$8) \quad \frac{c}{\sin i'} + w = \frac{c_0}{\sin i} + w_0 = \text{konst.} = A.$$

(Grenzen 2 gleich temperierte Schichten, $c = c_0$, aneinander, so tritt Totalreflexion ein, wenn $w - w_0 > c \left(\frac{1}{\sin i} - 1 \right)$ wird. Für flach einfallende Wellen genügen dazu bereits kleine, sprungweise Änderungen der Windgeschwindigkeit, für $i = 80^\circ$ schon $w - w_0 = 5 \text{ m/sec}$. Solche akustische Schlieren, hervorgebracht durch aneinander grenzende Konvektionsströme, können in der stark durchmischten Gewitteratmosphäre wesentlich zum Rollen des Donners beitragen.)

Den zur Normalen N gehörigen Strahl S zu finden gehen wir von E in Richtung des Windes um die Strecke w vorwärts, treffen die Wellenfront in F und erhalten durch OF den Strahl S , ($OF = OE + EF = c + w$), der mit der Vertikalen den Winkel i'' bildet. Die Figur und Gl. 8) ergeben

$$9) \quad \text{tg } i'' = \frac{c \sin i' + w}{c \cos i'} = \frac{c^2 + (A - w)w}{c \sqrt{(A - w)^2 - c^2}}.$$

Somit erhalten wir die Differentialgleichungen für die Normalen

$$10) \quad \frac{dx}{dz} = \text{tg } i' = \frac{c}{\sqrt{(A - w)^2 - c^2}},$$

für die Strahlen

$$11) \quad \frac{dx}{dz} = \text{tg } i'' = \frac{c^2 + (A - w)w}{c \sqrt{(A - w)^2 - c^2}}$$

$$w = w_0(1 + az); \quad c = c_0(1 - \beta z); \quad \beta = \frac{1}{2H_n}.$$

Beide Gleichungen lassen sich leicht integrieren, falls wir in w und c Glieder mit $\left(\frac{z}{H_n}\right)^2$ gegen 1 vernachlässigen. Den Anfangspunkt der Koordinaten verlegen wir in die horizontale Stelle

des Strahles. Dann folgen mit hinreichender Genauigkeit für die Normale

$$12) \quad z = -\frac{c_0}{c_0\beta - w_0\alpha} + \frac{1}{2} \frac{c_0}{c_0\beta - w_0\alpha} \left(e^{\frac{c_0\beta - w_0\alpha}{c_0}x} + e^{-\frac{c_0\beta - w_0\alpha}{c_0}x} \right)$$

und für den Strahl

$$13) \quad Bx = \lg [V\sqrt{y^2 - 1} + y] + \frac{w_0}{c_0} V\sqrt{y^2 - 1}.$$

$$y = 1 + Bz; \quad B = \frac{c_0\beta - w_0\alpha}{c_0}.$$

Damit ist die Aufgabe gelöst, die Zonen des Schweigens und der Hörbarkeit zu trennen. Liegt die Schallquelle am Erdboden, so ziehe man durch dieselbe den die Erde tangierenden Strahl und verfolge ihn mit Hilfe der Gl. 13 durch die abteilungsweise geschichtete Atmosphäre hindurch, wobei dafür zu sorgen ist, daß an den Schichtgrenzen die Tangentenrichtungen zusammenfallen.

Ich gebe ein einfaches Beispiel. Die Atmosphäre ist nach der Polytropen $n = 4,75$ gebaut, der Temperaturgradient beträgt $0,62^\circ/100$ m, H_n rund 46000 m. Auf der Erde liegt eine windstille Zone, die sich bis 350 m Höhe erstreckt. Dann beginne stetig Wind einzusetzen, dessen Geschwindigkeit auf je 1000 m Erhebung um 4 m/sec zunimmt und so in der Höhe 3350 m, die der Grenzstrahl erreicht, 12 m/sec beträgt. Die Schallquelle (Fig. 4) liege auf dem Erdboden in A . Wir schlagen durch A mit einem Radius $2H_n = 92000$ m den die Erde tangierenden Kreisbogen, der in einer Entfernung $AB = 8$ Kilometer die obere Schicht erreicht. In diese unter einem Winkel 85° eindringend kulminiert der Strahl in einer Entfernung $BC = 72,6$ Kilometer in einer Höhe von 3350 m und steigt von da auf symmetrisch gelegenen Wege wieder zur Erde herab, die er in E erreicht. (Der zugehörige Normalenbogen kulminiert in gleicher Entfernung 300 m höher.) Mit den in Wirklichkeit häufig beobachteten Entfernungen von rund 150 Kilometern

beginnt in E in einer Entfernung $OE = 161$ Kilometern eine neue Zone der Hörbarkeit. Die geringe Höhe, bis zu welcher der Grenzstrahl ansteigt, bewirkt, daß in E die Intensität des Schalles nicht quadratisch, sondern angenähert linear mit der Entfernung abgenommen hat. In der zwischenliegenden Zone des Schweigens können Gebirge bis zur Höhe der Grenzkurve aufsteigen, ohne die Hörbarkeit in E zu beeinträchtigen. Da der Grenzstrahl sich periodisch verlängern läßt, sind weitere, durch Zonen des Schweigens getrennte Gebiete der Hörbarkeit nicht ausgeschlossen.

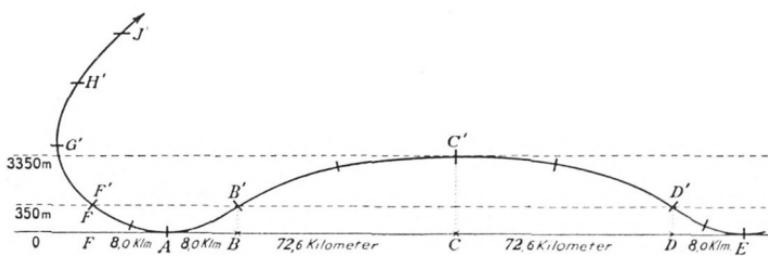


Fig. 4

Gänzlich verschieden sind die Verhältnisse auf der Luvseite von der Entfernung OF' an, in welcher der Grenzstrahl in die obere Schicht eindringt. Der Strahl krümmt sich stark, da Windgradient und Temperaturgradient sich unterstützen. Das Element der Wellenfläche des Grenzstrahles, das bei F' noch beinahe senkrecht steht ($i = 85^\circ$), wird allmählich horizontal gestellt, um durch die Schallbewegung nach oben, durch den Wind in der Horizontalen fortgeführt, die Bahn G' , H' , J' zurückzulegen. Eine neue Zone der Hörbarkeit ist auf dieser Seite nicht zu erwarten, der Schall erfüllte Raum ist von der Kurve J' , H' , F' , A , B' , C' , D' , E umschlossen.

Liegt die Schallquelle nicht unmittelbar auf dem Erdboden auf, oder ist dieser nicht horizontal, so sind die Verhältnisse wesentlich verwickelter. An Stelle des Grenzstrahles ergibt sich eine Katakaustik und in dem Gebiete der Hörbarkeit gelegene Orte können durch verschiedene Schallstrahlen erreicht

werden, so daß, in Analogie zur Luftspiegelung, ein Schallsignal sich in zeitlich getrennte Signale auflösen kann. Über diese Verhältnisse soll an anderer Stelle berichtet werden.¹⁾

¹⁾ Erst bei Durchsicht der Korrektur werde ich mit einer Publikation: S. Fujiwhara, On the abnormal propagation of sound wave in the Atmosphere; The Bulletin of the Central Meteorological Observatory of Japan, vol. II, No. 1, 1912, bekannt, die in anders geführter, theoretischer Behandlung qualitativ ebenfalls zu den oben mitgeteilten Ergebnissen führt. Ich werde an anderer Stelle auf sie zurückkommen, will aber schon hier auf das reiche Beobachtungsmaterial hinweisen, wonach bei Vulkanausbrüchen in Japan der Sektor der abnormen Hörbarkeit stets in jener Richtung liegt, in welcher die Eruptionsprodukte durch den Wind fortgeführt werden und niederfallen.
