

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1971

MÜNCHEN 1972

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Komplexe Spannungsberechnung der Verzahnungen

Von Heinz Neuber

Vorgelegt am 11. 6. 1971

Mit 3 Abbildungen

Für die Lösung schwieriger Probleme der zweidimensionalen linearen Elastizitätstheorie eignet sich das Verfahren der komplexen Spannungsfunktion [1, 2, 3, 4]. Mit Hilfe einer Vereinfachung dieses Verfahrens lassen sich auf direktem Wege exakte Lösungen der Grundprobleme der Verzahnungen aufstellen.

1. Die Ausgangsgleichungen

Es seien x, y kartesische Koordinaten und u, v die Parameter eines orthogonalen krummlinigen Koordinatensystems. Die zugehörigen komplexen Koordinaten sind

$$(1) \quad z = x + iy, \bar{z} = x - iy, w = u + iv, \bar{w} = u - iv.$$

Bei konformer Abbildung gilt

$$(2) \quad z = z(w).$$

Es gelte die Schreibweise

$$(3) \quad \frac{df(w)}{dw} = f', \frac{d\bar{f}(\bar{w})}{d\bar{w}} = \bar{f}'.$$

Die Komponenten des Linienelementes sind hdu und $hd\bar{u}$, wobei sich der metrische Faktor h aus

$$(4) \quad h^2 = \dot{z} \dot{\bar{z}}$$

und der Tangentenwinkel α aus

$$(5) \quad e^{2i\alpha} = \frac{\dot{z}}{\dot{\bar{z}}}$$

errechnen.

Die Gleichgewichtsbedingungen der Spannungskomponenten σ_x , σ_y , τ_{xy} in kartesischen Koordinaten, bzw. σ_u , σ_v , τ_{uv} in krummlinigen Koordinaten, sowie die Bedingungen der geometrisch-linearen Verformung bei Hookeschem Gesetz und eindeutigen Verschiebungskomponenten V_x und V_y sind gewährleistet, wenn die Airysche Funktion in der Form

$$(6) \quad F = z f_1(\bar{w}) + \bar{z} f_1(w) + f_2(w) + f_2(\bar{w})$$

gebildet wird und die Verschiebungs- und Spannungskomponenten folgendermaßen hergeleitet werden:

$$(7) \quad \sigma_x + \sigma_y = \sigma_u + \sigma_v = \Delta F = 4 \left(\frac{\dot{f}_1}{\dot{z}} + \frac{\dot{f}_1}{\dot{\bar{z}}} \right),$$

$$(8) \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} = 4 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},$$

$$(9) \quad \sigma_v - \sigma_u + 2i \tau_{uv} = 4 e^{2i\alpha} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{4}{\dot{z}} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{\dot{z}} \frac{\partial F}{\partial w} \right),$$

$$(10) \quad E (V_x + i V_y) = -2 (1 + \nu) \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} + 8 f_1;$$

hierbei ist E der Elastizitätsmodul und ν die Querdehnzahl.

Sind I und II zwei Punkte innerhalb des Definitionsgebietes, so gilt für den Kraftfluß, der durch eine von I nach II innerhalb des Materials verlaufende Linie übertragen wird, (P_x und P_y Kraftkomponenten, M Moment)

$$(11) \quad P = P_x + iP_y = 2i \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right)_{II} - \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right)_{I} \right],$$

$$(12) \quad M = \left[z \frac{\partial F}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} - F \right]_{II} - \left[z \frac{\partial F}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} - F \right]_{I}.$$

Am lastfreien Rand gilt mithin

$$(13) \quad \frac{\partial F}{\partial w} = \mu \dot{z} \quad (\mu \text{ ist eine komplexe Konstante}).$$

Das Verfahren vereinfacht sich, wenn für f_1 eine im Angriffspunkt der Last logarithmisch singuläre Funktion eingesetzt wird. Ist der Rand eine Linie $u = u_0$, so läßt sich (13) mittels $\bar{w} = 2u_0 = w$ in eine Funktion von w umschreiben, aus welcher f_2 direkt hervorgeht. Falls hierbei im Innern Pole auftreten, müs-

sen diese durch Aufnahme entsprechender Zusatzfunktionen bei f_1 kompensiert werden.

2. Der Zahn

Als erster Fall sei eine Halbebene mit zahnartigem Vorsprung betrachtet (Abb. 1). Für gleichmäßige Zugbeanspruchung wurde dieses Problem vom Verfasser in [5-6] behandelt.

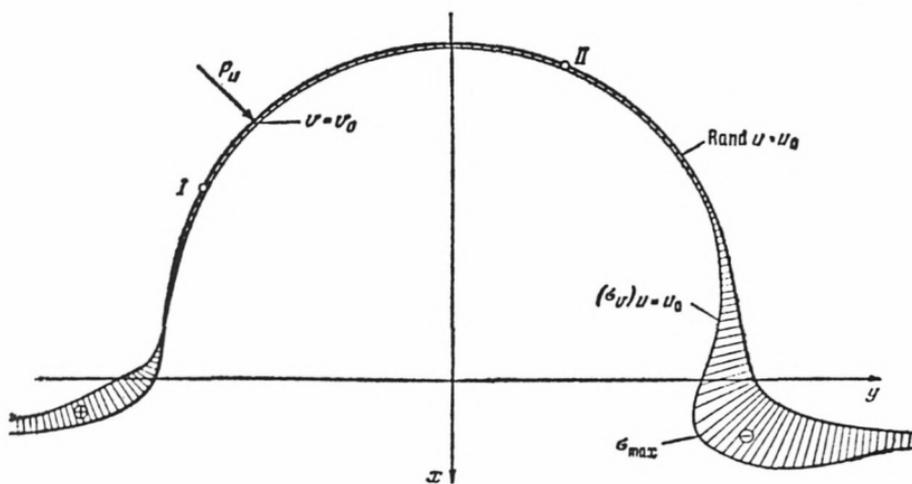


Abb. 1

Beliebige Zahnprofile lassen sich mit der allgemeinen Abbildungsfunktion

$$(14) \quad z = w + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{w^k}$$

erfassen.

Bei Einzellast gilt der Ansatz

$$(15) \quad f_1 = -\frac{P}{4\pi} \ln (zw - w_0) + \sum_{m=1}^n \frac{c_m}{w^m}.$$

Die Anwendung von (13) führt bei der Bestimmung von f_2 zunächst an der Stelle $w = 2u_0$ auf Pole von der Form $(2u_0 - w)^{-l}$

mit $t = 1, 2, \dots, n$. Diese verschwinden, wenn die Koeffizienten c_m aus den Gleichungen

$$(16) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{q=0}^{n-t} k \binom{k+q}{q} \frac{\bar{a}_k c_{q+t} + a_{q+t} \bar{c}_k}{(2u_0)^{k+q+1}} + \frac{P}{4\pi} \sum_{q=0}^{n-t} \frac{a_{q+t}}{w_0^{q+1}} - c_t = 0$$

für $t = 1, 2, \dots, n$

berechnet werden.

Den Verlauf der Randspannung für das Profil $n = 1$, $a_1 = -1$, $u_0 = 0.4$ mit einer bei $v_0 = -0.2$ normal zum Rand angreifenden Kraft zeigt Abb. 1. Bezüglich weiterer Einzelheiten siehe [7].

3. Die Zahnstange

Eine für technische Zahnprofile geeignete Abbildungsfunktion ist:

$$(17) \quad z = w + \sum_{m=1}^n a_m \coth^m \left(\frac{w}{2} \right).$$

Bei Einzellast gilt

$$(18) \quad f_1 = \frac{1}{4\pi} \left[-P \ln(w - w_0) + \sum_{p=1}^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_{p,k}}{(w - 2\pi k i)^p} \right].$$

Das Verfahren liefert in allen Zähnen zunächst Pole von der Form $(2u_0 + 2\pi k i - w)^{-t}$; sie verschwinden, wenn die Koeffizienten $A_{p,k}$ aus den Gleichungen

$$(19) \quad \sum_{p=t}^n \sum_{q=0}^{n-t} \bar{a}_p d_{p,p-t-q} \left[P b_q^{(k)} + \sum_{m=1}^n \sum_{l=-\infty}^{\infty} m A_{m,l} e^{(k,l)} \right] + \\ + \sum_{p=t}^n \sum_{m=1}^n a_m c_{m,p-t} \bar{A}_{p,k} - \bar{A}_{t,k} = 0$$

berechnet werden. Die hierbei auftretenden Hilfsgrößen stehen mit den folgenden Reihenentwicklungen in Zusammenhang:

$$g_m = \frac{m}{2} \coth^{m+1} \left(\frac{w}{2} \right) - \frac{m}{2} \coth^{m-1} \left(\frac{w}{2} \right) = \\ = \sum_{q=0}^{\infty} c_{m,q} (2u_0 + 2k\pi i - w)^q,$$

Hierbei ist s die Zahl der Zähne.

Für Einzellast gilt der Ansatz

$$(22) \quad f_1 = \frac{1}{4\pi} \left[-P \ln(e^w - e^{w_0}) + \frac{1+\nu}{4} P w + C e^{2w} + \sum_{p=1}^n \sum_{k=0}^{s-1} \frac{A_p^{(k)}}{(1 - e^{-w + \frac{2}{s} k \pi i})^p} \right].$$

Die Funktion $(1+\nu)w/4$ gewährleistet die Eindeutigkeit des elastischen Verschiebungsvektors in der näheren Umgebung der Radmitte, wo das Definitionsgebiet infolge der dort übertragenen Reaktionskräfte zweifach zusammenhängt. Die Funktion $C e^{2w}$ dient zur Kompensation einer zusätzlichen Singularität in Radmitte, wobei sich

$$(23) \quad C = - \frac{(1+\nu)(1+\alpha_1)\bar{P}}{4(1-\bar{\alpha}_1)e^{2u_0}}$$

ergibt. Zur Beseitigung der in den einzelnen Zähnen auftretenden Pole von der Form $(1 - e^{w-2u_0-2k\pi i/s})^{-t}$ sind folgende Reihenentwicklungen erforderlich:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{e^{2u_0-w}}{e^w - e^{w_0}} - \frac{1}{4}(1+\nu)e^{2u_0-2w} &= \sum_{q=0}^{\infty} b_q^{(k)} (1 - e^{w-2u_0-2k\pi i/s})^q, \\ \frac{s m}{2} \left[\coth^{m+1} \left(\frac{s w}{2} \right) - \coth^{m-1} \left(\frac{s w}{2} \right) \right] - \coth^m \left(\frac{s w}{2} \right) &= \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} c_{m,q} (1 - e^{w-2u_0-2k\pi i/s})^q, \\ \coth^p \left(s u_0 - \frac{s w}{2} \right) &= \sum_{q=0}^{\infty} d_{p,q} (1 - e^{w-2u_0-2k\pi i/s})^{q-p}, \\ \frac{e^{2u_0-3w+2\pi i l/s}}{(1 - e^{-w+2l\pi i/s})^{m+1}} &= \sum_{q=0}^{\infty} e_{m,q}^{(k,l)} (1 - e^{w-2u_0-2k\pi i/s})^q. \end{aligned} \right.$$

Die Pole verschwinden, wenn die Konstanten $A_p^{(k)}$ aus folgenden Gleichungen ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
 (25) \quad & \sum_{q=0}^{p-t} \sum_{p=t}^n \bar{a}_p d_{p, p-q-1} \left(b_q^{(k)} P + \sum_{m=1}^n \sum_{l=0}^{s-1} m A_m^{(l)} e_{m,q}^{(k,l)} \right) + \\
 & + \sum_{p=t}^n \sum_{m=1}^n a_m c_{m, p-t} \bar{A}_p^{(k)} + \\
 & + \frac{(1+\nu)(1+a_1) \bar{P}}{2(1-\bar{a}_1)} \sum_{p=t}^n \bar{a}_p d_{p, p-t} - \bar{A}_t^{(k)} = 0.
 \end{aligned}$$

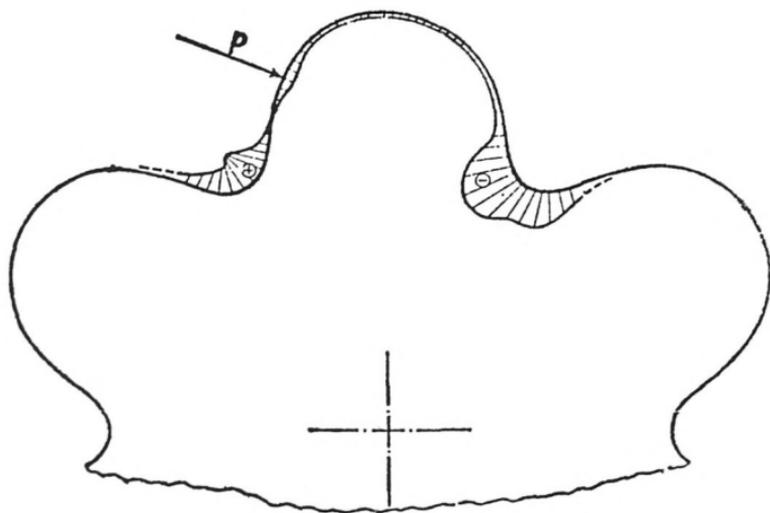


Abb. 3

Der Verlauf der Randspannung beim Profil $n = 1$, $a_1 = -0.2$, $s = 6$, $su_0 = -\ln 2$ für eine bei $sv_0 = \pi/6$ angreifende Normalkraft zeigt Abb. 3. Bezüglich weiterer Lösungen für periodische Belastung und für Schrumpfspannungen in Zahnkränzen siehe [9].

5. Die Zahnfußbeanspruchung

Zur Berechnung der Beanspruchung am Zahnfuß genügt es für technische Zwecke, das Zahnprofil durch ein Ersatzprofil zu approximieren, das sich mit dem wirklichen Profil zumindest in der näheren Umgebung der höchsten Beanspruchung deckt. Auf diesem Wege lassen sich explizite Näherungsformeln herleiten, siehe [10].

Schrifttum

- [1] G. V. Kolossow, Über einige Eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitätstheorie, *Z. Math. Phys.* 62 (1914), S. 383-409.
- [2] L. Föppl, Konforme Abbildung ebener Spannungszustände, *Z. angew. Math. Mech.* 11 (1931), S. 81-92.
- [3] N. Muschelisvili, Praktische Lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene für einige Berandungsformen. *Z. angew. Math. Mech.* 13 (1933), No. 4, 264-282.
- [4] L. Föppl, *Drang und Zwang*, 3. Bd., München 1947.
- [5] H. Neuber, Elastisch-strenge Lösungen zur Kerbwirkung bei Scheiben und Umdrehungskörpern. - *Z. angew. Math. Mech.*, 13 (1933), No. 6, 439-442.
- [6] H. Neuber, *Kerbspannungslehre, Grundlagen für genaue Festigkeitsberechnung mit Berücksichtigung von Konstruktionsform und Werkstoff*. 2. Aufl. Berlin, Springer-Verlag, 1958.
- [7] H. Neuber, *Der Zahn*. - *Österr. Ing-Arch.* 17 (1963), No. 3, S. 187-192.
- [8] H. Neuber, Über die Spannungsverteilung in Zahnstangen. - *Forschung im Ingenieurwesen*, 29 (1963), No. 6, S. 176-181; 30 (1964), No. 6, S. 159-160.
- [9] H. Neuber, *Spannungstheorie der Zahnräder*, 1. - *Z. angew. Math. Mech.* 44 (1964), No. 7, S. 285-299.
- [10] H. Neuber, *Die Berechnung der Zahnfußbeanspruchung*, *Konstruktion* 22 (1970), S. 447-450.