BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1956

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Die Integrabilitätsbedingung für Ortsfunktionen bei nichtintegrablen Bezugsystemen

Von Frank Löbell in München

Mit 2 Figuren

Vorgelegt am 4. Mai 1956

Bei der Untersuchung von Kurvenkongruenzen kann es vorkommen, daß Integrabilitätsbedingungen zu berücksichtigen sind, denen die in die Betrachtung eingehenden Ortsfunktionen genügen müssen, daß aber die in der natürlichen Differentialgeometrie gebräuchlichen Beziehungen dieser Art nicht den vorliegenden Verhältnissen angemessen sind.

Nun sind Integrabilitätsbedingungen unter sehr allgemeinen Annahmen bezüglich der Anzahl der Dimensionen das Raumes und der Art des zugrunde gelegten, von Ort zu Ort veränderlichen Bezugsystems schon früher aufgestellt worden. Ihre Anwendung auf Spezialfälle ist jedoch, wenn die in ihnen auftretenden Koeffizienten als differentialgeometrische Größen gedeutet werden sollen, fast ebenso mühsam wie ihre unmittelbare Aufstellung. Deshalb möge hier die Herleitung einer solchen Bedingung für einen besonderen Fall durchgeführt werden.

1. Im euklidischen Raum von drei Dimensionen sei in jedem Punkt eines gewissen Bereiches $\mathfrak{B}$ eine Basis von drei untereinander senkrechten Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ als Bezugsystem für die Umgebung festgelegt; die Vektoren mögen in dieser Reihenfolge ein rechtshändiges Tripel bilden.

In diesem Raume bedeute f eine *Funktion des Orts*, die alle Voraussetzungen bezüglich Stetigkeit und Differenzierbarkeit erfülle, die sich im folgenden als notwendig erweisen werden. Das gleiche gelte für alle vorkommenden differentialgeometrischen Größen und Gebilde, insbesondere auch für die Ortsfunktionen $\mathfrak{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Jedes der drei Vektorfelder $\mathfrak{e}_i$ bestimmt unter diesen Annahmen eine *Kongruenz* von Feldlinien c_i mit den Tangentenvektoren $\mathfrak{e}_i$; ihre Bogenlängen mögen mit s_i bezeichnet werden. Sie durchziehen den Raum derart, daß in einem beliebigen Punkt P von $\mathfrak{B}$ drei dieser Linien c_1, c_2, c_3 sich unter rechten Winkeln durchdringen.

Wir betrachten nun zwei Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, von denen die erste von denjenigen Kurven c_1 der ersten Kongruenz gebildet sei, die die durch P laufende Linie c_2 schneiden, die zweite aber von den Linien c_2 der zweiten Kongruenz, die die durch P gehende Kurve c_1 treffen. Diese beiden Flächen berühren sich in P,

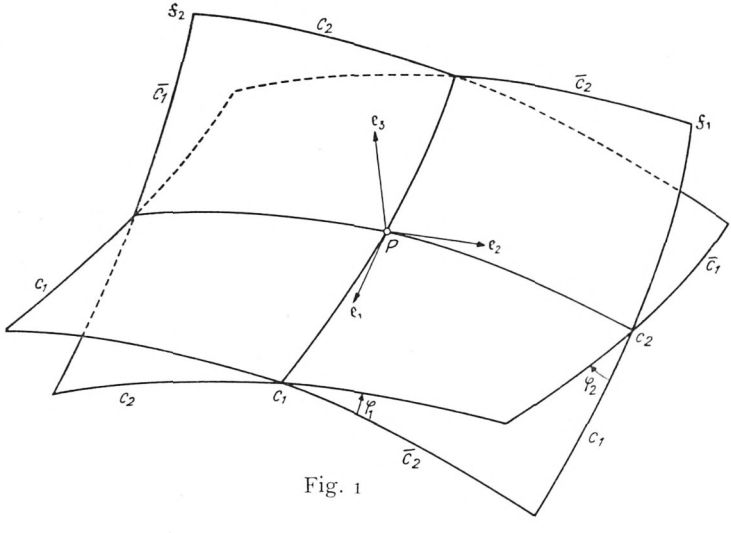

Fig. 1

da sie die beiden durch diesen Punkt laufenden und sich dort nicht berührenden Kurven c_1 und c_2 gemein haben. Es wird nötig sein, auch die orthogonalen Trajektorien der die Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ erzeugenden Kongruenzkurven einzuführen; wir bezeichnen die Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar c_1 auf $\mathfrak{F}_1$ mit $\bar{c}_2$, die der Schar c_2 auf $\mathfrak{F}_2$ mit $\bar{c}_1$; ihre Bogenlängen seien $\bar{s}_1$ und $\bar{s}_2$, ihre berührenden Einheitsvektoren $\bar{\mathfrak{e}}_1$ und $\bar{\mathfrak{e}}_2$. Es sei hervorgehoben, daß außer den durch P gehenden Linien $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$, die nach dem Erzeugungsgesetz der Flächen mit Kongruenzlinien c_1 und c_2 zusammenfallen, die Kurven $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$ im allgemeinen keiner unserer Kongruenzen angehören.

Von den Krümmungsgrößen der beiden Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ werden zunächst die *Seitenkrümmungen* G_1, $\bar{G}_2$ und $\bar{G}_1$, G_2 der Kurven c_1, $\bar{c}_2$ auf $\mathfrak{F}_1$ und $\bar{c}_1$, c_2 auf $\mathfrak{F}_2$ eine Rolle spielen, ferner die *Normalwindungen* für die Richtungen $\mathfrak{e}_1$, $\bar{\mathfrak{e}}_2$ auf $\mathfrak{F}_1$ und für die Richtungen $\bar{\mathfrak{e}}_1$, $\mathfrak{e}_2$ auf $\mathfrak{F}_2$, die wir mit T_{11}, $\bar{T}_{12}$ und mit $\bar{T}_{21}$, T_{22} bezeichnen. An der Berührungsstelle P der Flächen ist $G_1 = \bar{G}_1$ und $G_2 = \bar{G}_2$; das folgt unmittelbar aus dem Gaussschen Ausdruck für die Seitenkrümmung einer beliebigen Flächenkurve mit dem Tangenteneinheitsvektor $\mathfrak{t}$ und der Bogenlänge s,

$$G = \mathfrak{n}\mathfrak{t}\frac{d\mathfrak{t}}{ds}, \tag{1}$$

in dem $\mathfrak{n}$ den Einheitsvektor der Flächennormalen bedeutet; es ist nur zu bedenken, daß beide Flächen in P dieselbe Normale $\mathfrak{e}_3$ besitzen und daß wegen des Zusammenfallens der durch P gehenden Linien c_1 und $\bar{c}_1$ bzw. c_2 und $\bar{c}_2$ längs dieser Linien $\mathfrak{e}_1 = \bar{\mathfrak{e}}_1$ und $s_1 = \bar{s}_1$ bzw. $\mathfrak{e}_2 = \bar{\mathfrak{e}}_2$ und $s_2 = \bar{s}_2$ ist, so daß speziell für die Stelle P folgt: $\frac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial s_1} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{e}}_1}{\partial \bar{s}_1}$ und $\frac{\partial \mathfrak{e}_2}{\partial s_2} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{e}}_2}{\partial \bar{s}_2}$, mithin $G_1 = \mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_1\frac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial s_1} = \mathfrak{e}_3\bar{\mathfrak{e}}_1\frac{\partial \bar{\mathfrak{e}}_1}{\partial \bar{s}_1} = \bar{G}_1$ und $G_2 = \mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_2\frac{\partial \mathfrak{e}_2}{\partial s_2} = \mathfrak{e}_3\bar{\mathfrak{e}}_2\frac{\partial \bar{\mathfrak{e}}_2}{\partial \bar{s}_2} = \bar{G}_2$. Dagegen ist im allgemeinen $T_{11} \neq \bar{T}_{21}$ und $\bar{T}_{12} \neq T_{22}$; jedoch gilt nach dem Satz von Bertrand und Bonnet – der besagt, daß in jedem regulären Punkt einer Fläche die Normalwindungen für zwei zueinander senkrechte Tangentenrichtungen entgegengesetzt gleich sind –:

$$T_{11} = -T_{12} \quad \text{und} \quad \bar{T}_{21} = -T_{22}. \tag{2}$$

Nebenbei sei bemerkt, daß beide Flächen an der Stelle P in den Richtungen $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ jeweils gleiche Normalkrümmungen $N_1 = \bar{N}_1$ und $N_2 = \bar{N}_2$ haben; denn es ist wegen der Übereinstimmung der Normalen $\mathfrak{n} = \bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{e}_3$ an dieser Stelle $N_1 = -\mathfrak{n}\frac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial s_1} = -\bar{\mathfrak{n}}\frac{\partial \bar{\mathfrak{e}}_1}{\partial \bar{s}_1} = \bar{N}_1$ und $N_2 = -\mathfrak{n}\frac{\partial \mathfrak{e}_2}{\partial s_2} = -\bar{\mathfrak{n}}\frac{\partial \bar{\mathfrak{e}}_2}{\partial \bar{s}_2} = \bar{N}_2$; selbstverständlich können in einer anderen Tangentenrichtung die Normalkrümmungen der beiden Flächen verschieden sein.

2. Für die Funktionen f des Ortes auf der Fläche $\mathfrak{F}_1$ hat, wie man weiß, die Integrabilitätsbedingung in jedem Punkt die Form

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}_2}\frac{\partial f}{\partial s_1} - \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial f}{\partial \bar{s}_2} = G_1\frac{\partial f}{\partial s_1} + \bar{G}_2\frac{\partial f}{\partial \bar{s}_2}, \tag{3}$$

da das Netz der Bezugslinien c_1 und $\bar{c}_2$ orthogonal ist.[1] Dies gilt natürlich auch, wenn f als Ortsfunktion im Raum definiert ist.

Wir wollen diese Beziehung nur an der Stelle P betrachten, an der $\mathfrak{F}_1$ von $\mathfrak{F}_2$ berührt wird. Es soll nun aber die Ableitung nach der Bogenlänge $\bar{s}_2$ durch diejenige nach s_2 ersetzt werden. Das können wir folgendermaßen erreichen: Wir führen den Winkel φ_1 ein, unter dem sich die Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ längs der ihnen gemeinsamen Kurve c_1 schneiden; genauer ausgedrückt: es sei φ_1 der Winkel, durch den an einer beliebigen Stelle P_1 der Kurve c_1 die Berührebene von $\mathfrak{F}_1$, die durch $\mathfrak{e}_1$ und $\bar{\mathfrak{e}}_2$ aufgespannt wird, im positiven Sinn um $\mathfrak{e}_1$ gedreht werden muß, um mit der durch $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ bestimmten Berührebene von $\mathfrak{F}_2$ zusammenzufallen. Weil nach diesen Festsetzungen

$$\bar{\mathfrak{e}}_2 = \mathfrak{e}_2 \cos \varphi_1 - \mathfrak{e}_3 \sin \varphi_1 \tag{4}$$

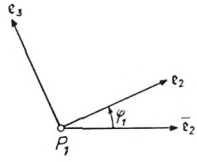

Fig. 2

ist, gilt bekanntlich

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{s}_2} = \frac{\partial f}{\partial s_2} \cos \varphi_1 - \frac{\partial f}{\partial s_3} \sin \varphi_1 . \tag{5}$$

Hiernach wird

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}_2} \frac{\partial f}{\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{\partial f}{\partial s_1} \cos \varphi_1 - \frac{\partial}{\partial s_3} \frac{\partial f}{\partial s_1} \sin \varphi_1$$

und

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial f}{\partial \bar{s}_2} = \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\partial f}{\partial s_2} \cos \varphi_1 - \frac{\partial f}{\partial s_3} \sin \varphi_1 \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial f}{\partial s_2} \cos \varphi_1 - \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial f}{\partial s_3} \sin \varphi_1 - \frac{\partial f}{\partial s_2} \sin \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} - \frac{\partial f}{\partial s_3} \cos \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} .$$

[1] Vgl. etwa Cesaro-Kowalewski, Vorles. ü. natürliche Geometrie, 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1926, S. 198f.

Erinnern wir uns nun an die kinematische Bedeutung der Krümmungsgrößen: Die Normalwindung, die Normalkrümmung und die Seitenkrümmung einer Kurve auf einer Fläche sind die Werte der Komponenten der Drehung des begleitenden Dreikants der Flächenkurve in seinen Grundrichtungen, d. h. in den Richtungen der Tangente, der Seitennormalen und der Flächennormalen, wenn der Scheitelpunkt des Dreibeins mit der Einheitsgeschwindigkeit auf der Kurve fortbewegt wird. Da die Begleitkörper der Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ längs ihrer Schnittkurve c_1 sich relativ zueinander um die Tangente drehen und der Winkel φ_1 diese Drehung mißt, ist

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} = \bar{T}_{21} - T_{11},$$

also wegen $\bar{T}_{21} = - T_{22}$ und $T_{11} = - \bar{T}_{12}$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} = - T_{11} - T_{22} = \bar{T}_{12} + \bar{T}_{21}. \tag{6}$$

Aus einem Grunde, der sogleich ersichtlich werden wird, bevorzugen wir den zweiten Ausdruck.

Lassen wir jetzt den Punkt P_1 nach P rücken, so wird, wie aus der Tatsache des gegenseitigen Berührens der beiden Flächen in P folgt,

$$\varphi_1 \to 0, \text{ mithin } \cos \varphi_1 \to 1, \sin \varphi_1 \to 0;$$

folglich wird an der Stelle P

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}_2} \frac{\partial f}{\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{\partial f}{\partial s_1},$$

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial f}{\partial \bar{s}_2} = \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial f}{\partial s_2} - \frac{\partial f}{\partial s_3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial f}{\partial s_2} - \frac{\partial f}{\partial s_3} (\bar{T}_{12} + \bar{T}_{21}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{s}_2} = \frac{\partial f}{\partial s_2},$$

und wir erhalten wegen $G_2 = \bar{G}_2$ in P

$$\frac{\partial}{\partial s_2} \frac{\partial f}{\partial s_1} - \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial f}{\partial s_2} = G_1 \frac{\partial f}{\partial s_1} + G_2 \frac{\partial f}{\partial s_2} - (\bar{T}_{12} + \bar{T}_{21}) \frac{\partial f}{\partial s_3}. \tag{7}$$

Die Größe $\bar{T}_{12} + \bar{T}_{21}$, die Summe der Normalwindungen der Fläche $\mathfrak{F}_1$ in der Richtung $\mathfrak{e}_2$ und der Fläche $\mathfrak{F}_2$ in der Richtung

$\mathfrak{e}_1$, hat in der Theorie der Kurvenkongruenzen, neben anderen Größen, eine besondere Bedeutung, wie bei einer anderen Gelegenheit gezeigt wurde.[2] Da nämlich ganz allgemein die Normalwindung T einer Fläche in der Tangentenrichtung $\mathfrak{t}$ den Wert $T = \mathfrak{t}\mathfrak{n}\frac{d\mathfrak{n}}{ds}$ hat und $\mathfrak{F}_1$ längs c_2, $\mathfrak{F}_2$ längs c_1 den Normalvektor $\mathfrak{e}_3$ besitzt, so ist im Punkte P

$$\bar{T}_{21} + \bar{T}_{12} = \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_3 \frac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial s_1} + \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3 \frac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial s_2}. \tag{8}$$

Dies ist aber der Ausdruck für das Doppelte der *mittleren Schränkung* A_3 der Kongruenz der Kurven c_3 an der Stelle P.

Da auch den Größen G_1 und G_2 eine von den Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ unabhängige Bedeutung zukommt, so erkennen wir, daß der *Integrabilitätsbedingung für die Funktion f des Ortes im Raum* folgende Gestalt gegeben werden kann, in der die Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ keine Rolle mehr spielen, sondern nur noch die drei Kurvenkongruenzen, die durch die in jedem Raumpunkt angehefteten Bezugsdreibeine $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ bestimmt sind:

$$\frac{\partial}{\partial s_2}\frac{\partial f}{\partial s_1} - \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial f}{\partial s_2} = G_1 \frac{\partial f}{\partial s_1} + G_2 \frac{\partial f}{\partial s_2} - 2 A_3 \frac{\partial f}{\partial s_3}. \tag{9}$$

Die gefundene Beziehung ist eine Verallgemeinerung der in der kinematischen Flächentheorie gebräuchlichen Integrabilitätsbedingung. Wenn die mittlere Schränkung A_3 an der Stelle P verschwindet, erhalten wir die aus der Flächentheorie bekannte Gestalt der Integrabilitätsbedingung wieder, von der wir ausgingen. Bekanntlich ist das identische Verschwinden der mittleren Schränkung einer Kurvenkongruenz die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sie Orthogonalflächen besitzt. In dem Falle $A_3 \equiv 0$ bilden also die Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ eine einzige, zu den Linien c_3 orthogonale Fläche.

Es sei noch auf ein Nebenergebnis hingewiesen, das uns durch die folgende Betrachtung zufällt:

---

[2] Vgl. d. V. Arbeit über eine Natürliche Geometrie der Kurvenkongruenzen, Math. Zeitschr. 56 (1952) S. 213.

Wir hätten die Beziehung (7) auch erhalten können, wenn wir von der Integrabilitätsbedingung ausgegangen wären, der jede Ortsfunktion auf der Fläche $\mathfrak{F}_2$ unterliegt, und zwar speziell in einem Punkt P_2 ihrer Schnittkurve c_2 mit $\mathfrak{F}_1$. Wird der Schnittwinkel der Flächen an dieser Stelle, genauer der Winkel, durch den die $\mathfrak{e}_1$ enthaltende Berührebene von $\mathfrak{F}_1$ um $\mathfrak{e}_2$ im positiven Sinn zu drehen ist, um mit der $\bar{\mathfrak{e}}_1$ enthaltenden Berührebene von $\mathfrak{F}_2$ in Deckung zu kommen, mit φ_2 bezeichnet, so ergibt sich durch eine Überlegung, die der in Abschnitt 2 durchgeführten analog ist, daß in P

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} = T_{11} + T_{22} \tag{6'}$$

ist. Hiernach muß an der Stelle P gelten:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} = 0. \tag{10}$$

Diese Beziehung ist auch als Folgerung aus dem oben schon herangezogenen Satz von Bertrand und Bonnet zu gewinnen.