

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

---

Jahrgang 1954

---

München 1955

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

## 150 Jahre Winkelmessungen I. O. auf den Münchner Frauentürmen

Von **Max Kneißl** in München

Vorgelegt am 5. März 1954

Seit Beginn der ersten Landestriangulation in Bayern im Jahre 1801 bis heute konnte die genaue Winkelmessung bei großen Zielweiten (40–100 km) durch die fortschreitende Entwicklung der Theodolite und durch den Ausbau der Beobachtungsverfahren, insbesondere auch durch die Beobachtung von Lichtzielen (Heliotrope und elektrische Scheinwerfer) wesentlich gesteigert werden. Ein anschauliches Beispiel hierfür gibt die nachfolgende Gegenüberstellung der von 1801 bis 1953 auf dem Frauenturm durchgeführten Winkelmessungen I. O. Durch diese Gegenüberstellung soll zugleich untersucht werden, ob die älteren Beobachtungen in Bayern mit modernen Messungen vereinigt werden können oder durch Neumessungen ersetzt werden müssen.

Um die in verschiedenen Jahrzehnten durchgeführten Beobachtungen vergleichen zu können, müssen sie auf identische Zielpunkte zurückgeführt und einheitlich auf der Station ausgeglichen werden. Bei großen Entfernungen werden immer nur Einzelwinkel gemessen, d. h. jeweils nur 2 Ziele zu einem Satz (Beobachtung im Hin- und Rückgang) zusammengefaßt. Die älteren Beobachtungen in Bayern waren so angeordnet, daß alle Winkel gemessen werden mußten, die den Horizont füllen (Methode der Messung von Nachbarwinkeln, die den Horizont füllen). Dabei werden die Einzelwinkel durch den Horizontschluß und einzelne Sektoren durch die Summe der sie überdeckenden Zwischenwinkel verprobt. Die dabei auftretenden Widersprüche müssen unter Beachtung der Gewichte, die den einzelnen Winkeln zuzuschreiben sind, auf die einzelnen Winkel verteilt werden. Diese Verteilung erfordert von vornherein eine bestimmte Anordnung der Winkelmessung auf der Station, wie sie z. B. die 1904 erstmals von dem Schweizer Heinrich Wild angegebene Sektorenmethode

vorschreibt. Die Sektorenmethode gilt heute mit als die genaueste Methode und zugleich als außerordentlich leistungsfähig hinsichtlich der erforderlichen Zeit und Kosten. Mit Rücksicht hierauf ließ ich 1953 die Neumessung der vom nördlichen Frauenturm in München ausgehenden Richtungen I. O. ebenfalls nach der Sektorenmethode durchführen, obgleich fast das gesamte deutsche Hauptdreiecksnetz nach der Schreiberschen Methode der Winkelmessung in allen Kombinationen beobachtet wurde. Die bei der Sektorenmethode anzuwendende Stationsausgleichung läßt sich nun fast ohne Abänderungen auch zur Stationsausgleichung der älteren Winkelmessungen, die auf den Münchener Frauentürmen durchgeführt wurden, verwenden und gestattet so sehr schöne Vergleiche.

Im einzelnen liegen nun Beobachtungen vor von Bonne (1801 bis 1805), Rathmayer (1855), Netzsich (1904), Bayer (1933), Kolb (1950), Sigl (1953). Nachfolgend werden nun, zentriert auf die Zielpunkte 1953, die stationsausgeglichenen Beobachtungsergebnisse einander gegenübergestellt und jeder Beobachtungsreihe die aus der Stationsausgleichung erhaltenen mittleren Fehler beigeschrieben. Da die Messungen 1904/1933/1950 nur immer einzelne Winkel umfaßten, wurden sie zu einem gemeinsamen Richtungssatz zusammengefaßt. Schließlich wurden für Vergleichszwecke auch noch die Beobachtungen von Bonne und Rathmayer vereinigt.

Damit erhalten wir für München, nördl. Frauenturm, Helmstange 1901/03 die in Tab. 1 zusammengestellten stationsausgeglichenen Beobachtungsergebnisse.

Für den Vergleich der Beobachtungsergebnisse benutzen wir die 6 Richtungen I. O. (Schweitenkirchen, Mittbach, Wendelstein, Benediktenwand, Hohenpeißenberg, Längenmoos), die heute noch dem bayerischen Hauptdreiecksnetz angehören. Bei der Beurteilung der beigeschriebenen Fehler ist zu beachten, daß alle mittleren Fehler aus den Stationsausgleichungen gewonnen wurden und damit im wesentlichen von den Horizontschluß-Widersprüchen und von den Winkelsummen-Widersprüchen in den einzelnen Sektoren abhängen. Da für jeden verwendeten Richtungssatz auf diese Weise etwa 4–6 Widersprüche in die Fehlerrechnung eingingen, vermitteln die so berechneten mittleren

Tabelle 1. Übersicht der Stationsausgleichungen

Nr.	Zielpunkt	Bonne 1801-05		Rath- mayer 1855	Bonne Rath- mayer 1801-55	1904/1933/1950		Sigl 1953	
		Ge- wicht = Zahl d. Sätze	gleich- gewich- tig	3	4	5	6		7
1	Schweitenkirchen Festlegung I. O.	° ' 00	" 00,00	" 00,00	" 00,00	" 00,000	" 00,000	" 00,000	" 00,000
2	Mittbach, Turm- pfeiler 1939	81 28	06,73	04,37	05,76	04,117	03,369	04,469	
3	Wendelstein, Pyra- mide = HDNP	142 08	04,42	04,33	04,57	03,814	03,093	06,091	
4	Benediktenwand, Steinpfeiler	184 56	37,18	37,96	37,74	34,242	33,287	36,293	
5	Hohenpeißenberg, Bolzen/Ost	224 57	46,75	51,10	47,60	46,818	45,800	48,830	
6	Längenmoos, Holzpfeiler 1939	285° 11'	16,77	20,61	19,16	23,068	22,763	22,205	
Mittlerer Fehler für einmalige Messung									
a)	eines Winkels .....		± 7,0	± 5,1	± 9,5	± 8,6	—	± 0,82	
b)	einer Richtung .....		± 5,0	± 3,6	± 6,7	± 6,1	—	± 0,58	
Durchschnittliche Anzahl der Beobachtungen <sup>1</sup> .....			32	22	46	25	25	16	
			Rep.	Rep.	Rep.	Wi.	Wi.	Reit.	
Mittlere Fehler für eine Mes- sung mit durchschnitl. Gewicht									
a)	eines Winkels .....		± 1,3	± 1,1	± 1,4	± 1,7	± 2,1	± 0,20	
b)	einer Richtung .....		± 0,9	± 0,8	± 1,0	± 1,2	± 1,5	± 0,14	

<sup>1</sup> Rep. = Repetitionen; Wi. = Wiederholungen; Reit. = Reiterationen.

Fehler ziemlich sichere Vergleiche. Bei den älteren Beobachtungen liegen die Neuberechneten mittleren Fehler wesentlich über den bisher angegebenen Werten, die durch Vergleich der Einzelmessungen mit den arithmetischen Mitteln der einzelnen Winkel ohne Rücksicht auf die Nachbarwinkel berechnet wurden. Bei den großen Wiederholungszahlen – bei der Gradmessung wurde jeder Winkel in mindestens 48 Sätzen gemessen – läßt sich auf

diese Weise der mittlere Fehler wesentlich herabdrücken. Die in den älteren Beobachtungsausügen angegebenen sehr kleinen mittleren Richtungs- und Winkelfehler für die arithmetischen Mittel sind zum Teil noch darauf zurückzuführen, daß viele Winkel nur an einem Tag, also bei gleichen äußeren und atmosphärischen Verhältnissen gemessen wurden. Bemerkenswert ist, daß bei einer so groß und weiträumig angelegten Beobachtung, wie bei der internationalen Gradmessung 1904, auf die heute allgemein übliche Beobachtungsanordnungen, wie Verteilung der Beobachtungen auf möglichst viele Kreisstellen unter *gleichzeitiger* Verteilung der Beobachtung auf viele Beobachtungstage mit möglichst unterschiedlichen atmosphärischen Verhältnissen, kaum Rücksicht genommen wurde. Man hat vielmehr die auf ein und dieselbe Kreisstelle fallenden Beobachtungen grundsätzlich an ein und demselben Tag hintereinander weg gemessen, um den Kreis möglichst wenig verstellen zu müssen. Die so für eine Kreisstelle gefundenen Mittelwerte sind damit stets durch die betreffenden Durchmesserfehler der Teilkreise und durch die jeweiligen atmosphärischen Verhältnisse verfälscht. Die mittleren Winkelfehler sind daher bei der Gradmessung mit durchschnittlich  $0,5''$  wesentlich größer als die mittleren Winkelfehler der Messungen aus dem Jahre 1933, weil 1933 jeder Satz auf einer anderen Kreisstelle gemessen und die Winkelmessungen besser auf verschiedene Tage verteilt wurden, aber andererseits wesentlich kleiner als die aus der Stationsausgleichung gefundenen Werte.

Andererseits unterliegt es keinem Zweifel, daß die bis 1933 verwendeten Theodolite gegenüber den älteren Instrumenten keine wesentliche Genauigkeitssteigerung brachten. Erst um 1930 gelang es, Theodolite mit wesentlich geringeren Durchmesserfehlern, also mit wesentlich besseren Kreisen, herzustellen. Während auch bei guten älteren Mikroskoptheodoliten die totalen Durchmesserfehler bei etwa  $3''$  liegen, bleiben diese bei modernen Instrumenten leicht unter  $1''$ .

Die Tabelle 1 zeigt nun, daß die aus den Stationsausgleichungen berechneten mittleren Winkelfehler für die einmalige Messung bei den älteren Messungen zwischen  $5''$  und  $9''$ , die entsprechenden Fehler für einen Winkel mit durchschnittlichem Beobachtungsgewicht (d. i. 25 bis etwa 45 Wiederholungen) etwa zwi-

schen  $1''$  und  $2''$  liegen. Damit kommt einer stationsausgeglichenen Richtung in den zwischen 1801 und 1933 durchgeführten Beobachtungen keine größere Genauigkeit als  $\pm 1''$  zu; dem entspricht bei einer durchschnittlichen Zielweite von 50 km eine mittlere Querabweichung des Zielpunkts von  $\pm 25$  cm. Dagegen weist die Beobachtung von 1953 für eine stationsausgeglichenen Richtung mit durchschnittlichem Gewicht (nur 16 Wiederholungen) einen mittleren Fehler von  $\pm 0,14''$  auf; dies entspricht bei einer durchschnittlichen Zielweite von 50 km einer mittleren Querabweichung des Zielpunkts von  $\pm 3,5$  cm und zeigt damit den Fortschritt hinsichtlich der bei Winkelmessungen I. O. auch unter schwierigen Verhältnissen erreichbaren Genauigkeit.

Halten wir nun die Beobachtungen von 1953 an, so ergeben sich für die Beobachtungen von 1801 bis 1855 bzw. 1904/1933/1950 unter Beachtung der Fehler der Anfangsrichtung folgende Differenzen und Verbesserungen:

Tabelle 2

Zielpunkt	Tab. 1 Spalte 9-6		Tab. 1 Spalte 9-7		Tab. 1 Spalte 9-8	
	$d$	$v$	$d$	$v$	$d$	$v$
	"	"	"	"	"	"
1. Schweitenkirchen, Festlegung I. O.	0,00	- 0,51	0,000	-0,972	0,000	-1,596
2. Mittbach, Turm- pfeiler 1939	- 1,29	- 1,80	+ 0,352	+ 0,620	+ 1,100	-0,496
3. Wendelstein, HDNP	+ 1,52	+ 1,01	+ 2,277	+ 1,305	+ 2,998	+ 1,402
4. Benediktenwand, Steinpfeiler	- 1,45	- 1,96	+ 2,051	+ 1,079	+ 3,006	+ 1,410
5. Hohenpeißenberg, Bolzen/Ost	+ 1,23	+ 0,72	+ 2,012	+ 1,040	+ 3,030	+ 1,434
6. Längenmoos, Holzpfeiler 1939	+ 3,04	+ 2,53	-0,863	-1,835	-0,558	-2,154
[ ] =	+ 3,05	- 0,01	+ 5,829	-0,003	+ 9,576	+ 0,000
$v_1$ =	- 0,51		-0,972		-1,596	

Die Differenzen zwischen den Beobachtungen von 1953 einerseits und den Beobachtungen von 1801 bis 1855 bzw. 1904/1933/1950

andererseits sind außerordentlich groß. Sie sind vor allem auf die Unsicherheiten bei der Erfassung der Ziele in Wendelstein, Benediktenwand und Hohenpeißenberg und auf gewisse Unsicherheiten in den Zentrierungen zurückzuführen und haben schon bei der Stationsausgleichung zu Widersprüchen von 2'' bis 6'' geführt. Der Richtungssatz 1904/1933/1950, der sich aus 3 sehr uneinheitlichen Messungen zusammensetzt, ist nicht besser als der alte Richtungssatz, der aus den Messungen von Bonne und Rathmayer abgeleitet wurde.

Bei der Beurteilung dieser Unterschiede ist zu beachten, daß die älteren Beobachtungen, auch durch die Art, vor allem aber durch die Gewichtsfestsetzung bei der Stationsausgleichung und durch Auswahl der in die Stationsausgleichung einzuführenden Beobachtungen verfälscht wurden.

So liegen z. B. für die Zusammenfassung der Beobachtungen 1904/1933/1950 folgende Standtafeln vor:

Tabelle 3

Ziel	Alte Bayer. Landesvermessg. (Soldnernetz)	Neues Bayer. Hauptnetz (Reichs- dreiecksnetz)	Tab. 1 Spalte 7	Tab. 1 Spalte 8
1	2	3	4	5
1. Schweitenkirchen, Festlegung I. O.	0' 00 00,000	00,000	00,000	00,000
2. Mittbach, Turm- pfeiler 1939	81 28 03,240	03,582	04,117	03,369
3. Wendelstein, Pyramide=HDNP	142 08 03,528	03,599	03,814	03,093
4. Benediktenwand, Steinpfeiler	—	32,690	34,242	33,287
5. Hohenpeißenberg, Bolzen/Ost	224 57 47,523	47,872	46,818	45,800
6. Längenmoos, Holzpfeiler 1939	285 11 23,227	23,176	23,068	22,763

Hierin zeigen die Spalten 2 und 3 bzw. 4 und 5, jeweils unter sich verglichen, den Einfluß der Gewichtsfestsetzung. Bei den Stationsausgleichungen unter 2 und 4 wurden die Beobachtungen

mit Gewichten, gleich der Zahl der Wiederholungen und unter 3 und 5 als gleichgewichtig eingeführt. Der Vergleich der Spalten 2 und 3 einerseits und 4 und 5 andererseits zeigt den Einfluß der Zwischenwinkel bei der Stationsausgleichung, die nur bei 4 und 5 beachtet wurden und die Änderung des Beobachtungsergebnisses durch Streichung einiger schlecht passender Winkel bei 2 und 3.

Die stationsausgeglichenen Richtungen werden bei der Netzausgleichung nochmals verbessert. Wir wollen daher abschließend noch die 1953 beobachteten Richtungen den endgültigen (netzausgeglichenen) Richtungen des neuen bayerischen Hauptnetzes gegenüberstellen.

In München, nördlicher Frauenturm, Helmstange, ist:

Tabelle 4

Zielpunkt	Abriß: Netz Bayern-Stüd und Bayern-Tirol Bayer. Landesvermess.		Sigl 1953	Differenz 4-3	
				<i>d</i>	<i>v</i>
1	2	3	4	5	6
1. Schweitenkirchen Festlegung I. O.	° ' " 3 52 17,37	° ' " 0 00 00,00	° ' " 0 00 00,000	+ 0,00	- 0,67
2. Mittbach, Turmpfeiler 1939	85 20 21,01	81 28 03,64	81 28 04,469	+ 0,83	+ 0,16
3. Wendelstein, Pyramide= HDNP	146 00 22,32	142 08 04,95	142 08 06,091	+ 1,14	+ 0,47
4. Benediktenwand, Steinpfeiler	188 45 51,34	184 53 33,97	184 56 36,293	+ 2,32	+ 1,65
5. Hohenpeißenberg, Bolzen/Ost	228 50 05,62	224 57 48,25	224 57 48,830	+ 0,58	- 0,09
6. Längenmoos, Holzpfeiler 1939	289 03 40,43	285 11 23,06	285 17 22,205	- 0,86	- 1,53

$$\begin{aligned}
 [ ] &= +4,01 - 0,01 \\
 v_1 &= -0,67 \\
 [vv] &= 5,767
 \end{aligned}$$

Hier ergibt sich nun die erfreuliche Tatsache, daß die Neumessung 1953 mit den netzausgeglichenen Richtungen des neuen Bayerischen Hauptdreiecksnetzes verhältnismäßig gut überein-

stimmt und nur für die Richtung Benediktenwand eine größere Verbesserung bringt, die aber allgemein erwartet wurde. Bei diesem letzten Vergleich ist den Unterschieden  $d$  größeres Gewicht als den Verbesserungen  $v$  zuzuschreiben, weil die großen Differenzen in den Richtungen nach Wendelstein und Benediktenwand sicher den Fehler der Anfangsrichtung verfälscht haben.

Tabelle 4 beweist noch, daß das Bayer. Landesvermessungsamt tatsächlich nur Winkel gestrichen hat, die unverhältnismäßig große Beobachtungsfehler hatten und damit wesentlich sicherere Richtungen erhalten hat, als sie unsere Stationsausgleichung unter Berücksichtigung aller gemessenen Winkel erbrachte.

Andererseits zeigt die vorliegende Untersuchung, daß es nicht angeht, die Ergebnisse moderner Triangulationen durch Vereinigung mit älteren Messungen zu verschlechtern.