Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVII. Jahrgang 1907.

München

Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften

1908.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme, und räumlicher Systeme.

Von **Ludwig Burmester.**

(*Eingelaufen 19. Februar.*)

Allgemeine Darlegungen.

Die Gesamtheit aller in einer Ebene befindlichen Punkte, deren gegenseitige Lage sich nicht ändert, wird ein starres ebenes System oder kurz ein ebenes System genannt; und analog wird die Gesamtheit aller in einem Raum befindlichen Punkte, deren gegenseitige Lage sich nicht ändert, ein starres räumliches System oder kurz ein räumliches System genannt.

Bei einer gesetzmäßigen Bewegung eines ebenen Systems S in einem anderen ebenen System Σ, welches wir als ruhend annehmen, beschreibt ein angenommener Punkt A_s des bewegten Systems S eine Bahnkurve α in dem ruhenden System Σ, und ferner beschreibt ein angenommener Punkt A_σ des ruhenden Systems Σ eine Bahnkurve a in dem bewegten System S.

Wenn wir in dem System S auf einer gegebenen Kurve k_s die Punkte A_s, B_s, C_s .. und in dem System Σ auf einer gegebenen Kurve $\varkappa_\sigma$ zunächst der Einfachheit wegen eindeutig zugeordnete Punkte A_σ, B_σ, Γ_σ .. annehmen, dann beschreiben die Punkte A_s, B_s, C_s .. des bewegten Systems S die Bahnkurven α, β, γ .. in dem ruhenden System Σ und die Punkte A_σ, B_σ, Γ_σ .. des ruhenden System Σ die Bahnkurven a, b, c .. in dem bewegten System S. In jedem Bewegungsmoment bestimmen die beschreibenden Punkte A_s, B_s, C_s . . des Systems S auf den zugehörigen Bahnkurven α, β, γ . . Punkte $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{\Gamma}$ . . in dem System $\mathbf{\Sigma}$, und ebenso bestimmen die beschreibenden Punkte $\mathbf{A}_\sigma$, $\mathbf{B}_\sigma$, $\mathbf{\Gamma}_\sigma$ . . des Systems $\mathbf{\Sigma}$ auf den zugehörigen Bahnkurven a, b, c . . Punkte A, B, C . . in dem System S. Die so in jedem Bewegungsmoment bestimmten Punkte $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{\Gamma}$ . . und A, B, C . . nennen wir entsprechende Punkte, die beschriebenen Bahnkurven α, β, γ . . und a, b, c . . entsprechende Kurven in den ebenen Systemen $\mathbf{\Sigma}$, S.

Die hierdurch definierte Beziehung der Systeme $\mathbf{\Sigma}$, S nennen wir eine k i n e t o g r a p h i s c h e V e r w a n d t s c h a f t zweier ebener Systeme. Dieselbe ist demnach bestimmt durch eine gegebene gesetzmäßige Bewegung des Systems S in dem System $\mathbf{\Sigma}$ und durch die eindeutige Zuordnung der Punkte auf den in den Systemen S, $\mathbf{\Sigma}$ gegebenen Kurven k_s, $\varkappa_\sigma$.

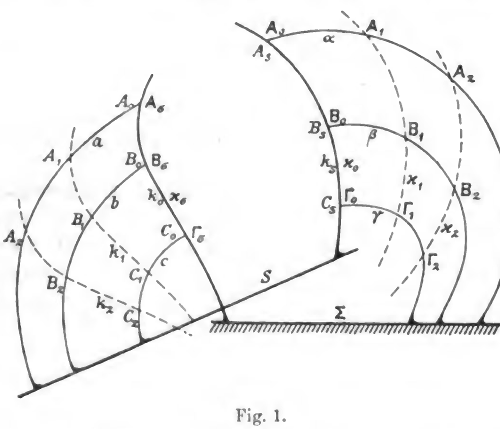

Fig. 1.

Um die Bewegungsvorgänge des einen der Systeme S, $\mathbf{\Sigma}$ in bezug auf das andere in Fig. 1 zu veranschaulichen, sind in dem bewegten System S auf der Kurve k_s die Punkte A_s, B_s, C_s . . und in dem ruhenden System $\mathbf{\Sigma}$ auf der Kurve $\varkappa_\sigma$

die eindeutig zugeordneten Punkte A_σ, B_σ, Γ_σ .. angenommen. Die Kurve k_s sowie die Punkte A_s, B_s, C_s .. des Systems S befinden sich im Anfang der Bewegung in Deckung mit der Kurve $\varkappa_0$ und den Punkten A_0, B_0, Γ_0 .. des Systems Σ; und ferner befinden sich die Kurve $\varkappa_\sigma$ sowie die Punkte A_σ, B_σ, Γ_σ .. des Systems Σ in Deckung mit der Kurve k_0 und den Punkten A_0, B_0, C_0 .. des Systems S. Die Punkte A_s, B_s, C_s .. beschreiben die Bahnkurven α, β, γ .. in dem ruhenden System Σ und die Punkte A_σ, B_σ, Γ_σ .. beschreiben die entsprechenden Bahnkurven a, b, c .. in dem bewegten System S. Durch die Bewegung des Systems S gelangt die Kurve k_s mit den Punkten A_s, B_s, C_s .. aus der Anfangslage $\varkappa_0$ (A_0, B_0, Γ_0 ..) in verschiedene Lagen $\varkappa_1$ (A_1, B_1, Γ_1 ..), $\varkappa_2$ (A_2, B_2, Γ_2 ..) .., die man gleichsam als Abdrücke von k_s (A_s, B_s, C_s ..) auf das ruhenden System Σ betrachten kann. Ferner gelangt die in dem ruhenden System Σ liegende Kurve $\varkappa_\sigma$ mit den Punkten A_σ, B_σ, Γ_σ .., von der anfänglichen Deckung mit k_0 (A_0, B_0, C_0 ..), ausgehend in denselben Momenten zur Deckung mit den Lagen k_1 (A_1, B_1, C_1 ..), k_2 (A_2, B_2, C_2 ..) .., die auch gleichsam die Abdrücke von $\varkappa_\sigma$ (A_σ, B_σ, Γ_σ ..) auf das bewegte System S sind wenn es sich in der zeichneten Anfangslage befindet. Während der Bewegung von S beschreiben die Punkte A_s, B_s, C_s .. die Bahnkurven α, β, γ .. in Σ, und die ruhenden Punkte A_σ, B_σ, Γ_σ .. beschreiben die Bahnkurven a, b, c .. in S, die also über diese Punkte gleiten. Wenn ferner die Kurve k_s des bewegten Systems S in die Lagen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ .. gelangt, dann treten die in S liegenden Kurven k_1, k_2 .. nach einander in Deckung mit der Kurve $\varkappa_\sigma$ des ruhenden Systems Σ. Demnach entspricht der Schar der unter sich kongruenten Kurven k_0, k_1, k_2 .. in S die Schar der unter sich kongruenten Kurven $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ .. in Σ; und diese Kurven wollen wir die Lagenkurven nennen. Da auch die Schar der Bahnkurven a, b, c .. in S der Schar der Bahnkurven α, β, γ .. in Σ entspricht, so ergeben sich in den Systemen S, Σ die entsprechenden Netze der Kurven a, b, c .., k_0, k_1, k_2 .. und α, β, γ .., $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ .. mit den entsprechenden Netzpunkten

$$\begin{array}{lll} A_0\, A_1\, A_2 \,.. & \qquad & \mathsf{A}_0\, \mathsf{A}_1\, \mathsf{A}_2 \,.. \\ B_0\, B_1\, B_2 \,.. & & \mathsf{B}_0\, \mathsf{B}_1\, \mathsf{B}_2 \,.. \\ C_0\, C_1\, C_2 \,.. & & \Gamma_0\, \Gamma_1\, \Gamma_2 \,.. \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot & & \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot & & \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \end{array}$$

Die Kurven $a, b, c\,.., k_0, k_1, k_2\,..$ in S sowie die Kurven $\alpha, \beta, \gamma\,..$, $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2\,..$ in Σ können als Parameterlinien oder als krummlinige Koordinaten betrachtet werden. Einer Kurve in S, die z. B. durch die Punkte A_0, B_1, C_2 geht, entspricht in dem System Σ eine durch die Punkte A_0, B_1, Γ_2 gehende Kurve.

Die Bahnkurven $a, b, c\,..$ und $\alpha, \beta, \gamma\,..$ sind durch die gesetzmäßige Bewegung des System S bestimmt und ihre Verteilung ist durch die Zuordnung der Punkte der angenommenen Kurven k_s, $\varkappa_\sigma$ bedingt; und mit diesen Kurven sind die Lagenkurven $k_0, k_1, k_2\,..$ und $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2\,..$ gegeben, deren Lagerung durch die angenommenen Bewegungsmomente bestimmt sind.

Wenn wir insbesondere kongruente Kurven k_s, $\varkappa_\sigma$ annehmen, die in ihren Anfangslagen $\varkappa_0$, k_0 zusammenliegen, und die sich denkenden Punkte dieser Kurven als zugeordnete Punkte betrachten, dann erhalten wir eine spezielle Zuordnung, die wir eine identische Zuordnung nennen. Die speziellste identische Zuordnung ergibt sich, wenn anstatt der Kurven k_s, $\varkappa_\sigma$ Gerade angenommen werden.

Die Bewegung des Systems S in dem System Σ ist bestimmt, wenn z. B. zwei Kurven α, β als Bahnkurven der Punkte A_s, B_s gegeben sind. Um die so bestimmte Bewegung zu verwirklichen und die Zeichnung in Fig. 1 auszuführen, wird die Kurve k_s mit den Punkten A_s, B_s, $C_s\,..$ auf ein durchsichtiges Papierblatt, welches das System S vertritt, gezeichnet. Dann führen wir die Punkte A_s, B_s auf den Kurven α, β, markieren auf dem durchsichtigen Papierblatt in verschiedenen Lagen desselben die Punkte, die sich mit den Punkten A_σ, B_σ, $\Gamma_\sigma\,..$ der ruhenden Kurve $\varkappa_\sigma$ decken. Durch diese markierten Punkte ergeben sich in S die Bahnkurven $a, b, c\,..$, die während der Bewegung über die ruhenden Punkte A_σ, B_σ, $\Gamma_\sigma\,..$ gleiten.

Zugleich markieren wir in den verschiedenen Lagen vermittelst Stiche durch den Punkt C_s die Punkte, welche die Kurve γ in Σ bestimmen.

Um die Definition der kinetographischen Verwandtschaft zu verallgemeinern, nehmen wir auch eine mehrdeutige Zuordnung der Punkte auf den Kurven k_s, $\varkappa_\sigma$ an; und es kann jedoch auch bei Annahme einer eindeutigen Zuordnung durch den Bewegungsvorgang eine mehrdeutige Zuordnung eintreten. Wenn z. B. die Kurve k_s mit den Punkten A_s, B_s, C_s .. eine Gerade ist, die von ihrer anfänglichen Lage $\varkappa_0$ aus geht und durch die Bewegung wieder in diese Lage gelangt, aber so, daß die auf der Geraden $\varkappa_0$ liegenden Punkte A_0, B_0, Γ_0 .., die sich anfänglich mit den Punkten A_s, B_s, C_s .. der Geraden k_s decken, nun wieder mit anderen Punkten A'_s, B'_s, C'_s .. desselben zur Deckung gelangen; dann ergibt sich, daß auf der Geraden k_s die Punkte A'_s, B'_s, C'_s .. ebenso wie die Punkte A_s, B_s, C_s .. den Punkten A_σ, B_σ, Γ_σ .. der Kurve $\varkappa_\sigma$ zugeordnet sind. Demnach erscheint bei diesem Bewegungsvorgang eine zweideutige Zuordnung und bei Wiederholung desselben eine mehrdeutige. Das Gleiche gilt unter denselben Bedingungen, wenn die Kurve k_s ein Kreis ist.

Wird in jedem der Systeme S, Σ ein zweckmäßiges Koordinatensystem angenommen, sind ferner die Gleichungen der in dem ruhenden System Σ befindlichen Bahnkurven zweier Punkte des bewegten Systems, deren Abstand bekannt ist, gegeben, und ist die Zuordnung der Punkte auf den Kurven k_s, $\varkappa_\sigma$ durch Gleichungen bestimmt, so kann man unter günstigen Umständen die allgemeinen Gleichungen ableiten, welche die bestimmenden Beziehungen enthalten. Die Eliminationen zur Erlangung der vier reduzierten Gleichungen der kinetographischen Verwandtschaft sind jedoch nur in geeigneten Fällen ausführbar.

Zu einer kinetographischen Verwandtschaft zweier ebener Systeme S, Σ, in denen sich Punkte entsprechen, ergibt sich durch Dualität eine kinetographische Verwandtschaft zweier ebener Systeme S, Σ, in denen sich Gerade entsprechen, wenn wir anstatt der zugeordneten Punkte der Kurven k_s, $\varkappa_\sigma$ zugeordnete Tangenten dieser Kurven annehmen.

Die Definition der kinetographischen Verwandtschaft ebener Systeme gilt verallgemeinert auch für die kinetographische Verwandtschaft räumlicher Systeme. Bei einer gesetzmäßigen Bewegung eines räumlichen Systems S in einem anderen räumlichen System Σ, welches wir als ruhend annehmen, beschreibt ein angenommener Punkt A_s des bewegten räumlichen Systems S eine Kurve α in dem ruhenden räumlichen System Σ, und ferner beschreibt ein angenommener Punkt A_σ des ruhenden räumlichen Systems Σ eine Kurve a in dem bewegten räumlichen System S. Wenn wir nun den Punkten A_s, B_s .. einer in dem bewegten System S gegebene Fläche k_s eindeutig die Punkte A_σ, B_σ .. einer in dem ruhenden System Σ gegebenen Fläche $\varkappa_\sigma$ zuordnen, so ist dadurch die kinetographische Verwandtschaft der räumlichen Systeme S, Σ in analoger Weise wie bei den ebenen Systemen definiert. Und durch eine Annahme einer mehrdeutigen Zuordnung der Punkte auf den Flächen k_s, $\varkappa_\sigma$ wird diese Verwandtschaft verallgemeinert. Werden anstatt der Punkte auf den Flächen k_s, $\varkappa_\sigma$ die Berührungsebenen an denselben zugeordnet, dann ergibt sich eine kinetographische Verwandtschaft zweier räumlicher Systeme S, Σ, in denen sich Ebenen entsprechen.

Durch die kinetographischen Verwandtschaften wird ein Gebiet neuer geometrischer Verwandtschaften eröffnet; denn mit jeder gesetzmäßigen Bewegung eines Systems in einem anderen System nebst einer gesetzmäßigen Zuordnung ist eine kinetographische Verwandtschaft gegeben, die zwar im allgemeinen sehr kompliziert sein wird; aber in besonderen Fällen auch zu manchen interessanten Ergebnissen führen kann.

Im Folgenden wollen wir noch auf einige Beispiele spezieller Bewegungen und spezieller Zuordnungen hinweisen, aus denen mannigfaltige kinetographische Verwandtschaften hervorgehen.

Beispiele der Bewegungen und der Zuordnungen.

In Fig. 2 wird die Bewegung eines ebenen Systems S in einem anderen ebenen System $\mathbf{\Sigma}$ dadurch erzeugt, daß sich zwei Punkte C_s, D_s einer Geraden k_s des Systems S auf den senkrechten Geraden γ, δ in dem ruhenden System $\mathbf{\Sigma}$ bewegen; und ferner ist eine identische Zuordnung der Punkte A_s, B_s, C_s, D_s .. der Geraden k_s und der Punkte A_σ, B_σ, Γ_σ, Δ_σ .. der Geraden $\varkappa_\sigma$, wobei die zugehörigen Anfangslagen $\varkappa_0$, k_0 sich in der Geraden δ befinden, angenommen. Für verschiedene Bewegungsmomente sind die Lagen $\varkappa_0$ (A_0, B_0, Γ_0, Δ_0 ..), $\varkappa_1$ (A_1, B_1, Γ_1, Δ_1 ..), $\varkappa_2$ (A_2, B_2, Γ_2, Δ_2 ..) der Geraden k_s und die entsprechenden Lagen k_0 (A_0, B_0, C_0, D_0 ..), k_1 (A_1, B_1, C_1, D_1 ..), k_2 (A_2, B_2, C_2, D_2 ..) der Geraden $\varkappa_\sigma$ in der oben angegebenen Weise gezeichnet.

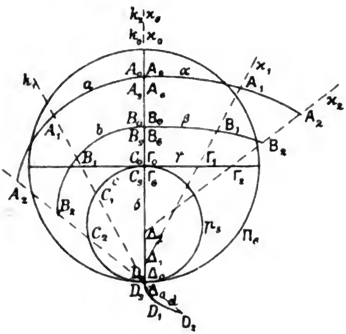

Fig. 2.

Die Punkte A_s, B_s, C_s, D_s .. beschreiben in dem ruhenden System $\mathbf{\Sigma}$ die Bahnen α, β, γ, δ .., die koaxiale Ellipsen sind, deren Achsen in den Geraden γ, δ liegen[1]). Für die Punkte C_s, D_s degenerieren die Ellipsen zu Strecken auf den Geraden γ, δ. Die Punkte A_σ, B_σ, Γ_σ, Δ_σ .. beschreiben in

[1]) L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik. 1888, S. 37. 41.

dem bewegten System S Bahnen a, b, c, d .., die allgemeine Kardioiden (Pascalsche Kurven) sind und für die der Punkt D_0 ein gemeinsamer Doppelpunkt ist. Für den Punkt Γ_6 degeneriert die Kardioide c zu einem Kreis und für den Punkt Δ_6 ist die Bahn eine gespitzte Kardioide d. Die Geraden $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ sind Tangenten einer vierspitzigen Hypotrochoide[1]), die auch Astroide genannt wird; und die Geraden k_0, k_1, k_2 sind Strahlen eines Strahlenbüschels, dessen Mittelpunkt D_0 ist. Hieraus ergibt sich eine zwei-vierdeutige kinetographische Verwandtschaft der Ebenen System Σ, S, d. h. einem Punkt in S entsprechen zwei Punkte in Σ und einem Punkt in Σ entsprechen vier Punkte in S.

Bei dieser Bewegung rollt der über C_8 D_8 als Durchmesser beschriebene Kreis p_8 des Systems S, der mit dem Kreis c identisch ist, innerhalb eines doppelt so großen Kreises π_6[2]). Wir können auch für jene Kurven k_8, $\varkappa_6$ die Kreise p_8, π_6 annehmen, und können die Punkte des rollenden Kreises p_8 und die Punkte des ruhenden Kreises π_6, die in Berührung kommen als zugeordnete Punkte betrachten; dann sind jedem Punkt des rollenden Kreises p_8 zwei Punkte des ruhenden Kreises π_6 zugeordnet, weil jeder Punkt des Kreises p_8 bei einer ganzen Umrollung an den Kreis π_6 zweimal mit denselben in Berührung tritt.

Bei dieser Bewegung sind in dem System Σ die Bahnen der Punkte des rollenden Kreises p_8 Durchmesser des Kreises π_6, und ferner sind in dem bewegten System S die Bahnen der Punkte des ruhenden Kreises π_6 gespitzte Kardioiden.

Wenn ein Kreis p_8 innerhalb oder außerhalb an einem Kreis π_6 rollt, deren Radien in einem rationalen Verhältnis stehen, und eine identische Zuordnung der Punkte auf einer zentralen Geraden angenommen wird, dann erhalten wir eine kinetographische Verwandtschaft, bei der in beiden Systemen die Bahnkurven geschlossene Trochoiden und die Lagen der Geraden, Tangenten an gespitzten Trochoiden sind[3]). Ferner

[1]) A. a. O. S. 185. [2]) A. a. O. S. 37. [3]) A. a. O. S. 157.

können wir auch die Berührungspunkte der Kreise p_8, π_6 als zugeordnete Punkte betrachten, dann sind die Bahnkurven in beiden Systemen gespitzte geschlossene Trochoiden.

Wenn insbesondere ein Kreis auf einem gleich großen anderen Kreis rollt, so ist die Zuordnung der Berührungspunkte eindeutig, und alle Bahnen sind kongruente gespitzte Kardioiden.

Die durch die Rollung eines Kreises auf einen anderen und durch die Zuordnung der Berührungspunkte bestimmte, kinetographisch verwandten Systemen sind von je zwei konzentrischen Kreisen begrenzt und demnach ringförmige Felder. Ist der eine Kreis z. B. der ruhende unendlich groß; rollt also ein Kreis auf einer Geraden, dann ist das Feld des ruhenden Systems zwischen dieser Geraden und der zu ihr parallelen Tangente dieses Kreises eingeschlossen, aber das Feld des bewegten Systems erstreckt sich ins Unendliche und wird einerseits nur von dem rollenden Kreis begrenzt. In diesem Fall sind die Bahnen in dem ruhenden System kongruente gespitzte Zykloiden und in dem bewegten System kongruente gespitzte Kreisevolventen.

Durch verschiedene Zuordnungen können bei einer Bewegung eines Systems mannigfaltige kinetographische Verwandtschaften entstehen. So z. B. in dem einfachen Fall, wenn sich das bewegte System um einen Punkt dreht, und auf einer durch ihn gehenden Geraden eine identische Zuordnung angenommen wird; dann sind die kinetographisch verwandten Systeme symmetrisch kongruente Systeme, werden aber die entsprechenden Punkte zweier kongruenter, zweier ähnlicher oder zweier projektiver Punktreihen als zugeordnete Punkte angenommen, so ergeben sich komplizierte kinetographisch verwandte Systeme.

Wir wollen ferner auf einige Beispiele der Bewegungen eines ebenen Systems bei einfachen Getrieben und auch auf einfache Zuordnungen hinweisen.

Bei einem Kurbelgetriebe in Fig. 3 bewegen sich die Koppelpunkte F_8, L_8 auf den Kreisen φ, λ, deren Mittelpunkte Φ_6, Λ_6 sind; und werden je zwei entsprechende Punkte der ähnlichen Punktreihen F_8, $L_8 \ldots$ und Φ_6, $\Lambda_6 \ldots$ als zugeordnete

Punkte angenommen, dann sind die Bahnen in beiden Systemen symmetrische Kurven sechster Ordnung resp. in bezug auf F_s, L_s und $\Phi_6\ \Lambda_6$ als Symmetralgeraden.

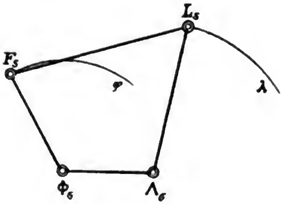

Fig. 3.

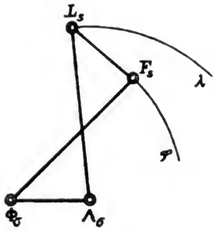

Fig. 4.

Wenn insbesonders, wie in Fig. 4 bei einem Zwillingskurbelgetriebe $F_s\ L_s = \Phi_6\ \Lambda_6$, $\Phi_6\ F_s = \Lambda_6\ L_s$ ist, und die entsprechenden Punkte der kongruenten Punktreihen F_s, L_s.. und Φ_6, Λ_6.. zugeordnete Punkte sind, dann sind die Bahnen symmetrische Kurven vierter Ordnung resp. in bezug auf $F_s\ L_s$, $\Phi_6\ \Lambda_6$ als Symmetralgeraden. Diese Kurven sind Fußpunktenkurven einer Ellipse oder einer Hyperbel, je nachdem die Koppel $F_s\ L_s$ oder der Steg $\Phi_6\ \Lambda_6$ kürzer oder länger als die Kurbelarme $\Phi_6\ F_s$, $\Lambda_6\ L_s$ ist. Dies ergibt sich, weil bei dieser Bewegung des Systems S ein Kegelschnitt, dessen Brennpunkte F_s, L_s sind und deren Hauptachse gleich der Länge der Kurbelarme ist, auf einem kongruenten Kegelschnitt rollt, dessen Brennpunkte Φ_6, Δ_6 sind, so daß symmetrische Punkte dieser Kegelschnitte in Berührung kommen[1]).

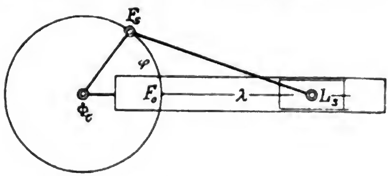

Fig. 5.

[1]) A. a. O. S. 303. 304.

Bei dem zentrischen Schubkurbelgetriebe in Fig. 5 bewegt sich der Koppelpunkt F_8 auf einem Kreis φ, dessen Mittelpunkt Φ_6 ist, und der Koppelpunkt L_8 auf einer Geraden λ, die durch den Mittelpunkt Φ_6 geht. Die entsprechenden Punkte der auf den Geraden $F_8\, L_8$ und $\Phi_6\, \lambda$ liegenden kongruenten Punktreihen $F_8 ..$ und $\Phi_6 ..$ betrachten wir als zugeordnete Punkte. Dann sind die Bahnen der auf $F_8\, L_8$ liegenden Punkte symmetrische Kurven vierter Ordnung in bezug auf $\Phi_6\, \lambda$ als Symmetralgerade und die Bahnen der auf $\Phi_6\, \lambda$ liegende Punkte symmetrische Kurven sechster Ordnung (Kreiskonchoiden) in bezug auf $F_8\, L_8$ als Symmetralgerade[1]). Ferner können wir auch die entsprechenden Punkte der auf $F_8\, L_8$ und $F_0\, \lambda$ liegenden kongruenten Punktreihen $F_8 ..$ und $F_0 ..$ als zugeordnete Punkte annehmen; und wenn dann insbesondere die Koppel gleich dem Kurbelarm, also $F_8\, L_8 = \Phi_6\, F_8$ ist, so ergibt sich in diesem speziellen Fall die S. 24 genannte zwei-vierdeutige kinetographische Verwandtschaft.

Jede gesetzmäßige Bewegung eines ebenen Systems S in einem anderen System Σ kann auch durch Rollung einer Kurve p_8 des Systems S auf einer Kurve π_6 des Systems Σ erzeugt werden[2]). Diese Kurven, die Rollkurven oder Polbahnen heißen, sind aber oft sehr komplizierte Kurven, z. B. bei dem Kurbelgetriebe von achter Ordnung, und kommen hauptsächlich dann in Betracht, wenn sie als Kreise auftreten.

Zu den angeführten Beispielen ergeben sich Analogien für die Bewegungen eines räumlichen Systems S^r in einem anderen räumlichen System Σ^ϱ. Betrachten wir die ebenen Systeme S, Σ resp. als zu den räumlichen Systemen S^r, Σ^ϱ gehörend, und die Rollkurven p_8, π_6 als Leitkurven zweier Zylinderflächen p^r_8, π^ϱ_6, die auf der Ebene der Systeme S, Σ senkrecht stehen, so kann eine Bewegung des räumlichen Systems S^r in dem ruhenden System Σ^ϱ durch die Rollung der Zylinderfläche p^r_8 auf der Zylinderfläche π^ϱ_6 erzeugt werden. Eine solche Bewegung des räumlichen System S^r in dem

[1]) A. a. O. S. 327. 329. [2]) A. a. O. S. 32.

anderen räumlichen System Σ^ϱ wird eine **zylindrische Rollung** genannt[1]). Bei derselben bewegen sich die Punkte des einen Systems in parallelen Ebenen des anderen Systems, und die Punkte in einer auf diesen Ebenen senkrechten Geraden des einen Systems beschreiben kongruente Kurven in dem anderen System.

Als Beispiel einer zylindrischen Rollung nehmen wir das Analogon zu der in Fig. 2 betrachteten Bewegung. Demnach rollt eine Kreiszylinderfläche p_s^r innerhalb an einer doppelt so großen Kreiszylinderfläche π_σ^ϱ, dann sind die Bahnen der Punkte des bewegten räumlichen Systems S^r in dem ruhenden räumlichen System Σ^ϱ Ellipsen, deren Mittelpunkte in der Achse Kreiszylinderfläche π_σ^ϱ liegen. Für die Punkte der rollenden Kreiszylinderfläche p_s^r degenerieren die Ellipsen zu Durchmessern der Kreiszylinderfläche π_σ^ϱ. Ferner sind die Bahnen der Punkte des ruhenden räumlichen Systems Σ^ϱ in bezug auf das bewegte räumliche System S^r allgemeine Kardioiden, die für die Punkte der Kreiszylinderfläche π_σ^ϱ in gespitzte Kardioiden übergehen. Bei gleichförmigem Rollen der Kreiszylinderfläche p_s^r heißt die Rollung eine **harmonische Rollung**.

Wird nun eine identische Zuordnung der Punkte auf einer durch die Achsen der beiden Kreiszylinderflächen p_s^r, π_σ^ϱ gehenden Ebene angenommen, so ergibt sich ebenso wie S. 24 bei den ebenen Systemen Σ, S in Fig. 2 eine zwei-vierdeutige kinetographische Verwandtschaft der räumlichen Systeme Σ^ϱ, S^r. Denn bei jeder zylindrischen Rollung mit einer Zuordnung der Punkte auf Zylinderflächen oder Ebenen, die parallel sind zu den Rollzylinderflächen, ist durch die kinetographische Verwandtschaft der ebenen Systeme Σ, S auch die kinetographische Verwandtschaft der räumlichen Systeme Σ^ϱ, S^r gegeben.

Werden den Punkten der rollenden Kreiszylinderfläche p_s^r die Punktpaare der ruhenden Kreiszylinderfläche π_σ^ϱ zugeordnet,

[1]) L. Burmester, Kinematische Flächenerzeugung vermittelst zylindrischer Rollung. Zeitschr. f. Mathematik u. Physik, 1888, B. 33, S. 337.

mit denen sie in Berührung kommen, dann erhalten wir eine kinetographische Verwandtschaft der räumlichen Systeme Σ^ϱ, S^r, bei der das Raumgebiet in Σ^ϱ von der Kreiszylinderfläche π_6^ϱ umgrenzt wird, und das Raumgebiet in S^r zwischen der Kreiszylinderfläche p_s^r und der koaxialen Kreiszylinderfläche mit dreimal größeren Durchmesser eingeschlossen ist.

Nehmen wir an, daß die Kreiszylinderfläche p_s^r während ihrer harmonischen Rollung eine harmonische Schwingung längs den Mantellinien der Kreiszylinderfläche π_6^ϱ vollzieht, so daß die Schwingungszeit zu der Umrollungszeit in einem bestimmten rationalen Verhältnis n steht, dann ergibt sich eine Bewegung die harmonische zylindrische Schrotung heißt. Je nachdem wir das Verhältnis n und die Phasendifferenz zwischen der harmonischen Rollung und der harmonischen Schwingung wählen, gehen bei einer angenommenen Zuordnung mannigfaltige kinetographische Verwandtschaften der räumlichen Systeme S^r, Σ^ϱ aus der harmonischen zylindrischen Schrotung hervor. Bei derselben sind die Bahnen aller Punkte der schrotenden Kreiszylinderfläche p_s^r Lissajoussche Kurven in Ebenen, die durch die Achse der ruhenden Kreiszylinderfläche π_6^ϱ gehen.

Wenn insbesondere $n = 1$ ist, dann sind die Bahnen der Punkte des Systems S^r in bezug auf das System Σ^ϱ Ellipsen, deren Mittelpunkte in der Achse der Kreiszylinderfläche π_6^ϱ liegen. Dieser spezieller Fall der harmonischen zylindrischen Schrotung, der bezüglich der Bewegungsvorgänge und der Bahnkurven untersucht wurde[1]), führt zu einer interessanten kinetographischen Verwandtschaft der räumlichen Systeme Σ^ϱ, S^r, wenn eine identische Zuordnung der Punkte in der durch die Achsen der beiden Kreiszylinderflächen gehen-

[1]) Vgl. L. Burmester, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1888, B. 33, S. 347. — A. Mannheim, Journal de l'École polytechnique, 1890, 60. cahier, p. 75. — G. Darboux, Note III, in G. Koenigs, Leçons de Cinématique, 1897, p. 352. — A. Grünwald, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1907, B. 54, S. 154.

den Ebene angenommen wird. Diese kinetographische Verwandtschaft kann gleichsam als aus zwei kinetographischen Verwandtschaften zusammengesetzt betrachtet werden. Die zu den Mantellinien der Kreiszylinderflächen parallelen Geraden, die sich in den kinetographisch verwandten räumlichen Systemen Σ^{ϱ}, S^{r} entsprechen, schneiden eine zu diesen Mantellinien senkrechte Ebene in entsprechenden Punkten der S. 24 genannten zwei-vierdeutigen kinetographischen Verwandtschaft der ebenen Systeme Σ, S; und auf den entsprechenden Geraden werden die entsprechende Punkte durch die kinetographische Verwandtschaft bestimmt, welche ohne Rollung aus der harmonischen Schwingung bei zugehöriger Zuordnung hervorgeht.

Aus dieser harmonischen zylindrischen Schrotung ergeben sich ferner noch besondere kinetographische Verwandtschaften der räumlichen Systeme, wenn den Punkten der schrotenden Kreiszylinderfläche p^{r}_{s} die Punktpaare der ruhenden Kreiszylinderfläche π^{ϱ}_{σ} zugeordnet werden, mit denen sie in Berührung kommen, und wenn eine identische Zuordnung der Punkte in einer zu diesen Kreiszylinderflächen senkrechten Ebene angenommen wird.

Aus der Schraubung eines räumlichen Systems und deren beiden Spezialfällen, der Drehung sowie der geradlinigen Verschiebung ergeben sich bei identischen Zuordnungen involutorische kinetographische Verwandtschaften zweier räumlicher Systeme S^{r}, Σ^{ϱ}, in denen sich also die Punkte wechselweise entsprechen.

Bei der Schraubung sind die Bahnen der Punkte in jedem der Systeme S^{r}, Σ^{ϱ} koaxiale Schraubenlinien mit gleicher Ganghöhe. Die entsprechenden Bahnen je zweier identisch zugeordneter Punkte fallen in einer Schraubenlinie zusammen und auf derselben entsprechen sich die Punkte der Systeme S^{r}, Σ^{ϱ} involutorisch; denn diese Punkte befinden sich beiderseits von der gemeinsamen Anfangslage der beiden zugeordneten Punkte in gleichen Abständen auf der Schraubenlinie.

Werden die Punkte einer beliebig gegen die Schraubenachse geneigten Zuordnungsebene als identisch zugeordnet angenommen, so ist dadurch eine involutorische kinetographische Verwandtschaft der räumlichen Systeme S^r, Σ^ϱ bestimmt. Die Bahnen je zwei zugeordneter Punkte auf einer in der Zuordnungsebene liegenden Geraden sind Schraubenlinien auf der von dieser Geraden erzeugten Regelschraubenfläche, die in den beiden räumlichen Systemen eine selbstentsprechende Fläche ist. Demnach bilden auf einer solchen Regelschraubenfläche die entsprechenden Punkte in ihrer Gesamtheit zwei involutorisch kinetographisch verwandte Flächensysteme.

In dem Spezialfalle, wenn die Ganghöhe der Schraubung gleich null ist, geht die Schraubung in Drehung über, und die Bahnen der Punkte sind in beiden Systemen Kreise, deren Mittelpunkte in der Drehachse liegen. Aus der Drehung und der angenommen identischen Zuordnung ergibt sich dann eine spezielle, involutorische kinetographische Verwandtschaft der räumlichen Systeme S^r, Σ^ϱ. Denn jene Regelschraubenfläche degeneriert zu einem einschaligen Drehungshyperboloid, welches in eine Drehungskegelfläche oder in eine Ebene ausartet, je nachdem die in der Zuordnungsebene liegende Gerade die Drehachse schneidet, oder sich zu derselben in einer senkrechten Lage befindet.

Bei der Schraubung ergeben sich ferner spezielle involutorische kinetographische Verwandtschaften, wenn die Zuordnungsebene entweder durch die Schraubenachse, parallel zu ihr oder senkrecht zu ihr gelegt wird; und ferner bei der Drehung, wenn die Zuordnungsebene durch die Drehachse gehend oder zu ihr parallel angenommen wird.

Die Schraubung geht, wenn ihre Ganghöhe unendlich groß ist, in eine geradlinige Verschiebung über. In diesen speziellen Fall sind die involutorisch kinetographischen verwandten Systeme S^r, Σ^ϱ involutorisch affine räumliche Systeme, bei denen, wenn S^r die Anfangslage erhält, die Zuordnungsebene die Affinitätsebene ist. Wenn insbesondere die Zuordnungsebene senkrecht zu der Richtung der Verschiebung steht, dann sind diese Systeme symmetrisch kongruent und die Zuordnungsebene ist die Symmetralebene derselben.

Werden anstatt der identischen Zuordnung der Punkte in der Zuordnungsebene die allgemeineren eindeutigen Zuordnungen, Kongruenz, Ähnlichkeit, Affinität oder Kollineation angenommen, so ergeben sich aus den drei betrachteten Bewegungsarten allgemeinere kinetographische Verwandtschaften der räumlichen Systeme S^r, Σ^ϱ. In dem einfachen Fall der geradlinigen Verschiebung und der kollinearen Zuordnung ist die kinetographische Verwandtschaft der räumlichen Systeme eine spezielle Verwandtschaft zweiten Grades.