BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1971

MÜNCHEN 1972

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Der Jacobi'sche Kettenalgorithmus in einem kubischen Zahlenkörper

Von Oskar Perron in München

Vorgelegt am 11. Dezember 1970

Mathematik ist eine fröhliche Wissenschaft,
vielleicht die fröhlichste von allen,
lebt stillvergnügt von
Mini-Mammon und Maxi-Mens

Übersicht

§ 1. Einleitung

Zwei irrationale Zahlen ξ_1, ξ_2 heißen linear unabhängig, wenn zwischen ihnen keine Relation $a_1\xi_1 + a_2\xi_2 = a_3$ mit rationalen a_1, a_2, a_3 besteht, die nicht alle drei verschwinden. Unter dem *Jacobi*'schen Algorithmus für zwei linear unabhängige Irrationalzahlen ξ_1, ξ_2 (in dieser Reihenfolge) versteht man folgendes: Sind b_1, b_2 die größten in ξ_1, ξ_2 enthaltenen Ganzen, so werden zwei Zahlen ξ_1', ξ_2' durch die Formeln

$$\xi_1 = b_1 + \frac{1}{\xi_2'}, \ \xi_2 = b_2 + \frac{\xi_1'}{\xi_2'}$$

definiert (zuerst ξ_2', dann ξ_1'). Man sieht sofort, daß ξ_1', ξ_2' wieder zwei linear unabhängige Irrationalzahlen sind. Daher läßt sich der Prozeß wiederholen und unbegrenzt fortsetzen:

$$\xi_1' = b_1' + \frac{1}{\xi_2''}, \qquad \xi_2' = b_2' + \frac{\xi_1''}{\xi_2''},$$

$$\text{--------------------------}$$

$$\text{--------------------------}$$

$$\xi_1^\nu = b_1^\nu + \frac{1}{\xi_2^{\nu+1}}, \qquad \xi_2^\nu = b_2^\nu + \frac{\xi_1^{\nu+1}}{\xi_2^{\nu+1}},$$

$$\text{--------------------------}$$

$$\text{--------------------------}.$$

Die oberen Indizes bezeichnen dabei die Anzahl der Striche (z. B. $\xi_1^3 = \xi_1'''$. b_i^ν ist stets die größte in ξ_i^ν enthaltene ganze Zahl. Für $\nu \geqq 1$ ist also

$$\xi_2^\nu > 1, \ \xi_2^\nu > \xi_1^\nu > 0, \ b_2^\nu \geqq 1, \ b_2^\nu \geqq b_1^\nu \geqq 0$$

und wir dürfen ohne weiteres annehmen, daß das auch für $\nu = 0$ gilt.

Folgendes ist bekannt: Wenn man von der Matrix

$$\begin{pmatrix} A_0^0 & A_0^1 & A_0^2 \\ A_1^0 & A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^0 & A_2^1 & A_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ausgehend weitere A_i^ν (oberer Index gleich Anzahl der Striche) mittels der Rekursionsformeln

$$A_i^{\nu+3} = A_i^\nu + b_1^\nu A_i^{\nu+1} + b_2^\nu A_i^{\nu+2} \ (i = 0, 1, 2; \nu \geqq 0)$$

bildet, so sind trivialer Weise die A_i^ν für $\nu \geqq 4$ positive ganze Zahlen (für $\nu < 4$ sind einige gleich 0) und außerdem gelten die Formeln

$$\begin{vmatrix} A_0^\nu & A_0^{\nu+1} & A_0^{\nu+2} \\ A_1^\nu & A_1^{\nu+1} & A_1^{\nu+2} \\ A_2^\nu & A_2^{\nu+1} & A_2^{\nu+2} \end{vmatrix} = 1,$$

$$\xi_i = \frac{A_i^\nu + \xi_1^\nu A_i^{\nu+1} + \xi_2^\nu A_i^{\nu+2}}{A_0^\nu + \xi_1^\nu A_0^{\nu+1} + \xi_2^\nu A_0^{\nu+2}} \ (i = 1, 2),$$

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{A_i^\nu}{A_0^\nu} = \xi_i \ (i = 1, 2).$$

Die rationalen Zahlen $\frac{A_1^\nu}{A_0^\nu}, \frac{A_2^\nu}{A_0^\nu}$ sind daher Näherungsbrüche für ξ_1, ξ_2 mit gemeinsamem Nenner. Die Konvergenz ist allerdings längst nicht so rasch, wie man es in Analogie zu den Kettenbrüchen vermuten könnte. Das alles habe ich vor mehr als 60 Jahren bewiesen [1] und dabei weiter gezeigt: Wenn der Algorithmus periodisch mit k-gliedriger Periode verläuft, das heißt wenn für ein gewisses ν einmal $\xi_1^{\nu+k} = \xi_1^\nu$, $\xi_2^{\nu+k} = \xi_2^\nu$ ist, was dann trivaler Weise auch für alle größeren ν gilt, dann gehören die Zahlen ξ_1, ξ_2 einem höchstens kubischen Zahlenkörper an. Er ist sogar genau kubisch, wie ich bald danach in der Arbeit [2] und dann nochmals einfacher in der Arbeit [3] zeigen konnte. Ob auch die Umkehrung gilt, wie in Analogie zu den Kettenbrüchen zu vermuten war, konnte ich aber nicht entscheiden, und es ist auch bis vor wenigen Jahren nicht der geringste Fortschritt in dieser Frage erzielt worden. Erst im Jahr 1964 hat Herr *Leon Bernstein* bewiesen: Für $\xi_1 = \sqrt[3]{\Delta}$, $\xi_2 = \sqrt[3]{\Delta^2}$, wobei Δ eine natürliche Zahl in gewisser genau beschriebener Nähe einer beliebigen ganzen Kubikzahl ist, verläuft der Algorithmus periodisch, und die Periode konnte auch nebst Vorperiode genau angegeben werden. Die Frage, ob auch für andere Zahlenpaare des Körpers von $\sqrt[3]{\Delta}$ Periodizität eintritt, wurde nicht gestellt [4]. Bald folgten weitere Untersuchungen von Bernstein mit ähnlicher Zielsetzung und Tragweite. Eine Zusammenstellung dieser Arbeiten findet man im Literaturverzeichnis der Kölner Dissertation von *Stender* [5].

Das hat mich zu dem Versuch veranlaßt, die Frage einmal in voller Allgemeinheit anzupacken. Dabei ist mir zwar der Periodizitätsbeweis bis heute nicht gelungen. Ich habe aber bei der Arbeit außer dieser Enttäuschung doch auch eine Reihe neuer Erkenntnisse und freudiger Überraschungen erlebt, die mir zeigten, daß ich auf dem rechten Weg bin, und die ich deshalb nicht ungenutzt mit ins Grab nehmen möchte.

§ 2. Ein Hilfssatz

Den (reellen) kubischen Körper, in dem wir operieren, denken wir erzeugt durch eine Wurzel ω der irreduzibeln Gleichung

$$x^3 - Ax - B = 0$$

mit ganzen Koeffizienten A, B. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $\omega > 0$ annehmen. Die Potenzen von ω werden mit ω^2, ω^3, ... bezeichnet, so daß bei ω ein oberer Index stets ein Exponent ist und nicht eine Anzahl von Strichen. Es ist

$$\omega^3 = A\,\omega + B, \quad \omega^4 = A\,\omega^2 + B\omega.$$

Jede Zahl ξ des Körpers läßt sich eindeutig in der Gestalt

$$\xi = X + Y\omega + Z\omega^2$$

mit rationalen X, Y, Z darstellen. Sie genügt selbst einer kubischen Gleichung, die sich in bekannter Weise so ergibt:

Es ist

$$\begin{aligned}
\xi &= X + Y\omega + Z\omega^2, \\
\xi\omega &= X\omega + Y\omega^2 + Z(A\omega + B) \\
&= ZB + (X + ZA)\,\omega + Y\omega^2, \\
\xi\omega^2 &= X\omega^2 + Y(A\omega + B) + Z(A\omega^2 + B\omega) \\
&= YB + (YA + ZB)\,\omega + (X + ZA)\,\omega^2.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{vmatrix} X - \xi & Y & Z \\ ZB & X + ZA - \xi & Y \\ YB & YA + ZB & X + ZA - \xi \end{vmatrix} = 0,$$

und das ist bereits die kubische Gleichung für ξ. Aus ihr ist sofort die Norm von ξ abzulesen:

$$\mathrm{Nm}(X + Y\omega + Z\omega^2) = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ ZB & X + ZA & Y \\ YB & YA + ZB & X + ZA \end{vmatrix}.$$

Nun gilt der folgende Hilfssatz, den wir dauernd brauchen werden:

Hilfssatz. *Wenn für drei Zahlen* $\xi_i = X_i + Y_i\omega + Z_i\omega^2$ ($i = 1, 2, 3$; X_i, Y_i, Z_i *rational*) *die Produktformel* $\xi_1\,\xi_2 = \xi_3$ *gilt, dann gilt auch die auf dem Faltblatt bei Seite 32 als oberste stehende Matrixproduktformel.*

Bei ihr stehen in den Spalten der drei Matrizen genau die Elemente, mit denen nach dem Vorausgehenden die Normen von ξ_1, ξ_2, ξ_3 gebildet sind. Wegen der Gleichheit $\xi_1\xi_2 = \xi_2\xi_1$ sind die Matrizen natürlich kommutativ. Zum Beweis des Hilfssatzes multiplizieren wir aus:

$$\begin{aligned} X_3 + Y_3\omega + Z_3\omega^2 &= (X_1 + Y_1\omega + Z_1\omega^2)(X_2 + Y_2\omega + Z_2\omega^2) \\ &= X_1X_2 + (X_1Y_2 + Y_1X_2)\omega + (X_1Z_2 + Y_1Y_2 + Z_1X_2)\omega^2 \\ &\quad + (Y_1Z_2 + Z_1Y_2)(A\omega + B) + Z_1Z_2(A\omega^2 + B\omega). \end{aligned}$$

Es ist also

$$\begin{aligned} X_3 &= X_1X_2 + (Y_1Z_2 + Z_1Y_2)B, \\ Y_3 &= X_1Y_2 + Y_1X_2 + (Y_1Z_2 + Z_1Y_2)A + Z_1Z_2B, \\ Z_3 &= X_1Z_2 + Y_1Y_2 + Z_1X_2 + Z_1Z_2A. \end{aligned}$$

Nun braucht man nur die nach der Matrizenrechnung gebildeten Elemente der Produktmatrix in extenso hinzuschreiben und verifiziert sofort, daß sie die in dem Hilfssatz auf dem Faltblatt angegebenen Werte haben.

§ 3. Normiertheit

Wir schreiben jetzt die Zahlen ξ_1, ξ_2, für die wir den Jacobi-Algorithmus durchführen wollen, in der Gestalt

(1) $$\xi_i = \frac{P_i + Q_i\omega + R_i\omega^2}{S} \quad (i = 1, 2),$$

wobei P_i, Q_i, R_i, S ganze Zahlen sind, zunächst bis auf einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor eindeutig bestimmt. Die Forderung der linearen Unabhängigkeit drückt sich dann, wie leicht zu sehen, aus in der Bedingung

(2) $$Q_1R_2 - R_1Q_2 \neq 0.$$

Nach § 2 genügt $S\xi_i$ der Gleichung

$$\begin{vmatrix} P_i - S\xi_i & Q_i & R_i \\ R_i B & P_i + R_i A - S\xi_i & Q_i \\ Q_i B & Q_i A + R_i B & P_i + R_i A - S\xi_i \end{vmatrix} = 0$$

und es ist

$$(S)^3 \operatorname{Nm} \xi_i = \operatorname{Nm}(S\xi_i) = \begin{vmatrix} P_i & Q_i & R_i \\ R_i B & P_i + R_i A & Q_i \\ Q_i B & Q_i A + R_i B & P_i + R_i A \end{vmatrix}.$$

Dabei haben wir die dritte Potenz von S in der Form $(S)^3$ geschrieben, weil S^3 später soviel wie S''' sein wird.

In der Folge wird uns die Matrix beschäftigen

(3)
$$\begin{pmatrix} P_2 & Q_2 & R_2 & P_1 & Q_1 & R_1 \\ R_2 B & P_2 + R_2 A & Q_2 & R_1 B & P_1 + R_1 A & Q_1 \\ Q_2 B & Q_2 A + R_2 B & P_2 + R_2 A & Q_1 B & Q_1 A + R_1 B & P_1 + R_1 A \end{pmatrix}.$$

Die ersten drei Spalten bilden als Determinanten die Norm von $S\xi_2$, die letzten drei die Norm von $S\xi_1$. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, daß alle Determinanten zweiten Grades der Matrix (3) durch S und alle Determinanten dritten Grades durch $(S)^2$ teilbar sind. Wenn das nämlich nicht so ist, brauchen wir die Brüche (1) nur mit $(S)^2$ zu erweitern. Dann ist der neue Nenner gleich $(S)^3$ und die Determinanten zweiten Grades sind durch $(S)^4$, also gewiß durch den Nenner $(S)^3$ teilbar; und die Determinanten dritten Grades sind durch $(S)^6$, also durch das Quadrat des Nenners $(S)^3$ teilbar.

Wir nennen die Darstellung (1) der Zahlen ξ_1, ξ_2 *normiert*, wenn die geforderten Teilbarkeitsbedingungen erfüllt sind, und setzen jetzt also die Darstellung (1) als normiert voraus.[1] Offenbar bleiben die an die Matrix (3) gestellten Teilbarkeitsforderun-

[1] Das ist das Analogon dazu, daß man bei der Entwicklung einer quadratischen Irrationalzahl $\frac{P+Q\sqrt{D}}{S}$ in einen regelmäßigen Kettenbruch voraussetzt, daß $P^2 - Q^2 D$ durch S teilbar ist, was sich notfalls durch Erweiterung erreichen läßt. – Übrigens gibt es immer auch eine normierte Darstellung mit *kleinstem* positivem Nenner. Es kommt uns aber gar nicht darauf an, gerade diese zu haben.

gen erfüllt, wenn wir die Elemente der Matrix modulo S ändern, also etwa P_i durch $P_i - b_i S$ ersetzen.

Analog zu (1) setzen wir nun auch

$$(4) \qquad \xi_i' = \frac{P_i' + Q_i'\omega + R_i'\omega^2}{S'}, \quad \xi_i'' = \frac{P_i'' + Q_i''\omega + R_i''\omega^2}{S''} \quad (i = 1, 2)$$

(oberer Index gleich Anzahl der Striche), *setzen hier aber nichts über Normiertheit voraus.* Die Forderungen

$$\xi_1 = b_1 + \frac{1}{\xi_2'}, \quad \xi_2 = b_2 + \frac{\xi_1'}{\xi_2'}$$

besagen dann

$$\frac{P_1 - b_1 S + Q_1\omega + R_1\omega^2}{S} = \frac{S'}{P_2' + Q_2'\omega + R_2'\omega^2},$$

$$\frac{P_2 - b_2 S + Q_2\omega + R_2\omega^2}{S} = \frac{P_1' + Q_1'\omega + R_1'\omega^2}{P_2' + Q_2'\omega + R_2'\omega^2},$$

oder mit den Nennern heraufmultipliziert:

$$(5) \qquad (P_2' + Q_2'\omega + R_2'\omega^2)(P_1 - b_1 S + Q_1\omega + R_1\omega^2) = SS',$$

$$(6) \qquad \begin{aligned} P_2' + Q_2'\omega + R_2'\omega^2)(P_2 - b_2 S + Q_2\omega + R_2\omega^2) \\ = SP_1' + SQ_1'\omega + SR_1'\omega^2. \end{aligned}$$

Nach dem Hilfssatz des § 2 folgt aus (5) die auf dem Faltblatt bei Seite 32 angegebene Formel (7) und aus (6) folgt die Formel (8) auf dem Faltblatt.

Nach der ersten Zeile der Produktmatrix (7) ist

(9)

$$\begin{array}{llll} P_2'(P_1 - b_1 S) & + Q_2' R_1 B & + R_2' Q_1 B & = SS', \\ P_2' Q_1 & + Q_2'(P_1 - b_1 S + R_1 A) & + R_2'(Q_1 A + R_1 B) & = 0, \\ P_2' R_1 & + Q_2' Q_1 & + R_2'(P_1 - b_1 S + R_1 A) & = 0. \end{array}$$

Nach der ersten Zeile der Produktmatrix (8) ist

(10)

$$\begin{array}{llll} P_2'(P_2 - b_2 S) & + Q_2' R_2 B & + R_2' Q_2 B & = SP_1', \\ P_2' Q_2 & + Q_2'(P_2 - b_2 S + R_2 A) & + R_2'(Q_2 A + R_2 B) & = SQ_1', \\ P_2' R_2 & + Q_2' Q_2 & + R_2'(P_2 - b_2 S + R_2 A) & = SR_1'. \end{array}$$

Die Formeln (9), (10) sind sechs homogene Gleichungen für die sieben Unbekannten P_2', Q_2', R_2', S', P_1', Q_1', R_1', die dadurch, wie wir sehen werden, bis auf einen willkürlich bleibenden Proportionalitätsfaktor bestimmt sind.[1] Damit hat man also ξ_2' und ξ_1'. Praktisch wird man zuerst aus der zweiten und dritten Gleichung (9) P_2', Q_2', R_2' entnehmen wollen; sie sind proportional zu den Determinanten

$$\begin{vmatrix} P_1 - b_1 S + R_1 A & Q_1 A + R_1 B \\ Q_1 & P_1 - b_1 S + R_1 A \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} Q_1 A + R_1 B & Q_1 \\ P_1 - b_1 S + R_1 A & R_1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} Q_1 & P_1 - b_1 S + R_1 A \\ R_1 & Q_1 \end{vmatrix},$$

falls diese nicht alle drei verschwinden. Aber das tun sie nicht. Denn sonst würde auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} P_1 - b_1 S & R_1 B & Q_1 B \\ Q_1 & P_1 - b_1 S + R_1 A & Q_1 A + R_1 B \\ R_1 & Q_1 & P_1 - b_1 S + R_1 A \end{vmatrix}$$

wegen der zweiten und dritten Zeile verschwinden. Diese ist aber, wenn man sie um die Hauptdiagonale dreht, nach § 2 die Norm von $S\xi_1 - b_1 S = S(\xi_1 - b_1) = \frac{S}{\xi_2'}$, also $\neq 0$, weil eine von 0 verschiedene Zahl unseres Körpers auch eine von 0 verschiedene Norm hat.

Die obigen drei Determinanten sind aber, wenn man Zeilen zu Spalten macht, Determinanten aus der Matrix (3), wobei nur P_1 durch $P_1 - b_1 S$ ersetzt ist. Sie sind also wegen der vorausgesetzten Normiertheit der Darstellung (1) durch S teilbar. Daher liegt es nahe, damit P_2', Q_2', R_2' nicht unnötig groß ausfallen, als willkürlichen Proportionalitätsfaktor die Zahl $\frac{1}{S}$ zu wählen. Wir werden also setzen:

---

[1] Die andern Zeilen der Produktmatrizes in (7) und (8) liefern natürlich nur Linearkombinationen der Formeln (9) und (10) und sind hier entbehrlich. Man hätte übrigens die Formeln (9) und (10) auch direkt aus (5) und (6) durch Ausmultiplizieren gewinnen können, so daß die aus dem Hilfssatz des § 2 folgenden Formeln (7) und (8) überflüssig scheinen. Im nächsten Paragraphen kommt es aber anders.

$$(11)\qquad P_2' = \frac{1}{S}\begin{vmatrix} P_1 - b_1 S + R_1 A & Q_1 A + R_1 B \\ Q_1 & P_1 - b_1 S + R_1 A \end{vmatrix},$$

$$Q_2' = \frac{1}{S}\begin{vmatrix} Q_1 A + R_1 B & Q_1 \\ P_1 - b_1 S + R_1 A & R_1 \end{vmatrix},\quad R_2' = \frac{1}{S}\begin{vmatrix} Q_1 & P_1 - b_1 S + R_1 A \\ R_1 & Q_1 \end{vmatrix}.$$

Die Unbekannte S' ergibt sich dann aus der ersten Formel (9), indem man für P_2', Q_2', R_2' die Werte (11) einsetzt. Das Resultat läßt sich dann so schreiben:

$$(12)\qquad S' = \frac{1}{(S)^2}\begin{vmatrix} P_1 - b_1 S & Q_1 & R_1 \\ R_1 B & P_1 - b_1 S + R_1 A & Q_1 \\ Q_1 B & Q_1 A + R_1 B & P_1 - b_1 S + R_1 A \end{vmatrix}.$$

Die Determinante ist wegen der Normiertheit der Darstellung (1) durch $(S)^2$ teilbar, also ist neben P_2', Q_2', R_2' auch S' eine ganze Zahl. Die Determinante ist außerdem, wie oben gerade festgestellt wurde, gleich

$$\operatorname{Nm}\frac{S}{\xi_2'} = \frac{(S)^3}{\operatorname{Nm}\xi_2'},$$

so daß wir aus (12) nebenbei noch die wichtige Formel gewinnen:

$$(13)\qquad \operatorname{Nm}\xi_2' = \frac{S}{S'}.$$

Jetzt fehlen uns noch die Größen P_1', Q_1', R_1'. Diese ergeben sich natürlich sofort aus den rückwärts gelesenen Gleichungen (10), wenn wir für P_2', Q_2', R_2' die gefundenen Werte (11) einsetzen. Die Resultate lassen sich dann so schreiben:

$$(14)\qquad P_1' = \frac{1}{(S)^2}\begin{vmatrix} P_2 - b_2 S & Q_1 & R_1 \\ R_2 B & P_1 - b_1 S + R_1 A & Q_1 \\ Q_2 B & Q_1 A + R_1 B & P_1 - b_1 S + R_1 A \end{vmatrix},$$

$$(15)\qquad Q_1' = \frac{1}{(S)^2}\begin{vmatrix} Q_2 & Q_1 & R_1 \\ P_2 - b_2 S + R_2 A & P_1 - b_1 S + R_1 A & Q_1 \\ Q_2 A + R_2 B & Q_1 A + R_1 B & P_1 - b_1 S + R_1 A \end{vmatrix},$$

$$(16)\qquad R_1' = \frac{1}{(S)^2}\begin{vmatrix} R_2 & Q_1 & R_1 \\ Q_2 & P_1 - b_1 S + R_1 A & Q_1 \\ P_2 - b_2 S + R_2 A & Q_1 A + R_1 B & P_1 - b_1 S + R_1 A \end{vmatrix}.$$

Auch diese Determinanten sind wegen der Normiertheit der Darstellung (1) durch $(S)^2$ teilbar, so daß P_1', Q_1', R_1' auch wieder ganze Zahlen sind. Übrigens werden die Determinanten (15) und (16) etwas bequemer, wenn man die erste Zeile mit A multipliziert von der letzten abzieht.

Und jetzt kommt schon die erste freudige Überraschung. *Die gefundene Darstellung für ξ_1', ξ_2' ist nämlich ganz von selbst normiert, ohne daß erst eine Erweiterung nötig ist.* Die behauptete Normiertheit besagt, daß alle Determinanten zweiten bzw. dritten Grades der Matrix

$$(17)\qquad \begin{pmatrix} P_2' & Q_2' & R_2' & P_1' & Q_1' & R_1' \\ R_2'B & P_2'+R_2'A & Q_2' & R_1'B & P_1'+R_1'A & Q_1' \\ Q_2'B & Q_2'A+R_2'B & P_2'+R_2'A & Q_1'B & Q_1'A+R_1'B & P_1'+R_1'A \end{pmatrix}$$

durch S' bzw. $(S')^2$ teilbar sind. Daß das zutrifft, soll im nächsten Paragraphen nachgewiesen werden.

§ 4. Nachweis, daß die gefundene Darstellung von ξ_1', ξ_2' normiert ist

Wir bemerken zunächst, wenn wir in Formel (7) auf dem Faltblatt von den Matrizen zu den Determinanten übergehen, daß

$$\begin{vmatrix} P_2' & Q_2' & R_2' \\ R_2'B & P_2'+R_2'A & Q_2' \\ Q_2'B & Q_2'A+R_2'B & P_2'+R_2'A \end{vmatrix}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} P_1-b_1S & Q_1 & R_1 \\ R_1B & P_1-b_1S+R_1A & Q_1 \\ Q_1B & Q_1A+R_1B & P_1-b_1S+R_1A \end{vmatrix} = (S\,S')^3$$

ist. Da aber die zweite Determinante nach (12) gleich $(S)^2S'$ ist, ergibt sich für die erste der Wert

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} P_2' & Q_2' & R_2' \\ R_2'B & P_2'+R_2'A & Q_2' \\ Q_2'B & Q_2'A+R_2'B & P_2'+R_2'A \end{vmatrix} = S(S')^2.$$

Das ist bereits eine Determinante dritten Grades der Matrix (17), deren Teilbarkeit durch $(S')^2$ hiermit nachgewiesen ist. Für die weiteren Determinanten benötigen wir die Matrixproduktformel (19), die als unterste auf dem Faltblatt bei Seite 32 steht und deren Beweis wir eigentlich schon in Händen haben. Denn daß die ersten drei Spalten der in (19) angegebenen Produktmatrix richtig sind, ist trivial; daß die folgenden drei Spalten ebenfalls richtig sind, lehrt die bereits bewiesene Formel (8) auf dem Faltblatt und für die letzten drei Spalten lehrt es die ebenfalls schon bewiesene Formel (7) auf dem Faltblatt.

Wenn wir jetzt die vordere (dreispaltige) Matrix des Produktes (19), deren Determinante nach (18) gleich $S(S')^2$ ist, mit einer aus drei beliebig herausgegriffenen Spalten des hinteren (neunspaltigen) Faktors gebildeten Matrix multiplizieren, so ist das Produkt eine Matrix, deren drei Spalten auf der rechten Seite von (19) genau unter den drei herausgegriffenen Spalten stehen. Wenn wir dann von den Matrizen zu ihren Determinanten übergehen, ergibt sich für eine gewisse Determinante der Matrix (17) sofort die gewünschte Teilbarkeit. Greifen wir z. B. die Spalten 1, 2, 4 heraus, so kommt, wenn wir gleich zu den Determinanten übergehen:

$$S(S')^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & P_2 - b_2 S \\ 0 & 1 & R_2 B \\ 0 & 0 & Q_2 B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_2' & Q_2' & S P_1' \\ R_2' B & P_2' + R_2' A & S R_1' B \\ Q_2' B & Q_2' A + R_2' B & S Q_1' B \end{vmatrix}, \text{ also}$$

$$(S')^2 Q_2 B = \begin{vmatrix} P_2' & Q_2' & P_1' \\ R_2' B & P_2' + R_2' A & R_1' B \\ Q_2' B & Q_2' A + R_2' B & Q_1' B \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Diese Determinante aus der Matrix (17) ist also durch $(S')^2$ teilbar. Greifen wir die Spalten 2, 4, 5 heraus, so kommt

$$S(S')^2 \begin{vmatrix} 0 & P_2 - b_2 S & Q_2 \\ 1 & R_2 B & P_2 - b_2 S + R_2 A \\ 0 & Q_2 B & Q_2 A + R_2 B \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} Q_2' & S P_1' & S Q_1' \\ P_2' + R_2' A & S R_1' B & S P_1' + S R_1' A \\ Q_2' A + R_2' B & S Q_1' B & S Q_1' A + S R_1' B \end{vmatrix}, \text{ also}$$

$$(21)\qquad -(S')^2\,\frac{\begin{vmatrix} P_2-b_2S & Q_2 \\ Q_2B & Q_2A+R_2B \end{vmatrix}}{S}=$$

$$=\begin{vmatrix} Q_2' & P_1' & Q_1' \\ P_2'+R_2'A & R_1'B & P_1'+R_1'A \\ Q_2'A+R_2'B & Q_1'B & Q_1'A+R_1'B \end{vmatrix}.$$

Nun ist links der Zähler des Bruches eine Determinante der Matrix (3), nur P_2 durch P_2-b_2S ersetzt, also durch S teilbar und der Bruch eine ganze Zahl. Somit ist die in der Matrix (17) enthaltene Determinante rechts durch $(S')^2$ teilbar. Greifen wir auch noch die Spalten 4, 5, 6 heraus, so kommt durch analoge Rechnung

$$(22)\qquad \frac{\begin{vmatrix} P_2-b_2S & Q_2 & R_2 \\ R_2B & P_2-b_2S+R_2A & Q_2 \\ Q_2B & Q_2A+R_2B & P_2-b_2S+R_2A \end{vmatrix}}{(S)^2}=$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} P_1' & Q_1' & R_1' \\ R_1'B & P_1'+R_1'A & Q_1' \\ Q_1'B & Q_1'A+R_1'B & P_1'+R_1'A \end{vmatrix}}{(S')^2}.$$

Hier ist der linke Zähler eine Determinante aus der Matrix (3), nur P_2 durch P_2-b_2S ersetzt. Also ist der linke Bruch eine ganze Zahl und somit auch der in der Matrix (17) enthaltene Zähler rechts durch $(S')^2$ teilbar. Nach diesen drei Beispielen erweisen sich alle zwanzig Determinanten dritten Grades der Matrix (17) als durch $(S')^2$ teilbar. Es ist wohl nicht nötig, sie alle aufzuschreiben. Um die Teilbarkeit der Determinante zu bekommen, die aus den Spalten a, b, c der Matrix (17) besteht, greift man einfach aus der neunspaltigen Matrix (19) die Spalten a, b, c heraus.

Aber auch die Teilbarkeit der Determinanten zweiten Grades der Matrix (17) durch S' ergibt sich aus (19), wenn man nämlich aus der neunspaltigen Matrix auch eine der letzten drei Spalten herausgreift. Man sieht sofort, welche Spalten man aus der neunspaltigen Matrix (19) herausgreifen muß, um eine gewünschte Determinante zweiten Grades zu bekommen.

Es gibt neun Determinanten zweiten Grades. In denen nur der Index 2 vorkommt. Für drei von ihnen geben wir die fertigen Resultate an. Die Spalten 1, 3, 8 liefern

$$\begin{vmatrix} P_2' & R_2' \\ Q_2'B & P_2'+R_2'A \end{vmatrix} = S'(P_1 - b_1 S + R_1 A). \tag{23}$$

Die Spalten 1, 3, 9 liefern

$$\begin{vmatrix} P_2' & R_2' \\ R_2'B & Q_2' \end{vmatrix} = - S' Q_1. \tag{24}$$

Die Spalten 2, 3, 9 liefern

$$\begin{vmatrix} Q_2' & R_2' \\ P_2'+R_2'A & Q_2' \end{vmatrix} = S' R_1. \tag{25}$$

Bei diesen drei Determinanten ist die Teilbarkeit durch S' unmittelbar gegeben. Es gibt auch neun Determinanten zweiten Grades, in denen nur der Index 1 vorkommt. Ebenfalls für drei von ihnen geben wir wieder die fertigen Resultate an: Die Spalten 5, 6, 7 liefern

$$\frac{\begin{vmatrix} P_1'+R_1'A & Q_1' \\ Q_1'A+R_1'B & P_1'+R_1'A \end{vmatrix}}{S'} = \tag{26}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} Q_2 & R_2 & P_1 - b_1 S \\ P_2 - b_2 S + R_2 A & Q_2 & R_1 B \\ Q_2 A + R_2 B & P_2 - b_2 S + R_2 A & Q_1 B \end{vmatrix}}{(S)^2}.$$

Die Spalten 4, 6, 9 liefern

$$\frac{\begin{vmatrix} P_1' & R_1' \\ R_1'B & Q_1' \end{vmatrix}}{S'} = \frac{\begin{vmatrix} P_2 - b_2 S & R_2 & R_1 \\ R_2 B & Q_2 & Q_1 \\ Q_2 B & P_2 - b_2 S + R_2 A & P_1 - b_1 S + R_1 A \end{vmatrix}}{(S)^2}. \tag{27}$$

Die Spalten 5, 6, 9 liefern

$$\frac{\begin{vmatrix} Q_1' & R_1' \\ P_1'+R_1'A & Q_1' \end{vmatrix}}{S'} = \tag{28}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} Q_2 & R_2 & R_1 \\ P_2 - b_2 S + R_2 A & Q_2 & Q_1 \\ Q_2 A + R_2 B & P_2 - b_2 S + R_2 A & P_1 - b_1 S + R_1 A \end{vmatrix}}{(S)^2}.$$

In diesen drei Formeln sind die dreispaltigen Determinanten solche aus der Matrix (3), nur P_1 und P_2 durch $P_1 - b_1 S$ und $P_2 - b_2 S$ ersetzt; sie sind also durch $(S)^2$ teilbar. Die rechten Seiten der drei Formeln sind daher ganze Zahlen, so daß die links stehenden zweispaltigen Determinanten durch S' teilbar sind.

Schließlich gibt es in der Matrix (17) noch zahlreiche Determinanten zweiten Grades, deren erste Spalte den Index 2, die zweite den Index 1 aufweist. Ihre Teilbarkeit durch S' ergibt sich ebenfalls aus (19) durch geeignete Auswahl der herauszugreifenden Spalten. Für fünf von ihnen wollen wir die fertigen Resultate angeben. Die Spalten 3, 6, 9 führen zu

$$\frac{1}{S'}\begin{vmatrix} R_2' & R_1' \\ Q_2' & Q_1' \end{vmatrix} = \frac{1}{S}\begin{vmatrix} R_2 & R_1 \\ Q_2 & Q_1 \end{vmatrix}. \tag{29}$$

Die Spalten 1, 5, 9 führen zu

$$\frac{1}{S'}\begin{vmatrix} P_2' & Q_1' \\ R_2'B & P_1'+R_1'A \end{vmatrix} = \tag{30}$$

$$= \frac{1}{S}\begin{vmatrix} P_2 - b_2 S + R_2 A & Q_1 \\ Q_2 A + R_2 B & P_1 - b_1 S + R_1 A \end{vmatrix}.$$

Die Spalten 1, 6, 8 führen zu

$$-\frac{1}{S'}\begin{vmatrix} P_2' & R_1' \\ Q_2'B & P_1'+R_1'A \end{vmatrix} = \tag{31}$$

$$= \frac{1}{S}\begin{vmatrix} Q_2 & P_1 - b_1 S + R_1 A \\ P_2 - b_2 S + R_2 A & Q_1 A + R_1 B \end{vmatrix}.$$

Die Spalten 3, 6, 7 führen zu

$$\frac{1}{S'}\begin{vmatrix} Q_2' & Q_1' \\ P_2'+R_2'A & P_1'+R_1'A \end{vmatrix} = \frac{1}{S}\begin{vmatrix} R_2 & P_1 - b_1 S \\ Q_2 & R_1 B \end{vmatrix}. \tag{32}$$

Die Spalten 1, 4, 9 führen zu

$$\frac{1}{S'}\begin{vmatrix} P_2' & P_1' \\ R_2'B & R_1'B \end{vmatrix} = \frac{1}{S}\begin{vmatrix} R_2 B & Q_1 \\ Q_2 B & P_1 - b_1 S + R_1 A \end{vmatrix}. \tag{33}$$

In diesen fünf Formeln stehen rechts Determinanten aus der Matrix (3), nur sind P_1, P_2 durch $P_1 - b_1 S$, $P_2 - b_2 S$ ersetzt.

Sie sind also durch S teilbar und folglich sind die Determinanten links durch S' teilbar. In (33) kann man den Faktor B, der ja von 0 verschieden ist, natürlich weglassen.

Damit ist bewiesen, daß die Darstellung (4) für ξ_1', ξ_2' durch (11), (12), (14), (15), (16) normiert ist. Übrigens kann man bemerken, daß auch die Formeln (11), (14), (15), (16) selbst noch einmal aus (19) hervorgehen, wenn man aus der neunspaltigen Matrix außer einer der ersten sechs Spalten noch die Spalten 8, 9 herausgreift.

§ 5. Einige Folgerungen

Nachdem die Darstellung (4) für ξ_1', ξ_2' von selbst normiert ausgefallen ist, brauchen wir bei Fortsetzung des Algorithmus durch die Formeln

$$\xi_1' = b_1' + \frac{1}{\xi_2''} \qquad \xi_2' = b_2' + \frac{\xi_1''}{\xi_2''}$$

keine neue Berechnung der $P_i^2 (= P_i'')$ usw. durchzuführen, sondern können unsere Resultate einfach mit einem Strich mehr, also mit Erhöhung der oberen Indizes um 1 übernehmen, also z. B. nach (11), (12) und (14) sofort schreiben:

$$P_2^2 = \frac{1}{S'} \begin{vmatrix} P_1' - b_1'S' + R_1'A & Q_1'A + R_1'B \\ Q_1' & P_1' - b_1'S' + R_1'A \end{vmatrix},$$

$$S^2 = \frac{1}{(S')^2} \begin{vmatrix} P_1' - b_1'S' & Q_1' & R_1' \\ R_1'B & P_1' - b_1'S' + R_1'A & Q_1' \\ Q_1'B & Q_1'A + R_1'B & P_1' - b_1'S' + R_1'A \end{vmatrix},$$

$$P_1^2 = \frac{1}{(S')^2} \begin{vmatrix} P_2' - b_2'S' & Q_1' & R_1' \\ R_2'B & P_1' - b_1'S' + R_1'A & Q_1' \\ Q_2'B & Q_1'A + R_1'B & P_1' - b_1'S + R_1'A \end{vmatrix}.$$

Dann bekommen wir für ξ_1^2, ξ_2^2 auch wieder eine normierte Darstellung und können in gleicher Weise fortfahren und bekommen für ξ_1^ν, ξ_2^ν bei jedem ν eine normierte Darstellung. Hiernach ist auch folgendes klar: Wenn wir im Verlauf unserer Rechnungen auf irgend eine Relation zwischen den Größen ξ_1, ξ_2, b_1,

$b_2, P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2$ und S mit irgendwelchen oberen Indizes stoßen, dann bleibt die Relation auch richtig, wenn wir alle oberen Indizes um 1 oder auch gleich um eine beliebige (für alle Buchstaben gleiche) Zahl ν erhöhen. Wir nennen das „das Spiel der Strichvermehrung". So folgt z. B. aus Formel (13) sofort

$$\text{Nm}\, \xi_2^{\nu+1} = \frac{S^\nu}{S^{\nu+1}}. \tag{34}$$

Nach (29) ist

$$\frac{Q_1' R_2' - R_1' Q_2'}{S'} = \frac{Q_1 R_2 - R_1 Q_2}{S}$$

und daher durch Strichvermehrung ohne weiteres auch

$$\frac{Q_1^{\nu+1} R_2^{\nu+1} - R_1^{\nu+1} Q_2^{\nu+1}}{S^{\nu+1}} = \frac{Q_1^\nu R_2^\nu - R_1^\nu Q_2^\nu}{S^\nu}.$$

Das bedeutet, daß der Quotient eine *Invariante*, das heißt *von der Strichzahl unabhängig* ist. Wir bezeichnen sie mit J:

$$\frac{Q_1^\nu R_2^\nu - R_1^\nu Q_2^\nu}{S^\nu} = \frac{Q_1 R_2 - R_1 Q_2}{S} = J. \tag{35}$$

Nach (2) ist natürlich $J \neq 0$. Die Invariante führt uns zu einer wichtigen Erkenntnis:

Die Frage, ob der Algorithmus periodisch ist, läuft darauf hinaus, ob die Menge der ganzen Zahlen S^ν, P_i^ν, Q_i^ν, R_i^ν beschränkt ist.

Beweis. Wenn die Menge beschränkt ist, dann gibt es unter den Zahlenpaaren

$$\xi_1^\nu = \frac{P_1^\nu + Q_1^\nu \omega + R_1^\nu \omega^2}{S^\nu}, \quad \xi_2^\nu = \frac{P_2^\nu + Q_2^\nu \omega + R_2^\nu \omega^2}{S^\nu}$$

nur endlich viele verschiedene. Es muß also einmal

$$\xi_1^{\nu+k} = \xi_1^\nu, \quad \xi_2^{\nu+k} = \xi_2^\nu$$

sein und das dedeutet Periodizität. Wenn umgekehrt Periodizität vorliegt, etwa k-gliedrige, dann ist von einem gewissen ν an dauernd

$$\frac{P_i^{\nu+k} + Q_i^{\nu+k}\omega + R_i^{\nu+k}\omega^2}{S^{\nu+k}} = \frac{P_i^\nu + Q_i^\nu \omega + R_i^\nu \omega^2}{S^\nu},$$

also

$$\frac{P_i^{\nu+k}}{S^{\nu+k}} = \frac{P_i^\nu}{S^\nu}, \frac{Q_i^{\nu+k}}{S^{\nu+k}} = \frac{Q_i^\nu}{S^\nu}, \frac{R_i^{\nu+k}}{S^{\nu+k}} = \frac{R_i^\nu}{S^\nu}.$$

Daher muß es für jedes hinreichend große ν einen Faktor p^ν geben, für den

$$S^{\nu+k} = p^\nu S^\nu, \; P_i^{\nu+k} = p^\nu P_i^\nu, \; Q_i^{\nu+k} = p^\nu Q_i^\nu, \; R_i^{\nu+k} = p^\nu R_i^\nu$$

ist. Dann ist aber

$$\frac{Q_1^{\nu+k} R_2^{\nu+k} - R_1^{\nu+k} Q_2^{\nu+k}}{S^{\nu+k}} = p^\nu \frac{Q_1^\nu R_2^\nu - R_1^\nu Q_2^\nu}{S^\nu}.$$

Da hier beide Brüche gleich der von 0 verschiedenen Invariante J sind, folgt $p^\nu = 1$. Es ist also von einem gewissen ν an

$$S^{\nu+k} = S^\nu, \; P_i^{\nu+k} = P_i^\nu, \; Q_i^{\nu+k} = Q_i^\nu, \; R_i^{\nu+k} = R_i^\nu.$$

Daher enthält die Menge der ganzen Zahlen S^ν, P_i^ν, Q_i^ν, R_i^ν nur endlich viele verschiedene Zahlen und ist folglich beschränkt. W. z. b. w.

In einer Formel, in der wir das Spiel der Strichvermehrung machen wollen, darf auch der Buchstabe ω vorkommen, der sich aber selbst nicht an dem Spiel beteiligen kann, weil bei ihm ein oberer Index stets ein Exponent und nicht eine Anzahl von Strichen ist. Zum Beispiel kommt man durch Ausmultiplizieren sofort zu der Formel

$$\begin{aligned}\xi_2'(Q_2' - R_2'\omega) &= \frac{(P_2' + Q_2'\omega + R_2'\omega^2)(Q_2' - R_2'\omega)}{S'} \\ &= \frac{P_2'Q_2' + [(Q_2')^2 - P_2'R_2']\omega - (R_2')^2(A\omega + B)}{S'} \\ &= \frac{P_2'Q_2' - (R_2')^2 B}{S'} + \frac{(Q_2')^2 - R_2'(P_2' + R_2'A)}{S'}\,\omega.\end{aligned}$$

Der erste Bruch ist nach (24) gleich $-Q_1$, der zweite nach (25) gleich R_1. Daher kommt die wichtige Formel

$$\xi_2'(Q_2' - R_2'\omega) = -(Q_1 - R_1\omega), \tag{36}$$

woraus durch Strichvermehrung sofort auch folgt:

$$\xi_2^{\nu+1}(Q_2^{\nu+1} - R_2^{\nu+1}\omega) = -(Q_1^\nu - R_1^\nu\omega).$$

Weiter ist

$$\xi_2'(P_2'+R_2'A-Q_2'\omega)=\frac{(P_2'+Q_2'\omega+R_2'\omega^2)(P_2'+R_2'A-Q_2'\omega)}{S'}$$

$$=\frac{P_2'(P_2'+R_2'A)+Q_2'R_2'A\omega+[R_2'(P_2'+R_2'A)-(Q_2')^2]\omega^2-R_2'Q_2'(A\omega+B)}{S'}$$

$$=\frac{P_2'(P_2'+R_2'A)-R_2'Q_2'B}{S'}+\frac{R_2'(P_2'+R_2'A)-(Q_2')^2}{S'}\,\omega^2.$$

Der erste Bruch ist nach (23) gleich $P_1-b_1S+R_1A$, der zweite nach (25) gleich $-R_1$. Damit haben wir die nicht minder wichtige Formel

$$(37)\qquad \xi_2'(P_2'+R_2'A-Q_2'\omega)=P_1-b_1S+R_1A-R_1\omega^2.$$

Ganz entsprechend oder noch einfacher durch Addition der mit ω multiplizierten Formel (36) zu (37) ergibt sich

$$(38)\qquad \xi_2'(P_2'+R_2'A-R_2'\omega^2)=P_1-b_1S+R_1A-Q_1\omega.$$

§ 6. Die Hauptrekursion

Wenn man in den Determinanten (15) und (16) von den Elementen der letzten Zeile die mit A multiplizierten der ersten Zeile abzieht und dann die Differenz $Q_1'-R_1'\omega$ bildet, ergibt sich

$$Q_1'-R_1'\omega=$$

$$=\frac{1}{(S)^2}\begin{vmatrix} Q_2-R_2\omega & Q_1 & R_1 \\ P_2-b_2S+R_2A-Q_2\omega & P_1-b_1S+R_1A & Q_1 \\ R_2B-(P_2-b_2S)\omega & R_1B & P_1-b_1S \end{vmatrix}.$$

In dieser Determinante addieren wir zu den Elementen der letzten Zeile die mit ω multiplizierten der zweiten Zeile und die mit ω^2 multiplizierten der ersten Zeile. In der dritten Zeile wird dann das letzte Element gleich

$S(\xi_1-b_1)=\frac{S}{\xi_2'}$, das mittlere wird

$$R_1B+(P_1-b_1S+R_1A)\omega+Q_1\omega^2=(P_1-b_1S+Q_1\omega+$$
$$+R_1\omega^2)\omega+R_1(B+A\omega-\omega^3)=\frac{S}{\xi_2'}\,\omega+0,$$

und das erste wird $R_2 B + R_2 A\omega - R_2\omega^3 = 0$. Dann ergibt sich, wenn man aus der letzten Zeile den Faktor $\frac{S}{\xi_2'}$ herauszieht:

$$Q_1' - R_1'\omega = \frac{1}{S\xi_2'}\begin{vmatrix} Q_2 - R_2\omega & Q_1 & R_1 \\ P_2 - b_2 S + R_2 A - Q_2\omega & P_1 - b_1 S + R_1 A & Q_1 \\ 0 & \omega & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{S\xi_2'}[(Q_2 - R_2\omega)(P_1 - b_1 S + R_1 A - Q_1\omega) \\ - (P_2 - b_2 S + R_2 A - Q_2\omega)(Q_1 - R_1\omega)].$$

Nun ist aber

$$P_1 - b_1 S = \frac{S}{\xi_2'} - Q_1\omega - R_1\omega^2,\quad P_2 - b_2 S = \frac{S\xi_1'}{\xi_2'} - Q_2\omega - R_2\omega^2.$$

Setzt man das ein, so kommt

$$Q_1' - R_1'\omega = \frac{1}{S\xi_2'}(Q_2 - R_2\omega)\left(\frac{S}{\xi_2'} + R_1 A - 2Q_1\omega - R_1\omega^2\right) \\ - \frac{1}{S\xi_2'}(Q_1 - R_1\omega)\left(\frac{S\xi_1'}{\xi_2'} + R_2 A - 2Q_2\omega - R_2\omega^2\right)$$

$$= \frac{Q_2 - R_2\omega}{(\xi_2')^2} - \frac{\xi_1'(Q_1 - R_1\omega)}{(\xi_2')^2}$$

$$+ \frac{1}{S\xi_2'}[(Q_2 - R_2\omega)(R_1 A - 2Q_1\omega - R_1\omega^2) \\ - (Q_1 - R_1\omega)(R_2 A - 2Q_2\omega - R_2\omega^2)].$$

Hier vereinfacht sich die eckige Klammer nach Ausmultiplizieren der runden Klammern zu

$$(Q_2 R_1 - Q_1 R_2)A + 3(Q_1 R_2 - R_1 Q_2)\omega^2 = J S(-A + 3\omega^2),$$

wo J die von ν unabhängige Invariante (35) ist. Wir bezeichnen die jetzt dauernd vorkommende von ν unabhängige Größe $J(3\omega^2 - A)$ zur Abkürzung mit C, also

$$J(3\omega^2 - A) = C, \tag{39}$$

was im Gegensatz zu A, B, J allerdings keine ganze Zahl ist, sondern irrational. Dann lautet unser Resultat:

$$Q_1' - R_1'\omega = \frac{Q_2 - R_2\omega}{(\xi_2')^2} - \frac{\xi_1'(Q_1 - R_1\omega)}{(\xi_2')^2} + \frac{C}{\xi_2'},$$

oder nach Multiplikation mit ξ_2' und Gliederumstellung

$$\xi_2'(Q_1' - R_1'\omega) + \frac{\xi_1'(Q_1 - R_1\omega)}{\xi_2'} - \frac{Q_2 - R_2\omega}{\xi_2'} = C,$$

und schließlich durch Vermehrung um $\nu - 1$ Striche

$$\xi_2^\nu(Q_1^\nu - R_1^\nu\omega) + \frac{\xi_1^\nu(Q_1^{\nu-1} - R_1^{\nu-1}\omega)}{\xi_2^\nu} - \frac{Q_2^{\nu-1} - R_2^{\nu-1}\omega}{\xi_2^\nu} = C. \tag{40}$$

Diese Formel nennen wir die Hauptrekursion. Man kann sie durch Anwendung von (36) mit ν oder $\nu - 1$ Strichen mehr auf die ersten zwei Glieder in eine reine Rekursionsformel für $Q_2^\nu - R_2^\nu\omega$ umwandeln oder auch durch entsprechende Anwendung von (36) auf das dritte Glied in eine für $Q_1^\nu - R_1^\nu\omega$. Wir werden sie aber oft auch in der Form gebrauchen, die sich durch Anwendung von (36) auf das zweite Glied allein ergibt:

$$\xi_2^\nu(Q_1^\nu - R_1^\nu\omega) - \xi_1^\nu(Q_2^\nu - R_2^\nu\omega) - \frac{Q_2^{\nu-1} - R_2^{\nu-1}\omega}{\xi_2^\nu} = C. \tag{41}$$

Zur Kontrolle für die Richtigkeit der Hauptrekursion geben wir noch einen zweiten Beweis, wobei wir gleich die Gestalt (41) ansteuern. Es ist

$$\xi_2'(Q_1' - R_1'\omega) - \xi_1'(Q_2' - R_2'\omega)$$

$$= \frac{1}{S'}\left[(P_2' + Q_2'\omega + R_2'\omega^2)(Q_1' - R_1'\omega)\right.$$
$$\left. - (P_1' + Q_1'\omega + R_1'\omega^2)(Q_2' - R_2'\omega)\right]$$
$$= \frac{P_2'Q_1' - P_1'Q_2'}{S'} + \frac{P_1'R_2' - P_2'R_1'}{S'}\omega + 2\,\frac{Q_1'R_2' - R_1'Q_2'}{S'}\omega^2.$$

Der letzte dieser Brüche ist die Invariante J. Es ist außerdem

$$\frac{Q_2 - R_2\omega}{\xi_2'} = (\xi_1 - b_1)(Q_2 - R_2\omega) = \frac{(P_1 - b_1S + Q_1\omega + R_1\omega^2)(Q_2 - R_2\omega)}{S}$$

$$= \frac{(P_1 - b_1S)Q_2 + [Q_1Q_2 - (P_1 - b_1S)R_2]\omega + (R_1Q_2 - Q_1R_2)\omega^2 - R_1R_2(A\omega + B)}{S}$$

$$= \frac{(P_1 - b_1S)Q_2 - R_1R_2B}{S} + \frac{Q_1Q_2 - (P_1 - b_1S + R_1A)R_2}{S}\omega -$$
$$- \frac{Q_1R_2 - R_1Q_2}{S}\omega^2.$$

Faltblatt

$$\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ Z_1 B & X_1 + Z_1 A & Y_1 \\ Y_1 B & Y_1 A + Z_1 B & X_1 + Z_1 A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_2 & Y_2 & Z_2 \\ Z_2 B & X_2 + Z_2 A & Y_2 \\ Y_2 B & Y_2 A + Z_2 B & X_2 + Z_2 A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 & Y_3 & Z_3 \\ Z_3 B & X_3 + Z_3 A & Y_3 \\ Y_3 B & Y_3 A + Z_3 B & X_3 + Z_3 A \end{pmatrix}$$

Zu Seite 17

$$(7) \quad \begin{pmatrix} P_2' & Q_2' & R_2' \\ R_2' B & P_2' + R_2' A & Q_2' \\ Q_2' B & Q_2' A + R_2' B & P_2' + R_2' A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 - b_1 S & Q_1 & R_1 \\ R_1 B & P_1 - b_1 S + R_1 A & Q_1 \\ Q_1 B & Q_1 A + R_1 B & P_1 - b_1 S + R_1 A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} SS' & 0 & 0 \\ 0 & SS' & 0 \\ 0 & 0 & SS' \end{pmatrix}$$

Zu Seite 19

$$(8) \quad \begin{pmatrix} P_2' & Q_2' & R_2' \\ R_2' B & P_2' + R_2' A & Q_2' \\ Q_2' B & Q_2' A + R_2' B & P_2' + R_2' A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_2 - b_2 S & Q_2 & R_2 \\ R_2 B & P_2 - b_2 S + R_2 A & Q_2 \\ Q_2 B & Q_2 A + R_2 B & P_2 - b_2 S + R_2 A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} SP_1' & SQ_1' & SR_1' \\ SR_1' B & SP_1' + SR_1' A & SQ_1' \\ SQ_1' B & SQ_1' A + SR_1' B & SP_1' + SR_1' A \end{pmatrix}$$

Zu Seite 19

$$(19) \quad \begin{aligned} &\begin{pmatrix} P_2' & Q_2' & R_2' \\ R_2' B & P_2' + R_2' A & Q_2' \\ Q_2' B & Q_2' A + R_2' B & P_2' + R_2' A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & P_2 - b_2 S & Q_2 & R_2 & P_1 - b_1 S & Q_1 & R_1 \\ 0 & 1 & 0 & R_2 B & P_2 - b_2 S + R_2 A & Q_2 & R_1 B & P_1 - b_1 S + R_1 A & Q_1 \\ 0 & 0 & 1 & Q_2 B & Q_2 A + R_2 B & P_2 - b_2 S + R_2 A & Q_1 B & Q_1 A + R_1 B & P_1 - b_1 S + R_1 A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_2' & Q_2' & R_2' & SP_1' & SQ_1' & SR_1' & SS' & 0 & 0 \\ R_2' B & P_2' + R_2' A & Q_2' & SR_1' B & SP_1' + SR_1' A & SQ_1' & 0 & SS' & 0 \\ Q_2' B & Q_2' A + R_2' B & P_2' + R_2' A & SQ_1' B & SQ_1' A + SR_1' B & SP_1' + SR_1' A & 0 & 0 & SS' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zu Seite 23 und später

Der letzte dieser Brüche ist wieder die Invariante J. Der erste ist nach (32) gleich

$$\frac{Q_1'(P_2'+R_2'A)-(P_1'+R_1'A)Q_2'}{S'}=\frac{Q_1'P_2'-P_1'Q_2'}{S'}+JA,$$

der zweite nach (33) gleich $\frac{P_1'R_2'-R_1'P_2'}{S'}$; also ergibt sich

$$\frac{Q_2-R_2\omega}{\xi_2'}=\frac{Q_1'P_2'-P_1'Q_2'}{S'}+JA+\frac{P_1'R_2'-R_1'P_2'}{S'}\omega-J\omega^2.$$

Wenn wir diese Formel von der vorigen abziehen, kommt

$$\xi_2'(Q_1'-R_1'\omega)-\xi_1'(Q_2'-R_2'\omega)-\frac{Q_2-R_2\omega}{\xi_2'}=3J\omega^2-JA=C$$

und mit $\nu-1$ Strichen mehr die gewünschte Formel (41).

Bemerkung. Die Brüche $\frac{Q_1P_2-P_1Q_2}{S}$, $\frac{P_1R_2-R_1P_2}{S}$ und natürlich auch die entsprechenden mit Strichen sind ganze Zahlen. Denn es ist

$$Q_1P_2-P_1Q_2=\begin{vmatrix}P_2 & R_1\\ R_2B & Q_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}R_2 & P_1\\ Q_2 & R_1B\end{vmatrix},$$

$$P_1R_2-R_1P_2=\begin{vmatrix}R_2 & R_1\\ P_2+R_2A & P_1+R_1A\end{vmatrix}$$

und das sind drei Determinanten aus der Matrix (3).

Die zwei Beweise mögen genügen. Immerhin, einige habe ich noch auf Lager. Bald nachdem ich die Hauptrekursion gefunden hatte, gelang es mir mit ihrer Hilfe unter Beschränkung auf den Fall $A=0$ (also ω einfach eine Kubikwurzel) nachzuweisen, daß die Zahlen $|Q_i^\nu-R_i^\nu\omega|$ unter einer von ν unabhängigen Schranke liegen. Das war immerhin etwas, aber für Q_i^ν und R_i^ν selbst besagt es nichts. Meine weiteren Bemühungen führten allmählich zu einem Arsenal von gut 200 Formeln, die sich gegenseitig kontrollierten, aber gerade dadurch zu einem Teufelskreis wurden, in dem ich mich nur ständig drehte. Da beschlich mich das dunkle Gefühl, daß man in dem nach dem zweiten Weltkrieg an- oder ausgebrochenen Zeitalter der uferlosesten Epigonenflut

(Sintflut) und der angestrebtesten inflatio Eruditorum (et -arum) vielleicht doch auch bei unsern alten Klassikern noch was lernen könnte; und so ließ ich mir den *Lagrange*'schen Beweis für die Periodizität der regelmäßigen Kettenbrüche quadratischer Irrationalzahlen wieder einmal gründlich durch den Kopf gehen. *Lagrange* führte neben den vollständigen Quotienten auch deren konjugierte Zahlen in die Rechnung ein und fand, gestützt auf die Konvergenz des Kettenbruchs, daß diese von einer gewissen (vielleicht sehr späten von keinem noch so tüchtigen und angebeteten Computer jemals erreichbaren) Stelle an alle zwischen 0 und —1 liegen. Daß es diese Stelle gab, war entscheidend und führte schließlich zu der Erkenntnis, daß es nur endlich viele verschiedene vollständige Quotienten geben kann, was mit Periodizität gleichbedeutend ist. So beschloß ich, es auch mal mit den Konjugierten zu versuchen.

§ 7. Auf zu den Konjugierten!

Die beiden Konjugierten zu ω nennen wir $\dot\omega$ und $\ddot\omega$. Sie sind entweder reell oder zueinander konjugiert-komplex. Die Konjugierte zu ξ_i^ν im Körper von $\dot\omega$ nennen wir η_i^ν, die im Körper von $\ddot\omega$ nennen wir ζ_i^ν. Es ist also

$$(42) \qquad \eta_i^\nu = \frac{P_i^\nu + Q_i^\nu \dot\omega + R_i^\nu \dot\omega^2}{S^\nu}, \quad \zeta_i^\nu = \frac{P_i^\nu + Q_i^\nu \ddot\omega + R_i^\nu \ddot\omega^2}{S^\nu}.$$

Aus der Gleichung für ω in § 2 entnimmt man

$$(43) \qquad \omega + \dot\omega + \ddot\omega = 0, \quad \omega\dot\omega\ddot\omega = B, \quad \dot\omega\ddot\omega = \frac{B}{\omega} = \omega^2 - A.$$

Nach (42) ist dann

$$(44) \qquad \begin{aligned} S^\nu(\eta_2^\nu - \zeta_2^\nu) &= Q_2^\nu(\dot\omega - \ddot\omega) + R_2^\nu(\dot\omega^2 - \ddot\omega^2) \\ &= (\dot\omega - \ddot\omega)\,[(Q_2^\nu + R_2^\nu(\dot\omega + \ddot\omega)] \\ &= (\dot\omega - \ddot\omega)\,(Q_2^\nu - R_2^\nu\omega), \end{aligned}$$

und entsprechend

$$(45) \qquad S^\nu(\zeta_1^\nu - \eta_1^\nu) = -(\dot\omega - \ddot\omega)\,(Q_1^\nu - R_1^\nu\omega).$$

Außerdem etwas umständlicher:

$$
\begin{aligned}
(S^\nu)^2\,(\eta_1^\nu\zeta_2^\nu - \zeta_1^\nu\eta_2^\nu) &= (P_1^\nu + Q_1^\nu\dot\omega + R_1^\nu\dot\omega^2)\,(P_2^\nu + Q_2^\nu\ddot\omega + R_2^\nu\ddot\omega^2)\\
&\quad - (P_1^\nu + Q_1^\nu\ddot\omega + R_1^\nu\ddot\omega^2)\,(P_2^\nu + Q_2^\nu\dot\omega + R_2^\nu\dot\omega^2)\\
&= (P_1^\nu Q_2^\nu - Q_1^\nu P_2^\nu)\,(\ddot\omega - \dot\omega) + (P_1^\nu R_2^\nu - R_1^\nu P_2^\nu)\,(\ddot\omega^2 - \dot\omega^2)\\
&\quad + (Q_1^\nu R_2^\nu - R_1^\nu Q_2^\nu)\,\dot\omega\ddot\omega\,(\ddot\omega - \dot\omega).
\end{aligned}
$$

Also nach Division durch S^ν unter Berücksichtigung, daß $Q_1^\nu\, R_2^\nu - R_1^\nu\, Q_2^\nu = S^\nu J$ und $\dot\omega\ddot\omega = \omega^2 - A$ ist:

$$
\begin{aligned}
(46)\quad & S^\nu\,(\eta_1^\nu\zeta_2^\nu - \zeta_1^\nu\eta_2^\nu)\\
&= (\dot\omega - \ddot\omega)\left(-\frac{P_1^\nu Q_2^\nu - Q_1^\nu P_2^\nu}{S^\nu} + \frac{P_1^\nu R_2^\nu - R_1^\nu P_2^\nu}{S^\nu}\,\omega - J\omega^2 + JA\right).
\end{aligned}
$$

Die Brüche sind ganze Zahlen, wie bereits Seite 33 bemerkt wurde.

Für $v > o$ gibt es aber für $\eta_1^\nu\zeta_2^\nu - \zeta_1^\nu\eta_2^\nu$ noch eine bequemere Formel. Aus $\xi_2^{\nu-1} = b_2^{\nu-1} + \frac{\xi_1^\nu}{\xi_2^\nu}$ folgt nämlich durch Übergang zu den Konjugierten

$$\eta_2^{\nu-1} = b_2^{\nu-1} + \frac{\eta_1^\nu}{\eta_2^\nu},\quad \zeta_2^{\nu-1} = b_2^{\nu-1} + \frac{\zeta_1^\nu}{\zeta_2^\nu},$$

daher ist

$$\eta_2^{\nu-1} - \zeta_2^{\nu-1} = \frac{\eta_1^\nu}{\eta_2^\nu} - \frac{\zeta_1^\nu}{\zeta_2^\nu} = \frac{\eta_1^\nu\zeta_2^\nu - \zeta_1^\nu\eta_2^\nu}{\eta_2^\nu\zeta_2^\nu}.$$

Dividiert man durch ξ_2^ν, so kommt, weil nach (34)

$$\xi_2^\nu\eta_2^\nu\zeta_2^\nu = \mathrm{Nm}\,\xi_2^\nu = \frac{S^{\nu-1}}{S^\nu},\quad \text{also}\quad S^\nu\eta_2^\nu\zeta_2^\nu = \frac{S^{\nu-1}}{\xi_2^\nu}$$

ist, rückwärts gelesen

$$S^\nu(\eta_1^\nu\zeta_2^\nu - \zeta_1^\nu\eta_2^\nu) = S^\nu\eta_2^\nu\zeta_2^\nu(\eta_2^{\nu-1} - \zeta_2^{\nu-1}) = \frac{S^{\nu-1}(\eta_2^{\nu-1} - \zeta_2^{\nu-1})}{\xi_2^\nu}$$

und jetzt nach (44) mit $\nu - 1$ an Stelle von ν

$$(46\text{a})\qquad S^\nu(\eta_1^\nu\zeta_2^\nu - \zeta_1^\nu\eta_2^\nu) = (\dot\omega - \ddot\omega)\,\frac{Q_2^{\nu-1} - R_2^{\nu-1}\omega}{\xi_2^\nu}.$$

Übrigens kann man auch ohne Hilfe der Konjugierten leicht verifizieren, daß die rechten Seiten von (46) und (46a) dasselbe sind. Wir haben das sogar schon gemacht, nämlich beim zweiten Beweis der Hauptrekursion. Da steht auf Seite 33 Zeile 5 genau diese Formel für $v = 1$ und mit dem Spiel der Strichvermehrung gilt sie dann allgemein.

Mittels dieser Formeln wollen wir zunächst einmal die Hauptrekursion in der Gestalt (41) erneut bestätigen. Ihre linke Seite ist nach (45), (44) und (46a) gleich

$$\frac{-S^\nu}{\dot\omega - \ddot\omega}\left[\xi_2^\nu(\zeta_1^\nu - \eta_1^\nu) + \xi_1^\nu(\eta_2^\nu - \zeta_2^\nu) + (\eta_1^\nu\zeta_2^\nu - \zeta_1^\nu\eta_2^\nu)\right] =$$

$$= \frac{-S^\nu}{\dot\omega - \ddot\omega}\begin{vmatrix} \xi_1^\nu & \xi_2^\nu & 1 \\ \eta_1^\nu & \eta_2^\nu & 1 \\ \zeta_1^\nu & \zeta_2^\nu & 1 \end{vmatrix}$$

und wir brauchen bloß zu zeigen, daß das auch gleich C, also gleich $J(3\omega^2 - A)$ ist. Nun ist augenscheinlich

$$\begin{vmatrix} P_1^\nu & Q_1^\nu & R_1^\nu \\ P_2^\nu & Q_2^\nu & R_2^\nu \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \dot\omega & \dot\omega^2 \\ 1 & \ddot\omega & \ddot\omega^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S^\nu\xi_1^\nu & S^\nu\xi_2^\nu & 1 \\ S^\nu\eta_1^\nu & S^\nu\eta_2^\nu & 1 \\ S^\nu\zeta_1^\nu & S^\nu\zeta_2^\nu & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (S^\nu)^2 \begin{vmatrix} \xi_1^\nu & \xi_2^\nu & 1 \\ \eta_1^\nu & \eta_2^\nu & 1 \\ \zeta_1^\nu & \zeta_2^\nu & 1 \end{vmatrix}.$$

In dem Determinantenprodukt ist aber der erste Faktor gleich $Q_1^\nu R_2^\nu - R_1^\nu Q_2^\nu = JS^\nu$ und der zweite ist gleich

$$\dot\omega\,\ddot\omega(\ddot\omega - \dot\omega) + \omega(\dot\omega^2 - \ddot\omega^2) + \omega^2(\ddot\omega - \dot\omega)$$

$$= (\ddot\omega - \dot\omega)\left(\frac{B}{\omega} + \omega^2 + \omega^2\right) = (\ddot\omega - \dot\omega)\,(3\omega^2 - A).$$

Somit ist

$$JS^\nu(\ddot\omega - \dot\omega)\,(3\omega^2 - A) = (S^\nu)^2 \begin{vmatrix} \xi_1^\nu & \xi_2^\nu & 1 \\ \eta_1^\nu & \eta_2^\nu & 1 \\ \zeta_1^\nu & \zeta_2^\nu & 1 \end{vmatrix}$$

und nach Division durch $S^\nu\,(\ddot\omega - \dot\omega)$ haben wir das Gewünschte.

Nunmehr wenden wir uns den Formeln des § 1 zu, müssen uns aber davor hüten, etwa auch die A_i^ν, bei denen ja der obere Index die Anzahl der Striche bedeutet, deshalb auch am Spiel der Strichvermehrung teilnehmen zu lassen. Jedes A_i^ν ist zwar ein Polynom gewisser b_j^μ, aber wenn wir darin alle oberen Indizes um eine Zahl k erhöhen, so ist das Resultat nicht etwa $A_i^{\nu+k}$. Ich habe es in meiner Arbeit [1] mit $A_{i,k}^\nu$ bezeichnet, wir werden aber diese Bildungen hier garnicht brauchen. Nach § 1 ist

$$(47)\quad \xi_1 = \frac{A_1^\nu + A_1^{\nu+1}\xi_1^\nu + A_1^{\nu+2}\xi_2^\nu}{A_0^\nu + A_0^{\nu+1}\xi_1^\nu + A_0^{\nu+2}\xi_2^\nu}, \qquad \xi_2 = \frac{A_2^\nu + A_2^{\nu+1}\xi_1^\nu + A_2^{\nu+2}\xi_2^\nu}{A_0^\nu + A_0^{\nu+1}\xi_1^\nu + A_0^{\nu+2}\xi_2^\nu}.$$

Diese Gleichungen lösen wir nach ξ_1^ν, ξ_2^ν auf. Wenn wir zu dem Zweck den gemeinsamen Nenner vorübergehend mit N bezeichnen, dann ist

$$\begin{aligned} A_0^\nu \cdot 1 + A_0^{\nu+1}\xi_1^\nu + A_0^{\nu+2}\xi_2^\nu &= N, \\ A_1^\nu \cdot 1 + A_1^{\nu+1}\xi_1^\nu + A_1^{\nu+2}\xi_2^\nu &= N\xi_1, \\ A_2^\nu \cdot 1 + A_2^{\nu+1}\xi_1^\nu + A_2^{\nu+2}\xi_2^\nu &= N\xi_2, \end{aligned}$$

und hieraus folgt, weil nach § 1

$$(48)\qquad \begin{vmatrix} A_0^\nu & A_0^{\nu+1} & A_0^{\nu+2} \\ A_1^\nu & A_1^{\nu+1} & A_1^{\nu+2} \\ A_2^\nu & A_2^{\nu+1} & A_2^{\nu+2} \end{vmatrix} = 1$$

ist, zunächst

$$1 = \begin{vmatrix} N & A_0^{\nu+1} & A_0^{\nu+2} \\ N\xi_1 & A_1^{\nu+1} & A_1^{\nu+2} \\ N\xi_2 & A_2^{\nu+1} & A_2^{\nu+2} \end{vmatrix}, \quad \xi_1^\nu = \begin{vmatrix} A_0^\nu & N & A_0^{\nu+2} \\ A_1^\nu & N\xi_1 & A_1^{\nu+2} \\ A_2^\nu & N\xi_2 & A_2^{\nu+2} \end{vmatrix},$$

$$\xi_2^\nu = \begin{vmatrix} A_0^\nu & A_0^{\nu+1} & N \\ A_1^\nu & A_1^{\nu+1} & N\xi_1 \\ A_2^\nu & A_2^{\nu+1} & N\xi_2 \end{vmatrix}.$$

Wenn wir die letzten beiden Gleichungen durch die erste dividieren, wobei sich der Faktor N weghebt, bekommen wir, wenn wir vorübergehend bei festgehaltenem ν den Minor des Elementes A_i^k in der Determinante (48) mit B_i^k bezeichnen[1]:

$$\xi_1^\nu = \frac{B_0^{\nu+1} + B_1^{\nu+1}\xi_1 + B_2^{\nu+1}\xi_2}{B_0^\nu + B_1^\nu\xi_1 + B_2^\nu\xi_2}, \quad \xi_2^\nu = \frac{B_0^{\nu+2} + B_1^{\nu+2}\xi_1 + B_2^{\nu+2}\xi_2}{B_0^\nu + B_1^\nu\xi_1 + B_2^\nu\xi_2}.$$

In den konjugierten Körpern gelten natürlich die entsprechenden Formeln

$$\eta_1^\nu = \frac{B_0^{\nu+1} + B_1^{\nu+1}\eta_1 + B_2^{\nu+1}\eta_2}{B_0^\nu + B_1^\nu\eta_1 + B_2^\nu\eta_2}, \quad \eta_2^\nu = \frac{B_0^{\nu+2} + B_1^{\nu+2}\eta_1 + B_2^{\nu+2}\eta_2}{B_0^\nu + B_1^\nu\eta_1 + B_2^\nu\eta_2},$$

$$\zeta_1^\nu = \frac{B_0^{\nu+1} + B_1^{\nu+1}\zeta_1 + B_2^{\nu+1}\zeta_2}{B_0^\nu + B_1^\nu\zeta_1 + B_2^\nu\zeta_2}, \quad \zeta_2^\nu = \frac{B_0^{\nu+2} + B_1^{\nu+2}\zeta_1 + B_2^{\nu+2}\zeta_2}{B_0^\nu + B_1^\nu\zeta_1 + B_2^\nu\zeta_2}.$$

Bildet man jetzt die Differenz $\eta_2^\nu - \zeta_2^\nu$, so ergibt sich ein Bruch, dessen Nenner gleich dem Produkt der beiden vorstehenden Nenner ist, und mit dem Zähler

$$(B_0^\nu B_2^{\nu+2} - B_2^\nu B_0^{\nu+2})(\eta_2 - \zeta_2) + (B_1^\nu B_0^{\nu+2} - B_0^\nu B_1^{\nu+2})(\zeta_1 - \eta_1)$$
$$+ (B_2^\nu B_1^{\nu+2} - B_1^\nu B_2^{\nu+2})(\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2).$$

Hier sind die vorderen Klammern Minoren der zur Determinante (48) adjungierten Determinante und daher nach bekannten Sätzen gleich gewissen Elementen der Determinante (48), noch multipliziert mit der Determinante selbst, die aber gleich 1 ist. Und zwar sind unsere vorderen Klammern der Reihe nach gleich $A_1^{\nu+1}$, $A_2^{\nu+1}$, $A_0^{\nu+1}$. Man hat also

$$\eta_2^\nu - \zeta_2^\nu = \frac{A_1^{\nu+1}(\eta_2 - \zeta_2) + A_2^{\nu+1}(\zeta_1 - \eta_1) + A_0^{\nu+1}(\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2)}{(B_0^\nu + B_1^\nu\eta_1 + B_2^\nu\eta_2)(B_0^\nu + B_1^\nu\zeta_1 + B_2^\nu\zeta_2)}.$$

Ebenso ergibt sich

$$\zeta_1^\nu - \eta_1^\nu = \frac{A_1^{\nu+2}(\eta_2 - \zeta_2) + A_2^{\nu+2}(\zeta_1 - \eta_1) + A_0^{\nu+2}(\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2)}{(B_0^\nu + B_1^\nu\eta_1 + B_2^\nu\eta_2)(B_0^\nu + B_1^\nu\zeta_1 + B_2^\nu\zeta_2)},$$

$$\eta_1^\nu\zeta_2^\nu - \zeta_1^\nu\eta_2^\nu = \frac{A_1^\nu(\eta_2 - \zeta_2) + A_2^\nu(\zeta_1 - \eta_1) + A_0^\nu(\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2)}{(B_0^\nu + B_1^\nu\eta_1 + B_2^\nu\eta_2)(B_0^\nu + B_1^\nu\zeta_1 + B_2^\nu\zeta_2)}.$$

---

[1] Es ist genau diese Definition zu beachten. Es ist z. B.

$$B_0^\nu = A_1^{\nu+1} A_2^{\nu+2} - A_1^{\nu+2} A_2^{\nu+1}.$$

Aber $B_0^{\nu+1}$ entsteht hieraus nicht, indem man ν durch $\nu + 1$ ersetzt, sondern $B_0^{\nu+1}$ ist der Minor von $A_0^{\nu+1}$ in der Determinante (48), also

$$B_0^{\nu+1} = A_1^{\nu+2} A_2^\nu - A_1^\nu A_2^{\nu+2}.$$

Von diesen drei Formeln dividieren wir jetzt die ersten beiden durch die dritte und führen dabei die Abkürzungen

$$
(49) \qquad \begin{aligned}
\frac{\eta_2 - \zeta_2}{\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2} &= \varrho_1, \quad \frac{\zeta_1 - \eta_1}{\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2} = \varrho_2 \\
\frac{\eta_2^\nu - \zeta_2^\nu}{\eta_1^\nu\zeta_2^\nu - \zeta_1^\nu\eta_2^\nu} &= \varrho_1^\nu, \quad \frac{\zeta_1^\nu - \eta_1^\nu}{\eta_1^\nu\zeta_2^\nu - \zeta_1^\nu\eta_2^\nu} = \varrho_2^\nu
\end{aligned}
$$

ein. Es ergibt sich

$$
(50) \quad \varrho_1^\nu = \frac{A_0^{\nu+1} + A_1^{\nu+1}\varrho_1 + A_2^{\nu+1}\varrho_2}{A_0^\nu + A_1^\nu\varrho_1 + A_2^\nu\varrho_2}, \quad \varrho_2^\nu = \frac{A_0^{\nu+2} + A_1^{\nu+2}\varrho_1 + A_2^{\nu+2}\varrho_2}{A_0^\nu + A_1^\nu\varrho_1 + A_2^\nu\varrho_2}.
$$

Die ϱ_1^ν, ϱ_2^ν sind Zahlen unseres Körpers von ω, und zwar ergibt sich aus (49) gemäß den Formeln (44), (45), (46a) sofort

$$
(51) \qquad \varrho_1^\nu = \frac{\xi_2^\nu(Q_2^\nu - R_2^\nu\omega)}{Q_2^{\nu-1} - R_2^{\nu-1}\omega}, \quad \varrho_2^\nu = \frac{\xi_2^\nu(R_1^\nu\omega - Q_1^\nu)}{Q_2^{\nu-1} - R_2^{\nu-1}\omega}.
$$

Daraus ist ersichtlich, daß die ϱ_i^ν an dem Spiel der Strichvermehrung teilnehmen dürfen, obwohl die A_i^ν, mit deren Hilfe wir sie primär gewonnen haben, das nicht dürfen.

§ 8. Erfreuliche Folgen

Wenn wir den gemeinsamen Nenner der Brüche (50) in der Form

$$
A_0^\nu\left(1 + \frac{A_1^\nu}{A_0^\nu}\varrho_1 + \frac{A_2^\nu}{A_0^\nu}\varrho_2\right)
$$

schreiben und berücksichtigen, daß nach § 1

$$
\lim_{\nu\to\infty} \frac{A_1^\nu}{A_0^\nu} = \xi_1, \quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{A_2^\nu}{A_0^\nu} = \xi_2
$$

ist, so liegt die Klammer für genügend große ν in beliebiger Nähe der Zahl

$$
\begin{aligned}
1 + \xi_1\varrho_1 + \xi_2\varrho_2 &= \frac{\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2 + \xi_1(\eta_2 - \zeta_2) + \xi_2(\zeta_1 - \eta_1)}{\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2} \\
&= \frac{1}{\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2}\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & 1 \\ \eta_1 & \eta_2 & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & 1 \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Diese Determinante ist aber nach Seite 36 gleich

$$\frac{J}{S}(\ddot{\omega}-\dot{\omega})(3\omega^2-A),$$

also von 0 verschieden. Ebenso kann man den Zähler der ersten Formel (50) in der Gestalt

$$A_0^{\nu+1}\left(1+\frac{A_1^{\nu+1}}{A_0^{\nu+1}}\varrho_1+\frac{A_2^{\nu+1}}{A_0^{\nu+1}}\varrho_2\right)$$

schreiben, wo die Klammer in beliebiger Nähe der gleichen von 0 verschiedener Zahl wie vorhin liegt, und analog ist es auch mit dem Zähler des zweiten Bruches von (50). Daraus folgt dann, daß ϱ_1^ν, ϱ_2^ν das Aussehen

$$\varrho_1^\nu=\frac{A_0^{\nu+1}}{A_0^\nu}(1+\delta^\nu),\quad \varrho_2^\nu=\frac{A_0^{\nu+2}}{A_0^\nu}(1+\varepsilon^\nu)$$

haben, wo δ^ν, ε^ν absolut beliebig klein sind, wenn ν hinreichend groß ist. Das besagt aber, daß die ϱ_1^ν, ϱ_2^ν von einem gewissen ν an dauernd positiv sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß sie schon von $\nu=0$ an positiv sind. Das bedeutet weiter nichts als, daß wir den Algorithmus erst bei einer späteren Stelle beginnen, von der an das eben zutrifft. Aus (50) folgt dann, da ja A_i^ν mit ν wächst, daß

$$\varrho_2^\nu>\varrho_1^\nu>1 \tag{52}$$

ist. Weiter lehrt die erste Formel (51), *daß $Q_2^\nu-R_2^\nu\omega$ für alle ν dasselbe Vorzeichen hat*, und die zweite Formel (51) lehrt, *daß $R_1^\nu\omega-Q_1^\nu$ ebenfalls dieses Vorzeichen hat.* Wenn wir daher die Hauptrekursion (41) in der Gestalt schreiben

$$\xi_2^\nu(Q_1^\nu-R_1^\nu\omega)+\xi_1^\nu(R_2^\nu\omega-Q_2^\nu)+\frac{R_2^{\nu-1}\omega-Q_2^{\nu-1}}{\xi_2^\nu}=C, \tag{53}$$

so haben alle drei Summanden gleiches Vorzeichen und die Formel selbst lehrt, daß es das Vorzeichen der Konstanten C ist. Damit sind wir schon erheblich weiter gekommen als wir vor § 7 waren, *die Reise zu den Konjugierten hat sich also gelohnt und geradezu als Reisespaß-Reise erwiesen.*

Wegen der gleichen Vorzeichen können wir die Formel (53) mit Absolutstrichen schreiben:

$$(54)\quad \xi_2^\nu |Q_1^\nu - R_1^\nu \omega| + \xi_1^\nu |R_2^\nu \omega - Q_2^\nu| + \frac{|R_2^{\nu-1}\omega - Q_2^{\nu-1}|}{\xi_2^\nu} = |C|$$

und wollen noch zeigen, daß hier der erste Summand der größte ist. Wegen der ersten Formel (51) ist mit Rücksicht auf (36) auch

$$(55)\quad \varrho_1^\nu = \frac{Q_1^{\nu-1} - R_1^{\nu-1}\omega}{R_2^{\nu-1}\omega - Q_2^{\nu-1}}.$$

Daher wegen $\varrho_1^\nu > 1$ mit einem Strich mehr

$$|Q_1^\nu - R_1^\nu \omega| > |R_2^\nu \omega - Q_2^\nu|.$$

Da auch $\xi_2^\nu > \xi_1^\nu$, so ist also der erste Summand in (54) größer als der zweite. Nach der zweiten Formel (51) ist

$$\frac{Q_2^{\nu-1} - R_2^{\nu-1}\omega}{\xi_2^\nu} = \frac{R_1^\nu \omega - Q_1^\nu}{\varrho_2^\nu} = \frac{\xi_2^\nu (R_1^\nu \omega - Q_1^\nu)}{\xi_2^\nu \varrho_2^\nu}.$$

Daher ist der dritte Summand gleich dem durch $\xi_2^\nu \varrho_2^\nu$ dividierten ersten, also kleiner als dieser. Somit ist der erste Summand der größte der drei und folglich größer als ein Drittel der Summe und natürlich auch kleiner als die ganze Summe. Es ist also

$$(56)\quad \frac{|C|}{3} < \xi_2^\nu |Q_1^\nu - R_1^\nu \omega| < |C|.$$

Um über die ϱ_1^ν, ϱ_2^ν weiteres zu erfahren, setzen wir $A_0^\nu + A_1^\nu \varrho_1 + A_2^\nu \varrho_2 = H^\nu$. Dann ist nach (50)

$$\varrho_1^\nu = \frac{H^{\nu+1}}{H^\nu}, \quad \varrho_2^\nu = \frac{H^{\nu+2}}{H^\nu},$$

und nach § 1

$$H^{\nu+3} = b_2^\nu H^{\nu+2} + b_1^\nu H^{\nu+1} + H^\nu.$$

Daraus folgen sofort die Rekursionsformeln

$$(57)\quad \varrho_2^\nu = \varrho_1^\nu \varrho_1^{\nu+1},$$

$$(58)\quad \varrho_2^{\nu+2} = b_2^\nu + \frac{b_1^\nu}{\varrho_1^{\nu+1}} + \frac{1}{\varrho_2^\nu}.$$

Weiterhin werden die Größen

$$\frac{\xi_2^\nu(Q_1^\nu - R_1^\nu\omega)}{C} = \vartheta^\nu \tag{59}$$

eine wichtige Rolle spielen. Nach unseren Feststellungen über die Vorzeichen von $Q_1^\nu - R_1^\nu\omega$ und C sind sie positiv und nach (56) ist

$$\frac{1}{3} < \vartheta^\nu < 1. \tag{60}$$

Nach (59), (55) mit einem Strich mehr und der zweiten Fl. (51) ist

$$\frac{Q_1^\nu - R_1^\nu\omega}{C} = \frac{\vartheta^\nu}{\xi_2^\nu}, \quad \frac{R_2^\nu\omega - Q_2^\nu}{C} = \frac{\vartheta^\nu}{\xi_2^\nu\varrho_1^{\nu+1}}, \quad \frac{R_2^{\nu-1}\omega - Q_2^{\nu-1}}{C} = \frac{\vartheta^\nu}{\varrho_2^\nu}. \tag{61}$$

Wenn man diese drei Formeln der Reihe nach mit ξ_2^ν, ξ_1^ν, $\frac{1}{\xi_2^\nu}$ multipliziert, dann haben die linken Seiten nach (53) die Summe 1 und nach Division durch ϑ^ν kommt

$$\frac{1}{\vartheta^\nu} = 1 + \frac{\xi_1^\nu}{\xi_2^\nu\varrho_1^{\nu+1}} + \frac{1}{\xi_2^\nu\varrho_2^\nu}. \tag{62}$$

Wenn man in der letzten Formel (61) $\nu - 1$ durch ν ersetzt und sie dann mit der mittleren vergleicht, kommt:

$$\frac{\vartheta^{\nu+1}}{\varrho_2^{\nu+1}} = \frac{\vartheta^\nu}{\xi_2^\nu\varrho_1^{\nu+1}}, \quad \text{also } \vartheta^{\nu+1} = \frac{\vartheta^\nu\varrho_2^{\nu+1}}{\xi_2^\nu\varrho_1^{\nu+1}}$$

und schließlich wegen (57) mit 1 Strich mehr

$$\vartheta^{\nu+1} = \frac{\vartheta^\nu\varrho_1^{\nu+2}}{\xi_2^\nu}. \tag{63}$$

§ 9. Homogene Relationen zwischen S^ν, den Bestandteilen der $S^\nu\xi_i^\nu$ und der Konstanten C

Es ist

$$Q_2^\nu\omega(Q_1^\nu - R_1^\nu\omega) + Q_1^\nu\omega(R_2^\nu\omega - Q_2^\nu) = S^\nu J\omega^2,$$
$$R_2^\nu\omega^2(Q_1^\nu - R_1^\nu\omega) + R_1^\nu\omega^2(R_2^\nu\omega - Q_2^\nu) = S^\nu J\omega^2.$$

Daher, wenn man durch $Q_1^\nu - R_1^\nu \omega$ dividiert, nach (61) und (39)

$$(64) \quad Q_2^\nu \omega + \frac{Q_1^\nu \omega}{\varrho_1^{\nu+1}} = \frac{S^\nu J \omega^2}{Q_1^\nu - R_1^\nu \omega} = \frac{S^\nu J \omega^2 \xi_2^\nu}{\vartheta^\nu C} = \frac{S^\nu \omega^2 \xi_2^\nu}{\vartheta^\nu (3\omega^2 - A)},$$

$$(65) \quad R_2^\nu \omega^2 + \frac{R_1^\nu \omega^2}{\varrho_1^{\nu+1}} = \frac{S^\nu J \omega^2 \xi_2^\nu}{\vartheta^\nu C} = \frac{S^\nu \omega^2 \xi_2^\nu}{\vartheta^\nu (3\omega^2 - A)}.$$

Nunmehr können wir alle Bestandteile von $S^\nu \xi_1^\nu$ und $S^\nu \xi_2^\nu$ linear homogen durch den Bestandteil $Q_1^\nu \omega$, S^ν und C ausdrücken. Indem wir von der Formel (59) ausgehen und dann auch (64) und (65) heranziehen, ergibt sich die folgende Tabelle:

$$(66) \left\{ \begin{aligned}
& R_1^\nu \omega^2 = Q_1^\nu \omega - \frac{\vartheta^\nu \omega C}{\xi_2^\nu}, \\
& P_1^\nu = S^\nu \xi_1^\nu - Q_1^\nu \omega - R_1^\nu \omega^2 = S^\nu \xi_1^\nu - 2 Q_1^\nu \omega + \frac{\vartheta^\nu \omega C}{\xi_2^\nu}, \\
& P_1^\nu - b_1^\nu S^\nu = \frac{S^\nu}{\xi_2^{\nu+1}} - 2 Q_1^\nu \omega + \frac{\vartheta^\nu \omega C}{\xi_2^\nu}, \\
& Q_2^\nu \omega = \frac{S^\nu \omega^2 \xi_2^\nu}{\vartheta^\nu (3\omega^2 - A)} - \frac{Q_1^\nu \omega}{\varrho_1^{\nu+1}}, \\
& R_2^\nu \omega^2 = \frac{S^\nu \omega^2 \xi_2^\nu}{\vartheta^\nu (3\omega^2 - A)} - \frac{R_1^\nu \omega^2}{\varrho_1^{\nu+1}} = \frac{S^\nu \omega^2 \xi_2^\nu}{\vartheta^\nu (3\omega^2 - A)} - \frac{Q_1^\nu \omega}{\varrho_1^{\nu+1}} + \frac{\vartheta^\nu \omega C}{\xi_2^\nu \varrho_1^{\nu+1}}, \\
& P_2^\nu = S^\nu \xi_2^\nu - Q_2^\nu \omega - R_2^\nu \omega^2 = S^\nu \xi_2^\nu - \frac{2 S^\nu \omega^2 \xi_2^\nu}{\vartheta^\nu (3\omega^2 - A)} \\
& \qquad\qquad + \frac{2 Q_1^\nu \omega}{\varrho_1^{\nu+1}} - \frac{\vartheta^\nu \omega C}{\xi_2^\nu \varrho_1^{\nu+1}}, \\
& P_2^\nu - b_2^\nu S^\nu = \frac{S^\nu \xi_1^{\nu+1}}{\xi_2^{\nu+1}} - \frac{2 S^\nu \omega^2 \xi_2^\nu}{\vartheta^\nu (3\omega^2 - A)} + \frac{2 Q_1^\nu \omega}{\varrho_1^{\nu+1}} - \frac{\vartheta^\nu \omega C}{\xi_2^\nu \varrho_1^{\nu+1}}.
\end{aligned} \right.$$

Ebenso können wir die Bestandteile von $S^\nu \xi_1^\nu$ und $S^\nu \xi_2^\nu$ auch linear homogen durch den Bestandteil $Q_2^\nu \omega$, S^ν und C ausdrükken. Wir schreiben die entstehende Tabelle zwecks nachheriger Anwendung mit einem Strich mehr, wollen aber das dabei auftretende $\vartheta^{\nu+1}$ nach (63) durch $\frac{\vartheta^\nu \varrho_1^{\nu+2}}{\xi_2^\nu}$ ersetzen. Die Tabelle wird dann, mit der zweiten Formel (61) angefangen, folgende:

$$(67)\left\{\begin{aligned}
R_2^{\nu+1}\omega^2 &= Q_2^{\nu+1}\omega + \frac{\vartheta^{\nu+1}\omega C}{\xi_2^{\nu+1}\varrho_1^{\nu+2}} = Q_2^{\nu+1}\omega + \frac{\vartheta^{\nu}\omega C}{\xi_2^{\nu+1}\xi_2^{\nu}},\\
P_2^{\nu+1} &= S^{\nu+1}\xi_2^{\nu+1} - Q_2^{\nu+1}\omega - R_2^{\nu+1}\omega^2\\
&\qquad = S^{\nu+1}\xi_2^{\nu+1} - 2Q_2^{\nu+1}\omega - \frac{\vartheta^{\nu}\omega C}{\xi_2^{\nu+1}\xi_2^{\nu}},\\
P_2^{\nu+1} - b_2^{\nu+1}S^{\nu+1} &= \frac{S^{\nu+1}\xi_1^{\nu+2}}{\xi_2^{\nu+2}} - 2Q_2^{\nu+1}\omega - \frac{\vartheta^{\nu}\omega C}{\xi_2^{\nu+1}\xi_2^{\nu}},\\
Q_1^{\nu+1}\omega &= \frac{S^{\nu+1}\omega^2\xi_2^{\nu+1}\xi_2^{\nu}}{\vartheta^{\nu}(3\omega^2-A)} - Q_2^{\nu+1}\omega\varrho_1^{\nu+2},\\
R_1^{\nu+1}\omega^2 &= \frac{S^{\nu+1}\omega^2\xi_2^{\nu+1}\xi_2^{\nu}}{\vartheta^{\nu}(3\omega^2-A)} - R_2^{\nu+1}\omega^2\varrho_1^{\nu+2}\\
&= \frac{S^{\nu+1}\omega^2\xi_2^{\nu+1}\xi_2^{\nu}}{\vartheta^{\nu}(3\omega^2-A)} - Q_2^{\nu+1}\omega\varrho_1^{\nu+2} - \frac{\vartheta^{\nu}\omega C}{\xi_2^{\nu+1}\xi_2^{\nu}}\varrho_1^{\nu+2},\\
P_1^{\nu+1} &= S^{\nu+1}\xi_1^{\nu+1} - Q_1^{\nu+1}\omega - R_1^{\nu+1}\omega^2\\
&= S^{\nu+1}\xi_1^{\nu+1} - \frac{2S^{\nu+1}\omega^2\xi_2^{\nu+1}\xi_2^{\nu}}{\vartheta^{\nu}(3\omega^2-A)} + 2Q_2^{\nu+1}\omega\varrho_1^{\nu+2}\\
&\qquad + \frac{\vartheta^{\nu}\omega C}{\xi_2^{\nu+1}\xi_2^{\nu}}\varrho_1^{\nu+2},\\
P_1^{\nu+1} - b_1^{\nu+1}S^{\nu+1} &= \frac{S^{\nu+1}}{\xi_2^{\nu+2}} - \frac{2S^{\nu+1}\omega^2\xi_2^{\nu+1}\xi_2^{\nu}}{\vartheta^{\nu}(3\omega^2-A)}\\
&\qquad + 2Q_2^{\nu+1}\omega\varrho_1^{\nu+2} + \frac{\vartheta^{\nu}\omega C}{\xi_2^{\nu+1}\xi_2^{\nu}}\varrho_1^{\nu+2}.
\end{aligned}\right.$$

Die Tabellen benutzen wir jetzt, um aus früher gewonnenen Formeln Nutzen zu ziehen. Die Formel (37) mit ν Strichen mehr lautet

$$\xi_2^{\nu+1}(P_2^{\nu+1} + R_2^{\nu+1}A - Q_2^{\nu+1}\omega) = P_1^{\nu} - b_1^{\nu}S^{\nu} + R_1^{\nu}A - R_1^{\nu}\omega^2).$$

Ersetzt man A durch $\frac{A\omega}{\omega^3}\omega^2 = \frac{A\omega}{B+A\omega}\omega^2$, so kommt

$$\xi_2^{\nu+1}\left(P_2^{\nu+1} + \frac{A\omega}{B+A\omega}R_2^{\nu+1}\omega^2 - Q_2^{\nu+1}\omega\right) = P_1^{\nu} - b_1^{\nu}S^{\nu} - \frac{B}{B+A\omega}R_1^{\nu}\omega^2.$$

Setzen wir auf der linken Seite für die einzelnen Terme die Werte aus der Tabelle (67) und auf der rechten Seite die Werte aus der Tabelle (66) ein, so kommt nach leichter Zusammenfassung

$$S^{\nu+1}(\xi_2^{\nu+1})^2 - \frac{3B+2A\omega}{B+A\omega} Q_2^{\nu+1}\omega\xi_2^{\nu+1} - \frac{B}{B+A\omega}\frac{\vartheta^\nu\omega C}{\xi_2^\nu} =$$
$$= \frac{S^\nu}{\xi_2^{\nu+1}} - \frac{3B+2A\omega}{B+A\omega} Q_1^\nu\omega + \frac{2B+A\omega}{B+A\omega}\frac{\vartheta^\nu\omega C}{\xi_2^\nu}.$$

Führen wir also die Abkürzungen

$$\frac{S^\nu}{\xi_2^{\nu+1}} = U^\nu,\ S^{\nu+1}(\xi_2^{\nu+1})^2 = V^\nu,$$
(68)
$$Q_1^\nu\omega = \Phi^\nu,\ Q_2^{\nu+1}\omega\xi_2^{\nu+1} = \Psi^\nu, \frac{\vartheta^\nu\omega C}{\xi_2^\nu} = \Omega^\nu$$

ein, so haben wir die Formel

$$V^\nu - U^\nu = \frac{3B+2A\omega}{B+A\omega}(\Psi^\nu - \Phi^\nu) + \frac{3B+A\omega}{B+A\omega}\Omega^\nu. \tag{69}$$

Die zweite Formel (11), in der A herausfällt, sieht mit ν Strichen mehr und mit ω multipliziert so aus:

$$S^\nu Q_2^{\nu+1}\omega = \frac{B}{B+A\omega}(R_1^\nu\omega^2)^2 - Q_1^\nu\omega(P_1^\nu - b_1^\nu S^\nu).$$

Die linke Seite ist mit den Abkürzungen (68) gleich $U^\nu\Psi^\nu$. Für die rechte Seite benutzen wir die Tabelle (66) und wenden auch gleich wieder die Abkürzungen (68) an. So kommt

$$U^\nu\Psi^\nu = \frac{B}{B+A\omega}(\Phi^\nu - \Omega^\nu)^2 - \Phi^\nu(U^\nu - 2\Phi^\nu + \Omega^\nu)$$
$$= \frac{3B+2A\omega}{B+A\omega}(\Phi^\nu)^2 - \frac{3B+A\omega}{B+A\omega}\Phi^\nu\Omega^\nu + \frac{B}{B+A\omega}(\Omega^\nu)^2 - U^\nu\Phi^\nu.$$

Bringt man das letzte Glied von rechts nach links, so kommt schließlich

(70)
$$U^\nu(\Phi^\nu + \Psi^\nu) = \frac{3B+2A\omega}{B+A\omega}(\Phi^\nu)^2 - \frac{3B+A\omega}{B+A\omega}\Phi^\nu\Omega^\nu + \frac{B}{B+A\omega}(\Omega^\nu)^2.$$

Die Formel (24) hat mit ν Strichen mehr und mit ω multipliziert die Gestalt

$$S^{\nu+1}Q_1^\nu\omega = \frac{B}{B+A\omega}(R_2^{\nu+1}\omega^2)^2 - Q_2^{\nu+1}\omega P_2^{\nu+1}.$$

Wendet man rechts die Tabelle (67) an, so kommt

$$S^{\nu+1} Q_1^\nu \omega = \frac{B}{B+A\omega}\left(Q_2^{\nu+1}\omega + \frac{\vartheta^\nu \omega C}{\xi_2^{\nu+1}\xi_1^\nu}\right)^2 -$$
$$- Q_2^{\nu+1}\omega\left(S^{\nu+1}\xi_2^{\nu+1} - 2 Q_2^{\nu+1}\omega - \frac{\vartheta^\nu \omega C}{\xi_2^{\nu+1}\xi_2^\nu}\right).$$

Wenn man jetzt mit $(\xi_2^{\nu+1})^2$ multipliziert und die Abkürzungen (68) gebraucht, ergibt sich

$$V^\nu \Phi^\nu = \frac{B}{B+A\omega}(\Psi^\nu + \Omega^\nu)^2 - \Psi^\nu(V^\nu - 2\Psi^\nu - \Omega^\nu)$$
$$= \frac{3B+2A\omega}{B+A\omega}(\Psi^\nu)^2 + \frac{3B+A\omega}{B+A\omega}\Psi^\nu\Omega^\nu + \frac{B}{B+A\omega}(\Omega^\nu)^2 - \Psi^\nu V^\nu.$$

Bringt man das letzte Glied von rechts nach links, so kommt

(71)
$$V^\nu(\Phi^\nu + \Psi^\nu) = \frac{3B+2A\omega}{B+A\omega}(\Psi^\nu)^2 + \frac{3B+A\omega}{B+A\omega}\Psi^\nu\Omega^\nu + \frac{B}{B+A\omega}(\Omega^\nu)^2.$$

§ 10. Abschluß

In § 5 wurde festgestellt, daß die Frage der Periodizität identisch ist mit der Frage, ob die Menge der ganzen Zahlen S^ν, P_i^ν, Q_i^ν, R_i^ν beschränkt ist. Das läuft ungefähr darauf hinaus, ob die Menge der Zahlen U^ν, V^ν, Φ^ν, Ψ^ν, Ω^ν beschränkt ist. Die Ω^ν sind es nach ihrer Definition bestimmt. Von den andern wissen wir es nicht. Aber wir haben in den Formeln (69), (70), (71) Beziehungen zwischen ihnen und Ω^ν gefunden und es gibt vielleicht weitere. Hätten wir etwa zwei homogene Relationen zwischen Φ^ν, Ψ^ν und Ω^ν, so könnten wir wohl schon auf die Beschränktheit von Φ^ν und Ψ^ν schließen und wären nahe am Ziel.

Von den aus der Matrixproduktformel (19) fließenden Beziehungen haben wir nur eine kleine Auswahl angegeben und eine noch viel kleinere Auswahl ausgebeutet. Auf all diese Beziehungen kann man mit ν Strichen mehr die Tabellen (66) und (67) anwenden. Da aber diese Beziehungen doch nur Folgerungen aus den sieben Mutterformeln (11), (12), (14), (15), (16) sind, können die so erzielbaren Resultate nicht unabhängig voneinander sein, sondern sind mannigfach miteinander verknüpft. So kann man

z. B., wenn man die Formel (70) von (71) abzieht, durch $\Phi^{\nu}+\Psi^{\nu}$ dividieren und, was herauskommt, ist die Formel (69). Hätten wir vorhin statt der Formel (24) lieber (25) benutzt, so wäre ebenfalls (71) herausgekommen. Hätten wir es mit (23) versucht, so hätte sich eine Kombination von (71) und (69) ergeben.

Wenn nun aus den vielen Beziehungen, die die Matrixproduktformel (19) zur Verfügung stellt, noch etwas anderes herauszuholen ist als immer nur (69), (70), (71), so muß das auch schon aus den noch nicht ausgebeuteten vier Mutterformeln (12), (14), (15), (16) zu holen sein. Also nahm ich diese in Angriff, obwohl es einfachere gibt. Alle vier sind vom dritten Grad, und die vier in ihnen auftretenden Determinanten haben folgende Eigenschaft gemein: Wenn man zu den Elementen der letzten Zeile die mit ω multiplizierten der vorletzten und die mit $\omega^2 - A = \frac{B}{\omega}$ multiplizierten der ersten Zeile addiert, dann bekommen die Elemente der letzten Zeile den Faktor $\frac{S}{\xi_2'}$ und man kann die Formel durch S dividieren, so daß sie nur noch vom zweiten Grad ist. Setzt man jetzt nach unserem Rezept ν Striche mehr und führt die Abkürzungen (68) ein, so liefern die Tabellen im Fall der Formel (12) eine ziemlich lange homogene Formel zweiten Grades, in der die meisten Glieder den Faktor U^{ν} haben, und die andern Glieder lassen sich durch leichte Rechnung in ein Multiplum von

$$\frac{3B+2A\omega}{B+A\omega}(\Phi^{\nu})^2 - \frac{3B+A\omega}{B+A\omega}(\Phi^{\nu}\Omega^{\nu}) + \frac{B}{B+A\omega}(\Omega^{\nu})^2$$

also von $U^{\nu}(\Phi^{\nu}+\Psi^{\nu})$ zusammenfassen. Man kann also nochmals durch U^{ν} dividieren und hat eine lineare Relation. Sie ist aber leider nichts Neues, sondern wieder die Formel (69).

Im Fall der Formeln (14) bis (16) ist die Rechnung wesentlich umständlicher, weil aus den Tabellen jetzt auch die Formeln zu benutzen sind, in denen der unbequeme Nenner $\vartheta^{\nu}(3\omega^2 - A)$ vorkommt. Zwar bekommt man auch sofort eine lange homogene Formel, in der die meisten Glieder den Faktor U^{ν} haben. Aber die Zusammenfassung der andern Glieder zu einem Multiplum des selben Ausdrucks wie vorhin ist etwas mühsamer, ebenso die Identifizierung der nach Division durch U^{ν} entstehenden Formel mit (69). Ich mußte mich dabei auf die Formel (62) und die gleiche mit einem Strich mehr stützen. Also etwas Neues kam wieder nicht.

Mein Glaube an die Periodizität ist durch das Ausbleiben solcher Relationen wie ich sie suchte, stark erschüttert. Das Problem bleibt ungelöst, vielleicht liegt die Lösung in anderer Richtung. Ich werde mich weiter bemühen, solange meine altersschwachen Kräfte noch reichen. Wenn ich nicht irre, hat Lessing irgendwann und wo einmal gesagt: Schöner als die fertig gelieferte Wahrheit ist das Suchen nach der Wahrheit.

Zum Abschied noch was Fröhliches. Da sind wir in den Formeln (70) und (71) der quadratischen Form

$$\frac{3B+2A\omega}{B+A\omega}x^2+\frac{3B+A\omega}{B+A\omega}xy+\frac{B}{B+A\omega}y^2$$

begegnet, einmal mit $x=\Phi^\nu$, $y=-\Omega^\nu$ und einmal mit $x=\Psi^\nu$, $y=\Omega^\nu$. Welcher Mathematiker freut sich nicht, wenn er unversehens einer quadratischen Form begegnet? und welcher jauchzt nicht, wenn sie sogar definit ist? Wie steht es nun hier damit? Sollen wir uns nur freuen oder dürfen wir jauchzen? Antwort: Die Form ist definit, wenn die konjugierten Körper imaginär sind. Da sind wir also endlich einmal auf einen Unterschied zwischen den beiden Arten kubischer Körper gestoßen, deren Schicksal bis hierher so ganz parallel verlief, und wir dürfen einen Freudenpluspunkt für die Körper mit imaginären Konjugierten buchen. Kein Zahlentheoretiker wird sich darüber wundern.

Das Kriterium für Definitheit ist, da es dabei auf den gemeinsamen Nenner $B+A\omega=\omega^3$ nicht ankommt:

$$4(3B+2A\omega)B-(3B+A\omega)^2>0,$$
$$3B^2+2AB\omega-A^2\omega^2>0,$$

oder weil $B=\omega^3-A\omega$ ist,

$$3(\omega^3-A\omega)^2+2A(\omega^4-A\omega^2)-A^2\omega^2>0,$$
$$3\omega^6-4A\omega^4>0,$$
$$3\omega^2-4A>0.$$

Für imaginäre Konjugierte kann man in jedem Algebra-Buch das Kriterium $27B^2-4A^3>0$ lesen. Das Kriterium, das wir hier brauchen, $3\omega^2 - 4A > 0$ steht vielleicht auch irgendwo; ich kann mich nicht erinnern, ihm begegnet zu sein. Statt es zu suchen, wollen wir es lieber beweisen. Für die zu ω konjugierten Zahlen ist nach § 7

$$\dot{\omega} + \ddot{\omega} = -\omega, \quad \dot{\omega}\,\ddot{\omega} = \omega^2 - A,$$

also sind sie die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + \omega x + \omega^2 - A = 0,$$

und die sind imaginär für $3\omega^2 - 4A > 0$. W. z. b. w.

Literatur

[1] Perron, O.: Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus. Math. Annal. 64 (1907), 1–76.

[2] Perron, O.: Über eine Verallgemeinerung des Stolzschen Irrationalitätssatzes. Diese Sitzungsber. 1908, 181–199.

[3] Perron, O.: desgl. II. Diese Sitzungsber. 1920, 291–295.

[4] Bernstein, L.: Periodical Continued Fractions of degree n by Jacobi's Algorithm. Journ. f. d. reine u. angew. Math. 213 (1964), 31–38.

[5] Stender, H.-J.: Explizite Bestimmung von Einheiten für einige Klassen algebraischer Zahlkörper. Diss. Köln 1970, 149 Seiten.