BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1974

MÜNCHEN 1975

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über einen 2n-Scheitelsatz

Von Otto Haupt und Hermann Künneth

Vorbemerkungen

I. In der Ebene sei ein Oval C gegeben mit in jedem Punkt eindeutigem (mehrpunktigem) Schmiegkreis. Wird C von einem Kreis K_0 in $2n \geq 4$ Punkten getroffen, so besitzt C mindestens $2n$ Scheitel (Blaschke [1], S. 161). Dieser Satz ist von Herrn S. B. Jackson ([1], S. 577) dahin verallgemeinert worden, daß C irgend eine (einfache) Kurve mit in jedem Punkt eindeutigem Schmiegkreis sein kann und daß es unter den Teilbogen T, in die C durch die Punkte von $C \frown K_0$ zerlegt wird, $2n-1$ gibt, etwa $T_i :=$ $= C(p_{2i-1} \mid p_{2i})$, $i = 1, \ldots, 2n-1$, derart, daß die Reihenfolge $p_1, p_2, \ldots, p_{4n-2}$ dieser $p_\nu \in C \frown K_0$ sowohl einer Orientierung von C als einer (geeigneten) Orientierung von K_0 entspricht, welch letztere Eigenschaft eine Verallgemeinerung der „Normalität von C zu $\mathfrak{k}$" ist (vgl. Ziff. IIb.).

II. Für den Satz von Blaschke (vgl. Ziff. I.) ist von S. Mukhopadhyaya ([1], S. 172) ein Beweis angegeben worden, welcher, wie Mukhopadhyaya zeigt, den entsprechenden Satz liefert, wenn das System $\mathfrak{k}_3$ der Kreise ersetzt wird z. B. durch das System $\mathfrak{k}_5$ der Kegelschnitte; im letzteren Falle ist vom Oval C jedenfalls zu fordern, daß C in jedem Punkt genau einen Schmiegkegelschnitt besitzt. Unter einem Scheitel im Falle der Kegelschnitte, kurz: unter einem $\mathfrak{k}_5$-Scheitel, wird jeder Punkt von C verstanden, dessen beliebig kleine Umgebungen auf C von geeigneten $K \in$ $\in \mathfrak{k}_5$ in mindestens 6 Punkten getroffen werden.

IIa. Außerdem zeigt Mukhopadhyaya ([1], S. 170): Wird ein konvexer *Bogen* B mit überall eindeutigem Schmiegkreis bzw. Schmiegkegelschnitt von einem $K \in \mathfrak{k}_3$ bzw. $K \in \mathfrak{k}_5$ in t Punkten getroffen, so besitzt B mindestens $t-3$ bzw. $t-5$ $\mathfrak{k}_3$- bzw. $\mathfrak{k}_5$-Scheitel.

IIb. Der Beweis von Mukhopadhyaya [1] liefert sogar – was im einzelnen zu begründen einer späteren Mitteilung vorbehalten sei – entsprechende Sätze: Erstens allgemein für Systeme $\mathfrak{k}$ von sogenannten Ordnungscharakteristiken abgekürzt OCh, das sind, kurz gesagt, Kurven (und Bogen), deren jede durch beliebige k ihrer Punkte eindeutig bestimmt ist und stetig von ihnen abhängt; die natürliche Zahl $k = k(\mathfrak{k}) \geq 1$ ist dabei eindeutig durch $\mathfrak{k}$ bestimmt, sogenannte Grundzahl von $\mathfrak{k}$. Zweitens allgemein für Kurven C bzw. Bogen, welche „normal" zu $\mathfrak{k}$ sind, das soll heißen: Ist $K \in \mathfrak{k}$ und enthält $C \cap K$ bzw. $B \cap K$ $r \geq 3$ Punkte, etwa x_ϱ, $\varrho = 1, \ldots, r$, entspricht ferner die Reihenfolge $x_1, \ldots, x_r$ einer Orientierung von C bzw. B, so auch einer Orientierung von K (vgl. diese Note Nr. 1.4.).

Dabei gilt der Satz für Kurven (vgl. Ziff. I. und II.) nur bei ungerader Grundzahl k, hingegen der Satz für Bogen (vgl. Ziff. II.a) bei beliebigem $k \geq 1$. Zu beachten ist überdies, daß die Giltigkeit der in Rede stehenden Sätze (für zu $\mathfrak{k}$ normale C bzw. B) gebunden ist an gewisse „Differenzierbarkeits" – Eigenschaften von C bzw. B bezüglich $\mathfrak{k}$, die bei Mukhopadhyaya, soviel wir sehen können, nicht explizite formuliert sind.

III. In der vorliegenden Note (vgl. Nr. 2.1.) sollen die beiden in Ziff. I. und II a. erwähnten Sätze von Blaschke bzw. Mukhopadhyaya zunächst für $k = k(\mathfrak{k}) = 3$ und (nur) für zu $\mathfrak{k}$ normale C bzw. B bewiesen werden, aber unter der (schwachen) Differenzierbarkeitsforderung, derzufolge die Eindeutigkeit der $\mathfrak{k}$-Schmieg-OCh lediglich in den $\mathfrak{k}$-Scheiteln von C bzw. B verlangt wird (vgl. diese Note Nr. 1.3., wo für „$\mathfrak{k}$-SchmiegOCh" die Bezeichnung „$\mathfrak{k}$-Paratingente" eingeführt wird). Beispiele von Systemen $\mathfrak{k}$ mit $k(\mathfrak{k}) = 3$ und mit $\mathfrak{k} \neq \mathfrak{k}_3$ sind bekannt; z. B. ist ein solches $\mathfrak{k}$ das System der Kreisformen in der ebenen nicht-euklidischen (hyperbolischen) Geometrie (vgl. auch Ewald [1]). In Nr. 2.2. werden die beiden Sätze für beliebiges ungerades k verallgemeinert, wobei wegen der Schwachheit der Differenzierbarkeitsbedingung schwächere Aussagen erhalten werden als im Falle $k = 3$. Anschließend wird (Nr. 2.3.) im Falle $k = 3$ ein Beweis angegeben für die Gleichheit der beiden Aussagen: „Die Anzahl der $\mathfrak{k}$-Scheitel von C ist genau vier" und „Es wird C von jeder OCh K in maximal 4 Punkten getroffen." Schließlich wird

(Nr. 3.1.) ein Fehler aufgezeigt, der sich in einer früheren Arbeit von uns findet und es wird eine daraus resultierende Behauptung berichtigt.

Wir hoffen, später auch auf die Ausdehnung des Jacksonschen Satzes auf Systeme $\mathfrak{k}$ sowohl für $k(\mathfrak{k}) = 3$ als für $k(\mathfrak{k}) = 2t + 1 \geq 5$ zurückzukommen.

§ 1. Bezeichnungen. Definitionen

1.1. Systeme von Ordnungscharakteristiken.

In der euklidischen Ebene sei als „Grundbereich G“ bzw. als „Grundgebiet G“ gegeben ein topologisches Bild der abgeschlossenen bzw. offenen Kreisscheibe, ferner in G ein System $\mathfrak{k}$ von sogenannten *Ordnungscharakteristiken*, kurz OCh, d. h. von einfachen Bogen (und Kurven), deren jeder (jede) durch $k = 3$ seiner (ihrer) Punkte eindeutig bestimmt ist und stetig von ihnen abhängt (vgl. genaueres in H.-K. [1], Nr. 1.1.1.–1.1.3.). „Grundpunkte“, d. h. Punkte die allen OCh gemeinsam sind, sollen nicht vorhanden sein. $k = 3 =: k(\mathfrak{k})$ heiße die *Grundzahl* von $\mathfrak{k}$. Ist $y \in G$, so soll $\mathfrak{k}(y) := \{K : K \in \mathfrak{k} \wedge y \in K\}$ gesetzt werden. Statt $y_1, \ldots, y_r \in K$ schreiben wir auch $K(y_1, \ldots, y_r)$.

1.2. Punktordnungswert.

Gegeben sei eine (einfache, orientierte Grund-) Kurve C. Es werde bezeichnet: Jeder abgeschlossene Teilbogen B von C, dessen Endpunkte a, b sind, mit $B(a \mid b)$ und der größte offene Teilbogen $B(a \mid b) \setminus \{a\} \setminus \{b\}$ von $B(a \mid b)$ mit $\underset{\sim}{B}(a|b)$. Dabei entspricht der, durch die Orientierung von C induzierten, Orientierung von $B(a \mid b)$ die Festsetzung, daß a auf B *vor* b liegt (a „Anfangspunkt“ von B). Für ein $x \in \underset{\sim}{B}$ heiße jeder Teilbogen $\underset{\sim}{B}(x' \mid x) \cup \{x\}$ bzw. $\underset{\sim}{B}(x \mid x'') \cup \{x\}$ von $B(a \mid x)$ bzw. von $B(x \mid b)$ eine vordere bzw. hintere Umgebung von x auf B; statt von vorn bzw. hinten spricht man auch von links- bzw. rechtsseitig. Zu $x = a$ bzw. $x = b$ gibt es nur hintere bzw. nur vordere Umgebungen.

Ist $K \in \mathfrak{k}$ und enthält $B \frown K$ nur Schnittpunkte, so heißt K eine ($\mathfrak{k}$-)Sekante von B; es ist dann $B \frown K = \underset{\sim}{B} \frown K$.

Es sei POW $(B \frown K) :=$ (Mächtigkeit vom $B \frown K$) und POW$(B; \mathfrak{k}) := \max\{\text{POW}(B \frown K) : K \in \mathfrak{k}\} =: m$, falls dieses

Maximum m mit $m < +\infty$ existiert; dabei ist POW Abkürzung für „Punktordnungswert". – Für $x \in B$ sei $\mathrm{POW}(x; B) := = \mathrm{POW}(x; \mathfrak{k}) =: \mathrm{POW}(x; B; \mathfrak{k}) := \min \{\mathrm{POW}(U; \mathfrak{k}) : U$ beliebige Umgebung von x auf $B\}$.

Ist $\mathrm{POW}(x; B) = k$ bzw. $\geq k+1$, so heißt x ein $\mathfrak{k}$-regulärer (auch ordnungsminimaler) Punkt von B bzw. ein $\mathfrak{k}$-singulärer Punkt oder $\mathfrak{k}$-Scheitel von B. Ist $\mathrm{POW}(x; B) = k$ für alle $x \in B$, so heißt B lokal $\mathfrak{k}$-regulär, hingegen (global) $\mathfrak{k}$-regulär, wenn $\mathrm{POW}(B; \mathfrak{k}) = k$.

Ist B lokal $\mathfrak{k}$-regulär, so ist B (weil kompakt) stückweise *$\mathfrak{k}$-regulär*, d. h. Vereinigung von endlich vielen $\mathfrak{k}$-regulären Bogen, also von einem (beschränkten) $\mathrm{POW}(B; \mathfrak{k}) = m < +\infty$. – Der Fall, daß $B = C$ (Kurve) sei, ist, soweit sinnvoll, im Vorstehenden einbegriffen.

1.3. $\mathfrak{k}$-Paratingenten.

Unter einer $\mathfrak{k}$-Paratingente $P(x; B; \mathfrak{k}) = P(x; \mathfrak{k})$ in $x \in B$ an B wird verstanden jeder Limes von OCh K_n mit $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn} \in B \cap K_n$ und mit $x = \lim_n x_{in}, i = 1, \ldots, k$, wobei $x_{in} \neq x_{jn}$ für $i \neq j$ und für alle n. Sind z. B. die $x_i = \lim_n x_{in}$ für $i = 1, \ldots, k - 1$ verschieden, aber $x_k = \lim_n x_{kn} = x_{k-1}$, und existiert $L = \lim_n K_n$, so heißt L eine $\mathfrak{k}$, 2-Paratingente. – Ist x ein $\mathfrak{k}$-Scheitel von B, so nennt man ein $P(x; B)$ auch $\mathfrak{k}$-Scheitelparatingente.

1.4. Normalität.

Ist B orientiert und $x_\varrho \in B$ mit $\varrho = 1, \ldots, r$, und $x_\varrho \neq x_\tau$ für $\varrho \neq \tau$, $r \geq 3$, so heißen die $x_1, \ldots, x_r$ in dieser Reihenfolge direkt konsekutiv auf B, wenn diese Reihenfolge der Orientierung von B entspricht.

Ist $K \in \mathfrak{k}$ und $B \cap K = \{y_1\} \cup \ldots \cup \{y_r\}$, $r \geq 3$, und $B \subset G$, so heißen B und K normal (zu einander, gelegen), wenn die $y_1, \ldots, y_r$ in dieser Reihenfolge, falls direkt konsekutiv auf B, dann für eine Orientierung von K, die sogenannte bezüglich B natürliche Orientierung von K, direkt konsekutiv auch auf K sind. Ist B normal zu *jeder* OCh K, so sagt man, es seien B und $\mathfrak{k}$ normal (zueinander).

1.4.1. In der Definition der normalen Lage von B mit einem $K \in \mathfrak{k}$ ist der Fall* einbegriffen, daß es ein $\varrho \in \{1, \ldots, r-1\}$ gibt sowie $a_\varrho, a_{\varrho+1} \in K \cap (\bar{G} \setminus \underline{G})$ von folgender Art: Die (zu einander) fremden Teilbogen $K(\varrho) := K(y_\varrho \mid a_\varrho)$ und $K(\varrho+1) := K(a_{\varrho+1} \mid y_{\varrho+1})$ sind fremd zu B bis auf y_ϱ bzw. $y_{\varrho+1}$ (Definitionsgemäß (H.-K. [1], Nr. 1.1.1.) hat ein Bogen $K \in \mathfrak{k}$ mit dem Rand $\bar{G} \setminus \underline{G}$ von $G = \bar{G}$ genau zwei Punkte, hier also $a_\varrho, a_{\varrho+1}$, gemeinsam). Es ist also $Q := K(\varrho) \cup \underline{B}(y_\varrho \mid y_{\varrho+1}) \cup K(\varrho+1)$ ein (einfacher) Bogen mit $Q \cap (\bar{G} \setminus \underline{G}) = \{a_\varrho\} \cup \{a_{\varrho+1}\}$, also Querschnitt von G. Daraus folgt: Es liegen $\underline{K}(\varrho)$ und $\underline{K}(\varrho+1)$ in der Nähe von y_ϱ bzw. von $y_{\varrho+1}$ auf der gleichen Seite von B (vgl. die Definition in Nr. 1.5.); denn anderenfalls liegen Umgebungen von y_ϱ bzw. von $y_{\varrho+1}$ auf dem Teilbogen $\underline{K}' := K \setminus (K(\varrho) \cup K(\varrho+1)) \subset \underline{G}$ von K auf verschiedenen Seiten von Q, so daß $\underline{K}' \cap Q \neq \emptyset$ und, wegen $K \cap \underline{B}(y_\varrho \mid y_{\varrho+1}) = \emptyset$, auch $\underline{K}' \cap (K(\varrho) \cup K(\varrho+1)) \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Definition von K'. Ist nun $^*K(a_\varrho \mid a_{\varrho+1})$ ein Teilbogen des Randes $\bar{G} \setminus \underline{G}$ von G, so verhält sich $K(\varrho) \cup {}^*K(a_\varrho \mid a_{\varrho+1}) \cup K(\varrho+1)$ wie ein einfacher Bogen, der bis auf y_ϱ und $y_{\varrho+1}$ fremd zu B ist, und damit K wie eine Kurve in G. Und der natürlichen Ordnung von K bezüglich B entspricht die Reihenfolge $y_1, \ldots, y_\varrho, a_\varrho, a_{\varrho+1}, y_{\varrho+1}, \ldots, y_r$ auf K. In diesem Sinne ist jeder Teilbogen T einer zu K normalen Kurve B mit $\mathrm{POW}(T \cap K) \geq 3$ ebenfalls normal zu K. – Der Monotonie- und Kontraktionssatz (vgl. H.-K. [1], Nr. 2.3. und 2.4.4.1.) gilt auch für solche K, wenn insgesamt eine gerade Anzahl (Schnitt-)Punkte festgehalten wird.

In H.-K. [1], Nr. 4.2.1., wird $K(\varrho) \cup K(\varrho+1)$ als ein „unterbrochenes Stück" bezeichnet. Mit einem solchen Stück kann also nach obigem wie mit einem Teilbogen von K operiert werden.

1.5. Signatur

Die beiden offenen Komponenten des Komplementes $\underline{G} \setminus C$ der Kurve C in $\underline{G}$ seien als die beiden Seiten $C(-)$ und $C(+)$ von C bezeichnet. Für einen Teilbogen B von C werden als Seiten $B(\pm)$ von B erklärt: $B(+) := C(+)$ und $B(-) := C(-)$. Die beiden Seiten $A(\pm)$ eines beliebigen Bogens $A \subset \underline{G}$ werden erklärt

* Dieser Fall kommt nur für ungerade Grundzahlen $\mathfrak{k}$ in Betracht, was im folgendem (vgl. 2.1.ff.) stets angenommen wird.

bezüglich einer festen (einfachen) Kurve $C(A) \subset \underline{G}$, welche Erweiterung von A, im übrigen beliebig ist.

Ist S eine $\mathfrak{k}$-Sekante von B mit $B \cap S = \underline{B} \cap S = \{x_1\} \cup \cup \ldots \cup \{x_q\}$, $q \geq 3$, wobei die $x_1, \ldots, x_q$ direkt konsekutiv auf B sind, und ist S normal zu B, ferner S natürlich orientiert bezüglich B, so liegt eine vordere bzw. hintere Umgebung von x_1 bzw. von x_q auf $S \setminus \{x_1\} \setminus \{x_q\}$ auf einer Seite $B(\alpha_1)$ bzw. $B(\alpha_2)$ von B; es heiße dann α_1 bzw. α_2 die vordere bzw. hintere Signatur von x_1 bzw. x_q, genauer von $(x_1, \ldots, x_q)$.

Ein $\mathfrak{k}$-Scheitel $x \in B$ heiße signiert mit der (vorderen) Signatur α, kürzer ein α-*Scheitel*, wenn x isolierter $\mathfrak{k}$-Scheitel ist und wenn eine zu $\mathfrak{k}$ normale Umgebung W von x auf B sowie ein α $(= \pm)$ existiert von folgender Art: In W ist x einziger $\mathfrak{k}$-Scheitel; ist $K \in \mathfrak{k}$ irgend eine Sekante von W und enthält $W \cap K$ ein $(k+1)$-tupel (von auf B direkt konsekutiven Punkten), so ist dessen vordere Signatur gleich α. Falls C im $\mathfrak{k}$-Scheitel x genau eine $\mathfrak{k}$-Paratingente besitzt, hat α für alle solchen $(k+1)$-tupel den gleichen Wert, etwa β. Dieses β heißt dann Signatur des $\mathfrak{k}$-Scheitels x; in Zeichen $\beta := \operatorname{sgn} x$.

Ein $\mathfrak{k}$-regulärer Punkt auf B besitzt (bei zueinander normalen W und $\mathfrak{k}$) stets eine bestimmte, entsprechend erklärte Signatur.

2. Ein 2n-Scheitelsatz für k = 3.

2.1. Satz. Voraussetzung. (1) *Es sei $\mathfrak{k}$ ein System von OCh in G ohne Grundpunkte und mit der Grundzahl $k = k(\mathfrak{k}) = 3$* (im Sinne von Nr. 1.1.).

(2) *Es sei $B \subset G$ ein (einfacher) orientierter Bogen, welcher normal zu $\mathfrak{k}$ ist. Der Fall daß B eine (geschlossene) Kurve ist, sei einbegriffen. Es sei B $\mathfrak{k}$-ordinär, d. h. $\bigwedge_{x,y,z \in B} \bigvee_{K \in \mathfrak{k}} K = K(x, y, z)$.*

(3) *Es seien $x_\varkappa, x_{\varkappa n} \in B$, $\varkappa = 1, 2, 3,$; $n = 1, 2, \ldots,$ mit $\bigwedge_n \bigwedge_{\varkappa \neq \varrho} x_{\varkappa n} \neq x_{\varrho n}$, $\varkappa, \varrho = 1, 2, 3$. Es existiere $x_\varkappa = \lim_n x_{\varkappa n}$, $\varkappa = 1, 2, 3$. Dann soll gelten*

(3) (A) *Ist $\bigwedge_{\varkappa \neq \varrho} x_\varkappa \neq x_\varrho$, so existiert $L := \lim_n K_n$, wobei $K_n := K(x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}) \in \mathfrak{k}$, und zwar ist $L \in \mathfrak{k}$ mit $L = K(x_1, x_2, x_3)$.* Es folgt (3) (A) daraus, daß B $\mathfrak{k}$-ordinär sein soll.

(3) (B) *Ist* $x_1 \neq x_2$ *und* $x_2 = x_3$ *oder ist* $x_1 = x_2 = x_3$ *und existiert* $L = \lim_n K_n$, *so gilt (in beiden Fällen)* $L \in \mathfrak{k}$, d. *h. jede* $\mathfrak{k}$-*Paratingente und jede* $\mathfrak{k}$,2-*Paratingente an* B *ist Ordnungscharakteristik.* (Vgl. H.-K. [2] Nr. 1.4.).

(4) *In jedem isolierten* $\mathfrak{k}$-*Scheitel von* B *existiert genau eine* $\mathfrak{k}$-*(Scheitel-)Paratingente.*

(5) *Es existiert ein* $K_0 \in \mathfrak{k}$ *von* B *mit* POW $(B \frown K) = r \geq 2n \geq 4$.

Behauptung. *Die Anzahl der* $\mathfrak{k}$-*Scheitel von* B *ist* (a) *für einen* Bogen B *mindestens* $2n - 3$. – (b) *für eine* Kurve $B = C$ *mindestens* $2\,n$.

Beweis. (I) Es genügt, den Fall zu erledigen, daß B (bzw. C) nur *endlich viele* $\mathfrak{k}$-Scheitel besitzt, da andernfalls nichts zu beweisen wäre. Sind aber nur endlich viele, also nur isolierte $\mathfrak{k}$-Scheitel vorhanden, so ist *jeder* $\mathfrak{k}$-*Scheitel* s *signiert mit* POW$(s\,; B) = 4$; dies folgt aus Voraussetzung (2) (Normalität) und (4) (vgl. H [2] Nr. 3.2., Satz). Wegen POW $(s\,; B) = 4$ besitzt s $\mathfrak{k}$-reguläre vordere und hintere Umgebungen (vgl. H.-K. [1], Nr. 4.1.3.1.1., Satz 1). Daher ist B stückweise $\mathfrak{k}$-regulär, also von beschränktem POW$(B\,; \mathfrak{k}) \leq m < +\infty$.

(II) Es sei $B \frown K_0 := \{q_1\} \smile \ldots \smile \{q_r\}$ mit $r \geq 4$ und $K_0 \in \mathfrak{k}$; falls B Kurve ist, setzen wir $q_{r+\varrho} := q_\varrho$, wobei dann $r = 2n$. O. B. d. A. darf angenommen werden, daß K_0 erstens Sekante von B und daß zweitens keines der q_ϱ ein $\mathfrak{k}$-Scheitel ist. Erstens folgt aus dem Reduktionssatz (vgl. H .-K.[1], Nr. 1.4.3.). Zu jeder Sekante K_0 gibt es dann (vgl. H.-K. [1], Nr. 1.4.2., Satz 1.) ein in $\mathfrak{k}$ offenes $\mathfrak{o}$ derart, daß jedes $K' \in \mathfrak{o}$ normal zu B (vgl. Vor. (2)), ferner K' Sekante mit POW$(B \frown K') \geq r$ ist; demgemäß enthält $\mathfrak{o}$ Sekanten K', für die kein $x \in B \frown K'$ ein $\mathfrak{k}$-Scheitel ist. Die Numerierung der q_ϱ sei so gewählt, daß die Reihenfolge $q_1, \ldots, q_\varrho$ der Orientierung von B und damit auch der natürlichen Orientierung von K_0 bezüglich B entspricht. Als Schnittpunkt von B mit K_0 besitzt jedes q_ϱ eine bestimmte vordere Signatur sgn q_ϱ. Bei passender Wahl der Bezeichnung für die Seiten von B ist dann sgn $q_1 =$ sgn $q_{2\mu+1} = (-)$ und sgn $q_2 =$ sgn $q_{2\mu} = (+)$. Zur Abkürzung setzen wir noch $\mathfrak{k}_\mu := \{K : K \in \mathfrak{k} \wedge$

$\wedge\, q_{2\mu} \in K\}$, $2 \leq 2\mu \leq r$; es ist $\mathfrak{k}_\mu$ ein OCh-System in G mit der Grundzahl $k_\mu = k(\mathfrak{k}_\mu) = 2$ und mit $q_{2\mu}$ als Grundpunkt. Ein den Grundpunkt nicht enthaltender Teilbogen B' von B ist normal zu $\mathfrak{k}_\mu$, wobei Nr. 1.4.1. zu berücksichtigen ist. Für $\mathfrak{k}_\mu$ und B' gilt dann der verschärfte Kontraktionssatz im Sinne von H.-K. [1], Nr. 2.4.4.1.

(III) Es sei $1 \leq 2\nu - 3 < 2\nu \leq r$. In $\underset{\sim}{B}(q_{2\nu-3} \mid q_{2\nu-1})$ liegt gemäß des verschärften Kontraktionssatzes) ein $\mathfrak{k}_\nu$-Scheitel t_ν, dessen (vordere) Signatur gleich der von $q_{2\nu-3}$ ist; dabei wird benutzt, daß, wie sogleich gezeigt wird; $\mathrm{POW}(t_\nu; \mathfrak{k}_\nu) = 3$ ist. In der Tat: Gemäß Ziff. (I) ist $\mathrm{POW}(t_\nu; \mathfrak{k}) \leq 4$ und daher $\mathrm{POW}(t_\nu; \mathfrak{k}_\nu) = 3$; denn wegen $\mathrm{POW}(B; \mathfrak{k}) = m < +\infty$ (Ziff. (I)) wird im Verlauf der Kontraktion (von $q_{2\nu-3}, q_{2\nu-2}, q_{2\nu-1}$) jeweils – wenn überhaupt – eine gerade Anzahl Schnittpunkte gewonnen oder verloren, sodaß $\mathrm{POW}(t_\nu; \mathfrak{k}) \geq 5$ wäre, falls in beliebiger Nähe von t_ν bei der Kontraktion noch Gewinne (oder Verluste) stattfinden sollten.

(IV) Man kann den Kontraktionsprozeß in Ziff. (III) so einrichten, daß bei jedem Kontraktionsschritt das jeweils am nächsten vor $q_{2\nu}$ liegende Tripel von Schnittpunkten des Bogens B mit der jeweils vorliegenden OCh der Kontraktion unterworfen wird; die so ausgewählten Tripel besitzen dann sämtlich die gleiche Signatur wie dasjenige Tripel mit welchem der Kontraktionsprozeß beginnt; man erhält dann ein t_ν, für das die $\mathfrak{k}$-Paratingente $P(t_\nu; \mathfrak{k})$ fremd zu $\underset{\sim}{B}(t_\nu \mid q_{2\nu})$ ist. Wegen $q_{2\nu} \in P(t_\nu; \mathfrak{k})$ ist $\underset{\sim}{B}(t_\nu \mid q_{2\nu})$ nicht $\mathfrak{k}$-regulär (vgl. H.-K. [1]. Nr. 4.2.6.2., Satz 1.), enthält also mindestens einen, mithin einen am nächsten bei t_ν gelegenen $\mathfrak{k}$-Scheitel $s_\nu \in \underset{\sim}{B}(q_{2\nu-3} \mid q_{2\nu}) \backslash \{q_{2\nu-2}, q_{2\nu-1}\}$, letzteres weil kein q_ϱ ein $\mathfrak{k}$-Scheitel ist (Ziff. (II)).

Wir bezeichnen dieses (am nächsten vor $q_{2\nu}$ gelegene) t_ν und dieses (am nächsten hinter t_ν gelegene) s_ν als *zu $q_{2\nu}$ gehörig*; es ist t_ν $\mathfrak{k}$-regulär und s_ν $\mathfrak{k}$-Scheitel mit der Signatur (—).

Durch genau die gleichen Schlüsse ergeben sich als zu $q_{2\nu+2}$ gehörig ein $\mathfrak{k}$-reguläres $t_{\nu+1}$ und ein am nächsten hinter $t_{\nu+1}$ gegebener $\mathfrak{k}$-Scheitel $s_{\nu+1}$ mit $\operatorname{sgn} s_{\nu+1} = (—) = \operatorname{sgn} s_\nu$.

(V) *Der* (*gemäß* Ziff. (IV)) *zu $q_{2\nu}$ gehörige $\mathfrak{k}$-Scheitel s_ν liegt* (auf $\underset{\sim}{B}(q_{2\nu-3} \mid q_{2\nu+2})$) *vor dem zu $q_{2\nu+2}$ gehörigen $\mathfrak{k}$-Scheitel $s_{\nu+1}$.*

Bew. (A) Hinsichtlich der Lage von $t_{\nu+1}$ gibt es nur die beiden Möglichkeiten:

(Va) $\qquad t_{\nu+1} \in \underset{\sim}{B}(q_{2\nu} \mid q_{2\nu+1}) \cup \{q_{2\nu}\}$;

(Vb) $\qquad t_{\nu+1} \in \underset{\sim}{B}(q_{2\nu-1} \mid q_{2\nu})$.

In der Tat ist $t_{\nu+1}$ gewonnen durch Kontraktion der auf B und K_0 direkt konsekutiven Punkte $q_{2\nu-1}, q_{2\nu}, q_{2\nu+1}$ (bei festem $q_{2\nu+2}$), sodaß $t_{\nu+1} \in \underset{\sim}{B}(q_{2\nu-1} \mid q_{2\nu+1})$.

(B) Das zu $q_{2\nu}$ gehörige t_ν liegt *vor* dem zu $q_{2\nu+2}$ gehörigen $t_{\nu+1}$. Denn entsprechend zu $t_{\nu+1} \in \underset{\sim}{B}(q_{2\nu-1} \mid q_{2\nu+1})$ gilt $t_\nu \in \underset{\sim}{B}(q_{2\nu-3} \mid q_{2\nu-1})$.

(C) Wir betrachten nun (Va) und (Vb) (vgl. (A)).

Betr. (Va). Hier gilt $s_{\nu+1} \in \underset{\sim}{B}(q_{2\nu} \mid q_{2\nu+2})$. Wegen $s_\nu \in \underset{\sim}{B}(q_{2\nu-3} \mid q_{2\nu})$ liegt hier s_ν *vor* $s_{\nu+1}$.

Betr. (Vb). Hier liegt $t_{\nu+1}$ vor $q_{2\nu}$. Wegen t_ν vor $t_{\nu+1}$ sind also $t_\nu, t_{\nu+1}, q_{2\nu}, q_{2\nu+2}$ direkt konsekutiv (auf $B(q_{2\nu-3} \mid q_{2\nu+2})$). Wegen $\operatorname{sgn} t_\nu = \operatorname{sgn} t_{\nu+1} = (-)$ sowie wegen $P(t_\nu; \mathfrak{k}) \cap \underset{\sim}{B}(t_\nu \mid q_{2\nu}) = \emptyset = P(t_{\nu+1}; \mathfrak{k}) \cap \underset{\sim}{B}(t_{\nu+1} \mid q_{2\nu+2})$ liegen ferner die offenen Teilbogen $\underset{\sim}{P}(t_\nu \mid q_{2\nu})$ und $\underset{\sim}{P}(t_{\nu+1} \mid q_{2\nu+2})$ von $P(t_\nu; \mathfrak{k})$ bzw. von $P(t_{\nu+1}; \mathfrak{k})$ beide in $B(+)$. Somit gilt $\underset{\sim}{P}(t_\nu \mid q_{2\nu}) \cap \underset{\sim}{P}(t_{\nu+1} \mid q_{\nu+2}) \neq \emptyset$.

Weiter gilt im Fall (Vb):

(Vb 1) *Der zu* $q_{2\nu}$ *gehörige* $\mathfrak{k}$-*Scheitel* s_ν *liegt im Teilbogen* $T_\nu := \underset{\sim}{B}(t_\nu \mid t_{\nu+1}) \subset B(t_\nu \mid q_{2\nu})$ *und damit* vor *dem zu* $q_{2\nu+2}$ *gehörigen* $t_{\nu+1}$, *also* s_ν vor $t_{\nu+1}$.

In der Tat: Gemäß Ziff. (III) sind t_ν und $t_{\nu+1}$ beide $\mathfrak{k}$-regulär, besitzen also Umgebungen $\underset{\sim}{U}_\nu$ bzw. $\underset{\sim}{U}_{\nu+1}$ mit $\mathrm{POW}(\underset{\sim}{U}_\nu; \mathfrak{k}) = \mathrm{POW}(\underset{\sim}{U}_{\nu+1}; \mathfrak{k}) = 3$. Enthielte nun T_ν keinen $\mathfrak{k}$-Scheitel, so wäre $V_\nu := \underset{\sim}{U}_\nu \cup \underset{\sim}{T}_\nu \cup \underset{\sim}{U}_{\nu+1}$ lokal $\mathfrak{k}$-regulär, also Vereinigung von endlich vielen $\mathfrak{k}$-regulären Bogen $B(a_\mu \mid a_{\mu+1})$, $\mu = 1, \ldots, w$; $a_1 := t_\nu$, $a_{w+1} := t_{\nu+1}$. Gemäß H.-K. [1]. Nr. 4.2.6.2., Satz 2, ist jede $\mathfrak{k}$-Paratingente an $B(a_1 \mid a_2)$ fremd zu jeder an $B(a_1 \mid a_2)$ in a_2, diese wieder zu jeder $\mathfrak{k}$-Paratingente an $B(a_2 \mid a_3)$ in a_3, usw.; dabei liegt $P(t_\nu; \mathfrak{k}) = P(a_1; \mathfrak{k})$ ganz auf einer Seite von $P(a_2; \mathfrak{k})$ und $P(a_3; \mathfrak{k})$ auf der entgegengesetzten Seite von $P(a_2; \mathfrak{k})$ wie

$P(t_\nu;\mathfrak{k})$. Induktion zeigt, daß $P(t_\nu;\mathfrak{k})$ und $P(t_{\nu+1};\mathfrak{k})$ fremd sind im Widerspruch zur Feststellung in Betr. (Vb) vor Folgerung (Vb 1).

(Vb 2) Definitionsgemäß liegt der zu $q_{2\nu+2}$ gehörige $\mathfrak{k}$-Scheitel $s_{\nu+1}$ in $\underline{B}(t_{\nu+1} \mid q_{2\nu+2})$, liegt also hinter $t_{\nu+1}$.

Aus (Vb 1) und (Vb 2) folgt nun, daß s_ν *vor* $s_{\nu+1}$; dabei ist $\operatorname{sgn} s_\nu = \operatorname{sgn} s_{\nu+1} = (-)$.

(VI) Zusammenfassung. Aus Ziff. (I)–(V) folgt:

(1) Es sei B ein *Bogen* mit $\mathrm{POW}(\underline{B} \cap K_0) = r \geq 2n$. Jedem $q_{2\nu}$ für $\nu = 2, \ldots, n$, entspricht ein $\mathfrak{k}$-Scheitel s_ν der Signatur $(-)$; dabei sind diese s_ν alle verschieden und ihre Reihenfolge $s_2, \ldots, s_n$ entspricht der Orientierung von B. Zwischen zwei $\mathfrak{k}$-Scheiteln gleicher Signatur liegt aber auf B mindestens ein $\mathfrak{k}$-Scheitel der entgegengesetzten Signatur, also $(+)$ (vgl. H [2], Nr. 3.3., Satz 2). Daher liegen auf B mindestens $(n-1)+(n-2) = 2n-3$ $\mathfrak{k}$-Scheitel.

(2) Es sei C eine *Kurve* mit $\mathrm{POW}(C;\mathfrak{k}) = 2n$. Zu den in Ziff. (1) gefundenen $\mathfrak{k}$-Scheiteln $s_2, \ldots, s_n$ tritt hier noch ein dem $\nu = 1$, d. h. dem q_2 entsprechender $\mathfrak{k}$-Scheitel s_1, welcher von den $s_2, \ldots, s_n$ verschieden ist und zwischen s_n und s_2 auf C liegt; zu berücksichtigen sind hierbei die Bemerkungen in Nr. 1.4.1. und in Nr. 2.1., Beweis (II). Außerdem besitzt s_1 die gleiche Signatur $(-)$ wie die $s_2, \ldots, s_n$. Somit existieren auf C mindestens $n+n = 2n$ $\mathfrak{k}$-Scheitel.

2.2. Im Satz der Nr. 2.1. war $k = 3$ als Grundzahl gewählt. Für beliebiges ungerades $k = 2p+1$, $p \geq 1$, gilt etwas allgemeiner der

Satz. Voraussetzung. (1) *und* (2) *wie im Satz der Nr.* 2.1. *mit* $k = 2p+1$, $p \geq 1$. *Es heißt ein Bogen* $\mathfrak{k}$-*ordinär, wenn durch beliebige* k *Punkte des Bogens ein* $K \in \mathfrak{k}$ *geht. Es sei* B $\mathfrak{k}$-*ordinär.*

(3) *Es sei* $x_\varkappa, x_{\varkappa n} \in B$, $\varkappa = 1, \ldots, k$; $n = 1, 2, \ldots$ *mit* $\bigwedge_n \bigwedge_{\varkappa,\varrho} \bigwedge_{\varkappa \neq \varrho} x_{\varkappa n} \neq x_{\varrho n}$ *und mit* $\bigwedge_\varkappa x_\varkappa = \lim_n x_{\varkappa n}$. *Für alle* n *existiert* $K_n = K(x_{1n}, \ldots, x_{kn}) \in \mathfrak{k}$. *Dann soll gelten:*

(A) *Ist* $\bigwedge_{\varkappa \neq \varrho} x_\varkappa \neq x_\varrho$, *so existiert auch* $L = \lim_n K_n$ *und es ist* $L = K(x_1, \ldots, x_k) \in \mathfrak{k}$. (Dies folgt schon daraus, daß B $\mathfrak{k}$-ordinär sein soll).

(B) *Sind die* $x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, x_{r+3}, \ldots, x_k$ *alle verschieden und auf* B *direkt konsekutiv (im Sinne der Orientierung von* B*), ist ferner* $x_{r+2} = x_{r+1} = \lim_n x_{r+2,n}, \in B$ *und existiert* $L := \lim_n K(x_{1n}, \ldots, x_{r+1,n}, x_{r+2,n}, \ldots, x_{kn})$, *so gilt* $L \in \mathfrak{k}$. *Jede* $\mathfrak{k}$, 2-*Paratingente an* B *ist Ordnungscharakteristik.*

(C) *Ist* $\bigwedge_{\varkappa,\varrho} x_\varkappa = x_\varrho = x$ *und existiert* $L := \lim_n K_n$, *so ist* L *eine* OCh $L \in \mathfrak{k}$: *Jede* $\mathfrak{k}$-*Paratingente ist Ordnungscharakteristik.*

(4) *In jedem* $\mathfrak{k}$-*Scheitel* s *von* B *existiert genau eine* $\mathfrak{k}$-*Paratingente an* B.

(5) *Es existiert ein* $K_0 \in \mathfrak{k}$ *von* B *mit* $\mathrm{POW}(B \cap K_0) = r \geq 2n \geq 2k$.

Behauptung. *Die Anzahl der* $\mathfrak{k}$-*Scheitel von* B *ist* (a) *für einen* Bogen B *mindestens gleich* $[2(n-1)p^{-1} - 1]$. – (b) *für eine* Kurve $C = B$ *mindestens gleich* $[2(n-1)p^{-1} + 2]$. *Dabei bezeichne* $[\alpha]$ *die größte ganze Zahl, die nicht größer ist als* α $(\alpha > 0)$ (Wegen $n \geq k$ ist $[2(n-1)p^{-1}] \geq 4$).

Beweis. Entsprechend wie für den Satz in Nr. 2.1. Dabei werden statt $\underset{\sim}{B}(q_{2\nu-3} \mid q_{2\nu})$ und $\underset{\sim}{B}(q_{2\nu-1} \mid q_{2\nu+2})$, $\nu \geq 2$, betrachtet: $\underset{\sim}{B}(q_{2(\nu-2)p+1} \mid q_{2(\nu-1)p+2})$ und $\underset{\sim}{B}(q_{2(\nu-1)p+1} \mid q_{2\nu p+2})$. Man zeigt dann wieder, daß den beiden zuletzt genannten Bogen je ein $\mathfrak{k}$-Scheitel s_ν bzw. $s_{\nu+1}$ zugehört, daß beide gleiche Signatur besitzen und daß s_ν auf B *vor* $s_{\nu+1}$ liegt.

2.3. Die am Schlusse der Nr. 3.1. erwähnte Kennzeichnung der Kurven C mit $\mathrm{POW}(C; \mathfrak{k}) = k + 1$ für ungerades k ist (mindestens) für $k(\mathfrak{k}) = 3$ in folgender Form richtig.

Satz. Voraussetzung. *Es sei* $k(\mathfrak{k}) = 3$ *und* C *eine Kurve, welche den Vor. des Satzes in Nr.* 2.1. *genügt mit Ausnahme der Vor.* (4), *die durch folgende (schärfere) Forderung zu ersetzen ist:* (4′) *In jedem Punkt* x *von* C *existiert genau eine* $\mathfrak{k}$-*Paratingente* $P(x; \mathfrak{k})$ *an* C.

Behauptung. *Es sind gleichwertig:* (a) *Es ist* POW$(C; \mathfrak{k}) = 4$. – (b) *Es besitzt C genau vier $\mathfrak{k}$-Scheitel.*

Beweis. Aus den Voraussetzungen, insbesondere (3) (B) und (4'). folgt, daß die Eindeutigkeitsforderung (EP_k) aus H.-K. [1], Nr. 4.1.4.1. erfüllt ist. Ferner ist C sowohl bei Giltigkeit der Beh. (a) als (b) von beschränktem POW$(C; \mathfrak{k})$ (Betr. (b) vgl. Nr. 2.1., Beweis, Ziff. (I)). – (a) → (b). Denn gemäß H.-K. [1], Nr. 4.1.4.3., besitzt C höchstens 4 $\mathfrak{k}$-Scheitel und gemäß Nr. 2.1., Satz, auch mindestens 4. – (b) → (a). Gemäß Nr. 2.1., Satz, ist POW $(C; \mathfrak{k}) \leq 4$. Andererseits ist POW$(C; \mathfrak{k}) \geq 4$, weil jede Umgebung eines $\mathfrak{k}$-Scheitels den POW 4 besitzt.

Anmerkung. Mit dem vorstehenden Satz sind dann für den Fall $k = 3$ auch gesichert die Behauptungen in H.-K. [1], Nr. 4.1.4.3.1., sowie die darauf bezüglichen Zitate in H [2], § 5, Ergänzung (1), in Aequationes Mathematicae 2 (1969), Seite 261, Nr. 3.3.2., und in Journ. r. u. angew. Math. 239/240 (1970), Seite 352, Nr. 3.5.

3. Berichtigung einer früheren Behauptung

3.1. In H.-K. [1], Nr. 4.1.4.2., Satz, wurde behauptet: Bei beliebiger, insbesondere also auch gerader Grundzahl $k \geq 2$ besitzt eine zu $\mathfrak{k}$ normale *Kurve* C mit POW $(C; k) = m \geq k + 1$ mindestens m $\mathfrak{k}$-Scheitel (a. a. O. Nr. 4.1.4.2., wird ein $\mathfrak{k}$-Scheitel als ein $\mathfrak{k}$-singulärer Punkt im weiteren Sinne bezeichnet); dabei ist vorausgesetzt, daß C gewissen Differenzierbarkeitsbedingungen genügt (vgl. (EP_k) a. a. O. Nr. 4.1.4.1.). Herrn E. Heil verdanken wir den Hinweis, daß unsere Behauptung betr. die Existenz von mindestens m $\mathfrak{k}$-Scheiteln auf Kurven C mit POW $(C; \mathfrak{k}) = m$ für gerade Grundzahlen k falsch ist. Beispiel von Herrn Heil: Es sei $\mathfrak{k}$ das System der Geraden in der Ebene, also $k = 2$, und C eine stetig differenzierbare (geschlossene) Kurve mit genau zwei Wendepunkten und mit POW $(C; \mathfrak{k}) = 4$. In der Tat findet sich im Induktionsbeweis a. a. O. Nr. 4.1.4.2. für den Fall von *Kurven* C die falsche Behauptung, daß im Fall der Grundzahl $k = 1$ zwischen zwei benachbarten Schnittpunkten von C mit einer OCh ein $\mathfrak{k}$-Scheitel liegt auch dann, wenn zwischen diesen

Schnittpunkten ein Grundpunkt von $\mathfrak{k}$ liegt. – Die gleiche, für Kurven falsche Behauptung wie in H.-K. [1], Nr. 4.1.4.2., findet sich in H [1], Nr. 2.2., (B) (1), und in H [3], Einleitung, sowie Nr. 4.2.3. – In Absatz 1 dieser Einleitung zu H [3] ist überdies der Satz von Jackson nicht in seiner allgemeinen Fassung zitiert, auch ist (entgegen der Behauptung im letzten Absatz dieser Einleitung) die Jacksonsche Bedingung betr. $C \frown K_0$ nicht spezieller als die Quasinormalität, vielmehr ist erstere eine Verallgemeinerung der letzteren.

In Mitleidenschaft gezogen ist auch H.-K. [1], Nr. 4.1.4.3.1., wonach die (zu $\mathfrak{k}$ normalen) Kurven C mit POW $(C;\, \mathfrak{k}) = k + 1$ dadurch gekennzeichnet seien, daß die Anzahl ihrer $\mathfrak{k}$-Scheitel gleich $k+1$ ist (vgl. Entsprechendes in H [1], Nr. 2.2., (B) (3)), was höchstens für ungerade k richtig ist, jedenfalls aber für $k = 3$ (vgl. diese Note Nr. 2.3.).

3.2. Im Fall eines *Bogens* hingegen können bei beliebigem $k \geq 1$ die beim Beweis in H.-K. [1], Nr. 4.1.4.2. eingeführten Grundpunkte stets so gewählt werden, daß durch solche Grundpunkte keine $\mathfrak{k}$-Scheitel von B (oder von einem beliebigen Teilbogen der Kurve) voneinander getrennt werden. Daher bleibt für Bogen (und beliebige Teilbogen einer Kurve) die folgende a. a. O. aufgestellte Behauptung richtig: Ist die Grundzahl $k(\mathfrak{k}) \geq 1$ und genügt der zu $\mathfrak{k}$ normale Bogen B der Eindeutigkeitsbedingung (EP_k) a. a. O., so folgt aus POW $(B;\, \mathfrak{k}) = m \geq k+1$, daß die Anzahl der $\mathfrak{k}$-Scheitel von B nicht kleiner als $m - k$ ist. – Entsprechendes gilt für H [1], Nr. 2.2., (B) (1), und H [3], Nr. 4.2.2.

Literatur

Blaschke, W. [1] Kreis und Kugel, S. 161 (1. Aufl. Leipzig 1916; 2. Aufl. Berlin 1956).

Ewald, G. [1] Aus konvexen Kurven bestehende Möbiusebenen. Abh. Math.-Seminar Univ. Hamburg 30 (1967), 179–187.

Haupt-Künneth [1] Geometrische Ordnungen. Berlin-Heidelberg-New York 1967. – Zitiert mit H.-K. [1]. Entsprechend sind H.-K. [2], H [1], H [2] zu verstehen.

Haupt-Künneth [2] Bemerkungen zu Sätzen von Herrn S. B. Jackson. Bayer. Akad. d. Wiss., Sitz.-Ber. math.-naturw. Kl. 1971, 1–11.

Haupt [1] Zur Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes und seiner Umkehrung. Annali mat. p. appl. (4) 27, 293–320 (1948); 28, 345 (1949).

Haupt [2] Bemerkungen zum Kneserschen Vierscheitelsatz. Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg 31 (1967), 218–238.

Haupt [3] Untere Schranken für die Anzahl der k-singulären Punkte ebener Bogen und Kurven. Theory of sets and topology. Berlin 1972, 233–249.

Mukhopadhyaya, S. [1] Extended Minimum-Number Theorems of Cyclic and Sextactic Points on a Plane Convex Oval. Math. Zeitschr. 33 (1931), 648–662. – Auch New Methods in the Geometry of a Plane Arc. Bull. Calcutta Math. Soc. Vol. 1 (1909).

Jackson, S. B. [1] Vertices of plane curves. Bull. Amer. math. Soc. 50 (1944), 564–578.