353

Ueber die wechselseitigen Beziehungen

zwischen

der reinen und der angewandten Mathematik.

Festrede

gehalten in der

öffentlichen Sitzung der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München

am 14. November 1896

von

Walther Dyck

o. Mitglied der mathematisch-physikalischen Classe.

München 1897

Verlag der k. b. Akademie.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber die wechselseitigen Beziehungen

zwischen

der reinen und der angewandten Mathematik.

Festrede

gehalten in der

öffentlichen Sitzung der k. b. Akademie der Wissenschaften
zu München

am 14. November 1896

von

Walther Dyck

o. Mitglied der mathematisch-physikalischen Classe.

München 1897

Verlag der k. b. Akademie.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

1.

Die Geschichte wissenschaftlicher Forschung ordnet sich um die Darlegung des Entwicklungsganges umfassender Methoden, in welchen es gelingt, grosse Gruppen von Einzelproblemen unter einheitlichem Gesichtspunkt zu behandeln.

Solche zusammenfassende Methoden geben nicht nur das Gemeinsame der einzelnen Untersuchungen und besonderen Methoden, welche für die Behandlung von speziellen Problemen ersonnen sind; sie lassen auch, in ihrer vom Einzelfall losgelösten Fassung, die gegenseitigen Beziehungen und die Analogieen hervortreten, welche zwischen scheinbar getrennt liegenden Gebieten der Forschung bestehen, und an ihre abstractere Darstellung knüpfen sich Erweiterungen des Inhalts und der Formulirung an, welche die ursprünglichen Fragen zugleich einheitlicher und tiefer erfassen lassen. Freilich wird die verallgemeinerte Form der Methode für die Durchführung der einzelnen Fragen in verschiedenem Grade sich eignen. Aber die für die spezielle Fragestellung zweckentsprechendste Gestalt des Apparates wird einheitlicher und sicherer aus der allgemeinen Theorie gewonnen, als unabhängig davon für jeden Einzelfall aufgebaut.

So geht die geschichtliche Entwicklung wissenschaftlicher Methoden zunächst von den speziellen Fällen aus, und erhebt sich zusammenfassend zum Allgemeinen; von da aus aber kehrt sie, mit richtiger Anpassung der Formulirungen, zu den ursprünglichen Fragen zurück, und schreitet zu neuen fort.

In diesen allgemeinen Erörterungen mag der Plan für die folgenden Betrachtungen „Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik“ gefunden werden.

Ich kann es nicht unternehmen, die Bedeutung und Vielgestaltigkeit dieser Wechselwirkung durch alle Epochen der Geschichte unserer Wissenschaft zu verfolgen, oder ihr nach allen Richtungen der angewandten Mathematik nachzugehen. Ich beschränke mich auf einen besonders charakteristischen Abschnitt, und will versuchen, den gegenseitigen Einfluss zu kennzeichnen, welchen Functionentheorie und mathematische Physik in unserem Jahrhundert auf einander ausgeübt haben.

Ich bin mir dabei der Schwierigkeit nur zu sehr bewusst, welche in dem Unternehmen liegt, mathematische Disciplinen zu besprechen, ohne die Sprache zu gebrauchen, in welche die Mathematik die präcise Darlegung ihrer Gedanken kleidet. Vielleicht aber gelingt es mir, gerade die Wechselbeziehung zwischen den beiden zu behandelnden Gebieten zu benützen, um in dem anschaulichen Gewande physikalischer Vorgänge auch den Gang der mathematischen Entwicklung klar zum Ausdruck zu bringen.

2.

Wir knüpfen unsere Betrachtungen an die Entwicklungsgeschichte der Potentialtheorie, weil sie vor anderen die Wechselbeziehung mathematischer und physikalischer Fragen hervortreten lässt.

In der Aufstellung des Gesetzes von der gegenseitigen Anziehung der Massen hat Newton die Beschreibung der Planetenbewegung, wie die Darlegung der durch die Schwerkraft bewirkten Bewegungen irdischer Massen in einheitlicher Form zusammengefasst. Damit war zugleich ein weiteres Problem von fundamentaler Bedeutung erwachsen in der Frage nach der Grösse und Richtung der Anziehung, welche ein beliebig gestalteter, mit Masse erfüllter Körper auf einen zweiten Körper, speziell auf einen Massenpunkt ausübt.

In der grossen schöpferischen Epoche, die mit dem Wirken von Newton und Leibniz beginnt, entstanden, mit Berücksichtigung besonders der für Geodäsie und Astronomie wichtigen Körperformen, die Lösungen des Problems der Anziehung für die Kugel, das Sphäroid, das Ellipsoid und für schalenförmig aus diesen ausgeschnittene Körper. Aber alle diese Untersuchungen, wie sie von Newton selbst, von Clairaut, Euler, den Bernoulli's, von Mac Laurin und D'Alembert angestellt wurden, entbehren noch des einheitlichen Charakters. Durch synthetische Methoden wird, für jeden Fall besonders, die Lösung herbeigeführt.

Es ist Lagrange, der Schöpfer der Mécanique analytique, der zuerst allgemein gültige Formeln für die Berechnung aufstellt. Sie führen ihn zur Einführung einer Function, welche, abhängig einerseits von der Gestalt und Massenverteilung des anziehenden Körpers, andererseits von der Lage des Punktes, in welchem die Anziehung berechnet werden soll, die Kenntnis von Grösse und Richtung der Anziehung vermittelt.[1]) Die Aenderung nämlich, welche diese Function bei kleiner Verschiebung des angezogenen Punktes in irgend einer Richtung erfährt, ist proportional der Kraft, welche man bedarf, um den Massenpunkt entgegen der anziehenden Wirkung des Körpers in eben dieser Richtung fortzubewegen.

Diese Function nennt man nach Green und Gauss die Potentialfunction oder das Potential des Massenpunktes.[2])

Die Potentialfunction ist von hier aus in erweiterter Bedeutung übergegangen zunächst in die Mechanik, wo man sie mit Hamilton allgemein auch als „Kräftefunction“ bezeichnet, und ist die Grundlage geworden all' der mannigfachen Untersuchungen, welche die Sprache der analytischen Mechanik auf die Probleme der Wärmetheorie, auf elektrostatische und elektrodynamische Fragen, auf Elasticitätstheorie und Hydrodynamik, auf die Erscheinungen der Akustik und Optik übertragen. — Die Eigenschaften der Potentialfunction haben zuerst dazu geführt, die Analogieen aufzudecken, welche zwischen den verschiedenen hier genannten Gebieten bestehen, und für welche eben die reinen Grössenbeziehungen dieses analytischen Gebildes das gemeinsame Band darstellen.

Mit den Untersuchungen von Lagrange, und den sogleich zu nennenden von Laplace ist auch zeitlich genommen die Schwelle bezeichnet, von welcher die moderne Behandlung der Fragen der mathematischen Physik rechnet; es ist durch sie die analytische Grundlage gewonnen für das Einsetzen der allgemeinen Functionentheorie, deren Entwickelung bezeichnender Weise um eben diese Zeit beginnt.

Kehren wir indes zu unserem engeren Problem, der Attractionstheorie, zurück.

Die Potentialfunction hat hier die Gestalt einer Summe, erstreckt über die sämmtlichen Massenteilchen des Körpers, jedes derselben noch dividirt durch seine Entfernung vom angezogenen Punkt. Von fundamentaler Bedeutung wurde für ihre Untersuchung eine Gleichung, welche gewisse differentielle Eigenschaften der Potentialfunction kennzeichnet. Sie ist von Laplace aufgestellt und von Poisson durch die Unterscheidung der Fälle, in welchen der angezogene Punkt innerhalb oder ausserhalb der anziehenden Masse gelegen ist, vervollständigt worden zu der jetzt als Laplace-Poisson'sche Gleichung bezeichneten Beziehung.[3]) Sie gibt uns Aufschluss über die Abhängigkeit der Potentialfunction in der Umgebung eines Punktes von der dort befindlichen Masse, so zwar, dass diese Eigenschaft hinreicht, um die Potentialfunction, die wir soeben mit Hülfe einer Summenformel definirt haben, noch auf einem neuen zweiten Wege, mit Hülfe einer partiellen Differentialgleichung, wie man eine solche differentielle Beziehung mathematisch benennt, zu definiren.

Um den Fortschritt der Untersuchungen auf dem direct an das Attractionsproblem anschliessenden Gebiete zu bezeichnen, haben wir vor Allem hervorzuheben, dass unseren Formulirungen noch auf dem Gebiete der Erscheinungen des elektrischen und des magnetischen Gleichgewichts eine physikalische Deutung zukommt, insoferne nach dem von Coulomb experimentell aufgestellten Gesetze die Wirkung zweier elektrischer Massenteilchen aufeinander ebenfalls nach dem Newton'schen Gesetz erfolgt und dasselbe Gesetz auch der Darstellung der magnetischen Erscheinungen zu Grunde gelegt werden kann, wenn wir hier die Vorstellung zweier entgegengesetzt magnetischer Flüssigkeiten in den Elementen der Magnete uns bilden. Nur werden in diesen beiden Fällen die entstehenden Wirkungen als anziehende und abstossende zu unterscheiden sein.

Für das so verallgemeinerte Attractionsgesetz haben Green und Gauss die wichtigsten Eigenschaften der Potentialfunction entwickelt.

Die Untersuchungen von Green gehen auf das Jahr 1828 zurück, blieben aber sowohl in England wie auch auf dem Continent gänzlich unbeachtet, bis Thomson, veranlasst durch eine Bemerkung Murphy's, sie der Vergessenheit entriss, und 1850 von neuem publicirte. Inzwischen waren 1839 die Untersuchungen von Gauss erschienen und in ihnen eine Anzahl der Green'schen Sätze auf's neue entdeckt.[4])

Den Ausgangspunkt bilden bei Gauss Untersuchungen über den Erdmagnetismus.[5]) Man hatte vor Gauss die magnetischen Erscheinungen auf der Erdoberfläche dadurch näherungsweise zu berechnen versucht, dass man im Innern der Erde einen, dann, um eine genauere Uebereinstimmung mit den Beobachtungen zu erzielen, zwei Magnete von verschiedener Stärke wirkend annahm. Indes gab der Vergleich von Rechnung und Messung nur sehr unbefriedigende Resultate. Gauss erkannte nun, dass man zwar durch eine noch grössere Zahl solcher fingirter Magnete schliesslich eine genügende Genauigkeit herstellen könne, dass aber eine solche theoretische Lösung in jedem Falle unbefriedigend, weil vollkommen unbestimmt ist. Es ergibt sich dies aus den folgenden Sätzen, die zugleich den Abschluss der Gauss'schen Untersuchungen bilden:

Denkt man sich im Innern eines Körpers (hier also der Erde) eine Verteilung von anziehenden und abstossenden Massen gegeben, so lässt sich diese Verteilung stets und nur auf eine Weise durch eine ideale Massenverteilung auf der Oberfläche des Körpers so ersetzen, dass die Anziehungswirkung für alle äusseren Punkte ungeändert dieselbe bleibt. — Nicht aber lässt sich umgekehrt aus dieser Verteilung auf der Oberfläche ein Schluss auf eine bestimmte äquivalente Verteilung im Innern ziehen; vielmehr gibt es unendlich viele Möglichkeiten von Massenverteilungen im Innern des Körpers, welche die Wirkung nach Aussen ungeändert lassen.

Weiter folgt daraus: Mit Angabe der Anziehungswirkung auf der Oberfläche des Körpers ist die gesammte Wirkung im Aussenraum vollständig und eindeutig bestimmt, während für das Innere weder Anziehung noch Massenverteilung berechnet werden kann.

3.

Wir werden uns jetzt der Entwicklung eines anderen Gebietes der Physik zuwenden, welches in seiner analytischen Behandlung die engste Beziehung zu dem soeben besprochenen ergibt, zu den Fragen der Wärmetheorie.

Indes müssen wir, um der geschichtlichen Anordnung zu folgen, und zugleich das Verständnis jener Fragen vorzubereiten, vorerst noch ein Problem erörtern, dessen Behandlung von einer zweiten Seite her die Methoden der mathematischen Physik mit denen der Analysis verbindet.

Es sind die Untersuchungen, die sich an die Aufgabe der Bestimmung der Gestalt einer schwingenden Saite geknüpft haben.[6])

Zwischen zwei festen Punkten sei eine elastische Saite gespannt. Sie werde in Schwingung gebracht, indem man sie zu Beginn des Experiments so aus ihrer Ruhelage bringt, dass sie eine beliebig vorgegebene krumme Linie zwischen den beiden Endpunkten bildet. Ueberlässt man die Saite nun sich selbst, so werden ihre einzelnen Elemente periodische Schwingungen um die Gleichgewichtslage ausführen; es handelt sich darum, die Lage dieser Elemente und also die Gestalt der Saite nach Verlauf einer beliebigen Zeit vom Beginne des Versuchs an gerechnet darzustellen.

Taylor hat den einfachsten Fall dieser Bewegung analytisch studirt. Erteilt man der Saite zu Anfang die Form einer halben Sinuslinie — experimentell am einfachsten, indem man sie in der Mitte mit dem Violinbogen anstreicht — so giebt sie ihren Grundton; teilt man aber die Saite während des Anstreichens bei $1/2$, $1/3$, $1/4$ ... ihrer Länge ab, so giebt sie, jetzt in periodischen Schwingungen von der halben, von $1/3$, $1/4$ Wellenlänge die Obertöne.

Schon Mersenne hat nun das gleichzeitige Schwingen einer Saite in Grundton und Obertönen erkannt; es setzt sich dann die Form der Saite aus einer Uebereinanderlagerung jener einzelnen Sinusschwingungen zusammen, die, je nach der Stärke der Obertöne, noch verschiedenen Ausschlag haben können.

Daniel Bernoulli hat die analytische Darstellung einer solchen zusammengesetzten Schwingung gegeben in Gestalt einer Summe, deren einzelne Glieder je diesen Teilschwingungen entsprechen.

Von rein analytischen Betrachtungen ausgehend war D'Alembert auf eine in der Form durchaus verschiedene Lösung des Problems gekommen. Die Frage, welcher von beiden Lösungen der genügend allgemeine Charakter zukomme, wurde von Euler dahin gewendet, dass es darauf ankomme, zu zeigen, dass mit Hülfe der oben gekennzeichneten Reihenentwicklung thatsächlich jeder beliebig vorgegebene stetig verlaufende Linienzug dargestellt werden könne, wie es die Einleitung des Schwingungszustandes verlangt.

So stand die Frage, als Fourier in seinen 1807 der Pariser Akademie vorgelegten Arbeiten zur Wärmetheorie die Bedeutung der genannten Reihenentwicklung in ein neues Licht rückte und sie ganz wesentlich verallgemeinerte.[7])

Es ist interessant, den physikalischen Vorstellungen nachzugehen, welche bei Fourier die Einführung derartiger Reihen vermittelt haben.

Fourier geht, im Sinne der atomistischen Anschauung, aus von der Voraussetzung einer Zusammensetzung der Körper aus einer endlichen Anzahl von kleinen, die Wärme leitenden Teilen, die durch nichtleitende Zwischenräume getrennt sind; der Wärmeaustausch zwischen je zweien dieser Körperchen sei dann bildlich dadurch vermittelt gedacht, dass zwischen denselben kleine Projectile als Vehikel der Wärme hin- und hergesendet werden, und dabei jedesmal Wärme von dem wärmeren zum kälteren Körper überführen.

Fourier entwickelt auf Grund dieser Vorstellungen zunächst die Formeln für den Temperaturausgleich in einem geraden oder ringförmig geschlossenen Draht, der aus einer endlichen Zahl hintereinander angeordneter Körperchen bestehend zu denken ist. Der Anfangszustand ist durch eine beliebige Temperaturverteilung über die einzelnen Partikel bestimmt. Für den weiteren Verlauf des Processes mag man nun entweder vollkommene Isolirung, oder Ausstrahlung annehmen; endlich auch den Fall betrachten, bei welchem einzelne Stellen des Drahtes durch Wärmequellen während des ganzen Processes auf constanter Temperatur gehalten werden.

In jedem Falle lässt sich der Temperaturzustand des Drahtes in einem beliebigen Zeitmoment rechnerisch durch eine endliche Reihe von der früher erwähnten Gestalt darstellen.

Von hier gelingt dann der Uebergang zu Formeln, welche analog für die Wärmeleitung in continuirlich mit Masse erfüllten drahtförmigen Körpern gelten. Diese letzteren Formeln sind es nun, welche man als Fourier'sche Reihen bezeichnet. Sie umfassen in der That den schon von Euler vermutheten, auf stetige Functionen einheitlichen Charakters beschränkten Geltungsbereich; darüber hinaus aber noch einen ganz wesentlich weiteren, dessen Umfang genau zu bezeichnen, eine wichtige Aufgabe der modernen Analysis bildet, die wir noch später berühren werden.

Fourier geht von der Untersuchung der Wärmebewegung in linear ausgedehnten Leitern über zu dem Studium dieser Erscheinung in leitenden Flächen und Körpern. Auch hier werden Methoden aufgestellt, um aus den willkürlich angenommenen Anfangstemperaturen, aus der Annahme bestimmter Zu- und Ableitungsstellen der Wärme, sowie unter Berücksichtigung der Wärmestrahlung den Temperaturzustand für einen beliebigen Zeitmoment zu berechnen. Es ergiebt sich hier ganz allgemein:

Die durch solche Bedingungen eingeleitete Wärmebewegung nähert sich mit wachsender Zeit mehr und mehr einer Grenze, welche von dem ursprünglichen Temperaturzustand des Körpers ganz unabhängig ist; und es behält schliesslich jede Stelle des Körpers eine ganz bestimmte Temperatur für alle Zeit bei, indem ihr von den wärmeren Stellen der Umgebung dieselbe Quantität Wärme zugeführt wird, welche sie an die kälteren wieder abgiebt. Man nennt einen derartigen Temperaturzustand stationär.

Von besonderem Interesse ist die spezielle Anwendung dieser Theorie auf die Bestimmung der Temperaturverhältnisse im Innern und auf der Oberfläche der Erde, die wir deshalb noch mit einigen Worten erwähnen:

Wir mögen uns die Erde nach der Leibniz'schen Hypothese[8]) vorstellen als ursprünglich in glühendem Zustand gewesene kugelförmige Masse. Sie wird durch die Wärmeausstrahlung ihrer Oberfläche in den freien Weltraum abgekühlt und würde dabei schliesslich die Temperatur des Weltraumes annehmen. Daneben läuft ein anderer Process, der durch den Einfluss der Bestrahlung der Erde durch die Sonne hervorgerufen wird. Die Intensität der Bestrahlung hängt hier in erster Linie von der geographischen Breite ab, sie ist ausserdem den jährlichen und täglichen Schwankungen ausgesetzt. Die letzteren periodischen Aenderungen äussern aber ihre Wirkung nur bis in sehr geringe Tiefen unter der Erdoberfläche, während die durchschnittliche Sonnenbestrahlung eine stationäre Verteilung der Temperaturen im Erdinnern herzustellen strebt.[9])

4.

In der Frage nach dem stationären Temperaturzustand eines homogenen, isotropen (also Wärme nach allen Richtungen gleich gut leitenden) Körpers tritt nun die schon oben erwähnte Beziehung zu den Problemen der Attractionstheorie zu Tage. Für die analytische Darstellung dieser Temperaturverteilung stellen sich nämlich genau die Formeln ein, welche für die Bestimmung des Potentials für die Newton'sche Anziehung einer Masse auf einen ausserhalb gelegenen Punkt gelten. Es erscheint die Gültigkeit der Laplace'schen Gleichung direct als Bedingung für den stationären Zustand. „Es besteht, wie Maxwell in seinem Aufsatz über Faraday's Kraftlinien sich ausdrückt, eine mathematische Verwandtschaft zwischen den Gesetzen der Attractionstheorie und denen der Wärmeleitung. Wenn wir Wärmequelle statt Anziehungscentrum, Wärmefluss statt beschleunigende Kraft der Anziehung, und Temperatur statt Potential setzen, so verwandeln wir die Lösung eines jeden Problems der Anziehungslehre in die eines Problems der Lehre der Wärmeleitung."[10])

Auf das Vorhandensein solcher Analogieen ist schon in älteren Arbeiten mehrfach hingedeutet worden; ausführlicher aber ist auf dieselben wol erst William Thomson (Lord Kelvin) im Jahre 1842 eingegangen in einer Abhandlung über die Bewegung der Wärme in homogenen festen Körpern und ihren Zusammenhang mit der mathematischen Theorie der Elektricität.[11])

Das Studium solcher Analogieen, wie sie zwischen durchaus getrennten Gebieten der Physik auftreten, ist besonders seit den Untersuchungen von Maxwell zu einem wichtigen Instrument der Forschung geworden und hat, gerade in der abstracten Form, in welcher die Uebereinstimmung in der analytischen Darstellung als Ausgangspunkt genommen ist, wesentlich dazu beigetragen, unsere heutige Auffassung der Beziehung physikalischer Vorgänge zu den correspondirenden mathematischen Formulirungen zu entwickeln. Sie steht im Gegensatz zu dem Glauben an die Möglichkeit einer uns zugänglichen absoluten Erklärung der Geschehnisse in der Natur, auf Grund philosophischer, wie rein mechanischer Vorstellungen und Hypothesen; einem Glauben, wie er uns zum Teil in mystischem Gewande bei den Gelehrten des vorigen Jahrhunderts, oder in rationalistischer Form bei den Encyclopädisten entgegentritt. — Bei Maxwell, später bei Kirchhoff und Hertz finden wir klar und schlicht die Anschauung vertreten, dass unsere Einsicht in physikalische Vorgänge nur eine relative, und wesentlich in der Aufstellung von Analogieen begründete ist, und dass insbesondere auch die mathematische Formulirung nur die Bedeutung einer zusammenfassenden Beschreibung besitzt.[12])

5.

Bezeichnen wir, damit allerdings der historischen Entwicklung vorgreifend, noch zwei weitere Gebiete der Physik, in welchen die Grundgleichungen der Attractionstheorie gleichfalls directe Anwendung finden, die Hydrodynamik und die Elektrodynamik.

Helmholtz hat der Entwickelung der hydrodynamischen Gleichungen das „Geschwindigkeitspotential" zu Grunde gelegt.[13])

Die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials für eine Flüssigkeitsbewegung drückt aus, dass dieselbe ohne Rotation der kleinsten Flüssigkeitsteilchen, ohne „Wirbelbewegung", erfolgt.

Die Gültigkeit der Laplace'schen Gleichung besagt dann weiter, dass man es mit einer incompressiblen Flüssigkeit zu thun hat, insoferne sie die Bedingung dafür darstellt, dass jedes Raumelement stets von der gleichen Menge von Flüssigkeit ausgefüllt wird. Wir nennen hier den Bewegungszustand stationär, wenn die Geschwindigkeit sich mit der Zeit nicht ändert.

Die Flüssigkeitsbewegung ist dann noch weiter durch Grenzbedingungen zu bestimmen, etwa dadurch, dass die Geschwindigkeit des Ein- und Ausströmens an der Begrenzung des durchflossenen Raumes gegeben und die Ergiebigkeit von Zu- und Abflüssen im Innern bekannt ist.

Von Kirchhoff[14]) sind ebenso die stationären galvanischen Ströme betrachtet worden. Hier bezeichnen wir die analog eintretende Grösse als das elektrische Potential oder die Spannung im durchflossenen Leiter und die Laplace'sche Gleichung als Bedingung für den stationären Zustand drückt aus, dass in keinem Element des Leiters eine Anhäufung von positiver oder negativer Elektricität statt-hat. Als Grenzbedingungen für die Bestimmung der Strömung wird man die Spannungen an den Ein- und Austrittstellen des galvanischen Stromes zu Grunde legen, und die Bedingung, dass im übrigen an der Begrenzung des Leiters Elektricität nicht entweicht.

6.

Eine besonders anschauliche Vorstellung von den verschiedenen nunmehr bezeichneten Vorgängen und der zwischen ihnen hergestellten Analogie gewinnen wir mit Hülfe der zuerst von Gauss in der Attractionstheorie betrachteten Flächen constanten Potentials oder „Gleichgewichtsflächen“.[15]) Denken wir uns ein System von anziehenden Massen gegeben, und fragen nach der Arbeit, welche wir aufwenden müssen, um einen Massenpunkt, den wir der Anziehung jenes Systems unterwerfen, zu verschieben, so ist für die Richtung der Anziehung selbst diese Arbeit ein Maximum. Dagegen ist, um den Punkt senkrecht zu der Richtung der Anziehung zu verschieben, keine Arbeitsleistung erforderlich. Die Gesammtheit aller Punkte nun, in welche der Massenpunkt ohne Arbeitsleistung gebracht werden kann, erfüllen eine geschlossene Fläche, eben die Gauss'sche Fläche constanten Potentials, die wir nach Clairaut auch als Niveaufläche bezeichnen. Und wenn wir solche Flächen für alle Punkte des Raumes construiren, so erhalten wir ein ganzes System von einander schalenförmig umschliessenden Niveauflächen. Die Richtungen der Anziehung für alle Punkte des Raumes dagegen setzen sich zu Linienzügen zusammen, welche die Niveauflächen überall senkrecht durchschneiden und die man nach Faraday, der die Vorstellung dieser Linienzüge besonders für die Elektricitätstheorie ausgestaltet hat, als Kraftlinien bezeichnet.[16])

Das System der Niveauflächen und Kraftlinien gewinnt für die soeben betrachteten stationären Vorgänge folgende anschauliche Bedeutung:

Für den stationären Temperaturzustand im Innern eines Körpers bilden die Niveauflächen die schon von Lamé eingeführten Flächen gleicher Temperatur, die sie senkrecht durchsetzenden Linien bezeichnen die Richtung des Wärmestromes; in gleicher Weise bilden diese Linien für die oben bezeichnete Flüssigkeitsbewegung und für den stationären galvanischen Strom die Stromlinien, während die Niveauflächen nur für den letzteren Fall uns anschaulich als Flächen gleicher elektrischer Spannung entgegentreten.

Wir haben uns in den soeben entwickelten Beispielen ausschliesslich auf räumliche Vorgänge bezogen. Die Betrachtung analoger Fragen für ebene und gekrümmte Flächen ist aber gleichfalls für physikalische Probleme wichtig, und andererseits gerade deshalb von besonderer Bedeutung, weil wir hier den hauptsächlichen Zugang für die analytische Behandlung unserer Probleme gewinnen.

Für den Fall des Attractionsproblems ist es notwendig, das Gesetz der Anziehung von Massen, die wir uns jetzt in der Ebene ausgebreitet zu denken haben, etwas zu modificiren, wenn wir auf eine der Laplace'schen Gleichung analoge Beziehung für die Ebene gelangen wollen.[17])

Die Betrachtung der stationären Wärmebewegung in einer Fläche ergiebt sich ebenso wie die Vorstellung von Flüssigkeitsbewegungen und galvanischen Strömen, die wir in solchen zweifach ausgedehnten Leitern herstellen mögen, durch eine directe Uebertragung der räumlichen Vorstellungen. An Stelle der Niveauflächen des Raumes treten jetzt, mit genau der früheren Bedeutung Niveaulinien, welche von den Strömungslinien senkrecht durchsetzt werden, so dass beide Systeme auf der Fläche ein Netz von einander überall senkrecht sich durchsetzenden Linien bilden.

7.

Hier brechen wir die Darstellung der physikalischen Fragen ab, um nunmehr die Entwicklung des mathematischen Apparates zu kennzeichnen, dessen wir zu ihrer Behandlung bedürfen.

Die Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen

Grösse im Sinne von Cauchy und Riemann bildet den Ausgangspunkt für die analytische Behandlung unserer Probleme; sie findet geradezu ihre physikalische Deutung in den zuletzt erwähnten stationären Strömungen auf ebenen und gekrümmten Flächen.

Ich muss mich hier darauf beschränken, in möglichst anschaulichem Gewande die für unsere Absicht in Betracht kommenden Sätze der Functionentheorie vorzuführen, und knüpfe deshalb an eine geometrische Fragestellung an, an das Problem der conformen Abbildung zweier Flächen aufeinander.

Die Aufgabe der Kartenprojection, von der Erdoberfläche ein ebenes Abbild zu schaffen, dessen einzelne Teile innerhalb gewisser Grenzen möglichst geringe Verzerrungen aufweisen, hat zu dem Problem geführt, eine Abbildung herzustellen, bei welcher die Winkel des Originals an jeder Stelle erhalten bleiben. Lagrange und Gauss haben die Aufgabe gelöst.[18]) Sie erscheint bei Gauss in folgender Form: Man teile die Ebene durch ein Netz von aufeinander senkrecht stehenden Geraden in kleine Quadrate. Gelingt es dann, auf der abzubildenden Fläche ein doppeltes System von krummen Linien zu bestimmen, welches die Fläche ebenfalls mit einem Netz von kleinen quadratischen Maschen überdeckt, und bezieht man die Quadrate der Ebene in stetiger Aufeinanderfolge je auf die Quadrate der Fläche, so erhält man eine Abbildung von der obengenannten Eigenschaft. Speziell wird auch eine Ebene conform auf eine zweite Ebene abgebildet, wenn man das quadratische Netz der Geraden in der ersten Ebene einem quadratischen Netz von krummen Linien in der zweiten Ebene entsprechen lässt. Die Darstellung einer complexen veränderlichen Grösse als Function einer zweiten ebensolchen Grösse liefert nun den allgemeinsten analytischen Ausdruck für diese conforme Abbildung zweier Gebiete aufeinander, insoferne sie zur Construction solcher einander entsprechender quadratischer Netze auf beiden Flächen führt.

Folgen wir der auf Gauss, Cauchy und Riemann zurückführenden Theorie dieser Functionen, in der von Riemann gegebenen

Entwicklung,[19]) so ist uns damit auch die unmittelbare Anknüpfung an unsere physikalischen Betrachtungen über die Potentialfunction gegeben[20]): Es erfüllen nämlich je die beiden Teile, in welche sich eine Function einer complexen Variabeln durch Trennung des Reellen und Imaginären spaltet, die Laplace'sche Gleichung des Potentials. Demnach lässt sich jedes quadratische Netz, wie es mit Hülfe irgend einer Function einer complexen Veränderlichen in der Ebene wie auf einer beliebigen Fläche entsteht, auch deuten als ein System von Niveau- und Kraftlinien für einen jeden der oben genannten physikalischen Processe.

So greift die Theorie der Functionen einer complexen Variabeln von Riemann ab mit ihrem ganzen Inhalte in die Entwicklung unserer physikalischen Fragen ein. Es gelingt, eine grosse Reihe der interessantesten physikalischen Probleme, für welche die Beschränkung auf ein ebenes oder allgemeiner zweifach ausgedehntes Gebiet möglich ist, zu lösen. Es behandeln Helmholtz und Kirchhoff[21]) die vielumworbene Frage von der Gestalt freier Flüssigkeitsstrahlen, die aus einem Gefäss von gegebener Oeffnung ausfliessen, und gelangen dadurch zu tieferer Einsicht in die Verhältnisse der Contraction eines Wasserstrahls; Kirchhoff[22]) untersucht die stationären elektrischen Strömungen in ebenen und gekrümmten Flächen. Umgekehrt bildet in einer Reihe[23]) von Arbeiten von C. Neumann, Christoffel, Heine,[24]) die physikalische Fragestellung den Ausgangspunkt zur Behandlung spezieller Probleme von vorzugsweise mathematischem Interesse; während endlich Klein[25]) die physikalische Anschauung als Hilfsmittel zu einer übersichtlichen Darlegung der Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale im Sinne Riemann's verwendet, und dabei den hohen heuristischen Wert, welcher einer derartigen Verknüpfung von concreten und abstracten Fragestellungen innewohnt, zu besonders lebendigem Ausdruck bringt.

Ich muss es umgehen, des Weiteren von den speziellen Untersuchungen über conforme Abbildung zu berichten, welche sich hier anschliessen, so interessante Beziehungen sie auch für unsere physikalischen Probleme darbieten und so weitgehende Anregung sie für die Entwicklung der Analysis geboten haben. Auf die besondere Bedeutung der Untersuchungen von Schwarz und C. Neumann für allgemeine Fragen der Functionentheorie haben wir noch weiterhin einzugehen.[26]) Auch berühren wir an dieser Stelle nur kurz die Ausdehnung der functionentheoretischen Untersuchungen auf Probleme des Raumes. Hier besagt ein interessanter Satz von Liouville, dass sich die conforme Abbildung auf die sogenannte Transformation durch reciproke Radien beschränkt, eine Transformation, von der W. Thomson (Lord Kelvin) in seiner Methode der elektrischen Bilder für die Aufgaben der Potentialtheorie Gebrauch gemacht hat.[27])

8.

Ich möchte vielmehr noch die Beziehung hervorheben, welche die Laplace'sche Gleichung verknüpft mit allgemeineren Differentialgleichungen der mathematischen Physik, die wir zum Teil schon in den vorausgehenden Entwicklungen bezeichnet haben. Dies führt uns zu der Einführung des Begriffs der Potentialfunction in der verallgemeinerten Form, durch welche in den Händen von Franz Neumann, Helmholtz, Kirchhoff, Maxwell die analytische Behandlung der verschiedensten Gebiete der Physik einheitlich gestaltet, ja zum Teil erst ermöglicht worden ist. Es handelt sich dann zuvörderst um Differentialgleichungen, in welche der in der Laplace'schen Gleichung vorkommende charakteristische Ausdruck zwar noch immer als wesentlich eintritt, aber in einer viel allgemeineren Beziehung, abhängig von der Potentialfunction selbst und abhängig insbesondere von der Zeit.

So gründet sich beispielsweise die analytische Darstellung der nichtstationären Wärmeströmung auf die Annahme, dass der an jeder Stelle des leitenden Körpers entstehende Ueberschuss der zugeleiteten über die dort abgeleitete Wärmemenge zur Erhöhung der Temperatur an eben dieser Stelle verwendet wird.[28]) Eine analoge Annahme liegt der Darlegung der nichtstationären elektrischen Strömung zu Grunde, auf welche besonders W. Thomson[29]) in seinen Untersuchungen über den Verlauf galvanischer Ströme in langen Kabeln eingegangen ist. Auch die von Fick[30]) entwickelte Theorie der Diffusion von Gasen geht von ähnlichen Vorstellungen aus.

Eine zweite Gruppe solcher Differentialgleichungen bezieht sich auf die Theorie der elastischen Schwingungen. In ihrer einfachsten Form treten solche Gleichungen schon bei dem oben besprochenen Problem der Bewegung einer schwingenden Saite auf und ergeben sich analog für die Bestimmung der Gestaltsänderung einer gespannten schwingenden Membran.[31]) Gleichungen derselben Form stellen die Fortpflanzung von Schwingungen in einem elastischen Medium dar, zum Beispiel die Ausbreitung der Schallwellen in luftförmigen, flüssigen, oder elastischen festen Körpern.[32]) Setzen wir hier mit Helmholtz die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials voraus, so giebt die Differentialgleichung die Fortpflanzung der Dichtigkeitsänderungen des (longitudinal) schwingenden Mediums.[33]) — Differentialgleichungen derselben Gestalt treten weiter aber bei ganz allgemeinen Schwingungen elastischer Körper auf, auch wenn keine Grösse existirt, die das mathematische Analogon des Geschwindigkeitspotentials der Flüssigkeiten ist. Alsdann sind auch Bewegungen der einzelnen Teilchen vorhanden, die den Charakter von Rotationen tragen. Spezielle derartige Bewegungen sind die transversalen Schwingungen des Lichtes, nach der auf Fresnel und Young zurückgehenden Hypothese.[34])

Hier gelten solche Differentialgleichungen direct von den Verschiebungen der einzelnen Teilchen; und aus diesen ergeben sich analoge für die Componenten der Rotation.[35]) In der neueren elektromagnetischen Lichttheorie endlich werden nach den Anschauungen von Maxwell[36]) diese Gleichungen für die elektrischen Kräfte, und daraus abgeleitet auch für die magnetische Induction der Aetherteilchen gedeutet; dann geben sie zugleich die Gesetze der von Hertz nachgewiesenen elektrischen Wellen.[37])

Weiter erfährt aber auch der Laplace'sche Ausdruck selbst eine Umgestaltung, wenn wir die in ihm vorhandene symmetrische Stellung der Coordinaten aufgeben und an seiner Stelle einen allgemeinen linearen Ausdruck in den partiellen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung mit beliebigen Coefficienten treten lassen. Es entspricht dies physikalisch dem Umstand, dass wir von der Betrachtung eines isotropen Mediums zu einem anisotropen übergehen. Untersuchungen dieser Art führen auf Duhamel und Lamé zurück, von welchen zuerst die Fortpflanzung der Wärme in krystallinischen Medien behandelt worden ist.[38])

Es sei endlich für die Bedeutung des Geschwindigkeitspotentials noch der Arbeiten von Helmholtz zur Theorie der Flüssigkeitsbewegungen gedacht, welche sich auf das Verhalten der sogenannten Wirbelfäden beziehen, innerhalb deren ein Geschwindigkeitspotential nicht existirt.[39]) Die an Rauchwirbeln in der Luft experimentell zu bestätigenden Gesetze der gegenseitigen Anziehung von Wirbelringen in einem elastischen oder flüssigen Medium lassen sich in Beziehung setzen zu den elektrodynamischen Wirkungen zweier Stromkreise aufeinander.

9.

Haben wir in den letzten Erörterungen versucht, die Einführung und umfassende Bedeutung der partiellen Differentialgleichungen der Physik zu kennzeichnen, so wenden wir uns jetzt zurück zu den Aufgaben der analytischen Bestimmung des einzelnen Naturvorganges aus gewissen Grenz- und Stetigkeitsbedingungen. Wir haben schon gelegentlich bei einzelnen Beispielen die Frage der Grenzbedingungen erwähnt; so bei der Bestimmung einer stationären Temperaturvertheilung im Innern eines Körpers aus den Temperaturen auf der Oberfläche, bei der Frage nach dem Verlauf eines galvanischen Stromes im Innern eines Leiters aus den auf der Begrenzung desselben gegebenen elektrischen Spannungen. Die physikalische Erfahrung zeigt in diesen Fällen, dass ein eindeutig bestimmter Zustand im Innern aus den Randbedingungen sich einstellt. Wir folgern dann zunächst für alle analogen physikalischen Vorgänge, das heisst also für alle diejenigen, für welche wir die gleichen analytischen Bedingungen als gültig annehmen, gleicherweise die eindeutige Bestimmtheit des Verlaufes. Wir sind aber auch geneigt, einen derartigen Satz in erweitertem Sinne für die eindeutige Existenz irgend welcher Potentialfunction auf Grund von physikalischen Anschauungen zu folgern, welche uns die jedesmal festzulegenden Grenzbedingungen als hinreichend und vollständig erscheinen lassen.

Sehen wir zu, wie sich die Frage nach der Berechtigung einer solchen Schlussweise entwickelt hat.

Wir werden für die Existenzbeweise in erster Linie zur Darlegung der Methoden geführt, welche die wirkliche Aufstellung der Potentialfunction aus den gegebenen Randbedingungen zum Zwecke haben. Die Betrachtungen Fourier's über die Darstellbarkeit einer willkürlichen Function durch eine trigonometrische Reihe, über die wir bei dem Probleme der schwingenden Saite berichtet haben, sind der Ausgangspunkt dieser Untersuchungen. An Fourier's Entwicklungen und an gewisse von Laplace eingeführte Functionen[40]) anknüpfend, hat Poisson die Lösung einer grossen Klasse von Randwertaufgaben in der Form von Reihen und mit Hülfe von Integrationsprocessen gegeben.[41]) Die Methoden der Functionentheorie haben dann weiterhin den Bereich jener Aufgaben noch wesentlich verallgemeinert. Insbesondere aber haben sie auch jene fundamentalen Untersuchungen Dirichlet's veranlasst, welche die Betrachtungen von Euler, von Lagrange, und Fourier über die Gültigkeitsgrenzen der trigonometrischen Reihen zu einem gewissen Abschluss brachten.[42])

Die nun folgenden Versuche für die Existenzbeweise einer eindeutigen Potentialfunction für ein Gebiet von beliebig gestalteter Begrenzung knüpfen direct an die allgemeinen Untersuchungen an, die wir oben in den Werken von Green und Gauss bezeichnet haben. Bei Green wird die Frage des Existenztheorems direct aus der physikalischen Bedeutung seiner Probleme gefolgert. Gauss dagegen verwendet für den Beweis seines oben mitgeteilten Fundamentalsatzes der Attractionstheorie, ebenso wie später Thomson und Dirichlet, eine analytische Schlussweise, die von Riemann mit dem Namen des „Dirichlet'schen Prinzips" bezeichnet worden ist[43]).

Bei dieser Schlussweise handelt es sich um die Annahme, dass eine gewisse im Innern unseres Gebietes stets positive veränderliche Grösse notwendig einen kleinsten Wert annehmen müsse. Es war Weierstrass, welcher auf Grund seiner fundamentalen Untersuchungen über Variationsrechnung zeigte, dass diese Schlussweise nicht stichhaltig ist; dass man nur das Vorhandensein einer unteren Grenze für jenen Functionswert erschliessen könne, ohne allgemein sagen zu können, dass es auch wirklich eine den geforderten Grenz- und Stetigkeitsbedingungen genügende Function gebe, für welche jene untere Grenze thatsächlich eintritt.[44])

Diese durchaus neue und den früheren Betrachtungen durchaus fremde Erkenntnis ist von der grössten Bedeutung für die weitere Entwicklung der gesamten Functionentheorie nicht nur, sondern auch für unsere Auffassung der Stellung der reinen Grössenlehre zu ihren Anwendungen in der Geometrie und in der mathematischen Physik geworden.

Für unsere Frage der Existenzbeweise bewirkte sie ein Zurückgehen auf die speziellen, auf Grund der Poisson'schen Methoden behandelten Fälle, und eine erneute kritische Untersuchung derselben mit Bezug auf die Gültigkeitsgrenzen der dort verwendeten Entwicklungen. Weiter aber wurden von Schwarz, von C. Neumann, und Poincaré neue Näherungsmethoden ersonnen, welche die Randwertaufgaben für sehr allgemeine, genau präcisirte Grenz- und Stetigkeitsbedingungen auf Grund von convergenten Processen lösen.[45]) Sie liefern den strengen Beweis für die Existenz und Bestimmtheit jener Lösungen, wenn sie auch bei ihrer grossen Complicirtheit eine wirkliche rechnerische Durchführung schon der einfachsten Fälle kaum gestatten.

10.

Fragen wir uns nunmehr ganz allgemein nach der Bedeutung, welche für die Formulirung und Entwicklung unserer physikalischen Probleme derartige mathematisch exacte Untersuchungen besitzen, wie wir sie eben bezeichnet haben, und wie sie das Hereinziehen der allgemeinsten mathematischen Functionsbegriffe veranlasst.

Zunächst führt ja die Anordnung und der Verlauf eines physikalischen Vorganges, so wie wir ihn innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Messung einleiten und verfolgen können, wesentlich zu Interpolationsformeln. Die Reihen und Integrale, welche die Anfangsbedingungen, wie diejenigen, welche die Lösungen im mathematischen Sinne darstellen, sind ersetzt durch Summenformeln, aus einer endlichen, die gegebenen Genauigkeitsgrenzen verbürgenden Gliederzahl.

So scheint zunächst „die physikalische Genauigkeit“ der Messung die mit wachsender Verfeinerung der Methoden sich erhöht, jeweils auch die Grenze zu bezeichnen, bis zu welcher der Verfolg der mathematischen Untersuchungen noch einen physikalisch wertvollen Sinn besitzt.[46])

Die wissenschaftliche Beschreibung eines physikalischen Vorganges hat aber nicht blos die einzelnen Beobachtungen innerhalb der Genauigkeitsgrenzen exact wiederzugeben; sie muss auch möglichst einfach und umfassend sein.[47]) So gehen wir für die anschauliche und bildliche Wiedergabe des Vorganges aus von einer möglichst geringen Zahl einfacher Hypothesen, als der Grundvorstellungen eines gewissen Bereiches physikalischer Erscheinungen. Aus ihnen und zu ihrem Ersatz entwickeln wir die Grundgleichungen für unsere analytische Darstellung in der Gestalt der Differentialgleichungen des Problems.[48])

Wenn dann aber die vornehmste Aufgabe naturwissenschaftlicher Erkenntnis darin besteht, durch die Macht des Gedankens aus früheren Erfahrungen auf neue zukünftige Erfahrungen zu schliessen[49]) und wenn, abgesehen von der Intuition des Genies, die Entwicklung von bildlichen Vorstellungen, von Analogieen es ist, die unser Denken dazu befähigt,[50]) so werden wir von der auf jene Grundgleichungen gestützten Darlegung von Naturvorgängen fordern müssen, dass sie uns neben der Beschreibung und Zusammenfassung der unmittelbar beobachteten Ereignisse, noch Ausblick und Richtung für neue zu erwartende Erscheinungen gebe. Bis wie weit dabei eine Uebereinstimmung zwischen den Naturvorgängen und ihren analytischen Bildern bestehen mag, darüber lässt sich von vorn herein Allgemeines nicht angeben. Und so erscheint es hier als die Aufgabe der mathematischen Forschung, den analytischen Beziehungen, die uns die Stelle der Hypothesen vertreten, in allen ihren Consequenzen nachzugehen, um diese zum Vergleich mit der Erfahrung geeignet zu machen.

In diesem Sinne haben sich, um nur ein Beispiel, und eines der wichtigsten in der modernen Physik, anzuführen, die Untersuchungen entwickelt, welche sich an Faraday's Vorstellungen von der Fortpflanzung elektrischer Kräfte durch den Raum anknüpfen, und welche auf eine Verbannung der Hypothese von den Fernkräften abzielen. Hier sind durch die genialen Gedanken Maxwell's die Analogieen mit der Fortpflanzung elastischer Kräfte in einem continuirlichen Medium nach ihren Consequenzen entwickelt worden,[51]) und weiterhin alle die rein mechanischen Vorstellungen entstanden, durch die man sich die Fortpflanzung solcher Kräfte von Teilchen zu Teilchen bildlich versinnlicht hat.[52])

Der mathematischen Forschung erwächst aber gerade in Folge ihrer hier ausgesprochenen Aufgabe eine neue Forderung, die sich auf ihre Methode bezieht:

Wir erkennen in der Darstellung durch reine Grössenbeziehungen, als dem auf das geringste Mass von Erfahrungsthatsachen beschränkten Gebiete, die präciseste Form der Beschreibung unserer physikalischen Vorgänge, in welcher auch die zwischen getrennten Gebieten der Physik hergestellten Analogieen zu ihrem klarsten und einfachsten Ausdruck gelangen.[53])

Da ist es von fundamentaler Bedeutung, dass wir die Lehre von den reinen Grössenbeziehungen, das ist die reine Mathematik, völlig unabhängig gestalten von den Gebieten der Anschauung, in die wir hier die Geometrie sowol wie die Mechanik und Physik einbegreifen. Es sind sonach die Forderungen, welche die Gebiete der Anwendungen an den von ihnen benützten analytischen Apparat stellen müssen, in Uebereinstimmung mit den Forderungen, welche unsere Wissenschaft als solche, unabhängig von jeder Rücksicht auf ihre Beziehung zu den Anwendungen, für ihren in sich geschlossenen Aufbau stellen muss.

So sind die Grundlagen der reinen Grössenlehre zu verstehen, die Weierstrass in der Theorie von den analytischen Functionen gegeben hat; in diesem Sinne ist Kronecker für die Darlegung der gesammten Analysis aus dem engsten Zahlbegriff eingetreten.[54]) Die so verstandene Analysis ist der möglichst voraussetzungslose Vergleichsmassstab, welcher uns die, den Grenzen unseres Erkennens angemessene, Beschreibung der Vorgänge in der Natur zu vermitteln hat.

Schon Maxwell sagt hierüber bei Besprechung der Bedeutung von Analogieen, in der schon genannten Schrift über die Kraftlinien:

„Um physikalische Vorstellungen zu erhalten ohne eine spezielle physikalische Theorie aufzustellen, müssen wir uns mit der Existenz physikalischer Analogieen vertraut machen. Unter einer physikalischen Analogie verstehe ich jene teilweise Aehnlichkeit zwischen den Gesetzen eines Erscheinungsgebietes mit denen eines anderen, welche bewirkt, dass jedes das andere illustrirt. Auf diese Art sind alle Anwendungen der Mathematik in der Wissenschaft auf Beziehungen zwischen den Gesetzen der physikalischen Grössen zu denen der ganzen Zahlen gegründet, so dass das Streben der exacten Wissenschaft darauf gerichtet ist, die Probleme der Natur auf die Bestimmung von Grössen durch Operationen mit Zahlen zurückzuführen.“[55])

Wenn wir so auf Grund einer tieferen Einsicht in die gegenseitige Stellung jener Gebiete zu der Forderung gelangen, das System der reinen Grössenlehre in sich zu gründen und zu entwickeln, so haben wir andererseits um so stärker den massgebenden Einfluss und die Bedeutung zu betonen, welchen für Umfang und Ziele dieser Entwicklung eben die Probleme der Anschauung besitzen. Nicht allein zur Erweiterung des Gebietes nach Inhalt und Methode haben sie in den mannigfachsten Richtungen, deren einige ich in dem gegenwärtigen Vortrage darzulegen versucht habe, den Anstoss gegeben; sie haben auch zur Vertiefung, zur wiederholten Prüfung der Grundlagen desselben veranlasst und beigetragen. Die Untersuchungen von Helmholtz über den empirischen Ursprung unserer Erkenntnis von Zahl, Raum und Zeit[56]) entstammen ebenso einer physikalischen Anschauungsweise, wie die allmähliche Entwicklung des allgemeinen Functionsbegriffes wesentlich durch die Discussion physikalischer Probleme gefördert worden ist.

Lassen Sie mich schliessen mit den bedeutsamen, und auch heute noch in ihrem vollen Umfang gültigen Worten, mit welchen Fourier in der Einleitung zu seiner Théorie analytique de la chaleur diese Stellung der Mathematik zu den Naturwissenschaften kennzeichnet[57]):

„Das gründliche Studium der Natur bildet die reichste Quelle für mathematische Entdeckungen. Es setzt ein solches Studium den Untersuchungen ein festes Ziel und schliesst damit unbestimmte Fragen und zwecklose Rechnungen aus. Es dient aber auch direct der Ausgestaltung der Analysis selbst, und der Klarlegung ihrer bleibenden Grundlagen. Diese aber gerade sind es, die sich in allen Naturvorgängen wiederfinden!“

Inhaltsübersicht und litterarische Notizen.

Der vorstehende Vortrag wendet sich, seiner Bestimmung gemäss, über den engeren Kreis der Fachgenossen hinaus; er hat seinen Zweck erreicht, wenn es ihm gelungen ist, das Interesse gefördert zu haben für den Zusammenhang und das Ineinandergreifen der Fragestellungen und Aufgaben der modernen mathematischen Forschung mit den allgemeineren Problemen naturwissenschaftlicher Erkenntnis. Die nachfolgenden litterarischen Notizen, bei deren Zusammenstellung mich Herr Assistent W. Kutta in dankenswerter Weise unterstützt hat, wollen mit der gleichen Absicht neben spezielleren Bemerkungen eine Uebersicht über die wichtigsten hierhergehörigen Untersuchungen geben, die, wenn auch dem Fachmanne wohlbekannt, doch zu einer Orientirung von Nutzen sein kann.

Bezüglich der Litteratur über diesen Abschnitt sei verwiesen auf die, auch für das Folgende vielfach zu benützenden Zusammenstellungen in Todhunter's „History of the mathematical theories of attraction" (London 1873) und in dem „Abriss der Geschichte der Potentialtheorie" von M. Bacharach (Göttingen 1883); auch vergleiche man hier und im Folgenden den Artikel über „Potentialtheorie" von H. Burkhardt und F. Meyer (Probeartikel aus der „Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften", Leipzig 1896).

1) Die Aufstellung dieser Function für ein endliches System von Massenpunkten, wie für continuirliche Massen hat zuerst Lagrange in der Abhandlung „Sur l'équation séculaire de la lune" (Artikel 12), Mémoires de l'Académie Royale des sciences de Paris, Savants étrangers, Bd. VII, 1773 (Oeuvres, Bd. VI, 1873) gegeben, wie in dem Artikel über „Potentialtheorie" von Burkhardt und Meyer mit Recht hervorgehoben ist. Hiernach sind die Angaben zu berichtigen, bezw. zu ergänzen, welche Baltzer in dem Aufsatz „Zur Geschichte des Potentials" (Crelle's Journal Bd. 86), und Wangerin in den Anmerkungen zu Gauss' „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhält-

nisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte" und zu Green's sogleich näher zu bezeichnendem Aufsatz zur Theorie der Elektricität und des Magnetismus in Ostwald's Classiker-Ausgabe (No. 2, Seite 53 und No. 61, Seite 119) über die Einführung dieser Function bei Lagrange und bei Laplace gemacht haben.

2) Das Wort „potential function" ist eingeführt von Green im „Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism", Nottingham 1828, Artikel 1. Abgedr. im Crelle'schen Journal Bd. 39, 44, 47 (1850—54), in den „Mathematical papers of the late G. Green" (Herausgegeben von N. M. Ferrers, London 1871) und der ebengenannten deutschen Ausgabe von Oettingen und Wangerin in Ostwald's Classikern (No. 61, 1895). — Das Wort „Potential" hat Gauss zuerst in der in voriger Anmerkung aufgeführten Abhandlung „Allgemeine Lehrsätze etc." (Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839, Leipzig 1840, Werke Bd. 5) im dritten Artikel eingeführt. — Die Bezeichnung „force-function" ist von Hamilton in dem Aufsatz „On a general method in dynamics" Artikel 1 (Philosophical Transactions of the Royal Society of London 1834, Teil II) gegeben. Man vergleiche hiezu den eben erwähnten Aufsatz Baltzer's.

3) Laplace, Théorie des attractions des sphéroides et de la figure des planètes. Mémoires de l'Académie R. des sciences. Paris 1782, veröffentl. 1785. Oeuvres Bd. 10 (1894).

Poisson, „Remarques sur une équation qui se présente dans la théorie des attractions des sphéroides". Nouveau Bulletin des sciences par la société philomathique de Paris. Bd. 3, 1813, S. 388.

4) Man sehe hierzu die aus den Jahren 1845 und 1854 stammenden Anmerkungen W. Thomson's zu den Abhandlungen „On the mathematical theory of electricity in equilibrium", und „On the uniform motion of heat in homogeneous solid bodies, and its connexion with the mathematical theory of electricity" (Reprint of papers on electrostatics and magnetism, London 1872, No. II u. I, aus denen hervorgeht, dass Thomson im Jahre 1845 die oben genannte Green'sche Abhandlung zuerst in die Hände bekam. Weiter vergl. man auch die einleitenden Notizen Thomson's anlässlich des Wiederabdrucks der Green'schen Abhandlung im Crelle'schen Journal Bd. 39, S. 73—75 (1850), wo auch die in der Zwischenzeit erschienenen, mit den Green'schen parallel laufenden Untersuchungen citirt sind.

5) Gauss „Intensitas vis magneticae terrestris" (1832), Art. 2; „Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus" (1838), Einleitung und Art. 32; „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte" (1839) Art. 36; endlich die Anzeige von Gauss über die letztere Abhandlung (1840). Werke, Bd. 5.

3. Die Probleme der Wärmetheorie . . . . . . 8—11

6) Zur Geschichte des Problems der schwingenden Saite und für das Folgende sehe man vor allem Riemann's Darlegungen in seiner 1854 verfassten, 1867 von Dedekind in den Abhandlungen der K. Gesellschaft d. W.

zu Göttingen veröffentlichten Habilitationsschrift „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe". (Werke No. XII.)

7) Die ersten Untersuchungen von Fourier zur Wärmetheorie gehen auf das Ende des vorigen Jahrhunderts zurück, und wurden der Pariser Akademie am 21. Dezember 1807 vorgelegt. Ueber dieselben gibt uns nur ein Bericht im 1. Bande des Nouveau Bulletin des sciences, par la société philomathique de Paris, Heft 6, vom März 1808, S. 112, verfasst von Poisson, Aufschluss. Ueber die weiteren Abhandlungen Fourier's bis zu seiner 1822 veröffentlichten „Théorie analytique de la chaleur" vergleiche das Vorwort Darboux's zum 1. Bande der „Oeuvres de Fourier" (Paris 1888), sowie das Vorwort zur „Théorie analytique de la chaleur" von Fourier selbst. — Ueber die weitere Entwicklung der Lehre von der Wärmeleitung vergleiche man auch das soeben erschienene Werk von E. Mach „Die Principien der Wärmelehre, historisch und kritisch entwickelt", Leipzig 1896, speziell die Abschnitte zur Wärmeleitung.

8) Leibniz, Protogaea sive de prima facie telluris . . . dissertatio; im Abriss veröffentlicht in den Acta Eruditorum vom Jahre 1693; die Abhandlung selbst aus dem Nachlass von Leibniz 1749 von C. L. Scheidt herausgegeben. Opera omnia, ed. Dutens, Tom. II, Pars II. Genevae 1768.

9) Man sehe hierüber W. Thomson, „On the secular cooling of the earth", Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 1862; mit Ergänzungen wiederabgedruckt als Anhang D im „Treatise on natural philosophy" von W. Thomson und P. G. Tait, Band 2.

4. Physikalische Analogieen . . . . 11—13

10) J. C. Maxwell „On Faraday's lines of force" Transactions of the Cambridge philos. soc. Bd. 10 (1855 u. 1856); wiederabgedruckt in den Scientific Papers, herausgegeben von Niven, Cambridge 1890, Bd. 1, No. VIII; übersetzt von Boltzmann in Ostwald's Classikern No. 69. Das Citat des Textes ist, wie das später folgende dieser Uebersetzung entnommen. Hier und für die folgenden Betrachtungen sei auf Boltzmann's Anmerkungen dazu ganz besonders verwiesen.

11) Es ist dies die schon oben (Anmerkung zu Seite 11) erwähnte Abhandlung „On the uniform motion of heat etc." aus dem Cambridge Math. Journal, Febr. 1842; wiederabgedruckt mit Zusätzen im Philosophical Magazine von 1854, und als No. I in dem 1872 erschienenen Reprint of papers on electrostatics and magnetism.

Die im Texte genannten Analogieen finden sich erwähnt u. a. bei Cauchy in dem Aufsatz „Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement des fluides", Exercices de mathématiques, III, 1828 (Oeuvres compl. S. II, Tom. 8 1890), bei Lamé in dem „Mémoire sur les lois de l'équilibre du fluide éthéré", Journal de l'école polytechnique, Heft 23 1834 und weiter u. a. auch in der Einleitung zu seinen „Leçons sur les coordonnées curvilignes", Paris 1859. Deutlicher hervorgehoben und auch für die Beziehung der Attractionstheorie zur Theorie der Elektricität und der Wärme in einem speciellen Falle verwertet wurde das Vorhandensein dieser Analogieen von Chasles in den Aufsätzen „Mémoire sur l'attraction des ellipsoides" und

„Mémoire sur l'attraction d'une couche ellipsoidale infiniment mince et les rapports qui ont lieu entre cette attraction et les lois de la chaleur en mouvement dans un corps en équilibre de température", Journal de l'école polyt. Heft 25, 1837. Man sehe hierzu ferner die zuerst in den Comptes rendus von 1838, (später 1840 durch Anmerkungen erweitert, im Liouville'schen Journal Bd. 5) erschienene Abhandlung von Chasles „Nouvelle solution du problème de l'attraction d'un ellipsoide etc." (übersetzt in Ostwald's Classikern No. 19) sowie die in den Comptes rendus vom Jahre 1839 enthaltene Note „Énoncé de deux théorèmes généraux sur l'attraction des corps et la théorie de la chaleur", die später ausführlicher in der Connaissance des Temps pour 1845 veröffentlicht worden ist.

12) Man lese hierüber die Einleitung zu der oben erwähnten Abhandlung Maxwell's „Ueber Faraday's Kraftlinien"; ferner Kirchhoff's „Mechanik", Einleitung, und Hertz „Principien der Mechanik", Einleitung, sowie dessen „Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft", Einleitende Uebersicht „B. Zur Theorie"; endlich die Ausführungen von Mach in seiner „Geschichte der Mechanik" im 4. und 5. Kapitel, dessen schon oben erwähnte „Principien der Wärmelehre" (Seite 396 u. f.) sowie seine „Populär-wissenschaftlichen Vorlesungen", speziell Vorl. 10 u. 13.

5. Beziehungen der Attractionstheorie zur Hydrodynamik und Elektrodynamik . . . . 13—14

13) Helmholtz „Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen". Crelle's Journal, Bd. 55 (1858); und „Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen". Monatsberichte der Berliner Akad. 1868. Wiederabgedruckt in den „Wissenschaftlichen Abhandlungen" Bd. 1 (1882) No. V und IX.

14) Kirchhoff „Ueber die Anwendbarkeit der Formeln für die Intensitäten der galvanischen Ströme in einem Systeme linearer Leiter auf Systeme, die zum Teil aus nicht linearen Leitern bestehen". Poggendorff's Annalen, Bd. 75 (1848) und „Ueber eine Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst". Poggendorff's Annalen, Bd. 78 (1849). Wiederabgedruckt in den gesammelten Abhandlungen von G. Kirchhoff (Leipzig 1882), 4. und 5. Abh. Vergl. ferner die 9. und 10. Vorlesung des 3. Teiles der Kirchhoff'schen Vorlesungen über mathematische Physik („Elektricität und Magnetismus"). Ueber die speziellen Untersuchungen zur Theorie der stationären galvanischen Ströme in ebenen und gekrümmten Flächen, von denen Seite 17 des Textes handelt, vergleiche die unten folgenden Citate.

6. Niveauflächen und Kraftlinien . . . . 14—15

15) Gauss in den schon oben erwähnten Abhandlungen „Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus" (1838), Art. 7 und „Allgemeine Lehrsätze etc." (1839), Art. 4. Ferner Chasles (1842) in dem gleichfalls schon angeführten Aufsatz in der Connaissance des Temps v. J. 1845. — Bezüglich des Auftretens der „Niveauflächen" in älteren Arbeiten, bei Clairaut und Euler vergl. Baltzer's Note „Zur Geschichte des Potentials" im 86. Band des Crelle'schen Journals

Weitere Bemerkungen (über Maclaurin) in Todhunter's „History of the theory of attraction" Bd. I. — Man sehe übrigens noch den Art. 11 der schon oben citirten Abhandlung von Chasles „Sur l'attraction des ellipsoides" (aus dem Jahre 1837), Journal de l'école polyt. Heft 25), in welcher Chasles die confocalen Ellipsoide als Gleichgewichtsflächen für die Anziehung eines elektrisch geladenen Ellipsoides einführt und gleichzeitig die Krümmungslinien der zugehörigen Hyperboloide als Bahnen für den angezogenen Massenpunkt. — Ueber die Bedeutung der Niveauflächen in der Wärmetheorie vergleiche man Lamé „Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température". Journal de Liouville, Bd. 2 (1837), abgedruckt aus dem 5. Bd. der Mémoires prés. par divers savants (Paris, veröffentlicht 1838); ferner die schon oben (in der Anmerkung No. 11) erwähnte Abhandlung von Chasles „Sur l'attraction d'une couche ellipsoidale" aus dem Jahre 1837.

16) Faraday in seinen „Experimental researches in electricity", 1. Serie, Art. 114 u. ff. (Philosophical Transactions of the Royal Society of London 1831, veröffentl. 1832 T. I), dann ausführlich in der 28. und 29. Serie. (Ebenda 1851, veröffentl. 1852.) Man sehe weiter die in der vorigen Anmerkung angeführten Abhandlungen von Chasles (1837), sowie die von Lamé (1837) in letzterer besonders die in § XII eingeführte Bezeichnung „filet de chaleur" für die Stromfäden der Wärme. — Endlich in allgemeiner und zugleich mathematisch präcisirter Form die mehrfach genannte Abhandlung von Gauss „Allgemeine Lehrsätze" Art. 4 (1839).

17) Das Problem der Attraction für eine Massenverteilung in der Ebene ist zuerst von Laplace bei Betrachtung der Newton'schen Anziehung eines unbegrenzten Cylinders gegeben worden. „Traité de mécanique céleste", Bd. 1, 1796, Oeuvres Bd. 1, 1843, S. 166. Der Ausdruck „Logarithmisches Potential" wurde 1861 von C. Neumann in der Abhandlung „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$", Crelle's Journal Bd. 59 eingeführt. — Man sehe hierzu noch in Kirchhoff's Vorlesungen über mathematische Physik, „Mechanik" den § 9 der 16. Vorlesung.

7. Untersuchungen zur Functionentheorie. Conforme Abbildung . . . . 15—18

18) Lagrange „Sur la construction des cartes géographiques" Nouveaux Mémoires de l'Académie royale de Berlin, 1779 (Oeuvres, Bd. 4, Paris 1869). Gauss „Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird". Astronomische Abhandlungen, herausgegeben von Schumacher, 3. Heft, 1825 (Werke, Bd. 4). — Beide Abhandlungen erschienen in Ostwald's Classikern No. 55 (herausgegeben von Wangerin), wo auch die ältere Litteratur (Lambert) angeführt ist. Für weitere litterarische Angaben zur Theorie der conformen Abbildung und ihrer Anwendungen mag man etwa die „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und

der conformen Abbildungen verbunden mit Anwendungen auf mathematische Physik" von Holzmüller (1882) nachsehen.

19) Hierher gehören: Die Beweise von Gauss zur Wurzelexistenz der algebraischen Gleichungen aus den Jahren 1799 und 1849 (Werke Bd. 3 Ostwald's Classiker No. 14); Cauchy's Abhandlung „Sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires" (Bulletin de Férussac Bd. 3, 1825) und dessen Untersuchungen über den „Calcul des résidus" in den Exercices de mathématiques vom Jahre 1826 und 1827, Oeuvres, Serie II, Bd. 6 und 7; Riemann's „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse" Inaug.-Diss. 1851, Ges. Werke No. 1 und dessen „Theorie der Abel'schen Functionen" Crelle's Journal Bd. 54, 1857, Werke No. 6.

20) Man sehe hier etwa Klein's Vortrag über „Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik" (gehalten auf der Wiener Naturforscher-Versammlung, Sept. 1894, veröffentl. im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 4). Weiter sehe man auch das noch zu nennende Werk von Klein „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale".

21) Helmholtz „Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen". Monatsber. der Berliner Akademie, 1868; wiederabgedruckt in den Wissenschaftlichen Abhandlungen, Bd. 1, No. IX. — Kirchhoff, „Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen". Crelle's Journal, Bd. 70 (1869); Ges. Abh. Seite 416. — Ferner Vorlesungen über math. Physik, „Mechanik". 21. und 22. Vorlesung. — Wir erwähnen zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen noch die neueren Arbeiten von Voigt (Nachrichten der Ges. d. W. zu Göttingen, 1885, wiederabgedruckt in den Mathematischen Annalen, Bd. 28), Kotelnikow (Sitzungsberichte des naturforschenden Vereins zu Kasan, Bd. 8, 1889), Joukowsky (Berichte der Moskauer mathem. Gesellschaft, Bd. 15, 1890) [Referate der letzten beiden (russischen) Arbeiten in den Fortschritten der Mathematik, Bd. 21 und 22]; ferner die Aufsätze von Michell (Philos. Transactions of the Royal Society, London 1890), Love (Proceedings of the Cambridge Philos. Soc. 1891) und Rethy (aus den Abh. der Ungar. Akad. d. W. von 1893 abgedruckt in den Mathem. Annalen, Bd. 46). Man vergleiche ferner hier die Uebersicht in Lamb's „Treatise on fluid Motion" (1879, bearbeitet 1884 von Reiff unter dem Titel „Einleitung in die Hydrodynamik") Capitel V und Litteraturverzeichnis.

22) Kirchhoff „Ueber den Durchgang des elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige". (Mit Nachtrag) (Poggendorff's Annalen, Bd. 64, 1845 und Bd. 67, 1846). — „Ueber die stationären elektrischen Strömungen in einer gekrümmten leitenden Fläche" (Monatsberichte der Berliner Akad. 1875). — Diese Abhandlungen wiederabgedruckt in den „Gesammelten Abhandlungen." — Ferner „Vorlesungen über Mathematische Physik; III. Elektricität und Magnetismus". 11. Vorlesung. — Man sehe ferner auch die Note von C. Neumann im 10. Bande der math. Annalen „Ueber den stationären elektrischen Strömungszustand in einer gekrümmten leitenden Fläche", sowie Töpler's Aufsatz im 160. Band von Poggendorff's Annalen: „Zur Theorie der

stationären elektrischen Strömung in gekrümmten Flächen". Weiter Maxwell's „Treatise on electricity and magnetism" (London 1873, übersetzt von Weinstein, Berlin 1883), Bd. 1, Cap. 12.

Die Anwendung der gleichen functionentheoretischen Prinzipien auf den Raum bei Voraussetzung einer axialen Symmetrie führt Kirchhoff zur Lösung des statischen Problems der Potentialverteilung zwischen zwei Condensatoren: „Zur Theorie des Condensators". (Berliner Monatsber. vom März 1877, Ges. Abhandlungen S. 101.)

23) Für die hierhergehörigen Arbeiten von C. Neumann vergl. man die Zusammenstellung im Vorwort zu dessen „Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential". (Leipzig 1877.)

24) Christoffel, „Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie". Annali di Matem. Bd. 1, 1867.

Heine, „Ueber die constante elektrische Strömung in ebenen Platten". Crelle's Journal Bd. 79 (1875).

25) Klein, „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen". Leipzig 1882. Ferner „Ueber Arithmetisirung der Mathematik". Nachrichten der Ges. d. W., Göttingen 1895.

26) Hierher gehören insbesondere ausser schon Genanntem die Untersuchungen von H. A. Schwarz über einzelne Probleme der conformen Abbildung, welche man im 2. Bande seiner „Gesammelten mathematischen Abhandlungen" (Berlin 1890) zusammengestellt findet.

27) W. Thomson (Lord Kelvin), „Electric images". (Drei Briefe an Liouville) Liouville's Journal Bd. 10 und 12 (1845 und 1847). Abgedruckt in den „Papers on electrostatics and magnetism" No. XIV. Man sehe ferner die von Liouville im Anschluss an den letzten dieser Briefe gegebene Note (a. a. O. und gleichfalls in den Papers abgedruckt), sowie zwei Aufsätze von Lipschitz: „Untersuchungen über die Anwendung eines Abbildungsprinzips auf die Theorie der Verteilung der Elektricität" und „der Gravitation" im 61. Bd. von Crelle's Journal (1861), denen eine spezielle, auf ein Kugelsegment bezügliche Untersuchung im 58. Bd. vorausgeht.

8. Allgemeinere partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der mathematischen Physik . . . . . 18—20

28) Die ersten hierhergehörigen Untersuchungen sind enthalten in den schon oben genauer angeführten Arbeiten von Fourier, sowie in Poisson's „Mémoire sur la distribution de la chaleur dans les corps solides" (Journal de l'école polyt. 19. Heft, 1823) und in dessen „Théorie mathématique de la chaleur" (Paris 1835). Eine Reihe der hier und im Folgenden besprochenen Fragen behandeln die Vorlesungen Riemann's über „Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen", herausgegeben von Hattendorff (1869).

29) W. Thomson, „On peristaltic induction of electric currents (in submarine telegraph wires)“ Proceedings of the Royal Society of London, Bd. 8 (1856).

30) Fick, „Ueber Diffusion“, in Poggendorff's Annalen, Bd. 94 (1855).

31) Poisson „Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques“ Mémoires de l'Académie, Bd. 8, Paris (1829).

Lamé „Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides“. Paris (1852).

Clebsch „Theorie der Elasticität fester Körper“ Leipzig (1862).

Bourget „Mémoire sur le mouvement vibratoire des membranes circulaires“ Annales de l'école normale, Bd. 3 (1866).

Rayleigh „Theory of sound“ (1877), übersetzt von Neesen (1879) Bd. 1, Cap. 9. Auch vergleiche man den 5. Abschnitt von Riemann's Vorlesungen über „Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen“ (herausgegeben von Hattendorff).

32) Die Fortpflanzung des Schalles in Röhren wurde zuerst theoretisch untersucht von Euler in der Abhandlung „De la propagation du son“ Histoire de l'Acad. de Berlin (1759). Die allgemeine Theorie der Ausbreitung der Schallwellen rührt von Poisson her „Sur l'integration de quelques équations linéaires aux differences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques“. Mémoires de l'Institut, Bd. 3, Paris 1820. Man sehe im Weiteren Riemann's schon genannte „Vorlesungen über Partielle Differentialgleichungen“ Cap. 6, sowie insbesondere auch bezüglich der neueren Litteratur den 2. Bd. von Rayleigh's „Theory of sound“.

33) Ueber die Einführung des Geschwindigkeitspotentials sehe man Helmholtz „Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen“, Crelle's Journal Bd. 55 (1858), und „Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden“, Ebenda Bd. 57 (1857). Beide Aufsätze wiederabgedruckt in den „Wissenschaftlichen Abhandlungen“ Bd. 1, No. V und XVI. Ferner vergl. man Kirchhoff's „Mechanik“ 23. Vorlesung.

34) Fresnel „Note sur le calcul des teintes que la polarisation développe dans les lames cristallisées“ Annales de chimie et de physique Bd. 17 (1821), wiederabgedruckt in den Oeuvres complètes Bd. 1, Paris 1866, No. XXII. Man vergl. hier insbesondere den Abschnitt „Considerations mécaniques sur la polarisation de la lumière“ ferner die „Correspondance scientifique avec Th. Young“, abgedruckt in den Oeuvres Bd. 2.

Young im Artikel „Chromatics“ des Supplementes der Encyclopedia Britannica (a. d. J. 1817), und in der „Correspondance relating to optical subjects from Dr. Young to M. Arago“ (v. J. 1817); beide Abhandlungen, sowie ein aus dem Jahre 1827 stammender Aufsatz „Theoretical Observations intended to illustrate the Phenomena of Polarisation“ abgedruckt in den Miscellaneous Works Bd. 1.

35) Man sehe hier zur Orientirung z. B.: Kirchhoff's Optik, erste Vorlesung, ferner Poincaré's „Leçons sur la théorie mathématique de la lumière“ (Paris 1889) No. 34 u. ff.

36) Die Grundlagen der elektromagnetischen Theorie des Lichtes hat Maxwell gegeben in den Abhandlungen: „On physical lines of force“ (Philosophical Magazine Bd. 21, 1861, 1862) und „A dynamical theory of the electromagnetic field“ (Transactions of the Royal Soc., London, Bd. 155 (1865), wiederabgedruckt in den Scientific papers (ed. Niven) Bd. 1, unter No. XXIII u. XXV. Für die zusammenfassende Darstellung sehe man den „Treatise on electricity and magnetism“ Bd. 2. Cap. 20.

37) Hertz „Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft“ (Ges. Werke, Bd. 2), insbesondere den zuerst in Wiedem. Annalen Bd. 36 (1888) erschienenen Aufsatz „Die Kräfte elektrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie“.

38) Duhamel „Sur la propagation de la chaleur dans les corps solides dont la conductibilité n'est pas la même dans tous les sens“. Présenté à l'Acad. 1828, Journal de l'école polyt. Heft 21 (1832). — Lamé „Leçons sur la théorie analytique de la chaleur“ Paris (1861).

Ueber den Zusammenhang der im letzten Abschnitt angedeuteten Erweiterungen des Laplace'schen Ausdruckes mit allgemeineren, rein mathematischen Untersuchungen, wie über die Beziehung der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu gewissen kanonischen Formen vergl. man das Werk von F. Pockels „Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik“ (Leipzig 1891), welches auch die eingehendere Behandlung von einer Reihe der hier berührten Fragen, wie die zugehörigen Litteraturangaben enthält.

39) Helmholtz „Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, etc.“ Crelle's Journal, Bd. 55.

9. Randwerthaufgaben. Existenztheoreme . . . . 20—22

40) Für die geschichtliche Entwicklung der Theorie der Kugelfunctionen von Laplace ab, welche mit der Behandlung spezieller Probleme der Potentialtheorie aufs engste zusammenhängt, sei auf Heine's „Handbuch der Kugelfunctionen“ (Berlin 1861) verwiesen.

41) Für die älteren Untersuchungen zur Aufstellung der Potentialfunction, die zumeist an die Probleme der Wärmetheorie anknüpfen, sehe man vor allem auf die schon genannten Abhandlungen Fourier's und Poisson's (vergl. Anm. 28), endlich auf Lamé's „Théorie analytique de la chaleur“ (1861). Die weitere hier anschliessende Litteratur findet sich in Bacharach's schon genannter „Geschichte der Potentialtheorie“ (§ 13) zusammengestellt. Auch vergl. man hier den Probeartikel „Potentialtheorie“ der Encyclopädie der math. Wiss. von H. Burkhardt und F. Meyer.

42) Dirichlet „Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données“. Crelle's Journal Bd. 4 (1829) und „Ueber die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen“ in Dove's Repertorium der Physik, Bd. 1 (1837).

43) Green im Artikel 5 des „Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism“ (1828).

Gauss „Allgemeine Lehrsätze etc.“ Art. 31 ff. (1839).

Thomson in dem Zusatz zu der 1847 in Liouville's Journal Bd. 12 erschienenen Uebersetzung der Abhandlung „Theorems with reference to the solution of certain partial differential equations“. Papers on electricity and magnetism No. XIII (S. 142).

Dirichlet in seinen Vorlesungen. Vergl. dazu die Entwicklung von Natani im Mathem. Wörterbuch, Bd. 5, dann die von Grube (Leipzig 1876) herausgegebenen „Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte“ 6. Abschnitt, endlich Weierstrass „Ueber das sogenannte Dirichlet'sche Prinzip“, gelesen 1870 in der Berliner Akademie, zuerst veröffentlicht in den „Mathematischen Werken“ von C. Weierstrass, Bd. 2, S. 49.

44) Man vergl. die eben citirte (1895 veröffentlichte) Abhandlung von Weierstrass aus dem Jahre 1870; ferner die Schlussbemerkung von Schwarz in dem Aufsatz „Ueber einige Abbildungsaufgaben“, Crelle's Journal Bd. 70 (1869) und die ausführliche Darlegung in der Inaug.-Dissertation von H. Bruns „De proprietate quadam functionis potentialis corporum homog.“ Berlin 1871.

45) Hiezu sehe man die ausführliche und mit den litterarischen Belegen versehene Darstellung in dem schon mehrfach erwähnten Aufsatz „Potentialtheorie“ von H. Burkhardt und F. Meyer.

10. Stellung der exact-mathematischen Untersuchungen zu den physikalischen Problemen. Schluss . . . . 23—26

46) Vergl. die einleitenden Bemerkungen Poincaré's zu seinem Aufsatze „Sur les equations aux dérivées partielles de la physique mathématique“ im 12. Bd. des American Journal of mathematics (1889); man beachte ferner ebendort (in § 5 und 6) die Gegenüberstellung von Integral- und Summenformeln, bezw. von partiellen und gewöhnlichen Differentialgleichungen, welche sich für die Probleme der mathematischen Physik bei der Annahme einer continuirlichen, bezw. einer molecularen Beschaffenheit der Materie ergiebt. Endlich sehe man den Aufsatz von Clifford „On the aims and instruments of scientific thought“ (Brighton 1872) in den „Lectures and Essays“ (London 1879) Bd. 1, S. 124.

47) Man sehe hier die Darlegung der Anforderungen an die „Scheinbilder oder Symbole der äusseren Gegenstände“, welche Hertz in der Einleitung zu seinen „Prinzipien der Mechanik“, Werke Bd. 3 (1894 S. 1—5), gibt.

48) Man vergleiche hierzu die Einleitung zu Maxwell's Schrift „Ueber Faraday's Kraftlinien“ und Boltzmann's Anmerkung (3) hierzu; ferner Hertz „Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft“ (Leipzig 1892; Werke Bd. 2). Einleitende Uebersicht, Seite 30.

49) So sagt Clifford in dem schon erwähnten Aufsatz (Lectures and Essays Bd. 1, pag. 131): „The aim of scientific thought is to apply past

experience to new circumstances", Hertz in der Einleitung zu den „Prinzipien der Mechanik": „Es ist die nächste und in gewissem Sinne wichtigste Aufgabe unserer bewussten Naturerkenntnis, dass sie uns befähige, zukünftige Erfahrungen vorauszusehen, um nach dieser Voraussicht unser gegenwärtiges Handeln einrichten zu können."

50) Vergl. hiezu die Einleitung zu Grassmann's „Ausdehnungslehre" (von 1844, wiederherausgegeben als Bd. 1 der gesammelten Werke, Leipzig 1894) unter „D. Form der Darstellung" No. 15.

51) Man vergl. hier neben schon Erwähntem die Vorrede Maxwell's zu seinem „Treatise on electricity and magnetism" (1873), sowie die „Einleitende Uebersicht" zu Hertz's „Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft" (Werke Bd. 2).

52) Maxwell „Ueber Faraday's Kraftlinien" Einleitung Seite 6 (der Boltzmann'schen Uebersetzung) und Boltzmann's Anmerkung (8) hiezu. Man vergl. weiter die Ausführungen Boltzmann's in dem Aufsatz „Ueber die Methoden der theoretischen Physik" in dem von Dyck herausgegebenen Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle etc. (1892, 93) und die in diesem Katalog gegebene Beschreibung einer Anzahl hierhergehöriger Apparate von Bjerknes, Boltzmann, Fitzgerald, Lodge u. a. Weiter sehe man Mach's schon erwähnten Vortrag „Ueber das Prinzip der Vergleichung in der Physik" (vom Jahre 1894, abgedruckt in den Populär-wissenschaftlichen Vorlesungen).

53) Vergl. Hertz an dem oben angegebenen Ort, Einleitende Uebersicht B. Zur Theorie.

54) Kronecker in der Einleitung zu dem zum Doktor-Jubiläum Zeller's erschienenen Aufsatz „Ueber den Zahlbegriff". Abgedruckt in Crelle's Journal Bd. 101, 1887.

55) Der ursprüngliche Text in Maxwell's Aufsatz „On Faraday's lines of force" lautet: „In order to obtain physical ideas without adopting a physical theory we must make ourselves familiar with the existence of physical analogies. By a physical analogy I mean that partial similarity between the laws of one science and those of another which makes each of them illustrate the other. Thus all the mathematical sciences are founded on relations between physical laws and laws of numbers, so that the aim of exact science is to reduce the problems of nature to the determination of quantities by operations with numbers." Werke, Bd. 1, S. 156. Die im Text gegebene Uebersetzung ist die Boltzmann'sche (in der Ostwald'schen Classikerausgabe). Boltzmann hat hier das Wort „numbers" durch „ganze Zahlen" übersetzt, um die Auffassung Maxwell's stärker hervortreten zu lassen, welcher zufolge die numerischen Gesetzmässigkeiten bei physikalischen Vorgängen sich auf die moleculare Zusammensetzung der Materie gründen.

*

56) Helmholtz „Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet". Aus den E. Zeller zum Doktorjubiläum gewidmeten „Philosophischen Aufsätzen" (1887). Wiederabgedruckt in den „Wissenschaftlichen Abhandlungen", Bd. 3, No. CXXIX. Man sehe hierzu die Ausführungen von Königsberger in dessen Heidelberger Rektoratsrede (1895) über „Hermann von Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik".

57) Der Text in Fourier's „Théorie analytique de la chaleur" (Discours préliminaire) lautet wörtlich:

„L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issues: elle est encore un moyen assuré de former l'Analyse elle-même, et d'en découvrir les élements qu'il nous importe le plus de connaître, et que cette science doit toujours conserver: ces elements fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels.