Franz Zallingers von Thurn
öffentlichen Lehrers der theoretischen, und experimental-Naturlehre, wie auch der Mechanik, und Naturgeschichte auf der k. k. hohen Schule zu Innsbruck

Abhandlung

von der

krummlinichten Bewegung der Körper,

welche von jenen Kräften, so nach immer parallelen Richtungen wirken, hervorgebracht wird.

Ich legte in meiner Abhandlung *de generali et absoluta virium mechanicarum mensura* einen sichern Grund, worauf man die meisten Theorien, und Berechnungen der höhern Mechanik ohne sonderbare Schwierigkeit bauen kann: ich erklärte auch mein allgemeines Kräftenmaaß mit auserlesenen Beyspielen: allein da ich nur Beyspiele anführte, konnte ich einige Theorien der Mechanik nicht vollkommen entwickeln, und viele mußte ich gar mit Stillschweigen umgehen. So machte ich keine Meldung von der krummlinichten Bewegung der Körper, welche erfolget, wenn die Kräfte nach immer parallelen Richtungen wirken; und doch finde ich in diesem Stoffe so wichtige Wahrheiten, daß ich ihn einer sonderbaren Abhandlung für würdig halte: er enthält nicht leere Hypothesen, so zur Verbesserung der Naturlehre nichts beytragen; er gab mir Gelegenheit zu sehr nützlichen Anmerkungen über einige Meynungen itziger Physiker, und Mechaniker.

Newton hat diese Art der Kräfte in seinem Werke Phil. Nat. Princ. Math. Prop. 93. 94. etc. schon berühret, und diese Betrachtung führte ihn glaublich auf jene Erklärung, die er von der Zurückwerfung, und Brechung des Lichts gab. Indessen wenn sich schon Newton durch seine Erfindungen ungemeine Verdienste in der Mathematik und Naturlehre erwarb, so blieb doch seinen Nachfolgern noch genug zu verbessern, zu erweitern, und genauer zu untersuchen übrig. Ob jemand nach dem Newton die Theorie von den immer parallel wirkenden Kräften schon genauer abgehandelt habe, weiß ich eben nicht zu sagen. Ich ziehe selbe aus den allgemeinen Gleichungen heraus, die ich in meiner Abhandlung von den Central-Kräften fand.

Diese geschieht von mir gleich in dem I. Abschnitte gegenwärtiger Abhandlung, wo ich die allgemeinen Gleichungen für den Fall der immer parallel wirkenden Kräfte festsetzel, es mögen dieselben beschaffen seyn, wie sie wollen.

In dem II. Abschnitte mache ich eine Anwendung auf die Bewegung der Körper, welche schief auf der Oberfläche der Erde hingeworfen werden; ich setze zu dieser schon bekannten Theorie, die ich doch aus ganz anderen Grundsätzen erweise, eine vielleicht sehr nützliche Anmerkung von der krummlinichten Bewegung der Körper in der Luft hinzu, und gebe einen neuen Vorschlag, wie man diese beschwerliche, und in der Anwendung fast unbrauchbare Theorie etwa erleichtern könnte.

In dem III. Abschnitte handle ich von den zurückgeworfenen, oder reflektirten Körpern: es mag die Zurückwerfung unmittelbar von der Federkraft, oder von den sonderheitlichen zurücktreibenden, oder

uch

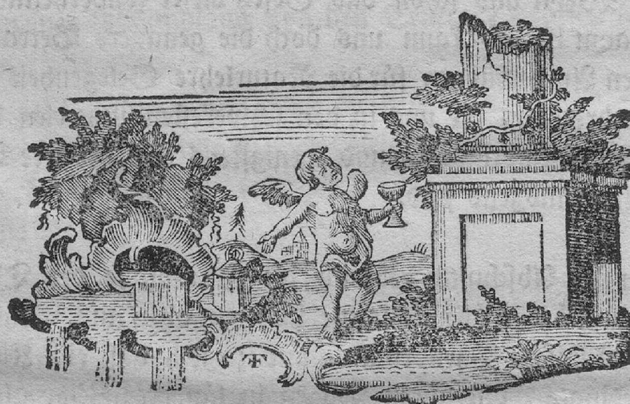
auch anziehenden Kräften verursachet werden.

Auch in dem IV. Abschnitte untersuche ich die gebrochene Bewegung: sie mag entweder nur von dem verschiedenen Widerstande der Materien, durch welche sich der Körper beweget, oder von den anziehenden, und zurücktreibenden Kräften herkommen: nämlich, ich stelle mir mit dem Newton, und den meisten itzigen Physikern in in den Materien anziehende, und zurücktreibende Kräfte vor, welche schon in einer gewissen Entfernung auf den schief einfallenden Körper zu wirken anfangen, und nach immer parallelen Richtungen zu wirken fortfahren. Wenn uns schon das Gesetz dieser sonderheitlichen Kräfte nicht bekannt ist, so kann uns doch die genauere Betrachtung derselben zu guten Anmerkungen für die Naturlehre Gelegenheit geben. Ich führe auch mehrere an, die uns in den schweresten Materien der Naturlehre ein Licht beyzubringen, und wenigstens eine grössere Behutsamkeit zu lehren vermögend sind.

In dem V. Abschnitte gebe ich die Grundsätze der Theorie von dem Falle der Körper über krumme Linien: aber zum Beyspiele führe ich nur die kubische Parabel an, und zeige, daß ein Körper über ihre erste Ordinate, und ihren Bogen in längerer Zeit, als über die Sehne der Ordinate und des Bogens herabfällt: dieß machte mir den ersten Zweifel von der Wahrheit jenes Satzes, daß ein Körper geschwinder über jede krumme Linie, als über ihre Sehne herabfällt.

Damit ich die Falschheit dieses allgemeinen Satzes, so man in den Werken der berühmtesten Mechaniker findet, gründlich an den Tag lege, so beweise ich in dem VI. Abschnitte, daß es keineswegs allgemein wahr ist, daß ein Körper in kürzerer Zeit über zwo, oder mehrere schiefe, zusammengesetzte Flächen falle, als über Eine, so gleichsam die Sehne von den Zusammengesetzten vorstellet: denn aus diesem Satze zogen die Mechaniker den vorigen heraus.

Dieß ist der ganze Inhalt meiner Abhandlung. Wie glücklich schätze ich mich, wenn ich dadurch zur Beförderung der Naturlehre, und Mathematik etwas beytragen werde.



Erster

Erster Abschnitt.

Allgemeine Untersuchung der Bewegung, so die parallel-wirkenden Kräfte hervorbringen.

§. 1.

Man sieht unschwer ein, daß man die Kräfte, welche nach immer parallelen Richtungen wirken, so betrachten kann, als wären selbe unendlich weit von dem Körper entfernet. Denn setzet man in der Geometrie, daß zwo gerade Linien erst in einer unendlichen Entfernung zusammenlaufen, so hält man selbe für parallel; folglich wenn wir eine Kraft immer unendlich weit von dem bewegten Körper entfernen, so werden alle Richtungs-Linien, nach welchen sie in den Körper wirket, parallel seyn.

§. 2.

§. 2.

Man stelle sich eine solche Kraft in O vor, Fig. 1. so daß alle Linien AO, MO, NO miteinander parallel sind, und zugleich senkrecht auf der Fläche BD stehen; man ziehe in A die Tangent AF, und in M die Tangent MR, und fälle auf selbe aus O die perpendikular-Linien OF, OR: der Bogen MN sey unendlich klein, und die Linie Nm mit BD parallel, und folglich senkrecht auf MO; so werden die Dreyecke mMN. OMR sich ähnlich seyn, weil selbe neben den rechten Winkeln, auch den Winkel mMN gemein haben. Den unendlich weiten Abstand der Kraft $AO = MO$ setze ich $= a$: den Sinus des Winkels OAF, so anfangs in A die Richtung des Körpers mit der Richtung der Kraft machet $= n$; und sage $1 : \sin. OAF = AO : OF$; oder $1 : n = a : an = OF$. Ueberdas sey die Abscisse $BP = x$. das Element $Pp = mN = dx$; die Ordinate $MP = y$; ihr Element $Mm = dy$; der unendlich kleine Bogen $MN = ds$, und weil $MN = \sqrt{(Mm^2 + mN^2)}$ so ist $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; da endlich die Dreyecke mMN, MOR ähnlich sind, so hat man die Analogie $MN : mN = MO : OR$; oder $ds : dx = a : \frac{adx}{ds} = OR$.

§. 3.

Nun zeigte ich in meiner Abhandlung *de generali, et absoluta virium mechanicarum mensura* §. XXIV. daß die Geschwindigkeiten eines Körpers, so um einen Mittelpunkt der Kräfte eine krumme Linie beschreibet, sich umgekehrt wie die Perpendikular-Linien verhalten, so man aus selbem Mittelpunkte in die Tangenten fällt; man setze also die Geschwindigkeit des Körpers in $A = c$, und in $M = u$, so hat man

$c : u = OR : OF = \frac{a\,dx}{ds} : a\,n$; folglich ist $\frac{u\,dx}{ds} = c\,n$, oder $\frac{u\,dx}{c\,n} = ds$ und $\frac{u^2\,dx^2}{c^2\,n^2} = ds^2 = dx^2 + dy^2$; also $\frac{dx^2\,(u^2 - n^2\,c^2)}{n^2\,c^2} = dy^2$; und $\frac{dx\sqrt{u^2 - n^2\,c^2}}{n\,c} = dy$.

Dieß ist die erste allgemeine Gleichung für die Hypothese der immer parallel wirkenden Kräfte; und wenn uns die Natur der krummen Linie gegeben ist, so kann man durch selbe das Verhältniß der Geschwindigkeiten bestimmen; und entgegen, wenn dieses uns bekannt ist, kann man die Natur der krummen Linie finden. Doch muß man sehen, ob bey der Zunahme der Absciſſen auch die Ordinaten zunehmen: denn sollten diese abnehmen, wo jene wachsen, so müßte man die Gleichung $\frac{dx\sqrt{u^2 - n^2c^2}}{n\,c} = -\,dy$ anwenden.

§. 4.

Gleichfalls habe ich in meiner Abhandlung §. 12. die allgemeine Gleichung $2\,g\,P\,ds = M\,u\,d\,a$ bewiesen, in welcher u die Geschwindigkeit des Körpers, M seine Masse, ds den unendlich kleinen Raum, den er durchläuft, P die Kraft, so die Geschwindigkeit u vermehret, oder vermindert, und g die Höhe, über welche ein schwerer Körper nahe bey der Oberfläche der Erden in einer Sekunde herabfällt, andeutet. Diese Gleichung auf unsern Fall wohl anzuwenden, stelle ich die ganze Kraft P durch M O vor, und die Linie M R wird uns jenen Theil der Kraft ausdrücken, so die Geschwindigkeit u vermehret, oder ver-

vermindert: man sage also $MO : MR = MN : mM = ds : dy = P : \frac{P dy}{ds}$; diese Kraft setze man anstatt P in der Gleichung $2 g P ds = M u du$, so findet man $2 g P dy = M u du$.

Diese ist die zwote allgemeine Gleichung für unsern Fall, wodurch uns das Verhältniß der Kräfte, oder Geschwindigkeiten bestimmet wird. In der Anwendung dieser Gleichung muß man wiederum beobachten, daß die Gleichung $2 g P dy = M u du$ mit positiven Zeichen nur Statt habe, wenn die Geschwindigkeit u zu- oder abnimmt, da die ordinate y gleichfalls zu- oder abnimmt: dieß ereignet sich, wenn man setzet, daß die Fläche B D mit zurücktreibenden Kräften P in den Körper wirke; denn die Geschwindigkeit u, mit welcher er sich gegen die Fläche beweget, ist in diesem Falle um so viel kleiner, je weniger er von selber entfernet ist, oder je kleiner die Ordinate y ist. Ist hingegen die Kraft P eine anziehende, so wird die Geschwindigkeit u desto mehr zunehmen, je kleiner der Abstand y ist; folglich werden in diesem Falle, da die Elemente du positiv sind, die Elemente dy negativ, und man muß die Gleichung $- 2 g P dy = M u du$ brauchen.

Die Zeit der Bewegung, wenn man selbe untersuchen will, wird allgemein durch die Gleichung $dt = \frac{ds}{u}$ bestimmet, wie ich an dem angezeigten Orte meiner Abhandlung bewies.

Zwey=

Zweyter Abschnitt.
Von der parabolischen Bewegung der Körper auf der Oberfläche der Erde.

§. 5.

Wenn man in der Naturlehre die Bewegung der Körper, so auf der Oberfläche der Erde schief hingeworfen werden, untersuchet, so nimmt man an, daß die Kraft der Schwere, so immer den Körper zur Erde herabziehet, überall gleich, und beständig verbleibe, und daß alle ihre Richtungen parallel sind. Man setzet auch, ein solcher Körper werde im leeren Raum beweget, wo er von der Luft keinen Widerstand zu leiden hat. Nun weiß ich freylich, daß man die Theorie der geworfenen Körper in dieser Hypothese auch ohne höhere Geometerie behandeln kann. Allein ich bin doch gesinnet, dieselbe aus meinen allgemeinen Gleichungen kürzlich herauszuziehen, damit man von ihrer Wahrheit, und Vortrefflichkeit überzeuget werde; am Ende will ich auch eine nicht unnütze Anmerkung von der Bewegung der Körper in dem widerstehenden Mitteldinge beyfügen.

§. 6.

Es sey also Fig. 2. AD eine wagrechte Linie; AO stelle die senkrechte Richtung der Schwere vor; der Körper werde in A schief nach der Richtung AF hingeworfen: diese Richtung mache mit GAO den Winkel O A F, oder G A F, dessen Sinus $= n$. und Cosinus $= (1-n^2)^{\frac{1}{2}} = m$; dieser ist zugleich der Sinus des Erhöhungswinkels F A P. Ueberdas sey $AP = x$. $PM = y$ die Geschwindigkeit in $A = c$, und in $M = u$. Weil wir nun in diesem Falle eine anziehende Kraft haben, müssen wir die Gleichung $-2gPdy = Mudu$ (§. 4.) brauchen; und da die Kraft der Schwere P sich gänzlich wie die Masse des Körpers M verhält, und durch selbe kann ausgedrückt werden, so hat man $P = M$, und $-2gdy = udu$. Das Integrale von dieser Gleichung ist $Q - 2gy = \frac{u^2}{2}$ wo Q eine beständige Grösse andeutet; diese zu finden setze ich den Körper in A, wo $y = 0$, und seine Geschwindigkeit $= c$, so wird in diesem Falle seyn $Q = \frac{c^2}{2}$ und so haben wir das vollständige Integrale $\frac{c^2}{2} - 2gy = \frac{u^2}{2}$. und $c^2 - 4gy = u^2$.

§. 7.

Damit ich die Natur der beschriebenen Linie A M S D bestimme, setze ich diesen Werth von u^2 in der ersten Gleichung §. 3. $dx\sqrt{u^2 - n^2c^2} = ncdy$; so erhalte ich $dx\sqrt{c^2 - n^2c^2 - 4gy} = ncdy$, und weil $c^2 - n^2c^2 = c^2(1-n^2) = c^2m^2$, so hat man $ncdy = dx\sqrt{m^2c^2 - 4gy}$, und $dx = \frac{ncdy}{\sqrt{m^2c^2 - 4gy}}$.

Diese Gleichung leichter zu integriren, setze ich $c^2m^2 - 4gy = z^2$, und $\frac{c^2m^2 - z^2}{4g} = y$; so entstehet daraus $dx = \frac{-2nczdz}{4gz} =$

—nc

$\frac{-ncdz;}{2g}$ dessen Integral ist $x = Q - \frac{ncz}{2g} = Q - \frac{nc}{2g}$ $\sqrt{c^2m^2 - 4gy}$. Damit ich wiederum die beständige Grösse Q entdecke, setze ich den Körper in A, wo x, und $y = 0$, und also $0 = Q - \frac{nc}{2g}\sqrt{c^2\ m^2}$, und $Q = \frac{nmc^2}{2g}$; folglich ist das vollkommene Integral $x = \frac{nmc^2 - nc\sqrt{c^2\ m^2 - 4gy}}{2g}$. Dieß ist eben die Gleichung zur gemeinen Parabel.

§. 8.

Ich lege dieses klärer an den Tag, und setze jene Höhe, über welche der Körper durch die Schwere frey herabfahren mußte, damit er die Geschwindigkeit c erhalte $= s$, so hat man $c^2 = 4gs$ (sieh meine Abhandlung §. 14.) und die gefundene Gleichung erhält die Gestalt $x = \frac{4nmgs - n\sqrt{16g^2s^2m^2 - 16g^2sy}}{2g}$, oder $x = 2nms - 2n\sqrt{m^2s^2 - sy}$, und $2n\sqrt{m^2s^2 - sy} = 2nms - x$. Erhöht man beyde Glieder zum Quadrate, so ist $4n^2m^2s^2 - 4n^2sy = 4n^2m^2s^2 - 4nmsx + x^2$ oder $4nmsx - x^2 = 4n^2sy$; endlich setzet man $4n^2s = p$. so entstehet $py = \frac{pm}{n}x - x^2$.

Die ganze Weite des Wurfs AD findet man, wenn man annimmt $y = 0$, und also $\frac{pmx}{n} = x^2$, oder $x = \frac{pm}{n} = 4nms$; folglich die halbe Weite $AF = \frac{1}{2} AD = \frac{pm}{2n} = 2nms$; setzet man den Werth $\frac{pm}{2n}$ anstatt x in der Gleichung $Cy = \frac{pm\,x}{n} - x^2$, so hat man $Py = \frac{p^2m^2}{2n^2} - \frac{p^2m^2}{4m^2}$, oder $y = \frac{pm^2}{4n^2}$. Dieß ist nun die größte Höhe des Wurfs, und man sieht unschwer, daß das Quadrat der Ordinate $AF = \frac{p^2m^2}{4n^2}$ gleich ist dem Produkt von der Abscisse $ST = \frac{pm^2}{4n^2}$, und der beständigen Grösse, oder Parameter $p = 4n^2s$.

§. 9.

Jzt will ich nur die merkwürdigsten Folgen aus dieser Theorie herausziehen.

1.) Fand ich $p = 4n^2s$, und $s = \frac{c^2}{4g}$; also ist $p = \frac{n^2c^2}{g}$, oder die Parameter der beschriebenen Parabeln sind wie die Quadrate der Geschwindigkeit, mit welcher ein Körper anfangs fortgeworfen wird, und wie die Quadrate des Sinus jenes Winkels, den die erste Richtung AF mit der senkrechten AG machet.

2.) Da die ganze Breite des Wurfs $AD = 4nms$; und $s = \frac{c^2}{4g}$, so folget, daß $AD = \frac{nmc^2}{g}$. Nun aber ist das Produkt mn von dem Sinus, und Cosinus des Winkels FAP gleich dem halben Sinus des doppelten Winkel; (Siehe la Caille Elem. Trigon. n. 741.) Man nenne also den Sinus des doppelten Erhöhungs-Winkels $2\,FAP = q$; so ist $nm = \frac{1}{2}q$; und $AD = \frac{c^2q}{2g}$, oder die Breite des Wurfs

ver-

verhält sich wie das Quadrat der Geschwindigkeit, und wie der Sinus des doppelten Erhöhungswinkels.

3.) Wenn der Erhöhungswinkel einem halben rechten 45^c gleichet, so ist der doppelte ein Rechter, und sein Sinus q ist aus allen der größte; folglich wird auch die Breite des Wurfs bey nämlicher Geschwindigkeit in diesem Falle die größte seyn; gleichfalls ist bekannt, daß zween Winkel, so gleich weit von 45^c entfernet sind, z. B. 35^c und 55^c, gedoppelt 70^c, und 110^c miteinander 180^c ausmachen, und deßwegen einen gleichen Sinus haben; mithin wird auch die Breite des Wurfs bey nämlicher Geschwindigkeit gleich seyn, es mag der Erhöhungswinkel von 35^c, oder 55^c seyn.

4.) Wenn die Breite des Wurfs A D gegeben ist, und $= b$; überdas auch die Geschwindigkeit c bekannt ist, so hat man $b = \frac{c^2 q}{2g}$ und $q = \frac{2gb}{c^2}$; man kann also den doppelten Erhöhungswinkel, und folglich auch den einfachen F A P finden; und ist hingegen die Breite b sammt dem Erhöhungswinkel gegeben, so läßt sich daraus die Geschwindigkeit c bestimmen; denn weil $q = \frac{2gb}{c^2}$ so ist $c = \sqrt{\frac{2gb}{q}}$

5.) Die größte Höhe S T fand ich $= \frac{pm^2}{4n^2}$; nun ist $p = \frac{n^2 c^2}{g}$, also $ST = \frac{n^2 c^2 m^2}{4gn^2} = \frac{c^2 m^2}{4g}$ das ist: sie verhält sich wie das Quadrat der Geschwindigkeit, und des Sinus des Erhöhungswinkels.

6.) Endlich die Zeit der Bewegung des Körpers, bis er zur wagrechten Linie A D zurückkehret, kann man am bequemsten so finden: es ist klar, daß diese Zeit doppelt von jener sey, in welcher ein Kör-

per

per frey über $ST = \frac{c^2 m^2}{4g}$ herabfällt: denn die horizontale Bewegung ist keineswegs dem senkrechten Steigen und Fallen zuwider: nun aber ist die Zeit des freyen Falls über $ST = \sqrt{\frac{ST}{g}}$ (Abhandl. §. 14.) $= \sqrt{\frac{c^2 m^2}{4g^2}} = \frac{cm}{2g}$; und also die doppelte $= \frac{cm}{g}$. Mithin verhält sich die Zeit der Bewegung, wie die Geschwindigkeit, und der Sinus m des Erhöhungswinkels.

§. 10.

Diese Theorie von den geworfenen Körpern in dem luftleeren Raum hat freylich in der Ausübung keinen sonderbaren Nutzen, weil der Widerstand der Luft sehr beträchtlich ist, und die Beschreibung einer Parabel gänzlich verhindert. Allein, wenn man in den Werken Newtons, Johann Beroullins, Eulers, Karl Schärffers, und anderer, so die höhere Mechanik abhandeln, bewandert ist, muß man nicht eingestehen, daß in der ganzen Mechanik keine Materie so beschwerlich, und zugleich noch so unvollkommen ausgearbeitet sey, als eben die Theorie von der Bewegung der Körper in einem widerstehenden Raume? Man verfällt nicht nur in ungemein beschwerliche, und weitläuftige Rechnungen, sondern auch in unendliche Reihen, die sehr langsam abnehmen, oder wenn man den Widerstand der Luft für sehr klein annimmt, so muß man sich mit einer nur unvollkommenen Näherung befriedigen.

Indessen bin ich doch der Meynung, daß, wenn man einmal die geradlinichte Bewegung in einem widerstehenden Raume genauer ebstimmet hätte, es keine so grosse Schwierigkeit mehr wäre, auch die

die krummlinichte mit der nämlichen Genauigkeit zu bestimmen. Da man aber niemal weder aus der Theorie, noch aus der Erfahrung die geradlinichte Bewegung eines Körpers in der Luft genau entdecket hat, so werde ich mich dießmal begnügen, nur einen Vorschlag beyzubringen, der mir einfiel, die Berechnung der krummlinichten Bewegung genauer zu bestimmen.

§. 11.

Der Körper werde 3. fig. in der Luft nach der Richtung AF hingeworfen: ich zertheile diese Kraft AF in eine senkrechte AC, und wagrechte AD. Obschon nun der Widerstand der Luft überall schnurgerade der Richtung des Körpers entgegengesetzet ist, und diese sich immer ändert; so kann man doch überall diesen Widerstand in eine senkrechte, und wagrechte widerstehende Kraft auflösen: und wenn man auch annimmt, daß der Widerstand sich wie das Quadrat der Geschwindigkeit verhält, so wird der senkrechte, und wagrechte Widerstand gleichfalls wie das Quadrat der senkrechten, und wagrechten noch übrigen Geschwindigkeit seyn; deßwegen wird auch der Körper nach wagrechter Strecke in der Luft sich in gewisser Zeit gleich weit von A entfernen, es mag seine horizontale Kraft AD allein in ihm seyn, oder es mag selbe zugleich mit der senkrechten AC verbunden seyn; eben so verhält es sich mit dieser senkrechten Kraft AC; nämlich die wagrechte Kraft, und die Bewegung ist keineswegs der senkrechten entgegengesetzet.

§. 12.

Um also die krummlinichte Bewegung eines solchen Körpers in der Luft zu bestimmen, suche man

1.) Die zwo Kräften A C, A D, mit welchen der Körper senkrecht, und wagrecht fortgeworfen wird.

2.) Suche man die Höhe A m = P E, zu welcher der Körper gelangen würde, da er senkrecht mit der Kraft A C wider die Richtung der Schwere in der Luft hinaufsteiget, bis er alle Geschwindigkeit verlieret.

3.) Bestimme man die Zeit, in welcher dieses Steigen geschieht; denn zur nämlichen Zeit wird der Körper nach horizontaler Strecke bis in E kommen.

4.) Gleichfalls finde man die Zeit, da der Körper senkrecht über die gefundene Höhe P E herabfällt: unterdessen wird der Körper nach wagrechter Richtung in V kommen.

5.) Folglich da man die ganze Zeit fand, in welcher der Körper wagrecht sich von A bis V beweget, und auch die anfängliche Geschwindigkeit A D bekannt ist, so kann man die ganze Breite des Wurfs A D bestimmen.

§. 13.

Es wäre zu weitläuftig, wenn ich die ganze Berechnung mit einem ausführlichen Beyspiele erklärte: ich will nur anführen, was ich in selber fand. Ich setzte, eine eiserne Kugel von 24 Pfund werde mit einer Geschwindigkeit A F = 100′ unter einem halbrechten Winkel F A V hingeworfen. Den ganzen Widerstand der Luft setzte ich so, wie in meiner Abhandlung §. 21. gleich einem Luft-Cylinder, so zur Grundfläche den größten Zirkel der Kugel, und zur Höhe jenen Raum hat,

hat, über welche der Körper im luftleeren Raum herabfallen mußte, seine wirkliche Geschwindigkeit zu erhalten. Den Durchmesser der Kugel fand ich $= 0.4577'$. die Schwere des Eisens zur Schwere der Luft $= 764500 : 125$. Nun ist 1.) $AC = AD = 70.71068$. 2.) Fand ich die Höhe $Am = PE = 80.34318$. 3.) Die Zeit des Steigens $= 2''.339$. 4.) Die Zeit des Falls $= 2.35589$. 5.) Die Breite des Wurfs $AV = 318.3208$. Wollte man annehmen, daß die Zeit des Steigens, und Fallens gleich sey, wäre der Fehler nicht sonderbar groß, und die Berechnung würde um vieles erleichtert. Noch weit leichter, und kürzer würde die ganze Berechnung, wenn man setzte, der Widerstand wäre nicht wie das Quadrat der Geschwindigkeit, sondern einfach wie dieselbe. Allein ehe nicht genauere Versuche unternommen werden, kann man niemal mit Vortheile auf Theorien bedacht seyn.

Dritter Abschnitt.

Von der zurückgeworfenen Bewegung der Körper.

§. 14.

Wenn ein Körper auf einen andern stößt, und dann gegen die vorige Gegend zurückgetrieben wird, nennet man diese Aenderung der Richtung eine Reflexion, oder Zurückwerfung des Körpers. Nun kann diese Zurückwerfung des Körpers allgemein ohne zurücktreibende Kräften nicht erfolgen, wodurch die Geschwindigkeit, mit welcher sich der bewegte Körper zum andern nähert, vermindert, nach und nach gänzlich ausgelöschet, und dafür eine neue nach gegenseitiger Strecke hervorgebracht wird.

Doch will ich zwo Arten der Reflexionen unterscheiden.

1.) Wenn selbe durch die Federkraft der Körper, als eine mechanische Kraft verursachet wird, z. B. da eine elfenbeinerne Kugel schief auf den festen Boden geworfen wird, und von selbem zurückspringet.

2.) Wenn die Zurückwerfung von den sonderheitlichen Körften der Körper hervorgebracht wird: also wird wahrscheinlich das Licht von den Spiegeln, und andern Körpern zurückgeworfen.

§. 15.

Ich fange von dem ersten Falle an. Man setze 4. fig. eine ebene unbewegliche Fläche D G; auf selbe werde eine vollkommen elastische Kugel schief mit einer Geschwindigkeit hingeworfen, die ich durch A C ausdrücke: man zertheile selbe in zwo Kräfte A B, A D, von welcher eine mit der Fläche D G parallel, die andere auf selber senkrecht ist: die erste A B wird durch den Auffall in C an- und von sich selbst nicht geändert, weil ihr die parallele Fläche nicht entgegengesetzet ist; mit der andern Kraft A D wirket der Körper auf die unbewegliche Fläche; und diese Kraft wird zur Zeit, da der elastische Körper immer mehr zusammengedrückt wird, gänzlich ausgelöschet. Allein gleich darauf fängt die Federkraft an, in dem Körper die vorige Gestalt, und zugleich eine neue Geschwindigkeit nach entgegengesetzter Richtung C B hervorzubringen. Ist der Körper vollkommen elastisch, so wird auch die Federkraft in Zurückstellung der vorigen Gestalt eben eine Geschwinschwindigkeit in dem Körper hervorbringen, welche zuvor in der Zusammendrückung ist verloren gegangen; folglich wird endlich bey dem zurückspringenden Körper die Bewegung von zwoen Kräften zusammengesetzet, nämlich von der Kraft CB = AD, und von der unveränderten Kraft CG = AB = DC; der Körper muß also nach der Diagonal-Linie CE seine Bewegung nehmen, und wegen der Gleichheit der rechtwinklichten Dreyecke ADC, EGC wird die Geschwindigkeit CE des zurückgeworfenen Körpers gleich der vorigen AC, und der Reflexionswinkel ECG wird dem Einfallwinkel ACD eben auch gleich seyn.

Wäre der Körper unvollkommen elastisch, so würde auch die von der Federkraft hervorgebrachte Geschwindigkeit kleiner, als jene seyn, so er bey seiner Zusammendrückung verloren hat; man setze also diese kleinere Geschwindigkeit = m c LBC, und der zurückgeworfene Körper wird sich durch die Diagonal-Linie c n bewegen; seine Geschwindigkeit wird kleiner seyn als die vorige AC; und der Reflexionswinkel nCG wird auch kleiner, als der Einfallwinkel ACD seyn. Diese sind nun Wahrheiten, die man in den meisten Werken itziger Naturlehrer findet; ich setze einige Anmerkungen hinzu, die mir bey dieser Materie zu Gemüth kommen.

§. 16.

1.) Damit ein Körper, so 5. fig. aus dem Punkte A auf die Fläche BD geworfen, uud von selber zum gegebenen Punkte E zurückgeworfen wird, den kürzesten Weg mache, wird freylich erfodert, daß der Einfall- und Reflexionswinkel einander gleichen, so wie es bey den vollkommen elastischen Körpern geschieht. Ich beweise dieses ohne höhere Berechnung. Man fälle aus E auf die Fläche BD die senkrechte Linie ED, und mache DE = DS. Dann ziehe man AS, und CE, so wird der Einfallwinkel A C B dem Reflexionswinkel E C D gleichen: denn da die zwey rechtwinklichte Dreyecke C E D, C D S die Seite C D gemein, und die Seiten E D, D S gleich haben, so werden auch selbe einander gleichen; deßwegen ist auch C E = C S, und E C D = D C S; aber D C S gleichet dem entgegengesetzten A C B, also sind die Winkel A C B, E C D gleich. Itzt setze man, die Zurückwerfung geschehe von was immer für einem andern Punkt der Fläche F; man ziehe A F, F E, F S, so werden wiederum die Dreyecke E F D, D F S den Seiten F E, F S gleichen. Nun aber in dem Dreyecke A F S ist A F + F E grösser als A C; folglich ist auch A F + F E grösser als A C + C E; und so muß der Körper, um aus A nach E durch die Reflexion zu kommen, allezeit einen grössern Weg machen, da er von der Fläche nicht so zurückgeworfen, wird, daß die Einfall- und Reflexionswinkel einander gleichen. Aus diesem Beyspiele wollten einige den metaphyschen Grundsatz beweisen, daß die Natur allzeit dem kürzesten Weg folge, wie Leibnitzius und Fermatius; allein wenn man erwäget, daß man in der Natur kaum einen vollkommen elastischen Körper findet, (etwa das Licht ausgenommen) so sehe ich nicht, was man aus diesem für jenen Grundsatz richtiges schliessen kann.

§. 17.

2) Setzen wir auch einen vollkommen elastischen Körper, und es wird so wohl die Zusammendrückung desselben, als die Herstellung seiner vorigen Gestalt nicht in einem untheilbaren Augenblicke, sondern nur nach und nach vorbeygehen; deßwegen wird auch die senkrechte Kraft A D 4. fig. in einer theilbaren Zeit Anfangs immer abnehmen, und dann nach gegenseitiger Strecke wiederum zunehmen. Hingegen verbleibt indessen die wagrechte Kraft A B immer die nämliche, wenigstens, wenn man

man die Fläche DG für vollkommen hart, und fest annimmt. Aus diesem schliesse ich, die Bewegung des Mittelpunkts einer elastischen Kugel könne bey der Zurückwerfung unmöglich geradlinicht seyn, sondern sie muß nahe bey der Fläche, wie es die 6. fig. andeutet, eine krumme Linie ros beschreiben, weil die Bewegung aus einer beständigen Kraft AB, und aus einer veränderlichen AD, so Anfangs abnimmt, und dann nach widriger Seite wiederum zunimmt, zusammengesetzet wird; diese krumme Linie wird von dem Mittelpunkte der Kugel wenigstens so lange beschrieben, als ihre Oberfläche die Fläche DG berühret.

3.) Nun sind die meisten Naturlehrer der Meynung, daß die Federkraft in dem nämlichen Körper sich beynahe verhalte, wie die Zusammendrückung desselben, wenigstens wenn diese nicht gar zu groß ist. Mithin wenn die Zusammendrückung veränderlich ist, kann auch die Federkraft für keine beständige Kraft angesehen werden; bey der Zusammendrückung einer Kugel muß zwar die Bewegung ihres Mittelpunktes immer gehemmet werden, aber doch nicht gleichförmig, und bey der Zurückstellung der vorigen Gestalt muß die Bewegung nach gegenseitiger Strecke immer beschleuniget werden, aber auch nicht gleichförmig, weil die beschleunigende Federkraft immer abnimmt. Man kann also nicht mit einigen Naturlehrern behaupten, daß die Zusammendrückung eines elastischen Körpers mit einer gleichförmig gehemmten, und die Zurückstellung der vorigen Gestalt mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung geschehe.

§. 18.

4.) Vielmehr, wenn man die krumme Linie ros bestimmen wollte, müßte man annehmen, daß eine zurücktreibende Kraft in den Körper wirke, die sich beynahe umgekehrt, wie der Abstand des Mittel-

punkts

punkts O von der Fläche DG verhalte: denn die Federkraft ist wie die Zusammendrückung: diese aber um so viel grösser, je näher der Mittelpunkt O bey der Fläche DG ist; folglich gehöret diese Bestimmung zum zweyten Falle, von dem ich gleich reden werde. Indessen beobachte ich, daß, wenn man die Kugel vollkommen elastisch, und die Fläche DG vollkommen hart setzet, doch der Einfallwinkel ACD dem Reflexionswinkel ECG gleiche, weil nämlich die ganze senkrechte, und parallele Kraft wiederum hervorgebracht wird, obschon zwischen beyden Winkeln ein Zwischenraum CC entstehet.

5.) Setzet man aber, daß auch die Fläche DG vollkommen elastisch ist, so wird in selber von der schief einfallenden Kugel eine Grube eingedrückt, 4. fig. und zwar nach der Richtung CG; denn zur Zeit, da die senkrechte Kraft AD gänzlich ausgelöschet, und eine neue CB hervorgebracht wird, wirket die parallele AB immer fort, und treibet die Kugel in der Grube nach der Strecke CG. Allein eben darum wird die Kugel an den Wänden der Grube angetrieben, und muß auch etwas von ihrer wagrechten Kraft AB verlieren; ich sehe auch nicht, wie dieser Verlust nachmals ergänzet werde, da die Seiten der Grube, und die Theile der Kugel nach entgegengesetzten Richtungen sich in die vorige Gestalt zurückstellen; deßwegen kann auch die Geschwindigkeit CE nicht der vorigen AC, noch der Winkel ECG dem Winkel ACD gleichen: wenigstens scheinet mir die Sache zweifelhaft zu seyn.

§. 19.

Ich schreite zum zweyten Falle, und setze, die Fläche BG. (F. VII. F. VIII.) wirke gegen den hingeworfenen Körper mit einer zurücktreibenden Kraft P, so überall senkrecht auf BG, und ein gewisses Verhältniß = m mit dem Abstande von der Fläche BG beobachtet. Es sey

wie

wie oben im 1 Abschnitte $BP = x$. $MP = y$, die Geschwindigkeit in $A = C$, in $M = u$. In einem Abstande von der Fläche $= a$ sey die Kraft P gleich der Schwere des Körpers, und könne durch desselben Masse M ausgedrückt werden. Nun sage man

1.) $a^m : y^m = P$. oder $M : \frac{My^m}{a^m}$; setzet diese Kraft anstatt P in der allgemeinen zwoten Gleichung §. IV. $2gPdy = Mudu$, so für die zurücktreibenden Kräfte gehöret, und man hat $\frac{2gy^m dy}{a^m} = udu$; und $Q + \frac{2gy^{m+1}}{(m+1)a^m} = \frac{u^2}{2}$. Die beständige Grösse Q zu bestimmen, setze ich der Körper sey in A, wo $u = c$, und $y = AB = b$; so ist in diesem Orte $Q + \frac{2gb^{m+1}}{(m+1)a^m} = \frac{c^2}{2}$. und das vollständige Integrale ist $\frac{c^2}{2} - \frac{2gb^{m+1}}{(m+1)a^m} + \frac{2gy^{m+1}}{(m+1)a^m} = \frac{u^2}{2}$ und $u^2 = c^2 + 4g\frac{(y^{m+1} - b^{m+1})}{(m+1)a^m}$.

2.) Setzet man diesen Werth von u^2 in der ersten allgemeinen Gleichung §. III. $-dx\sqrt{u^2 - x^2c^2} = ncdy$, so erhält man $-dx\sqrt{c^2\, n^2c^2 + 4g\frac{(y^{m+1} - b^{m+1})}{(m+1)a^m}} = ncdy$; nimmt man $\sqrt{1 - n^2}$ den Cosinus von $n = r$. so ist $-dx\sqrt{r^2c^2a^m\frac{(m+1) + 4g(y^{m+1} - b^{m+1})}{(m+1)a^m}} = ncdy$. und $dx = \frac{-ncdy\sqrt{(m+1)a^m}}{\sqrt{r^2c^2a^m(m+1) + 4g(y^{m+1} - b^{m+1})}}$.

Aus dieser Gleichung läßt sich die Natur der krummen Linie AMDE bestimmen, wenn das Verhältniß der Kraft m gegeben ist; nur Ein Fall kann durch diese Gleichung nicht aufgelöset werden, nämlich wenn $m = -1$, oder da die zurücktreibenden Kräfte umgekehrt in einfachem Verhältnisse des Abstands von der Fläche BG sind; denn das Differenzial der Geschwindigkeit ist logaritmisch $2 a g \frac{dy}{y} = udu$,

und dessen vollständiges Integral ist $u = c + 4 a g \,\mathrm{Log.} \frac{y}{y}$.

§. 20.

Wenn die krumme Linie ADE eine kleinste Ordinate DC hat, so wird in dem Orte D die Richtung des Körpers mit der Fläche BG parallel, und das Element der Ordinate dy gegen dem Elemente der Absciße unendlich klein, und mithin dx gegen dy unendlich groß; man setze also in der letzt gefundenen Gleichung von dx den Nenner $\sqrt{r^2 c^2 a^m (m+1) + 4g(y^{m+1} - b^{m+1})} = 0$. und $4 g y^{m+1} = 4 g b^{m+1} - r^2 c^2 a^m (m+1)$, so findet man $y = \sqrt[m+1]{\frac{(4 g b^{m+1} - r^2 c^2 a^m (m+1))}{4g}}$. Nimmt man diesen Werth von y in der Gleichung $u^2 = c^2 + 4 g \frac{(y^{m+1} - b^{m+1})}{(m+1) a^m}$ an; so wird uns dadurch die Geschwindigkeit in dem Punkte D bestimmet $u^2 = c^2 - r^2 c^2 = c^2 (1 - r^2) = n^2 c^2$. also $u = nc$. Wenn uns also AT die anfängliche Geschwindigkeit $= c$ ausdrückt, und BAT den Winkel, so die Richtung der Kraft mit der Richtung des Körpers machet, und dessen Sinus $= n$; so ist $AT : TB = 1 : n = c : cn$. Folglich mögen die zurücktreibenden Kräfte beschaffen seyn, wie man will, so wird der Körper in seinem kleinsten Abstande von der Fläche eine mit selber parallele

Ge-

Geschwindigkeit cn haben, die er nach eben dieser Strecke schon Anfangs in A hatte; und so bleibet diese mit der Fläche parallele Kraft allezeit unverändert, wie immer die zurücktreibenden Kräfte der Fläche wirken mögen.

§. 21.

Nun mit dieser Geschwindigkeit cn würde der Körper nach dem Punkte D fortfahren, sich zu bewegen, wenn nicht die zurücktreibenden Kräfte auf ein neues in selben wirkten; nimmt man diese gleich jenen an, so vor dem Punkte D waren, so wird der Körper den Bogen DE beschreiben, so dem vorigen AD gänzlich ähnlich, und gleich seyn wird; und setzet man $CG = CB$, so wird auch $EG = AB$, und die Tangente $ES = AT$, wie auch die Winkel SEG, ESC den Winkeln TAB, ATB gleich seyn; man kann sich also vorstellen, wie der Körper auf solche Art durch die zurücktreibenden Kräfte von einer Fläche so zurückgeworfen werde, daß der Einfallwinkel ATB dem Reflexionswinkel ESG gleiche. Hingegen setzte man die zurücktreibende Kräfte nach D kleiner, oder grösser, als die vorigen, so würde gleichfalls der Reflexionswinkel kleiner oder grösser werden, als der Einfallwinkel war.

§. 22.

Es kann geschehen, daß die kleinste Ordinate $DC = \sqrt[m+1]{\left(4gb^{m+1} - \frac{(m+1)r^2c^2a^m}{4g}\right)}$ eine unmögliche Grösse ist, nämlich wenn $m+1$ eine gerade Zahl, und positiv ist, und zugleich $4gb^{m+1} < (m+1)r^2c^2a^m$. In diesem Falle kann man schliessen, der Körper bewege sich niemal parallel F. VIII. mit der Fläche BG, sondern die krumme Linie schneide selbe in einem Punkte C und werde unter ihr fortgesetzet. Man kann folglich sagen, die Bewegung des Körpers werde in diesem Falle refringirt, oder gebrochen: sind die zurücktreibenden Kräfte, da der Bogen CE beschrieben wird, gleich den vorigen bey der Beschreibung des Bogens AC, so werden auch die zween Bögen AC, CE, und die zween Winkel ATB, ESG gleichen; sind aber die zurücktreibenden Kräfte bey dem Bogen CE grösser als zuvor, so wird sich der Körper zur Perpendikularlinie CZ nähern: hingegen wird er mehr von selber abweichen, wenn die zurücktreibenden Kräfte bey CE kleiner als zuvor sind.

Und endlich kann es sich ereignen, daß DC F. VII. nicht unmöglich, sondern $= 0$ werde; nämlich wenn $4gb^{m+1} = (m+1)r^2c^2a^m$. In diesem Falle würde der Körper die Fläche zwar berühren, aber doch durch selbe nicht hinaus dringen.

§. 23.

Ich erkläre diese Theorie mit einem sonderheitlichen Beyspiele, und setze $m = -3$. oder daß die zurücktreibende Kraft sich umgekehrt verhalte, wie die dritte Potenz des Abstands von der Fläche, so überkömmt die §. XIX. gefundene Gleichung folgende Gestalt:

$$dx = \frac{= ncdy}{\sqrt{r^2c^2 - 2a^3g\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{b^2}\right)}} = \frac{-nbcydy}{\sqrt{(b^2c^2r^2 + 2a^3g)y^2 - 2a^3b^2g}}.$$

es sey $(b^2c^2r^2 + 2a^3g)y^2 - 2a^3b^2g = z^2$: so ist $y^2 = \frac{z^2 + 2a^3b^2g}{b^2c^2r^2 + 2a^3g}$;

und $ydy = \frac{zdz}{b^2c^2r^2 + 2a^3g}$: also $dx = \frac{-ncbdz}{b^2c^2r^2 + 2ag}$. und

x =

$$x = Q \frac{-nbcz}{b^2c^2r^2+2a^3g} = Q - \frac{nbc\sqrt{(b^2c^2r^2+2a^3g)y^2 - 2a^3b^2g}}{bcr+2ag}.$$

Die beständige Grösse Q zu finden, setze ich $x = o$, und $y = b$, so ist $o = Q - \frac{nb^3c^2r}{b^2c^2r^2+a^3g}$; und das vollständige Integral $x =$

$$\frac{nb^3c^2r - nbc\sqrt{(b^2c^2r^2+2a^3g)y^2 - 2a^3b^2g}}{b^2c^2r^2+2a^3g}.$$

Die geometrische Konstruktion dieser Gleichung kann durch die Hyperbel vollbracht werden. Die kleinste Ordinate DC fand ich $= \sqrt{\frac{4a^3b^2g}{4a^3g+2b^2c^2r^2}}$.

Die Abscisse $BC = CG = \frac{b^3c^2nr}{b^2c^2r^2+2a^3g}$, und die Ordinate $EG = b = AB$.

Ich setzte mir auch das Beyspiel $m = -\frac{1}{2}$, und fand $x =$

$$\frac{12a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^2gnr - c^4nr^3 - (4a^{\frac{1}{2}}cgny^{\frac{1}{2}} - nc^3r^2 + 8a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}cgn)}{3g}$$

$\sqrt{c^2r^2 - 8a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}g + 8ga^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}$. In diesem Falle kann die krumme Linie auch die Axe, oder Fläche BG berühren, und dieses geschieht, wenn $y = o$, und $r^2c^2 - 8ga^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$ eine positive Grösse ist: aber schneiden kann doch die krumme Linie nicht die Axe: denn sonst würde y negativ, und $y^{\frac{1}{2}}$ eine unmögliche Grösse, und eben deßwegen wurde auch x unmöglich. Damit von der Linie die Axe geschnitten wird, muß $\sqrt[m+1]{\frac{(4gb^{m+1} - (m+1)r^2c^2a^m)}{4g}}$, wie ich §. XXII. zeigte, eine unmögliche Grösse seyn. Nun weil man die zurücktreibenden Kräfte nur in den kleinsten Abständen wahrnimmt, so wirken selbe wahrscheinlich in einem umgekehrten Verhältnisse des Abstands: folglich ist der Exponent m negativ, und $m + 1$ muß seyn entweder kleiner als 1, und noch positiv, oder $= o$, oder negativ, und grösser als 1. In dem ersten Falle ist $(m+1)r^2c^2a^m$ noch eine position Grösse, und $\sqrt{}^{m+1}\frac{(4gb^{m+1}-(m+1)r^2c^2a^m)}{4g}$ kann unmöglich werden. Z. B. es sey $m=-\frac{1}{3}$; so ist $m+1=\frac{2}{3}$. entgegen in dem letzten Falle, wo $m+1$ negativ ist, wird $-(m+1)r^2c^2a^m$ positiv, und die Wurzelgrösse kann nicht unmöglich werden. Folglich ist es wahrscheinlich, daß auf solche Art durch zurücktreibende Kräfte keine Brechung der Bewegung erfolge, wenn nicht der Exponent des Abstands, nach dessen Verhältniß sie wirken, kleiner als 1 ist. Aber von der gebrochenen Bewegung wollen wir in dem folgenden Abschnitte handeln.

§. 24.

Kann auch durch anziehende Kräfte eine Zurückwerfung des Körpers verursachet werden? Ohne Zweifel. Ich setze, der Körper werde fig. 10. von der Fläche BG nach der Richtung At fortgestossen, und die Fläche BG sey mit anziehenden, und überall parallelen Kräften versehen, so wird der Körper die krumme Linie ADE beschreiben, und zur Fläche BG zurückkehren: aber dabey wird es das Ansehen haben, er werde von einer parallelen Fläche VR zurückgeworfen. Die Gleichung zur beschriebenen Linie wird fast auf die nämliche Art gefunden, wie bey den zurücktreibenden Kräfte §. XIX; nur daß man die allgemeine Gleichung $-2gPdy=Mudu$ §. IV. mit dem negativen Zeichen brauche, weil die Kraft anziehend ist; gleichfalls muß man die positive Gleichung $\frac{du\sqrt{u^2-n^2c^2}}{nc}=dy$ anwenden, da die Ordinaten mit den Abscissen zunehmen; also wird man finden $u^2=c^2+4g\frac{(b^{m+1}-y^{m+1})}{(m+1)a^m}$,

und

und $dx = \frac{n c d y \sqrt{a^m (m+1)}}{\sqrt{r^2 c^2 a^m (m+1) + 4 g (b^{m+1} - y^{m+1})}}$ Der größte Abstand DC ist in diesem Falle $= \sqrt[m+1]{\frac{(a^m r^2 c^2 (m+1) + 4 g b^{m+1})}{4 g}}$, so nur unmöglich seyn kann, wenn m+1 negativ, und eine gerade Zahl ist, und $a^m r^2 c^2 (m+1) > 4 g b^{m+1}$.

§. 25.

Izt wollen wir einige physikalische Anmerkungen von der Zurückwerfung des Lichts machen. 1.) Da dasselbe mit einer unbegreiflich grossen Geschwindigkeit begabet ist, so müssen auch die zurücktreibenden Kräfte, wenn von selben die Reflexion verursachet wird, ungemein groß seyn; sonst könnte von ihnen die senkrechte Geschwindigkeit, mit welcher sich das Licht zur Fläche nähert, nicht ausgelöschet, und eine gleiche nach gegenseitiger Strecke fig. 7. hervorgebracht werden: eben dieß muß man auch von den anziehendeu Kräften sagen; doch muß man sich nicht einbilden, daß nur die äusserste Oberfläche BG eines neuen Mitteldings seine zurücktreibende Kraft gegen den einfallenden Stral äussere: sondern je mehr sich selber zu BG nähert, desto mehrere Theile des neuen Mitteldings werden auf selben wirken.

2.) Beobachtet man, daß wenigstens von den geschliffenen Körpern ein Theil des Lichts sehr ordentlich so zuruckgeworfen wird, daß die Einfall- und Reflexionswinkel einander gleichen: bey den durchsichtigen Körpern, wie bey dem Glase, wird ein Theil des einfallenden Lichts ordentlich zurückgeworfen, der andere aber durchgelassen, und gebrochen. Nun wenn die Zurückwerfung des Lichts nur von den zurücktreibenden Kräften verursachet würde, so müßten selbe in gleichen

Abständen von der Fläche gänzlich gleich seyn; sonst kann der Reflexionswinkel dem Einfallwinkel nicht gleichen: und wie wird dieses möglich seyn, wenn die zurücktreibenden Kräfte mit den anziehenden überall vermischet sind? Indessen mit was für einer Wahrscheinlichkeit kann man diese Gleichheit der zurücktreibenden Kräfte behaupten, sonderbar in dem Boskovichischen Systeme, wo man eine unbegreifliche Verschiedenheit der Kräfte zuläßt? Wie kann eine ordentliche sowohl Zurückwerfung, als Brechung des Lichts entstehen?

3.) Könnte diese Schwierigkeit nicht einigermassen gehoben werden, wenn man annähme, die Zurückwerfung des Lichts werde unmittelbar von der Federkraft der Lichtkugelchen verursachet, und die zurücktreibenden Kräfte der Oberfläche BG haben kaum eine andere Wirkung, als daß durch ihren Widerstand die elastischen Lichtkugelchen zusammengedrückt werden, und das so lange, bis ihre senkrechte Kraft, mit welcher sie sich der Fläche nähern, gänzlich ausgelöschet werden; dann aber stellten sich die Lichtkugelchen durch ihre eigene Federkraft in die vorige Gestalt zurück, und erhielten von selber nach gegenseitiger Strecke wiederum eine Geschwindigkeit, so der verlornen gleichet. Setzet man also die Lichtkugelchen als vollkommen elastisch, so müssen sie also zurückgeworfen werden, daß die Einfall- und Reflexionswinkel einander gleichen. Indessen können nach diesem Gedanken die zurücktreibenden Kräfte auch ungleich, und verschieden seyn. Wenn sie nur irgend so grossen Widerstand leisten, daß sie die senkrechte Kraft des Lichtkugelchens gänzlich auslöschen, so wird in demselben allezeit eine ordentliche Reflexion erfolgen: geschieht aber dieses nicht, so wird das Lichtkugelchen seine Bewegung in dem neuen Mitteldinge fortsetzen, wo eine Brechung erfolgen muß. Indessen sieht man, wie eine ordentliche Zurückwerfung mit der Brechung kann verbunden seyn.

Wenn

Wenn schon das Licht allezeit so zurückgeworfen wird, daß die Einfall- und Reflexionswinkel einander gleichen, so folget doch nicht daraus, daß eine jede auch rauhe Oberfläche das Licht so, wie ein Spiegel zurückwerfe; denn in einer rauhen Oberfläche sind die kleinsten Flächen, aus denen selbe bestehet, nach verschiedenen Gegenden gewendet; folglich muß auch das Licht von selben nach sehr verschiedenen Gegenden zurückgeworfen werden; und dann werden die Stralen zerstreuet und können kein Bild mehr vorstellen.

4.) Ich zeigte §. XXIV. daß auch durch anziehende Kräfte eine scheinbare Reflexion hervorgebracht werden kann. Diese geschieht glaublich, da das Licht aus dem Glase unter einem sehr spitzigen Winkel in die Luft, oder gar in den leeren Raum hinausfahren sollte, aber dafür in das Glas zurückgeworfen wird. In diesem Falle ist ohnehin die senkrechte Kraft gegen der parallelen sehr klein, und kann von der anziehenden Kraft des Glases leicht ausgelöschet werden. Nun da ein Lichtkugelchen von seiner vorigen Geschwindigkeit von dem Glase fortgetrieben, und von den anziehenden Kräften des Glases zurückgehalten wird, so muß das Lichtkugelchen wiederum eben so wohl zusammen gedrücket werden, als wenn es sich zum Glase hinbewegte, und von selbem zurückgetrieben würde; wenn also desselben senkrechte Geschwindigkeit, mit der es vom Glase floh, durch den Widerstand der anziehenden Kräfte ist ausgelöschet worden, so wird es eben auch durch seine eigene Federkraft in das Glas hineingeworfen werden.

Allein wie kann man sagen, daß das Licht, da es in das Glas fährt, von selbem zurückgetrieben, und da es aus selbem fährt, wiederum angezogen werde? Heißt dieses nicht dichten? Doch könnte man nicht annehmen, daß das Glas in etwas grösseren Abständen das Licht anziehe, in den kleinern aber zurücktreibe? Fährt nun das Licht dem Glase zu, so wird alles dasjenige zurückgetrieben werden, so theils wegen eigener Richtung, und Geschwindigkeit, theils auch wegen der Geschwindigkeit, so durch die anziehende Kräfte vermehret wurde, in die kleinste Abstände vom Glase kam, und dabey solche zurücktreibende Kräfte erfuhr, daß es die ganze senkrechte Geschwindigkeit verlor: der übrige Theil des Lichtes aber, dem es nicht so ergehet, wird durch das Glas durchgehen ꝛc. Doch diese sind nur physikalische Muthmassungen, die aber in einer so schweren Materie nicht gänzlich zu verachten sind.

Vierter Abschnitt.

Von der gebrochenen Bewegung der Körper.

§. 26.

Wenn ein Körper in der Fortsetzung seiner Bewegung von der vorigen Richtung in etwas abweichet, ohne eine entgegengesetzte zu nehmen, so heißt sie eine gebrochene Bewegung. Diese ereignet sich, da ein Körper von einer flüssigen Materie in eine andere von verschiedener Dichtigkeit hinüber gehet. Es sey fig. 10. S V die Oberfläche der neuen flüssigen Materie; A C die Einfall-Linie; man errichte bey C die senkrechte Linie G I; und fälle aus S V, und G F die Perpendikularlinien A E, A B, man verlängere A C in D, und beschreibe mit C D = A C den Bogen d D F; und ziehe senkrecht auf G F die Linien D H, d m; die Linie C d stellet die neue Richtung des Körpers vor; A B = H D den Sinus des Neigungswinkels; und d m den Sinus des gebrochenen Winkels m C d; D C d ist der Brechungswinkel. Weichet die gebrochene Linie C d mehr als die einfallende C D von der senkrechten G F ab, ab, so sagt man: die Bewegung wird vom Perpendikel gebrochen: weicht sie aber weniger ab, so heißt es: die Brechung geschieht zum Perpendikel.

§. 27.

Nun kann man allgemein dieses Gesetz geben: Wenn man die Kraft AC, mit welcher der Körper schief zu SV herkömmt, in zwo Kräfte AE, AB zertheilt, von welchen eine zu SV senkrecht, die andere aber parallel ist, so wird allezeit eine Brechung erfolgen, so oft das Verhältniß zwischen der senkrechten, und parallelen Kraft geändert wird: und zwar wird die Bewegung von dem Perpendikel gebrochen, so oft die senkrechte Kraft mehr als die parallele vermindert, oder diese mehr als jene vermehret wird: hingegen erfolgt eine Brechung zum Perpendikel, wenn die senkrechte weniger, als die parallele vermindert, oder diese weniger, als jene vermehrt wird. Die Sache ist so augenscheinlich, daß man sich nur Beyspiele in einer Figur machen darf, um davon überzeuget zu werden.

Dahin soll also die Sorge eines Naturlehrers gehen, daß er zeige, wie in dem gegebenen Falle das Verhältniß dieser zwoen Kräfte geändert werde. Ich unterscheide wiederum 2 Fälle, 1.) da die Brechung durch mechanische Kräfte verursachet wird, z. B. da eine Kugel schief aus der Luft in das Wasser geworfen wird; 2.) da selbe von den sonderheitlichen Kräften vollbracht wird, so wie es wahrscheinlich bey der Brechung des Lichts geschieht.

Die meisten Naturlehrer, da sie die gebrochene Bewegung einer Kugel, so schief in das Wasser geworfen wird, untersuchen, nehmen schon vorhinein an, daß nur die senkrechte Kraft durch den Widerstand des Wassers vermindert werde, die parallele aber unveränderlich bleibe. Allein diese Meynung ist irrig. Herr Benedikt Stattler zeiget in seiner Generalphysik §. 115. daß beyde Kräfte durch den Widerstand des Wassers müssen vermindert werden, aber die senkrecht mehr, als die parallele. Als ich dieses las, kam mich die Lust an, diese Sache durch eine genauere Berechnung zu untersuchen. Den ganzen Widerstand des Wassers setze ich nicht nur, wie die Oberfläche der Kugel, so selben leidet, sondern auch wie das Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher der Körper die flüssige Materie von sich stößt.

§. 29.

1.) Ich zertheile also die ganze Kraft AC, fig. 11. mit welcher der Körper schief in das Wasser geworfen wird, in die senkrechte AE, und parallele EC; und Anfangs will ich setzen, der Körper steige nur senkrecht mit der Kraft AE in das Wasser, und suche, was für eine senkrechte Geschwindigkeit in ihm noch werde übrig seyn, nachdem die ganze Kugel eingetauchet ist. Von der Schwere, setze ich, werde indessen, da die Eintauchung geschieht, ihre senkrechte Kraft nicht merklich vermehret.

2.) Es sey der Halbmesser der Kugel $= a$, die Eintauchung $RP = s$. Wenn sich der Halbmesser zur Peripherie verhält, wie $r\,q$; so wird die Oberfläche des eingetauchten Theils MRP seyn $= \frac{aps}{r}$, und die Grösse, oder der Raum dieses Theils $= \frac{p}{6r}(3as - s^3)$; die noch übrige Geschwindigkeit der Kugel setze ich $= u$. Den ganzen Widerstand der Kugel drücke ich durch das Gewicht eines wässerichten Cylinders aus, so zu seiner Grundfläche die Oberfläche $\frac{aps}{r}$ hat, und dessen

dessen Höhe $= \frac{u^2}{2g}$, oder gleich jener ist, über welche die Kugel durch die Schwere herabfallen mußte, die Geschwindigkeit u zu erhalten. Die specifische Schwere des Wassers sey $= n$: so ist der ganze Widerstand des Wassers $= \frac{apnsu^2}{4rg} = P$. Die Masse, so diesen Widerstand leidet, gleichet der Masse der Kugel, minder einer Masse des Wassers, so eben jene Grösse hat, als der eingetauchte Theil der Kugel MRQ. Die specifische Schwere der Kugel sey $= m$; so wird das Gewicht, oder die Masse der Kugel seyn $= \frac{2a^3pm}{3r}$, und die Masse des ausgedrückten Wassers $= \frac{pn}{6r}(3as^2 - s^3)$; folglich wird die Masse, so den Widerstand leidet, seyn, $= M = \frac{2a^3pm}{3r} - \frac{pn}{6r}(3as^2 - s^3) = \frac{p}{6r}(4a^3m - 3ans^2 + ns^3)$;

3.) Setze man nun diese Werthe von P und M in der allgemeinen Formel $-2gPds = Mudu$, so für die widerstehenden Kräfte gehöret, und man hat $-\frac{apsu^2nds}{2r} = \frac{p}{6r}(4a^3m - 3ans^2 + ns^3)udu$; und $-\frac{3ansds}{4a^3m - 3ans^2 + ns^3} = \frac{du}{u}$. Das erste Glied zu integriren, löse ich den Bruch $\frac{3an}{4a^3m - 3ans^2 + ns^3}$ in eine unendliche Reihe auf $= \frac{3n}{4a^2m} + \frac{9n^2s^2}{16a^4m^2} - \frac{3n^2s^3}{16a^5m^2}$ etc. Mit diesen Theilen kann man sich befriedigen, wenn die specifische Schwere der Kugel um vieles grösser ist,

ist, als jene des Wassers; also hat man $\frac{du}{u} = \frac{-3ansds}{4a^3m - 3ans^2 + ns^3} =$

$\frac{-3nsds}{4a^2m} - \frac{9n^2s^3ds}{16a^4m^2} \frac{+3n^2s^4ds}{16a^5m^2}$; folglich Log. $u = Q -$

$\frac{3ns^2}{8a^2m} - \frac{9n^2s^4}{64a^4m^2} \frac{+3n^2s^5}{80a^5m^2}$. Die beständige Grösse Q findet man, wenn man setzet $s=0$, so gleichet u der anfänglichen senkrechten Geschwindigkeit A E, die ich annehme $= b$. Also ist Log. $b = Q$. und Log. $u =$ Log. $b - \frac{3ns^2}{8a^2m} - \frac{9n^2s^4}{64a^4m^2} \frac{+3n^2s^5}{80a^5m^2}$. Fällt nun die Kugel bis zum Mittelpunkte C, so haben wir $RP = CR$, oder $s = a$, und die noch übrige Geschwindigkeit Log. $u =$ Log. $b - \frac{3n}{8m} - \frac{9n^2}{64m^2} \frac{+3n^2}{80m^2}$

$=$ Log. $b - \frac{3n}{8m} - \frac{33n^2}{320m^2}$.

4.) Wenn nun die Kugel über dem Mittelpunkte C in dem Wasser versenket wird, so ist der Widerstand des Wassers überall, wie das Produkt von der halben Oberfläche der Kugel $\frac{a^2pn}{r}$ in die Höhe $\frac{u^2}{4g}$, folglich $= \frac{a^2pnu^2}{4gr} = P$; die Masse, so den Widerstand leidet, ist wie zuvor $= \frac{p}{6r}(4a^3m - 3ans^2 + ns^3)$; setzet man dieses wiederum in der Gleichung $-2gPds = Mudu$, so erhält man $-\frac{a^2pnu^2ds}{2r} =$ $\frac{p}{6r}(4a^3m - 3ans^2 + ns^3)udu$; und $\frac{du}{u} = \frac{-3a^2nds}{4a^3m - 3ans^2 + ns^3}$. Braucht man wiederum die unendliche Reihe, so ist $\frac{du}{u} = -\frac{3nds}{4am}$

-9

$-\frac{9n^2s^2ds}{16a^3m^2} + \frac{3n^2s^3ds}{16a^4m^2}$ etc. und das Integrale Log. $u = Q. - \frac{3ns}{4am} - \frac{3n^2s^3}{16a^3m^2} + \frac{3n^2s^4}{64a^4m^2}$. Die beständige Grösse Q zu finden, setze ich, die Kugel sey bis auf ihren Mittelpunkt eingetauchet, so ist $s = a$, und die Geschwindigkeit in diesem Orte Log. $u =$ Log. $= b - \frac{3n}{8m} - \frac{33n^2}{320m^2}$, wie ich oben fand; folglich hat man da Log. $b - \frac{3n}{8m} - \frac{33n^2}{320m^2} = Q - \frac{3n}{4m} - \frac{3n^2}{16m^2} + \frac{3n^2}{64m^2}$; daraus findet man $Q =$ Log. $b + \frac{3n}{8m} + \frac{3n^2}{80m^2}$; und das vollständige Integral wird Log. $u =$ Log. $b + \frac{3n}{8m} + \frac{3n^2}{80m^2} - \frac{3ns}{4am} - \frac{3n^2s^3}{16a^3m^2} + \frac{3n^2s^4}{64a^4m^2}$. Endlich setzet man $s = 2a$, so findet man die noch übrige senkrechte Geschwindigkeit, nachdem die ganze Kugel eingetauchet ist = Log. $b - \frac{9n}{8m} - \frac{57n^2}{80m^2}$.

5.) Itzt wollen wir zur parallelen Kraft EC schreiten, die ich Anfangs setze $= c$. Da müssen wir aber nur die Helfte des vorigen Widerstands betrachten, der doch immer zunimmt, weil nicht der ganze eingetauchte Theil MRQ, sondern nur der Theil RQ das flüssige Wesen auf die Seite räumen muß. Die noch übrige Geschwindigkeit setze ich $= U$; nun nehme man in der allgemeinen Gleichung $-2gPds = MdU$ anstatt P die itzt widerstehende Kraft $\frac{apnsU^2}{8rg}$; die Masse ist wie zuvor, und man findet die Gleichung $-\frac{\frac{3}{2}ansds}{4a^3m - 3ans^2 + ns^3} = \frac{dU}{U}$,

und

und $\text{Log. } U = \text{Log. } c - \frac{3ns^2}{16a^2m} - \frac{9n^2s^4}{128a^4m^2} + \frac{3n^2s^5}{160a^5m^2}$. Setzet man $s = 2a$, so findet man die noch übrige parallele Geschwindigkeit $\text{Log. } U = \text{Log. } c - \frac{3n}{4m} - \frac{31n^2}{40m^2}$.

Ich will annehmen, die Kugel werde unter einem Winkel von 25^c in das Wasser geworfen: beyde Kräfte AE, EC werden gleich seyn; ich setze selbe $= 70'.71068 = b = c$. Die Kugel sey von Bley, und $m : n = 1131 : 100$. Machet man die nothwendige Berechnung mit den Logarithmis, so findet man u oder die noch übrige senkrechte Geschwindigkeit $= 63.66$; und U, oder die noch übrige parallele Geschwindigkeit $= 65 : 91$. Man setze also $RC = 63.66$, und $RS = 65.91$, und sage $CR : RS = 1 : \text{tang. } RCS$, so findet man diesen Winkel $= 45^c.59'.53''$. Dieß ist der gebrochene Winkel, und der Brechungswinkel ist $= 59'.53''$.

Aus dieser Berechnung kann man abnehmen, daß die Brechung der Bewegung einer in das Wasser schief geworfenen Kugel nicht von ihrem Durchmesser, oder ihrer Grösse abhange; ist aber die Kugel schon ganz in einer flüssigen Materie eingetauchet, und wird in selber fortbeweget, so hängt gewiß der Widerstand des Wassers, und die Bewegung der Kugel von ihrer Grösse ab. Ich setzte den Durchmesser einer solchen Kugel $= 2a$, ihre anfängliche Geschwindigkeit, da sie sich in den flüssigen Materien zu bewegen anfängt $= c$, den geraden Weg, den sie in selben macht $= s$: die endliche Geschwindigkeit $= u$; und ich fand durch die Berechnung, so ich nach der vorigen Art anstellte $\text{Log. } c - \frac{3ns}{4a(m-n)} = \text{Log. } u$; und also $s = \frac{4a(m-n)}{3n} \text{Log. } \frac{c}{u}$ und die Zeit, da die Kugel durch diesen Raum sich beweget $= \frac{4a(m-n)(b-u)}{3nc^2u}$.

§. 30.

§. 30.

Nun wollen wir auch von der Brechung des Lichts etwas sagen. Man stellet sich selbe also vor; setzen wir, es fahre solches aus der Luft in das Glas, dessen anziehende Kräfte sich auf eine gewisse Entfernung erstrecken, so wird die senkrechte Geschwindigkeit des einfallenden Lichts vermehret, und es muß durch eine krumme Linie in die Oberfläche des Glases hineinfahren; dann aber, weil es von allen Seiten gleich angezogen, oder zurückgetrieben wird, setzet es die Bewegung in gerader Linie fort; doch wird die Richtung dieser Linie näher bey dem Perpendikel seyn, weil die senkrechte Kraft vermehret wurde, die parallele aber unverändert blieb. Der Stral wird also zum Perpendikel gebrochen. Kehret er aus dem Glase in die Luft zurück, so wird er mehr vom Glase als von der Luft angezogen, seine senkrechte Geschwindigkeit wird vermindert, und er muß von dem Perpendikel gebrochen werden. §. XXVII.

In der 12. fig. stellt B b G g ein Stück Glas vor, A F, a f zwo mit den Oberflächen parallele Flächen, wohin die anziehenden Kräfte sich erstrecken, A T die Richtung des einfallenden Strales. Dieser wird aber in die krumme Linie A C umgebogen, und dann nach der Strecke der letzten Tangente C D in das Glas fahren, wo er sich mehr zum Perpendikel, als A T nähern wird: kömmt der Stral zu D, so wird er geradlinicht nach D t fortgehen: aber die anziehenden Kräfte des Glases biegen selben wiederum in die krumme Linie D c: endlich wird er von c nach der Richtung c h der letzten Tangente in der Luft sich fort bewegen, und sich mehr als D t vom Perpendikel A a entfernen.

§. 31.

Nun bilde man sich in dem Glase eine mit B G parallele Fläche ein, in welcher man die ganze anziehende Kraft gleichsam versammelt betrachten kann, welche nach parallelen Richtungen überall das Licht anziehet, und zwar in einem gewissen Verhältnisse m des Abstandes y; so können wir, wie in dem vorigen Abschnitte, die allgemeinen Gleichungen für diesen Fall bestimmen; man wird nämlich finden $u^2 = c^2 + \frac{4g(b^{m+1} - y^{m+1})}{a^m\,(m+1)}$; und $dx = \frac{-nc\,dy\sqrt{a^m\,(m+1)}}{\sqrt{r^2c^2a^m(m+1)+4g(b^{m+1}-y^{m+1})}}$.

Was die erste Gleichung betrift, kann man u für eben jene Geschwindigkeit gelten lassen, mit welcher der Stral in die Oberfläche B G einfährt, und y für den Abstand von jener Fläche, in welcher ich mir vorstellte, daß gleichsam alle anziehende Kraft des Glases versammelt sey. Dieses vorausgesetzt, schliesse ich aus dieser Gleichung $u^2 = c^2 + \frac{4g(b^{m+1} - y^{m+1})}{a^m\,(m+1)}$, daß der nämliche Stral, so mit gleicher Geschwindigkeit c unter was immer für einem Winkel dem nämlichen Glase zufährt, in demselben allezeit mit gleicher Geschwindigkeit u durch C D bewegt werde; denn bey dem nämlichen Glase sind m, a, b, y, g beständige Grössen, folglich ist auch u beständig.

Man nimmt diese Wahrheit, daß die Geschwindigkeit eines Strales in dem Glase allezeit die nämliche sey, unter was immer für einem Winkel er einfällt, schon für gewiß, und ohne Beweise an. Doch von sich selbst ist die Sache nicht klar. Geschähe die Brechung durch mechanische Kräfte, so wäre der Satz gemeiniglich falsch. Aus der zwoten beygebrachten Gleichung kann man abnehmen, daß zwar die Lage, doch nicht die Natur, und Gattung der krummen Linien AC, DC von dem Einfallwinkel, dessen cosinus = n. und sin. = r sind, abhange;

übri-

übrigens stellte ich mir deßwegen eine mittlere Fläche vor, in welcher gleichsam alle anziehende Kräfte versammelt sind, theils weil in der That die anziehenden Kräfte nicht nur in der Oberfläche B G, sondern auch in den untern Parallelen vorhanden sind, und oft das Licht noch hinreichend herabziehen, wenn es etwa der ersten B G auch schon so nahe kam, daß es ihre zurücktreibenden Kräfte fühlte: theils damit nicht die Geschwindigkeit u an der Oberfläche B G unendlich groß würde, wenn man annähme, daß die anziehenden Kräfte in einem umgekehrten Verhältnisse des Abstandes von B G wirkten; allein, wenn man in den kleinsten Abständen zurücktreibende Kräfte zuläßt, so können auch die anziehenden niemal vollkommen im umgekehrten Verhältnisse des Abstandes wirken.

§. 32.

Wenn nun die Geschwindigkeit des Lichts in dem nämlichen durchsichtigen Körper allezeit die nämliche ist, unter was immer für einem Winkel es in denselben einfällt, so kann man auch unschwer beweisen, daß auch der Sinus des Neigungswinkels zum Sinus des gebrochenen Winkels ein beständiges Verhältniß hat. Es sey A C der einfallende Stral, der Sinus des Neigungswinkels = A B = E C; da die Parallelkraft A B nicht verändert wird, setze man C I = A B; und C r = I S stelle die vermehrte, senkrechte Kraft vor: so wird der Stral dem Wege C S folgen, und zum Perpendikel gebrochen werden: d m wird seyn der Sinus des gebrochenen Winkels, und r s = H D = C I = A B der Sinus des Neigungswinkels. Weil nun der Stral sich über die Linien A C, C S zu gleicher Zeit beweget, so ist A C, oder C d zu C S, wie die Geschwindigkeit des Lichts in der Luft zur Geschwindigkeit in dem Glase: allein c d : c s = m d : r s = m d : A B; also ist die Geschwindigkeit des Lichts in der Luft, zur Geschwindigkeit in dem Glase, wie der Sinus des gebrochenen Winkels zum Sinus des Neigungswinkels; folglich wenn die Geschwindigkeiten in einem beständigen Verhältnisse sind, so muß eben dieß auch von dem Sinus des gebrochenen, und des Neigungswinkels gesagt werden. Also verhält sich auch die Sache, wenn das Licht aus was immer für einem durchsichtigen Körper in einen anderen hinüber gehet, so von verschiedener Dichtigkeit, oder Anziehungskraft ist.

§. 33.

Man kann wiederum fragen, ob das Licht welches in dem Mitteldinge S G V die gleichförmige Geschwindigkeit AC, in dem untern S F V die Geschwindigkeit C S hat, eben diesem Wege A C S folgen müsse damit es in der kürzesten Zeit aus A nach S komme. Ich setze in der 13. fig. es sey A C S eben jener Weg, welchen das Licht machen muß, damit es aus A nach S mit den gegebenen Geschwindigkeiten in der kürzesten Zeit gelange. Man setze einen andern Weg A c S, so dem vorigen unendlich nahe ist; so wird dieser Weg eben weil er dem Wege A C S unendlich nahe ist, zur nämlichen Zeit beschrieben werden (wie es bekannt ist aus der Methode de maximis, & minimis); man beschreibe aus A und S die unendlich kleinen Bögen c M, C m, so man für senkrechte Linien auf AC, und cS halten darf; folglich wenn man Cc für den Sinus totus annimmt, so ist M C : mc = Sin. M c C : Sin. c C m. Nun aber sind die Winkel M c C, A C B gleich, da beyde mit dem Winkel c C M einem rechten gleichen, und die Winkel c C m, r C S sind auch gleich, da beyde mit m C r einen rechten ausmachen; also ist MC : c m = Sin. ACB : Sin. r C S. Weil nun die Zeiten über A C S, A c S gleich sind, wie auch die Zeiten über A M, A c, und über C S, m S, so müssen auch die Zeiten über M C, c m gleichen; folglich sind die Räume M C, c m, wie die Geschwinschwindigkeiten, mit denen sie beschrieben werden; also muß die Geschwindigkeit des Lichts in dem Mitteldinge SGV sich verhalten zur Geschwindigkeit in dem Mitteldinge SFV = Sin. ACB : Sin. rCS, das ist, die Geschwindigkeiten müssen in geradem Verhältnisse seyn mit dem Sinus der Winkel, so ihre Richtungen mit der senkrechten Linie GF machen.

§. 34.

Wenn also das Licht in der kürzesten Zeit aus A in S kommen würde, so müßte AC : CS = AB : md seyn. Allein wir fanden eben das umgekehrte Verhältniß AC : CS = md : AB. Wie kann man also behaupten, daß das Licht bey der Brechung jenem Wege folge, den es in kürzester Zeit durchwandert? Ich untersuchte deßwegen die Beweise dieser Meynung genau, und nahm endlich wahr, daß man aus zween irrigen Grundsätzen eine Wahrheit schloß. Man wollte zeigen, daß bey der Brechung des Lichts sich der Sinus des Neigungswinkels zum Sinus des gebrochenen Winkels verhält, wie die Geschwindigkeit des Lichts in dem Glase zur Geschwindigkeit in der Luft: eine Wahrheit, die auch aus der Erfahrung bekannt ist. Diese zu zeigen, nahm man den metaphysischen Grundsatz von der **kleinsten Wirkung** an, nach welchem jede Wirkung in der kürzesten Zeit geschehen sollte. Allein man hat denselben noch niemal bewiesen. Die kleinste Wirkung maß man durch das Produkt der Geschwindigkeit, und des Wegs, den der Körper machte. Doch auch dieses Maaß ist eben so ungegründet, als der metaphysische Satz. Indessen kam man zufälliger Weise aus dieser fälschlich angenommenen Meynung auf das wahre Verhältniß der Geschwindigkeiten. Man sehe die Beweise des Hrn. Johann Bernoulli *Omnia opera* Tom. I. N. 65, des Hr. Clemms **Lehrbuch**, Dioptrik §. 379. **B. Martin** 2. Theil, 8. Vorles. num. 11.

§. 35.

Könnte die Brechung der Stralen nicht auch durch zurücktreibende Kräfte geschehen? An der Möglichkeit läßt sich nicht zweifeln; z. B. man nehme an, die Luft äussere grössere zurücktreibende Kräfte gegen das Licht, als das Glas. Fährt der Stral aus der Luft schief in das Glas, so wird dessen senkrechte Geschwindigkeit durch die zurücktreibenden Kräfte der Luft vermehret, und so wird der Stral zum Perpendikel gebrochen: hingegen fährt der Stral aus dem Glase in die Luft, so muß eben seine senkrechte Geschwindigkeit wegen der zurücktreibenden Kräfte der Luft vermindert werden, und es muß eine Brechung vom Perpendikel erfolgen. Ich frage itzt nur, ob man schon hinreichende Ursachen habe, allgemein zu behaupten, daß die Stralenbrechung durch die anziehenden Kräfte verursachet werde?

§. 36.

Itzt will ich noch kürzlich zeigen, wie man das Verhältniß der anziehenden Kräfte, so nach immer parallelen Richtungen wirken, in der gegebenen krummen Linie finden kann. Ich setze zum Beyspiele einen Zirkel, dessen Durchmesser fig. 14. B G die anziehende Fläche vorstellet. Es sey $BM = x$. $PM = y$. $BC = a$. Der Körper werde in A hingeworfen, wo der Winkel T A C ein rechter, und dessen Sinus $n = 1$ ist; die Geschwindigkeit in $A = C$. Nun aus der Natur des Zirkels ist $y^2 = 2ax - x^2$, und $x^2 - 2ax = -y^2$; also $x = a = \sqrt{a^2 - y^2}$: und $dx = \frac{\mp y\, dv}{\sqrt{a^2 - y^2}}$; setze man dieses in der ersten allgemeinen Gleichung $\frac{dx\sqrt{u^2 - nc^2}}{nc} = dy$. §. III. so haben wir $\frac{\mp y\, dy \sqrt{u^2 - c^2}}{c\sqrt{a^2 - y^2}} = dy$; und $\mp y\sqrt{u^2 - c^2} = c\sqrt{a^2 - y^2}$; und $u^2 y^2 - c^2 y^2 = a^2 \quad = c^2 y^2$; oder

oder $u^2 = \frac{a^2 c^2}{y^2}$, und $u = \frac{ac}{y}$; wie auch $udu = \frac{-2a^2c^2 dy}{y^3}$. Setzet man dieses in der zwoten allgemeinen Gleichung $-2gPdy = Mudu$; so findet man $-2gPdy = \frac{-2Ma^2c^2dy}{y^3}$, und $P = \frac{a^2c^2M}{2gy^3}$; das ist, die anziehenden Kräfte müssen seyn umgekehrt, wie die dritte Potenz der Ordinaten, oder des Abstandes von der anziehenden Fläche BG. Deßwegen wenn der Körper zu B oder G kömmt, würde dort die anziehende Kraft, und die Geschwindigkeit u unendlich groß seyn. Ueberdem, da ich fand $u = \frac{ac}{y}$ und $c = \frac{uy}{a}$, so ist $P = \frac{Mu^2y^2}{2gy^3} = \frac{Mu^2}{2gy}$, und $u = \sqrt{\frac{2gPy}{M}} = \sqrt{\frac{4gP + \frac{1}{2}y}{M}}$, das ist, der Körper hat überall so eine Geschwindigkeit, die er durch eine gleichförmige Bewegung von der beständigen Kraft P erhalten würde, wenn er über die halbe Ordinate y herab fiele. (Sieh meine Abhand. §. XIII.) Die Zeit der Bewegung in diesem Falle zu finden, nehme man die Gleichung $dt = \frac{ds}{u}$; aus der Natur des Zirkels aber ist $ds = \frac{adx}{y}$; und $u = \frac{ac}{y}$; also haben wir $dt = \frac{dx}{c}$; und $t = \frac{x}{c}$; die ganze Zeit, da die halbe Peripherie beschrieben wird $= \frac{2a}{c}$.

Wäre die Linie BAG eine Ellipse, deren halbe grosse Axe $= BC = a$, und die kleinere $AC = b$, so würde man finden $P = \frac{c^2 b^4 M}{2ga^2y^3}$; und bey einer Parabel, deren Parameter $= p$, und Ordinate $BC = a$, fand ich $P = \frac{c^2 M}{gl}$, das ist, eine beständige Kraft.

Fünf-

Fünfter Abschnitt.

Von dem Falle der schweren Körper über krumme Linien.

§. 37.

Da man alle Richtungen der Schwerekraft für parallel annehmen kann, so liesse sich die Theorie von dem Falle der schweren Körper leicht aus unsern Gleichungen, die wir von diesen Kräften fanden, herausziehen; doch zur grössern Deutlichkeit will ich diesen Fall besonders erklären. Es stelle A M B fig. 24. einen krummlinichten Kanal vor, der frey von aller Reibung ist. Man ziehe zwo Ordinaten P M, p m unendlich nahe; die Kraft P, mit welcher der Körper senkrecht zu A C, und parallel mit M P herabgezogen wird, stelle ich durch m f vor, und zertheile sie in zwo Kräfte m g, und m h. Die erstere, so mit der Tangente in M übereinfällt, wird die Geschwindigkeit des herabfallenden Körpers vermehren; die andere, so perpendikular zur Tangente ist, wird den Druck auf den Kanal vorstellen. Man setze $AP = x$. $PM = y$; und ziehe Mr mit AC parallel; so ist $rm = dy$. $Mr = dx$. Der Bogen $Mm = ds \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Nun da die entgegengesetzten Winkel fMg, Mmr gleich sind, so werden die rechtwinklichten Dreyecke fmg, Mmr ähnlich seyn, und $Mm : rm = mf : mg$; oder $ds : dy = P : \frac{Pdy}{ds} = mg$. Setze man diese Kraft P in der allgemeinen Gleichung $2gPds = Mudu$, so hat man $2gPdy = Mudu$. Die

Zeit

Zeit des Falls wird allgemein durch die Gleichung $dt = \frac{ds}{u}$ bestimmet. Endlich den Druck zu finden, sage $Mm : Mr = mf : fg$; oder oder $ds : dx = P : \frac{Pdx}{ds} = fg$.

§. 38.

Setzet man, die anziehende Kraft P sey die irdische Schwere, so der Masse M gleichet, so hat man $2gdy = udu$; und das Integral $2gy = \frac{u^2}{2}$, und $u = \sqrt{4gy}$, wo man keine beständige Grösse hinzusetzen darf, wenn die Bewegung in A, wo $y = 0$ ist, anfängt. Nun wenn ein schwerer Körper über die Höhe y frey herabfiele, wäre gleichfalls an dem Ende seine Geschwindigkeit $u = \sqrt{4gy}$ (Sieh meine Abhand. §. XIV.); folglich da ein Körper über was immer für eine krumme Linie durch die Schwere herabfällt, erhält er am Ende die nämliche Geschwindigkeit, zu welcher er im freyen Falle von der nämlichen Höhe gelangen würde.

2.) Ist AMB eine gerade Linie, so stellet sie eine schiefe Fläche vor, deren Höhe $CB = a$, Grundlinie $AC = b$, Länge $AB = l$. So ist $b : a = x : y = \frac{ax}{b}$, und $u = \sqrt{4gy} = \sqrt{\frac{4agx}{b}}$. Ueberdem findet man $ds = \frac{dx\sqrt{a^2+b^2}}{b} = \frac{ldx}{b}$, und $dt = \frac{ds}{u} = \frac{l\,dx}{\sqrt{4abgx}}$; dessen Integral ist $t = \frac{l\,x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{abg}}$; und die Zeit des Falls über AMB ist $t = \frac{l}{\sqrt{ag}}$. Fällt aber ein Körper über CB, so wäre die Zeit $= \frac{a}{\sqrt{ag}}$; folglich ist die Zeit über AMB, zur Zeit über $CB = l : a$, oder wie die Länge zur Höhe. Fällt ein Körper über verschiedene schiefe Flächen von nämlicher Höhe, so werden die Zeiten des Falls seyn, wie l, das ist, wie die Längen. Weiters da $AB : AC = AM : AP$; so ist $l : b = s : x = \frac{bs}{e}$. und die Zeit $t = \frac{l x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{abg}} = \frac{\sqrt{ebs}}{\sqrt{abg}} = \frac{\sqrt{es}}{\sqrt{ag}}$; oder die Zeiten des Falls über verschiedene Theile s der nämlichen schiefen Flächen sind, wie die Wurzeln derselben.

Ich würde diese schon bekannten Sätze nicht anführen, wenn ich nicht in dem nächsten Abschnitte einen Gebrauch davon machen würde. Auch in dem gegenwärtigen Abschnitte bin ich keineswegs gesinnet, alle jene schöne Erfindungen, die man von dem Falle der Körper über krumme Linien, sonderbar über Cycloiden gemacht hat, anzuführen; man findet selbe in den Werken Newtons, Eulers, Kästners, Karl Schäffers deutlich erkläret; ich will hauptsächlich nur suchen, durch eine Aufgabe mir den Weg zum folgenden Abschnitte zu bahnen.

§. 39.

Aufgabe. Man soll die Natur einer krummen Linie finden, in welcher die Zeiten des Falls mit den Höhen, oder Ordinaten MP ein gewisses Verhältniß $= n$ haben. Ant. Ich fand vorher $u = \sqrt{4gy}$; setzen wir Kürze halber die Höhe $4g = 1$; so ist $u = \sqrt{y}$, und die Zeit $dt = \frac{ds}{u} = \frac{ds}{\sqrt{y}}$; also $t = \int \frac{ds}{\sqrt{y}}$. Nun will ich die Zeit des Falls nach der Bedingniß unsrer Aufgabe allgemein durch $\frac{y^n}{na^m}$ vorstellen,

so

so haben wir $S \frac{ds}{\sqrt{y}} = \frac{y^n}{n a^m}$. Differenzirt man diese Gleichung, so hat man $\frac{ds}{\sqrt{y}} = \frac{y^{n-1} dy}{a^m}$, und $ds = \frac{y^{n-\frac{1}{2}} dy}{a^m}$. Die Homogenität beyder Glieder zu erhalten, muß man setzen $m = n - \frac{1}{2}$. Weiters ist $ds^2 = \frac{y^{2n-1} dy^2}{a^{2m}}$ $= dx^2 + dy^2$; daraus findet man $dx = \frac{dy \sqrt{y^{2n-1} - a^{2m}}}{a^m}$. Nun nehmen wir an z. B. $n = 1$, oder die Zeiten des Falls verhalten sich gerade, wie die Höhen, oder Ordinaten, so ist $m = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, und $dx = \frac{dy \sqrt{y - a}}{\sqrt{a}}$. Es sey $y - a = z$. und $dx = \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{\sqrt{a}}$; also $x = \frac{2 z^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{a}}$. und $\frac{g a x^2}{4} = z^3 = (y - a)^3$ Dieß ist eben die Gleichung zur kubischen Parabel; setzet man $x = 0$, so ist $z^3 = (y - a)^3 = 0$. und $y = a$, das ist, bey dem Anfange der Absciſſen ist die Ordinate $y = a$. Die 16. fig. stellet diese krumme Linie vor, wo $AQ = a$. $PM = y$. $AP. = x$.

§. 40.

Nun wollen wir hingegen in dieser Linie die Zeit des Falls etwas genauer untersuchen. Allgemein findet man die Zeit durch die Gleichung $\frac{ds}{u}$, und u ist $= \sqrt{4gy}$; also $dt = \frac{ds}{\sqrt{4gy}}$. Weil also in der kubischen Parabel $\frac{2 z^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{a}} = \frac{2 (y - a)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{a}} = x$, so hat man $dx = \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{\sqrt{a}}$, oder $dx = \frac{(y - a)^{\frac{1}{2}} dy}{\sqrt{a}}$, und $dx^2 = \frac{(y - a)}{a} dy$; und $ds^2 = dx^2 + dy^2$ $= \frac{y\, dy^2}{a}$, und $ds = dy \sqrt{a}$: und $dt = \frac{ds}{\sqrt{4gy}} = \frac{dy}{\sqrt{4ad}}$; endlich

$t = \frac{y}{\sqrt{4ag}} + a$. Jtzt muß man beobachten, daß man in dieser Berechnung die Zeit des Falls über den Bogen Q M suche, doch mit der Bedingniß, daß die Geschwindigkeiten sich überall verhalten, wie $\sqrt{4gy}$, oder wie die Wurzeln der Ordinaten P M; folglich, wenn der Körper in Q sich zu bewegen anfängt, setzet man schon voraus in ihm eine Geschwindigkeit, so er im freyen Falle über die Ordinate A Q erhalten würde. Damit wir also in der Gleichung $t = \frac{y}{\sqrt{4ag}} + Q$ die beständige Grösse Q bestimmen, so setzen wir, die Zeit t über dem Bogen sey $= 0$; das ist, der Körper sey in Q, und fange erst seine Bewegung an; so haben wir in diesem Orte $y = AQ = a$, und $t = 0 = \frac{a}{\sqrt{4ag}} + Q$ also $Q = \frac{-a}{\sqrt{4ag}}$; und so hat man die vollständige Zeit des Falls über den Bogen $QM = t = \frac{y-a}{\sqrt{4ag}}$; doch mit der Bedingniß, daß der Körper in Q sich mit einer Geschwindigkeit zu bewegen anfieng, die er im Falle über A Q erhalten würde.

§. 41.

Doch nehmen wir an, der Körper sey wirklich aus A in Q frey herabgefallen; dieß würde geschehen in einer Zeit $= \sqrt{\frac{a}{g}}$ (sieh meine Abhandl. §. XIV.); und dann habe sich der Körper ohne Verlust der Geschwinschwindigkeit aus Q durch den Bogen Q M in M beweget, so wird die ganze Zeit des Falls über A Q und Q M seyn $= \sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{y - a}{\sqrt{4ag}} = \frac{y + a}{\sqrt{4ag}}$; und die Zeit des Falls über A Q + Q M, wird seyn zur Zeit des Falls über die Ordinate P M $= \frac{y + a}{\sqrt{4ag}} : \sqrt{\frac{y}{g}} = \frac{y + a}{\sqrt{4a}} : \sqrt{y}$. Es sey $y = 2500$, $a = 1600$; so ist dieses Verhältniß, wie $51.25 : 50 = 5125 : 5000$. Nun aber ist die Zeit des Falls über die Ordinate P M zur Zeit des Falls über die schiefe Sehne A M von der nämlichen Höhe $=$ P M : A M; in dem beygebrachten Beyspiele ist $AP = x = \frac{2(y - a)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{a}} = 450$, und $AM = \sqrt{x^2 + y^2} = 2540.17715$; also ist P M : A M $= 2500 : 2540.17715 = 5000 : 5080.3543$; folglich verhält sich die Zeit über A Q + Q M zur Zeit über die Sehne A M $= 5125 : 5080.3543$. Aus diesem sieht man, daß ein Körper längere Zeit brauche, über die senkrechte Linie A Q, und den Bogen Q M zu fallen, als über die einzige schiefe Fläche A M herabzusteigen.

Dieser Fall machte mir den ersten Zweifel von der Wahrheit eines allgemeinen Satzes einiger Mechaniker, daß ein Körper über was immer für eine krumme Linie A Q M, so von der senkrechten Linie A S, und wagrechten S M eingeschlossen ist, in kürzerer Zeit, als über ihre Sehne A M herabfällt; ich nahm daraus Gelegenheit, diese Sache genauer zu untersuchen, wie man nun sehen wird.

Sechster Abschnitt.

Entdeckung eines Fehlers, den viele Mechaniker in der Theorie von dem Falle der Körper über zusammengesetzte schiefe Flächen begangen haben.

§. 42.

So wahr und unumstößlich die mathematischen Grundsätze sind, so können sie uns doch auf Fehler verleiten, wenn sie nicht wohl miteinander verbunden, und geschickt auf die Natur angewandt werden. Wer in der angewandten Mathematik bewandert ist, wird sich einiger so trauriger Beyspiele erinnern; doch ich weis nicht, ob in der ganzen Physik eine Materie auch für die gelehrtesten Männer so gefährlich war, als eben die Theorie von dem Falle der Körper auf schiefen Flächen.

1) Es ist bekannt, daß nach dem Galiläus die meisten Mechaniker, auch sogar Hugenius, und Musschenbröck den unumschränkten Satz gaben, daß ein Körper, wenn er über zusammengesetzte Flächen, sie mögen unter was immer für Winkeln miteinander verbunden seyn, hinabfällt, an dem Ende des Falls eine Geschwindigkeit erhalte, die er im freyen Falle von der nämlichen Höhe überkommen würde; indessen ist doch dieser Satz niemal wahr, so oft der äussere Winkel, den die zwo Flächen miteinander machen, eine endliche Grösse hat; denn da der Körper von einer Fläche in die andere hinüberfällt, muß er bey der Wendung seiner Richtung allezeit etwas von seiner Geschwindig-

keit

keit verlieren. Jener Satz findet nur allein statt, wenn der äussere Winkel der Flächen so, wie es bey den krummen Linien geschieht, unendlich klein ist, wie Petrus Vangrion in dem Memoire von Paris auf die Jahre 1693 und 1704 bewiesen hat.

2) Deßgleichen weis man, wie viele Physiker aus der Theorie der schiefen Flächen einen irrigen Schluß für die Bewegung der Pendule herauszogen. Man wollte kurz, und ohne Beyhilfe der Cycloide zeigen, daß die Schwankungen eines Penduls durch kleinere, und grössere Zirkelbögen, wenn sie doch in Absicht der ganzen Peripherie noch sehr klein sind, in gleicher Zeit vollbracht werden. Zu diesem Ende nahm man an, daß die sehr kleinen Zirkelbögen mit ihren Sehnen übereinkommen. Da nun ein Körper nach der Theorie der schiefen Flächen über alle Sehnen des Zirkels, und über dessen Durchmesser zu gleicher Zeit herabfällt, so glaubte man auch bewiesen zu haben, daß alle Schwankungen eines Penduls durch kleinere, oder auch etwas grössere Zirkelbögen zur nämlichen Zeit geschehen; so lautete der Beweis der Herren Keills, Parent, und mehrer anderer. Allein wenn auch die kleinsten Zirkelbögen mit ihren Sehnen der Grösse nach übereinkommen, so ist doch die Neigung der Bögen, oder ihrer Tangenten mit dem Horizont merklich unterschieden von der Neigung der Sehnen, und folglich kann auch die Bewegungskraft, und die Zeit der Bewegung nicht beyderseits gleich seyn. In der That erweiset man, daß die Zeit, in welcher ein Körper über einen kleinen Zirkelbogen herabfällt, sich zur Zeit verhält, da der Körper über desselben Sehne sich beweget, wie der Quadrant der Peripherie zu dem Durchmesser. Sieh Paul. Frisius de Gravit. Univ. L. I. c. III. und Boschowich Phil. stag. in supplem. ad L. II. §. 8.

3) Da einige Alte der Meynung waren, daß der gerade, und kürzeste Weg zugleich jener sey, durch welchen ein Körper zur kürzesten Zeit von einem Punkte zum anderen fallen würde, unternahm es Galiläus, diesen Fehler zu widerlegen, und behauptete, der Weg, über welchen ein schwerer Körper von einem Punkte am geschwindesten zum anderen herabfällt, sey ein Zirkelbogen. Aber Johann und Jakob Bernoulli, Newton, und Leibnitz haben augenscheinlich dargethan, daß diese Eigenschaft nur der Cycloide zukömmt. Doch dieß sind schon bekannte Fehler.

§. 43.

Wenn man einen Fehler vermeiden will, wie leicht verfällt man in den entgegengesetzten? Da man erwies, daß ein Körper geschwinder über einen Cycloidbogen, oder etwa auch über einen Zirkelbogen, als über ihre Sehnen herabfällt, kam man auf den Gedanken, ein Körper steige allezeit geschwinder über eine krumme, und hole Linie, als über derselben Sehne herab. Diesen Satz darzuthun, verglich man Anfangs den Fall eines Körpers über eine schiefe Fläche mit dem Falle über zwo zusammengesetzte Flächen, so zwischen der Höhe, und Grundlinie der einfachen Fläche begriffen sind. So stellet in der 17. fig. A C die einfache schiefe Fläche vor, deren Höhe = A P, und deren Grundlinie = C P; die zwo zusammengesetzten Flächen stellen A B, und B C vor, so daß der Winkel B zwischen A P, und C P eintrifft. Nun machte man den allgemeinen Satz, **daß ein Körper, über die zwo zusammengesetzten Flächen *A B*, und *B C* allezeit in kürzerer Zeit, als über die einfache *A C* herabfalle.** Man setzte freylich voraus, daß bey dieser Bewegung nicht nur keine Reibung oder andere Hinderniß vorhanden sey, sondern auch, daß bey der Wendung der Richtung an dem Winkel B keine Geschwindigkeit ver-

verloren gehe; allein wenn man auch diese Bedingnisse annimmt, so ist doch jener Satz nicht allgemein wahr. Eben dieß ist der Fehler von mehrern Mechanikern, den ich itzt aufzuklären im Sinne habe. Ich entdeckte selben ausdrücklich in den Werken des Franc. de Lanis Magist. nat. et artis Tract. 3. Prop. 37. Fortunat. a Brixia Phys. Gen. p. 2. n. 1703. de Chales Stat. l. 3. prop. 34. Berthold. Hauser Phys. Gen. P. III. §. 954. Joan. Zweiffig Tract. de Theoria descens. n. 218. Ich umgehe andere Physiker, oder gedruckte Theses mit Stillschweigen. Das Ansehen der Schriftsteller, so ich nannte, machte den Fehler ziemlich allgemein, und ich weis fürwahr noch Niemanden, der selben vor mir beobachtet hätte.

Um diesen Fehler zu widerlegen, will ich 1) allgemein untersuchen, wie sich die Zeiten verhalten, in welchen ein Körper über die einfache Fläche A C, und ein anderer über die zusammengesetzten A B, B C herabfällt, wo ich gleichfalls mit den übrigen Mechanikern alle äussere Hindernisse der Bewegung beyseite setze, und mit selben annehme, daß bey der Wendung des Winkels B keine Geschwindigkeit verloren gehe. 2) Werde ich eben diese Untersuchung in den Sehnen des Zirkels machen. 3) Will ich die Beweise widerlegen, mit welchen die Mechaniker ihren fehlerhaften Satz vertheidigten.

§. 44.

Damit man fig. 17. allgemein das Verhältniß der Zeiten bestimme, in welchen ein Körper über die einfache Fläche AC, und ein anderer über die zusammengesetzten A B, B C herabfällt, wenn bey dem Winkel B keine Geschwindigkeit verloren wird, so ziehe man 1) die Linie A F parallel mit der Grundlinie CP, und verlängere dahin die Fläche CB bis in F. Die Zeit, in welcher ein Körper über A B herabfällt, drücke ich eben durch die Linie A B aus; so wird die Zeit, in der sich ein Körper über F B beweget, wie F B seyn: denn da die Flächen AB, FB von der nämlichen Horizontallinie A F gezogen sind, und also gleiche Höhen haben, so sind die Zeiten des Falls, wie ihre Längen. (§. 38. n. 2.)

2) Weil die Zeiten der Bewegung auf der nämlichen schiefen Fläche sich wie die Quadratwurzel der Räume verhalten, (l. cit.) so sage man $\sqrt{FB} : \sqrt{FC} = FB : \frac{FB\sqrt{FC}}{\sqrt{FB}} = \frac{\sqrt{FB}\sqrt{FB \times FC}}{\sqrt{FB}}$

$= \sqrt{FB \times FC}$; dieß wird nun die Zeit des Falls über die ganze schiefe Fläche F C andeuten.

3) Ziehet man von dieser Zeit $\sqrt{FB \times FC}$ die Zeit über FB ab, so giebt uns der Unterschied $\sqrt{FB \times FC} - FB$ die Zeit des Körpers, so er brauchet, über B C zu fallen, wenn er seine Bewegung in F anfängt.

4. Da man nun setzet, daß der Körper, so aus der Fläche A B in B C übergehet, in dem Winkel B nichts von seiner erhaltenen Geschwindigkeit verlieret, so wird selber mit der nämlichen Geschwindigkeit seine Bewegung auf der Fläche B C anfangen, die ein Körper haben würde, so über die Fläche F B von gleicher Höhe herabgestiegen ist; folglich wird auch die Zeit durch die Fläche B C gleich seyn, es mag der Körper über die Fläche A B, oder F B nach B kommen (loc. cit. n. 1.). Also haben wir die ganze Zeit über die zusammengesetzten Flächen A B, B C gleich $AB + \sqrt{FB \times FC} - FB$.

5) Endlich da die Flächen A C, F C von gleicher Höhe sind, so werden die Zeiten des Falls, wie ihre Längen seyn; man sage F C: A C = $\sqrt{FC \times FB}$: $\frac{AC\sqrt{FC \times FB}}{FC}$; dieß wird uns die Zeit über die einfache Fläche A C geben, und schließlich wird die Zeit des Falls über die einfache Fläche A C zur Zeit des Falls über die zusammengesetzten A B, B C sich verhalten, wie $\frac{AC\sqrt{FC \times FB}}{FC}$ zu A B + $\sqrt{FB \times FC}$ — F B.

Wenn nun die Länge der 3 Flächen A C, A B, B C gegeben ist, und überdas der Winkel B C P, oder A C P, den die Fläche B C, oder A C mit dem Horizont machet, so kann man in dem Dreyecke A C F allezeit auch die Linie C F bestimmen, und folglich das ganze Verhältniß der Zeiten finden: denn der Winkel B C P gleichet dem Wechselwinkel A F C, und der Winkel C A F hat den nämlichen Sinus mit dem Nebenwinkel H A C; dieser aber gleichet dem Winkel A C P, oder der Summe der bekannten Winkeln B C A, B C P; also sind in dem Dreyecke C A F alle Winkel mit der Seite A C bekannt, und man kann C F finden.

§. 45.

Nach dieser allgemeinen Untersuchung, will ich durch einige sonderheitliche Beyspiele zeigen, daß die Zeit des Falls über die einfache Fläche A C gleich, kleiner, oder grösser seyn könne, als die Zeit, in welcher ein Körper über die zwo zusammengesetzten A B, B C hinabfällt. Erstens setzen wir die Zeiten des Falls beyderseits gleich, so haben wir eine Gleichung $\frac{AC\sqrt{FC \times FB}}{FC} = AB + \sqrt{FC \times FB} - FB$.

und $AC = \frac{AB \times FC + FC\sqrt{FC \times FB} - FC \times FB}{\sqrt{FC \times FB}}$.

1) Beyspiel. Es sey $AB = 40$. $BC = 19$. $CF = 100$, so wird man haben $FB = CF - BC = 81$ und $\sqrt{FC \times FB} = 90$. und man findet $AC = 54\frac{4}{9}$. Setzet man diesen Werth in dem gefundenen Verhältnisse der Zeiten, so wird selbes seyn, wie $49 : 49$ das ist, die Zeiten des Falls sind beyderseits gleich; diesen Fall stellte ich in der 18. fig. vor.

2) Beysp. $AB = 70$. $BC = 35$. $CF = 324$; und man hat $FB = 289$, und $\sqrt{FC \times FB} = 306$. Daraus findet man $AC = 92\frac{2}{17}$. Die Zeiten des Falls sind wiederum gleich.

§. 46.

Hat man den Fall der Gleichheit der Zeiten gefunden, kann man auch unschwer bestimmen, in was für Fällen die Zeit über die zusammengesetzten Flächen grösser ist, als die Zeit des Falls über einfache; man darf nur in den beygebrachten Beyspielen den gefundenen Werth von AC um etwas verminderen.

3) Beysp. Es sey $AB = 40$. $BC = 19$. $CF = 100$, und $CA = 53$; so wird die Zeit des Falls über AC sich verhalten zur Zeit über $AB + BC = \frac{AC\sqrt{FC \times FB}}{FC} : AB + \sqrt{FC + FB} - FB = 47.7 : 49 = 477 : 490$, das ist, der Körper wird eine längere Zeit brauchen, über die zusammengesetzten Flächen AB, BC zu fallen, als über die einfache AC.

4)

4) Beysp. Es sey AB = 70. BC = 35. CF = 324. AC = 91. und man wird finden, daß die Zeit über die einfache Fläche zur Zeit über zwo zusammengesetzte sey, wie $85\frac{17}{80} : 87$, folglich ist wiederum die letzte Zeit grösser.

§. 47.

Man kann sich selbst mehrere dergleichen Beyspiele machen; doch muß man Sorge tragen, daß man keine unmögliche Bedingnisse annehme; so wird erfordert 1.) daß allezeit $CA < AB + BC$; und $AB + BC < CF$ sey. 2.) daß der Winkel ACP allezeit grösser sey, als der Winkel ACB. 3.) daß der Winkel BAF ein stumpfer sey, und grösser, als der rechte PAF. Man kann zwar durch die Zeichnung beynahe wahrnehmen, ob diese Bedingnisse vorhanden sind; doch will ich zu grösserer Sicherheit die trigonometrische Berechnung für mein IIItes Beyspiel anführen. In der 19. fig. sey AC = 53. AB = 40. BC = 19. CF = 100. so ist $AC < AB + BC$; oder $53 < 59$; und $AB + BC < CF$, oder $59 < 100$. Ueberdas fälle man aus B auf die Seite AC die Perpendikularlinie BO, und mache OD = OC, so wird man nach den bekannten trigonometrischen Grundsätzen sagen können $AC : AB + BC = AB - BC : AO - OC$, oder AD: in Zahlen ist $53 : 59 = 21 : \frac{1239}{53} = AD$; daraus findet man $OC = \frac{1}{2} CD = \frac{AC - AD}{2} = \frac{785}{53}$, dessen Logarithmus = 1. 1705937. Nun hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke OBC die Proportion $CB : CO = R : \sin OBC$.

$$
\begin{array}{r}
\text{—— Log von } CO, \text{ und } R = 11.\ 1705937 \\
\text{Log. von } CB = 1.\ 2787536 \\
\hline
\text{Log. sin } D\,OBC = 9.\ 8918401. \\
\text{der Winkel } OBC = 51^{c}.\ 13'.\ 7''
\end{array}
$$

 Wei-

Weiters ist O A = A C − O C = $\frac{2024}{53}$ dessen Log. — — = 1.5819346

Log. A O, und R = 11.5819346.

und A B : O A = R sin. O B A. Log. A B = 1.6020600

Log. sin. O B A = 9.9798746

der Winkel O B A = 72^c. 41′ 29″.

Also ist der ganze Winkel A B C = C B O + O B A = 123^c. 54′. 36. und dieser gleichet auch der Summe von B A F, A F B. Die Helfte dieser zween noch unbekannten Winkel wird seyn = 61^c. 57′ 18″. Damit man nun in dem Dreyecke B A F die Winkel finde, sage man A B + B F : B F − A B = Tang. 61^c. 57′. 18″; zur Tangente der halben Differenz der noch unbekannten Winkel.

Log. B F − A B = 1.6127839

Log. Tang. 61^c. 57′ 18″ = 10.2735032

Summe = 11.8862871.

Log. A B + B F = 2.0827854

Log. Tang. der $\frac{1}{2}$ Diff. = 9.8035017.

dessen Winkel = 32^c, 27′. 32″.

zu diesem setze man die halbe Summe = 61. 57. 18.

so hat man den grössern Winkel B A F = 94, 24. 50. folglich ist dieser Winkel grösser als der rechte F A P, und der Unterschied ist B A P = 4^c 24′. 50″. Endlich ist der Winkel B A O = 90^c − O B A = 17^c. 18′. 31″, und der Winkel C A F = B A O + B A F = 111^c. 43′. 21″, und dessen Komplement zu 180^c = H A C = A C P = 68^c. 16′. 39″. Der Winkel B C O ist = 90^c − C B O = 28^c. 46′. 53″; und so ist der Winkel A C P grösser als A C B; mithin sind alle Bedingnisse erfüllet.

Wollte man endlich in den beygebrachten Beyspielen auch den Fall wissen, in welchem ein Körper in kürzerer Zeit über die zusammengesetzten Flächen A B, B C, als über die einfache A C hinabsteigt, so brauchte te es nichts anders als den Werth von A C um etwas grösser anzunehmen, als er im Falle der gleichen Zeiten gefunden wird. Dieses sonderheitlich darzuthun ist nicht nothwendig.

§. 48.

Ich glaube auf diese Art, die aus mehrern, so mir einfie en, die deutlichste, und kürzeste zu seyn schien, den Fehler vieler Mechaniker widerleget zu haben. Wenn man auch die Hypothese setzt, daß bey der Wendung der Richtung an dem Winkel B keine Geschwindigkeit verloren gehe, so kann man doch nicht allgemein behaupten, daß ein Körper in kürzerer Zeit über zwo Flächen AB, BC, als über die einfache A C herabfällt; denn, wie ich es gezeiget habe, es giebt Fälle, wo ein Körper in der nämlichen, oder in einer grössern Zeit über die zusammengesetzten Flächen, als über die einfache sich hinabbeweget. Da nun dieses erwiesen ist, so kann man auch nicht mehr allgemein behaupten, daß ein Körper über 3, 4, oder mehrere zusammengesetzte Flächen, oder über eine krumme Linie in kürzerer Zeit, als über die einfache Fläche, so gleichsam die Sehne von allen zusammengesetzten ist, hinabfalle; denn eben dieses war nur eine Folge, die man aus dem itzt widerlegten irrigen Satze heraus zog.

§. 49.

Es wird doch dem Leser nicht unangenehm seyn, wenn ich zu mehrerer Bekräftigung die Zeit des Falls eines Körpers über 2 oder 3 gleiche Sehnen des Zirkels noch untersuche. In der 20. fig. stellen AB, B C zwo gleiche Sehnen des Zirkels vor, dessen Durchmesser D C senkrecht auf der Horizontal-Linie H C errichtet ist. Man ziehe den Halbmesser B R, so die einfache Sehne A C senkrecht in zwo gleiche Theile schneidet; gleichfalls sey F A, und B P mit H C parallel, und auf D C perpendikular. So werden

1.) die Dreyecke BCO, BPC einander gleich, und ähnlich seyn; denn neben den rechten Winkeln BOC, BPC, und der gleichen Seite BC, sind auch die Winkel BCO, PBC gleich, weil sie zu ihrem Maasse zween gleiche Bögen BC, AS haben.

2.) Sind die Dreyecke ABC, AFC einander ähnlich; denn weil AF mit BP parallel läuft, so werden sich die Winkel AFC, PBC, BCO, BAC gleichen; folglich ist auch FAC ein gleichseitiges Dreyeck, und $FA = AC$. Daraus folget $BC : AC = AC : CF = \frac{AC^2}{BC}$.

3.) Ist $BC : OC$, oder BC wie der Sinus totus zum Sinus des Winkels PCB, oder des halben Bogen BAD. Man setze nun $BC = AB = 1$, und $OC = \frac{1}{2} AC = x$, so wird x den Sinus des halben Bogen DAB, oder die halbe Sehne des Bogen DAB vorstellen, wenn der Sinus totus, oder Radius $= 1$. Ueberdas, weil $\frac{1}{2} AC = x$, so ist $AC = 2x$; und $FC = \frac{AC^2}{BC} = 4x$ und $FB = FC - BC = 4x^2 - 1$; also $\sqrt{FC \times FB} = (16x^4 - 4x^2)^{\frac{1}{2}} = 2x(4x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$.

4. Nun haben wir oben allgemein gefunden, daß sich die Zeit über die einfache Fläche AC zur Zeit über die zusammengesetzten AB, BC verhält, wie $\frac{AC \sqrt{FC \times FB}}{FC} : AB + \sqrt{FC \times FB} - : FB$. Setzet man für diese Linien ihre Ausdrücke von dem gegenwärtigen Falle; so wird dieses Verhältniß der Zeiten seyn, wie $\frac{4x^2 (4x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{4x^2} : 1 + 2x (4x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} 4x^2 + 1$; oder wie $(4x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} : 2 - 4x^2 + 2x (4x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$.

5) Ist

5.) Itzt wollen wir wiederum annehmen, daß diese Zeiten gleich sind, so hat man eine Gleichung $(4x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = 2 - 4x^2 + 2x(4x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ $= 2 - 4x^2 + (16x^4 - 4x^2)^{\frac{1}{2}}$. Die Berechnung kürzer zu machen, setze ich $x^2 = z$, und dann hat man $(4z - 1)^{\frac{1}{2}} = 2 - 4z + (16z^2 - 4z)^{\frac{1}{2}}$; erhöhet beydes zum Quadrat: $4z - 1 = 4 - 16z + 16z^2 + (4 - 8z$ $(16z^2 - 4z)^{\frac{1}{2}}$; erhöhet beydes zum Quadrat $4z - 1 = 4 - 16z + 16z^2 + (4 - 8z)(16z^2 - 4z)^{\frac{1}{2}} + 16z^2 - 4z$. oder $-5 + 24z - 32z^2 = (4 - 8z)(16z^2 - 4z)^{\frac{1}{2}}$. Erhöhet wiederum beyde Glieder zum Quadrat, so findet ihr die Gleichung $25 - 240z + 576z^2 + 320z^2 - 1536z^3 + 1024z^4 = -64z + 512z^2\ 1280z^3 + 1024z^4$. Bringet man alles auf einer Seite, so erhält man $256z^3 - 384z^2 + 176z - 25 = 0$. oder $z^3 - 1{,}5z^2 + 0.\ 6875\ z\ 0.09765625 = 0$. Die Wurzeln dieser Gleichung sind 1.) $z = 0.\ 7767887$. 2.) $z = 0.\ 4326054$. 3.) $z = 0\ 2906058$. Doch ist zu merken, daß die zwo letztern Wurzeln in unserer Aufgabe keinen Gebrauch haben; denn sie gehören nur für die Gleichung $(4z - 1)^{\frac{1}{2}}, = 2 - 4z\,(16z^2 - 4z)^{\frac{1}{2}}$; obschon diese mit der unsrigen nicht gleich kömmt, so werden doch beyde einander gleich, wenn sie zum Quadrate zweymal erhoben werden.

6.) Wenn wir nun die erste Wurzel $z = 0.\ 7767887$ behalten, so findet man $x = \sqrt{z} = 0.\ 8813561$. Dieß ist also der Sinus des halben Bogen BAD, und selbst der halbe Bogen ist $= 61^\circ\ 48'.\ 23''$. Der ganze Bogen $= 123^\circ\ 36'.\ 46''$. Folglich der Bogen BC $= 56^\circ.\ 23'.\ 14''$. Dieß ist der einzige Fall, in welchem der Körper zur nämlichen Zeit über die einfache Fläche AC, und über die zusammengesetzten AB, BC herabfällt.

7.) Nimmt man den Bogen BC um etwas grösser an, z. B $= 57^\circ$; so ist $x = 0.\ 8386706$, und die Zeit des Falls über die einfache Fläche wird sich zur Zeit über die zusammengesetzten verhalten, wie $134665 : 144533$; das ist, der Körper wird längere Zeit brauchen über die zusammengesetzten, als über die einfache herabzufallen.

Ich untersuchte auch die Zeit des Falls über drey gleiche Sehnen der Zirkels, wo der Durchmesser D C senkrecht auf der Horizontallinie stehet, und man zugleich annimmt, daß in den Winkeln keine Geschwindigkeit verloren gehet; allein ich fand, daß die Berechnung sehr weitschichtig werde, insonderheit, wenn man den Fall der Gleichheit der Zeiten suchen will. Ich führe nur kürzlich an, was ich durch meine Berechnung fand. Man nenne die Sehne eines der 3 gleichen Bögen $= b$, und die Sehne des dreyfachen Bogen $= a$, so wird die Zeit des Falls über die einfache Fläche a, zur Zeit über die drey zusammengesetzten seyn $= a\,b : \frac{b^3 + 2\,a\,b^2 - a^2\,b + a^2 - (a - b)\,(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} -}{(a^2 - a\,b - b^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Ist man mit dem Sinus-Büchgen versehen, so kann man sich genug sonderheitliche Beyspiele machen.

§. 50.

Itzt ist mir noch übrig, die Beweise zu widerlegen, mit welchen die Mechaniker ihren fehlerhaften Satz bekräftigten. Ich fand aber, daß die meisten Beweise mit jenem übereinkommen, so man in dem Werke Magisterium Naturæ, & artis P. Franc. de Lanis antrifft. Ich werde also diesen hauptsächlich mit aller Aufrichtigkeit, und Deutlichkeit anführen, und dann daß fehlerhafte Wesen, so in demselben verborgen liegt, zeigen.

Tract. III. Prop. XXXVII. setzet de Lanis folgenden Satz. fig. 21. **Ein schwerer Körper fällt aus E in B geschwinder hinab, wenn er über zwo als über eine, und noch geschwinder wenn er über drey, als über zwo Linien hinabsteiget, wenn nur die erste Linie sich mehr zum Perpendikel E H nähert.** Es falle der Körper aus dem Punkte E durch die schiefen Flächen E I, I B, und E I nähere sich mehr, als I B der Perpendikular-Linie E H, so sage ich, der Körper werde in kürzerer Zeit die zwo Flächen E I, I B als die einfache E B durchlaufen. Denn 1) Zie-

1) Ziehe man die Horizontal-Linie E G, und verlängere die Fläche BI bis in G; man ziehe auch IP parallel zu E G, und I H senkrecht auf E I, und aus dem Punkte H die Linie H Q perpendikular auf EB; man hat also die Proportion $EP : EB = GI : GB$, und $\frac{EB}{EP} = \frac{GB}{GI}$.

2) Weil aber $EQ < EP$, so wird $\frac{EB}{EQ} > \frac{EB}{EP}$; und also $\frac{EB}{EQ} > \frac{GB}{GI}$.

3) Nun aber fällt ein Körper zu gleicher Zeit über E I, und E H, und E Q; folglich auch über E I, und E Q; und weil man annimmt, daß in dem Winkel I keine Geschwindigkeit verloren gehet, so fällt der Körper über die Fläche I B in gleicher Zeit, er mag nach I über E I, oder über G I gekommen seyn, da er in beyden Fälle die nämliche Geschwindigkeit in I überkömmt.

4) Man setze die mittlere Proportional-Grösse von E B, E Q, oder $\sqrt{EB \times EQ} = S$; und die mittlere Proportional-Grösse von G B, G I oder $\sqrt{GB \times GI} = R$; die Zeit über E Q nenne man $= T$, die Zeit über $EB = V$, und sage $EQ : S = T : V$, oder $EQ : \sqrt{EB \times EQ} = \sqrt{EQ} : \sqrt{EB} = T : V = T \sqrt{\frac{EB}{EQ}}$.

5) Gleichfalls setze man die Zeit über E I, $IB = X$, und sage $GI : R = T : X$, oder $GI : \sqrt{GB \times GI} = \sqrt{GI} : \sqrt{GB} = T : X = T \sqrt{\frac{GB}{GI}}$.

 6) Weil

6) Weil endlich $\frac{EB}{EQ} > \frac{GB}{GI}$, und also auch $T\sqrt{\frac{EB}{EQ}} > T\sqrt{\frac{GB}{GI}}$, so wird man auch haben $V > X$, oder der Körper wird in längerer Zeit über die schiefe Fläche EB, als über die zwo EI, IB herabfallen.

§. 51.

Nun in diesem Beweise hat alles seine Richtigkeit bis auf den num 5. Denn $X = T\sqrt{\frac{GB}{GI}}$ kann nicht die Zeit ausdrücken, in welcher ein Körper über die zwo schiefen Flächen EI, IB herabfällt; denn, wenn auch EQ, EI zur nämlichen Zeit T durchgelaufen werden, und wenn der Körper die nämliche Geschwindigkeit über EI, und GI erhält, so ist doch die Zeit des Falls über GI nicht gleich der Zeit über EI, und EQ, sondern jene verhält sich zu dieser, wie GI : EI. Allein die beygebrachte Gleichung $X = T\sqrt{\frac{GB}{GI}}$ setzet eben voraus, daß der Körper über EI, GI zu gleicher Zeit herabfällt; setzet man die Zeit über EI, und $GI = T$, so hat man in der That die Proportion $\sqrt{GI} : \sqrt{GB} = T : X = T\sqrt{\frac{GB}{GI}}$. Folglich bestehet der Fehler des Beweises darinn, daß man annahm, ein Körper falle über die Flächen EI, GI, und mithin auch über die Flächen EI, IB, und GB in gleicher Zeit herab, welches augenscheinlich auch nach den Grundsätzen dieses, und anderer Mechaniker der Wahrheit widerspricht, weil man allgemein behauptet, daß die Zeiten des Falls über die Flächen GI, EI von gleicher Höhe sich wie ihre Längen verhalten.

§. 52.

Diesen itzt erwiesenen Fehler traf ich in allen Beweisen des fehlerhaften Satzes an. In einigen entdeckte ich noch mehrere. So findet man in den Beweisen des Fortun. a Brixia, und des P. Zweissig folgenden Schluß: weil $EQ < EP$, so ist $EB - EQ > EB - EP$; und auch $\sqrt{EB + EQ} - EQ > \sqrt{EB \times EP} - EP$. Daß dieser letzte Schluß nicht allgemein wahr ist, kann man in einem sonderheitlichen Beyspiele beweisen; es sey $EB = 100$. $EQ = 4$. $EP = 9$, so wird man zwar haben $EQ < EP$, oder $4 < 9$; wie auch $EB - EQ > EB - EP$, oder $100 - 4 > 100 - 9$, das ist, 96.791. und doch ist keineswegs $\sqrt{EB \times EQ} - EQ > \sqrt{EB \times EP} - EP$, das ist, $20 - 4 \times 30 - 9$, oder 16721.

§. 53.

Ich kann mich auch erinnern, in den Schriften einiger Physiker einen sehr kompendiösen Beweis von diesem fehlerhaften Satze gelesen zu haben; sie schlossen also: Wenn ein Körper über die senkrechte Höhe EH frey herabfällt, so wird er von der ganzen Kraft der Schwere herabgetrieben, und so beschleuniget er am meisten seine Bewegung; folglich je näher eine Fläche EI zur senkrechten EH kömmt, desto grösser wird die bewegende Kraft, und die Geschwindigkeit des herabfallenden Körpers seyn; weil man nun annimmt, daß die Fläche EI näher, als die Fläche EB zur senkrechten Höhe EH kömmt, so müssen auch die zwo Flächen EI, IB geschwinder, und in kürzerer Zeit, als die einfache, und mehr entfernte EB durchgelaufen werden. Allein was kann man aus einem so unbestimmten, und unvollkommenen Schlusse richtiges abnehmen? Wenn auch die Fläche EI einen kleinern Winkel mit der senkrechten Höhe E H, als die Fläche E B machet, so muß doch die andere Fläche I B mit der nämlichen Höhe E H einen grössern Winkel gestalten, und wenn auch die Bewegungskraft über die zwo Flächen E I, I B grösser wäre als über die einfache E B, so ist doch der Weg E I, I B grösser, als die gerade Linie E B. Man kann also aus dergleichen Absichten nichts richtiges auf die Zeiten des Falls schliessen; nur die Berechnung kann uns das gewisse Verhältniß der Zeiten in dem gegebenen Falle untrüglich entdecken.

Ich muß gestehen, daß mir diese Gattung von Beweisen, so nur auf das Beyläufige hinausgehen, und nichts bestimmtes haben, am meisten zuwider ist: man bringet solche in der heutigen Philosophie zu Zeiten an, und zwar in der Absicht, die Theorie den Lehrlingen zu erleichtern, oder, wie einige sagen, die Sache physikalisch zu erklären. Allein ich wollte mehrere Beyspiele von der Unvollkommenheit, Unbestimmtheit und auch dem Fehlerhaften solcher Beweise anführen. Man nimmt nicht selten Grundsätze an, die im gegenwärtigen Falle zwar zur Wahrheit, aber in andern Fällen auch zur Falschheit führen können; dieses aber kann ohne Nachtheil der Wissenschaften nicht wohl geschehen. Es ist zwar höchst lobenswürdig, wenn man die Theorie für Anfänger zu erleichtern suchet; doch wollte ich noch lieber einen Beweis, den selbe zu fassen nicht vermögend sind, mit Stillschweigen umgehen, und den Satz für einen von andern richtig erwiesenen annehmen, als ihn mit so unbestimmten, und gefährlichen Beweisen belegen.

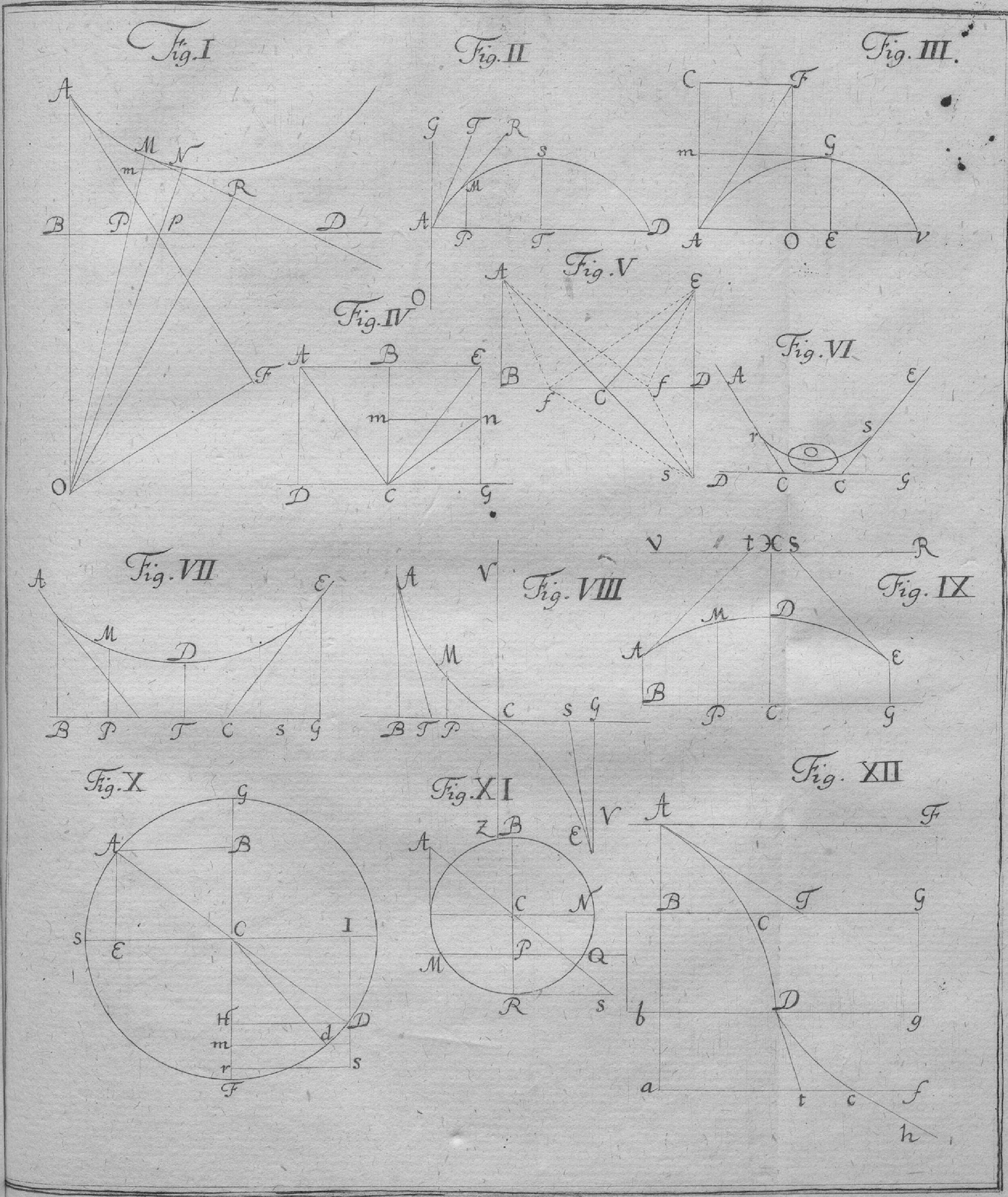


Fig. I
Fig. II
Fig. III
Fig. IV
Fig. V
Fig. VI
Fig. VII
Fig. VIII
Fig. IX
Fig. X
Fig. XI
Fig. XII

Fig. XIII

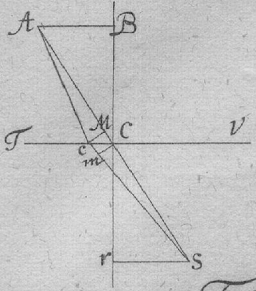


Fig. XIV

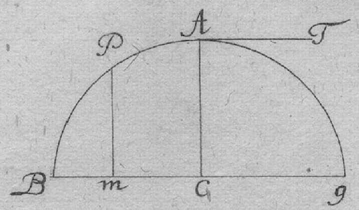


Fig. XV

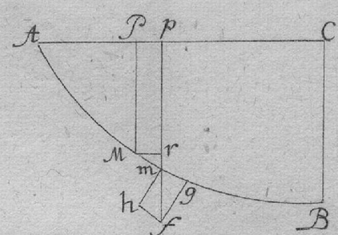


Fig. XVI

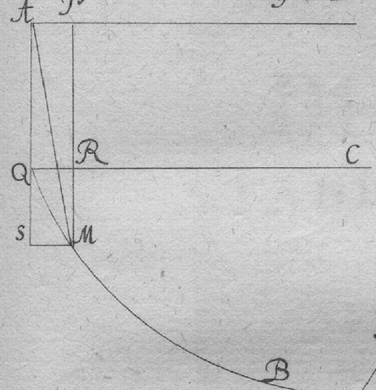


Fig. XVII

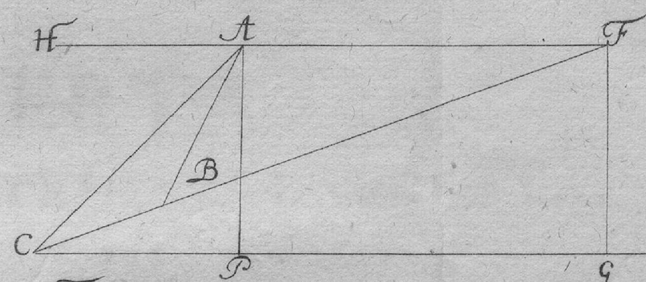


Fig. XVIII

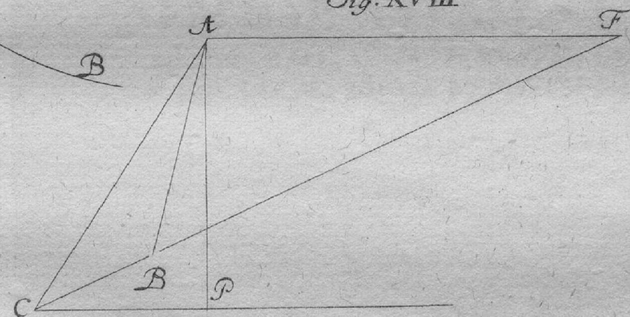


Fig. XX

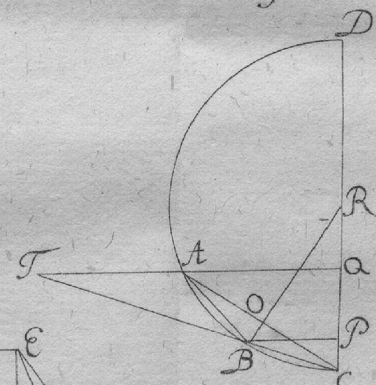


Fig. XIX

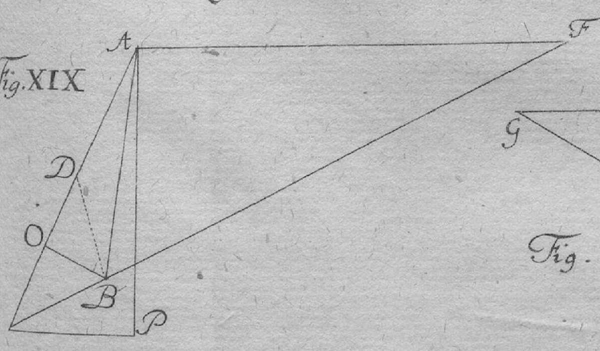


Fig. XXI