Abhandlungen
der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung
Neue Folge. Heft 28
1935

Über die Bewegung von Massenpunkten, die dem Newton'schen Anziehungsgesetze unterworfen sind (Problem der *n* Körper)

von

F. Lindemann

München 1935
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei
in Nördlingen

Bekanntlich hat Lejeune-Dirichlet sich in den letzten Jahren seines Lebens mit dem sogenannten Probleme der n Körper lebhaft beschäftigt. Kummer berichtet darüber in seiner Gedächtnisrede[1] auf Dirichlet nach Mitteilungen von Kronecker. Danach sei es ihm gelungen, eine allgemeine Methode zur Behandlung und Auflösung der Probleme der Mechanik aufzustellen, und zwar nicht durch Zurückführung der betreffenden Differentialgleichungen auf Quadraturen, sondern durch eine Art stufenweiser Annäherung, wobei die Theorie der kleinen Schwingungen einen Anhalt gebe. Er habe auch einen strengen Beweis für die Stabilität des Weltsystems gefunden gehabt. In seinem Nachlasse konnte indessen nichts darüber gefunden werden.

Unter Hinweis hierauf wurde in Bd. 7 der Acta mathematica (1885) auf Veranlassung des Königs von Schweden ein Preis für die Wiederherstellung der Dirichletschen Untersuchungen ausgesetzt, eventuell für eine andere, das Problem der n Körper wesentlich fördernde Arbeit. In letzterem Sinne gab dies Preisausschreiben Veranlassung zu der mit dem Preise gekrönten Abhandlung von Poincaré,[2] die sich indessen nicht auf jene Mitteilungen von Dirichlet bezieht.

Später hat Kronecker (der sehr erregt darüber war, daß man bei Formulierung der Preisaufgabe ihn, der allein Auskunft geben konnte, nicht nach dem eigentlichen Sinne und Wortlaute der Dirichletschen Äußerungen gefragt habe) die Angaben in der Kummerschen Rede wesentlich ergänzt; insbesondere betont er,[3] daß die beiden Mitteilungen über die Stabilität und über die allgemeinen Probleme der Mechanik in keinem Zusammenhange miteinander standen (wie man doch nach dem Wortlaute der Preisaufgabe annehmen mußte); es käme deshalb für beide Fragen nicht notwendig ein gemeinsames „Verfahren“ in Frage. Kronecker fügt hinzu, er habe den Eindruck gehabt, daß ein gewisser Zusammenhang zwischen Dirichlets Arbeiten über Potentialtheorie und seiner neuen Behandlung der mechanischen Probleme bestehe.

Um diese Zeit (1886) hat Kronecker auch mir gegenüber seine Gespräche mit Dirichlet (die 1858 in Göttingen stattfanden) erwähnt. Dabei drückte er sich viel bestimmter dahin aus, daß Dirichlet die Methoden der Potentialtheorie (wovon bei Stellung der erwähnten Preisaufgabe nichts gesagt war) auf das Problem der n Körper angewandt hätte, und zwar solle es auf ein Verfahren ankommen ähnlich demjenigen, das in der Potentialtheorie beim Übergange eines Punktes aus dem Innern des betr. Gebietes an die Oberfläche desselben angewandt werde.

Durch diese mündlichen Mitteilungen Kroneckers (die mich seitdem fast alljährlich einige Zeit beschäftigten) sind die folgenden Untersuchungen veranlaßt, in denen in der Tat die Methoden der Potentialtheorie und der Übergang aus dem Innern auf die Oberfläche eines Gebietes benutzt werden. Die $3n$ Koordinaten der n Punkte werden durch einen Punkt im $3n$-dimensionalen Raume dargestellt, welcher die eine Ecke eines Parallel-

[1] Vgl. Abhandlungen der Berliner Akademie 1860, S. 35, abgedruckt in Bd. 2 der gesammelten Werke von Dirichlet.

[2] Veröffentlicht in Bd. 13 der Acta mathematica, 1890.

[3] Bemerkungen über Dirichlets letzte Arbeiten; Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, math.-physikal. Klasse, 12. April 1888.

epipedons bildet, für dessen Inneres eine Potentialfunktion so bestimmt wird, daß beim Übergange in die den Axen parallelen Seitenflächen auf diesen die bekannte Hamiltonsche partielle Differentialgleichung erfüllt wird, die allein von der Kräftefunktion abhängt. Die betreffenden Hamiltonschen Theorien stammen aus dem Jahr 1833, wurden aber erst viel später in Deutschland bekannt, besonders durch die von Jacobi darüber in Königsberg (Winter 1842/3) gehaltenen Vorlesungen.[1] Im Frühjahr 1843 weilte Dirichlet etwa zwei Wochen bei seinem Freunde Jacobi in Königsberg; es ist also anzunehmen, daß ihm die Hamiltonschen Methoden vertraut waren, durch deren Anwendung ich im folgenden versuche, seine verlorengegangenen Untersuchungen über das Problem der n Körper wieder herzustellen.

Worauf sich die in der Kummerschen Mitteilung erwähnte „stufenweise Annäherung" bezieht, wird vielleicht durch meinen Ansatz unten in § 5 verständlich. In welcher Art die Theorie der kleinen Schwingungen hier einen Anhalt geben sollte, wird durch die folgende Darstellung nicht aufgeklärt. Vielleicht ist das Wort „Schwingungen" durch das Wort „Schwankungen" zu ersetzen, wie es auch in dem erwähnten Preisausschreiben geschah; dann könnte es sich um die Schwankungen der in § 8 eingeführten Funktion R handeln.

Da die im folgenden entwickelte Theorie nur die Existenz einer Kräftefunktion voraussetzt, so ist sie von selbst auf alle mechanischen Probleme anwendbar, für die eine Kräftefunktion existiert. In diesem Sinne würde sich ein Zusammenhang zwischen den beiden Problemen ergeben, über die Dirichlet sich mit Kronecker besprochen hatte.

§ 1. Die Oberflächenwerte einer Potentialfunktion.

Es sei V eine Funktion von x, y, z, die der Laplaceschen Gleichung $\Delta V = 0$ genügt, wo:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \tag{1}$$

Der Wert von V im Innern eines Gebietes ist bestimmt, wenn der Wert $\overline{V}$ an der Oberfläche, oder wenn der Wert $\overline{\frac{\partial V}{\partial n}}$ an der Oberfläche gegeben ist, wobei mit ∂n die Differentiation nach der inneren Normale in üblicher Weise bezeichnet ist.

Es sei G die erste Greensche Funktion[2] für das gegebene Gebiet, der folgende Eigenschaften zukommen:

1. Sie genügt im Innern der Gleichung $\Delta G = 0$, geschrieben in x, y, z (so daß x, y, z einen Punkt im Innern bezeichnet).
2. Sie wird an der im Innern gelegenen Stelle X, Y, Z unendlich wie r^{-1}, wenn r die Entfernung des Punktes X, Y, Z vom Punkte x, y, z bezeichnet.
3. Sie verschwindet für jeden Punkt der Oberfläche.

---

[1] Herausgegeben von Clebsch 1866 nach einem Borchardtschen Manuskript. Diese Vorlesung wurde auch von Ph. v. Seidel gehört, in dessen Nachlaß (der im mathematischen Seminar der Universität München aufbewahrt wird) sich eine Nachschrift vorfand.

[2] Die Definition der Greenschen Funktion ist bei verschiedenen Autoren etwas verschieden. Vgl. darüber z. B. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., Bd. 2, S. 89. Im Texte ist die ursprüngliche Definition von Green benutzt, die auch Riemann anwendet.

Dann ist bekanntlich für einen Punkt X, Y, Z im Innern

$$V(X,Y,Z) = \frac{1}{4\pi} \iint \overline{V} \cdot \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma, \tag{2}$$

wenn $d\sigma$ das Oberflächenelement bezeichnet. Unter dem Integralzeichen ist $\overline{V}$ in den Integrationsvariabeln geschrieben, während die Variabeln X, Y, Z nur in G vorkommen.

Mit Γ werde die zweite Greensche Funktion bezeichnet. Sie genügt ebenfalls den obigen Bedingungen 1 und 2, aber an der Oberfläche verschwindet nicht Γ, sondern die Derivierte $\frac{\partial \Gamma}{\partial n}$, und man hat

$$V(X,Y,Z) = -\frac{1}{4\pi} \iint \overline{\frac{\partial V}{\partial n}} \cdot \Gamma \cdot d\sigma. \tag{3}$$

Die Formeln (2) und (3), die den Wert von V im Innern aus den gegebenen Werten an der Oberfläche bestimmen, sollen im folgenden erweitert und auf mehrdimensionale Funktionen ausgedehnt werden.

Die Grundformel für den Greenschen Satz lautet:

$$\iiint \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} \right) d\tau = -\iiint U \Delta V \cdot d\tau - \iint \overline{U} \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma, \tag{4}$$

wo $d\tau$ das Raumelement $dx\,dy\,dz$ bezeichnet. Die Funktionen U und V sollen im Innern des Integrationsraumes überall endlich und stetig und differenzierbar sein. Bezeichnet wieder Γ die zweite Greensche Funktion, und setzen wir $U = \Omega^2$, $V = \Gamma$, so erhalten wir aus (4)

$$\iiint \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x}\frac{\partial \Omega^2}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma}{\partial y}\frac{\partial \Omega^2}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z}\frac{\partial \Omega^2}{\partial z} \right) d\tau = -\iiint \Omega^2 \Delta \Gamma \cdot d\tau - \iint \overline{\Omega^2} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) d\sigma. \tag{5}$$

Insofern das Oberflächenintegral sich auf die äußere Begrenzung des Körpers bezieht, verschwindet dasselbe wegen der Gleichung $\frac{\partial \Gamma}{\partial n} = 0$. Das Element $d\sigma$ bezieht sich also nur auf die kleine Kugel, die den Punkt X, Y, Z (in dem Γ unendlich wird) umschließt, und gibt hier bekanntlich $-4\pi\, \Omega^2 (X, Y, Z)$. Das erste Integral der rechten Seite von (5) fällt aus wegen $\Delta \Gamma = 0$. Es ist also

$$4\pi \Omega^2 (X,Y,Z) = \iiint \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x}\frac{\partial \Omega^2}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma}{\partial y}\frac{\partial \Omega^2}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z}\frac{\partial \Omega^2}{\partial z} \right) d\tau = -\iint \overline{\Omega^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial n} d\sigma, \tag{6}$$

letzteres Doppelintegral auf die kleine Kugel bezogen. Da $\frac{\partial \Gamma}{\partial n}$ als Funktion von X, Y, Z der Gleichung $\Delta = 0$ genügt, so könnte man hieraus schließen, daß $\Delta \Omega^2 = 0$ sei; das wäre aber nicht berechtigt, da X, Y, Z ein Unendlichkeitspunkt von Γ ist, der außerhalb des räumlichen Integrationsgebietes liegt. Von der Funktion Γ werden wir im folgenden keinen wesentlichen Gebrauch machen.

§ 2. Die beiden Greenschen Funktionen für ein rechtwinkliges Parallelepipedon.

Für die Kugel sind beide Greensche Funktionen bekannt.[1] Für ein Parallelepipedon hat Riemann die Funktion G aufgestellt.[2] Sind a, b, c die Seiten des Körpers, und dehnt sich derselbe von $-\frac{a}{2}$ bis $+\frac{a}{2}$, von $-\frac{b}{2}$ bis $+\frac{b}{2}$, von $-\frac{c}{2}$ bis $+\frac{c}{2}$ aus, so findet Riemann:

$$(1)\qquad G=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+m+n}}{\sqrt{N}},\ \text{wo:}$$

$$(2)\qquad N=[ka+(-1)^k X-\xi]^2+[mb+(-1)^m Y-\eta]^2+[nc+(-1)^n Z-\zeta]^2.$$

Aber diese Reihe ist nicht konvergent. Man kann sie indessen (nach Analogie eines Verfahrens von Eisenstein[3]) dadurch konvergent machen, daß man im allgemeinen Gliede negativ den Ausdruck

$$(-1)^{k+m+n}N_0^{-1/2}$$

hinzufügt, wo (ausgenommen, wenn gleichzeitig $k=0$, $m=0$, $n=0$):

$$(3)\qquad N_0=(ka)^2+(mb)^2+(nc)^2.$$

Zur Aufstellung der zweiten Greenschen Funktion Γ verfahren wir nach Analogie zu dem Ansatze von Riemann. Wir setzen:

$$(4)\qquad \Gamma=\Sigma\Sigma\Sigma\left[\frac{1}{\sqrt{N}}-\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right],$$

wo N und N_0 wieder durch (2) bzw. (3) definiert seien, und wo die Summationen so auszuführen sind wie in (1). Es drückt $\sqrt{N}$ den Abstand des im Innern des ersten Parallelepipedons gelegenen veränderlichen Punktes ξ, η, ζ von dem Punkte $ka+(-1)^k X$, $mb+(-1)^m Y$, $nc+(-1)^n Z$ aus, d. h. von einem der Punkte, in denen Γ unendlich wird, und von denen einer ($k=0$, $m=0$, $n=0$) im Innern des gegebenen Parallelepipedons liegt, während sich die anderen symmetrisch auf die kongruenten Wiederholungen des ersten Parallelepipedons verteilen (wie bei den sogenannten Thomsonschen Bildern).

Betrachten wir zwei Punkte ξ_1, η_1, ζ_1 und ξ_2, η_2, ζ_2, deren Koordinaten durch folgende Gleichungen definiert werden:

$$(5)\qquad \begin{aligned}\xi_1&=ha+(-1)^h t, & \eta_1&=\eta, & \zeta_1&=\zeta,\\ \xi_2&=(h+1)a+(-1)^{h+1}t, & \eta_2&=\eta, & \zeta_2&=\zeta,\end{aligned}$$

wo h eine ganze Zahl bezeichnet. Beide liegen symmetrisch zu der Ebene

$$(6)\qquad \xi=\left(h+\frac{1}{2}\right)a$$

[1] Vgl. z. B. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, Bd. 2, § 30, 2. Auflage, 1881.

[2] Schwere, Elektrizität und Magnetismus, nach Vorlesungen von Riemann bearbeitet von Hattendorf, Hannover 1876, S. 84 ff.

[3] Crelle's Journal Bd. 35; oder: Mathematische Abhandlungen (mit Vorrede von Gauß), Berlin 1847. Auf die Konvergenz der Reihen für G und Γ kommen wir sofort in § 2a zurück.

denn es ist

$$\xi_2-\left(h+\frac{1}{2}\right)a=\left(h+\frac{1}{2}\right)a-\xi_1=\frac{1}{2}a-(-1)^h t=\frac{1}{2}a+(-1)^{h+1}t.$$

Der Ausdruck N unterscheidet sich für diese Punkte nur im ersten Quadrate der rechten Seite von (2). Dasselbe lautet für den ersten Punkt:

$$[(k-h)a+(-1)^k X-(-1)^h t]^2 \tag{7}$$

und für den zweiten Punkt

$$[(k-h-1)a+(-1)^k X-(-1)^{h+1})t]^2. \tag{8}$$

Statt des Ausdrucks (7) kann man schreiben

$$[(-1)^h(k-h)a+(-1)^{k-h}X-t]^2=[\lambda a+(-1)^\lambda X-t]^2, \tag{9}$$

wenn $\lambda=(-1)^h\,(k-h)$ gesetzt wird. Sei Γ_1 der Wert, den Γ an der ersten Stelle annimmt, so ist nach (5)

$$\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi_1}=(-1)^h\frac{\partial\Gamma_1}{\partial t}=\Sigma\,\Sigma\,\Sigma\,(-1)^h[\lambda a+(-1)^\lambda X-t]\cdot N_1^{-3/2}, \tag{10}$$

wo nun:

$$N_1=[\lambda a+(-1)^\lambda X-t]^2+[mb+(-1)^m Y-\eta]^2+[nc+(-1]^n Z-\zeta]^2, \tag{11}$$

und wo die Summen über die Zahlen λ, m, n je von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen sind. Ebenso kann man statt (8) schreiben

$$[(-1)^{h+1}(k-h-1)a+(-1)^{k-h-1}\,X-t]^2=[\lambda a+(-1)^\lambda X-t]^2,$$

wenn jetzt $\lambda=(-1)^{h+1}\,(k-h-1)$ gesetzt wird. Bezeichnet also Γ_2 den Wert von Γ an der zweiten Stelle, so ist

$$\frac{\partial\Gamma_2}{\partial\xi_2}=(-1)^{h+1}\frac{\partial\Gamma_2}{\partial t}=\Sigma\,\Sigma\,\Sigma\,(-1)^{h+1}[\lambda a+(-1)^\lambda X-t]\cdot N_2^{-3/2},$$

wo N_2 denselben Wert hat wie N_1 in (11). An den beiden Stellen ist also

$$\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi_1}=-\frac{\partial\Gamma_2}{\partial\xi_2}. \tag{12}$$

Läßt man nun $t=\frac{1}{2}\,(-1)^h\,a$ werden, so fallen beide Punkte zusammen in einen und denselben Punkt der Ebene (6); es muß also

$$\frac{\partial\Gamma_2}{\partial\xi_2}=\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi_1}$$

werden. Der Vergleich mit (12) ergibt:

$$\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi_1}=0,\quad \frac{\partial\Gamma_2}{\partial\xi_2}=0\quad \text{an der Oberfläche.} \tag{12a}$$

Hiernach stellt die durch (4) definierte Funktion Γ die zweite Greensche Funktion des Parallelepipedons dar (deren Differentialquotienten nach der Normalen an der Oberfläche verschwinden); denn für die Variabeln Z und Y gelten ganz analoge Umformungen.

Im vorstehenden wurde Riemanns Ansatz möglichst beibehalten, nach welchem der Anfangspunkt im Mittelpunkte des Parallelepipedons liegt. Legt man, wie für das Folgende nötig ist, eine Ecke in den beliebigen Punkt α, β, γ und die gegenüberliegende Ecke in den Punkt a, b, c, so sind die Längen der Kanten bzw. $a - \alpha$, $b - \beta$, $c - \gamma$.

Verschiebt man das gegebene Parallelepipedon parallel zu den Achsen um ein Vielfaches der Seitenlänge, so entstehen unendlich viele kongruente Körper, deren Seitenflächen durch die Gleichungen

$$(13) \qquad \begin{aligned} \xi &= \alpha + k\,(a - \alpha) & \eta &= \beta + m\,(b - \beta) & \zeta &= \gamma + n\,(c - \gamma) \\ &= a + (k - 1)\,(a - \alpha), & &= b + (m - 1)\,(b - \beta), & &= c + (n - 1)\,(c - \gamma) \end{aligned}$$

gegeben werden, wenn die ganzen Zahlen k, m, n alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen. Die Größe N soll das Quadrat der Entfernung des Punktes ξ, η, ζ von dem Punkte X, Y, Z oder von einem der homologen Punkte in den kongruenten Körpern darstellen, die durch wiederholte Spiegelung an den in (13) gegebenen Ebenen aus dem ursprünglichen Körper entstehen, wobei zwei aufeinanderfolgende Spiegelungen in gleicher Richtung einer Verschiebung um die doppelte Seitenlänge äquivalent sind.

Die Spiegelung an der Ebene $\xi = a$ führt z. B. zu dem Punkte

$$x_1 = 2a - X,\; y_1 = Y,\; z_1 = Z.$$

Die Spiegelung an der Ebene $\xi = 2a - \alpha$ ergibt den Punkt

$$x_2 = 2\,(a - \alpha) + X,\; y_2 = Y,\; z_2 = Z,$$

also eine Verschiebung um $2\,(a - \alpha)$. Spiegelt man an der nächsten Ebene, so wird

$$x_3 = 2\,(a - \alpha) + 2a - X, y_3 = Y, z_3 = Z.$$

Sodann wird $x_4 = 4\,(a - \alpha) + X$, $x_5 = 4\,(a - \alpha) + 2a - X$, usf. Unter Einführung einer beliebigen ganzen positiven oder negativen Zahl k hat man allgemein:

$$(14) \qquad x_k = k\,(a - \alpha) + \frac{1}{2}(a + \alpha) + (-1)^k \left(X - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\alpha\right)$$

bei Spiegelung an der Ebene $\xi = ka - (k - 1)\alpha$. Entsprechendes gilt für die Koordinaten Y und Z, für welche die ganzen Zahlen m und n an Stelle von k treten mögen. Für N findet man schließlich:

$$(15) \qquad N = (x_k - \xi)^2 + (y_m - \eta)^2 + (z_n - \zeta)^2,$$

wo

$$(16) \qquad \begin{aligned} y_m &= m\,(b - \beta) + \frac{1}{2}(b + \beta) + (-1)^m \left(Y - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\beta\right), \\ z_n &= n\,\,(c - \gamma) + \frac{1}{2}(c + \gamma) + (-1)^n \left(Z - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\gamma\right), \end{aligned}$$

während x_k durch (14) gegeben ist.

Wir betrachten jetzt zwei zu der Ebene $\xi = \alpha + h\,(a - \alpha)$ symmetrisch gelegene Punkte mit den Koordinaten

$$\xi_1 = \alpha + h\,(a - \alpha) + (-1)^h\, t, \text{ und}$$
$$\xi_2 = \alpha + h\,(a - \alpha) + (-1)^{h+1}\, t,$$

so daß in der Tat:

$$\alpha + h\,(a - \alpha) - \xi_1 = (-1)^{h+1}\, t = \xi_2 - [\alpha + h\,(a - \alpha)].$$

Setzt man den Wert von ξ_1 in das erste Quadrat der rechten Seite von (15) ein, so wird:

$$\begin{aligned}(x_h - \xi_1)^2 &= \left[\left(k - h + \frac{1}{2}\right)(a - \alpha) + (-1)^k\left(X - \frac{1}{2}\,a - \frac{1}{2}\,\alpha\right) - (-1)^h\, t\right]^2 \\ &= \left[(-1)^h\left(k - h + \frac{1}{2}\right)(a - \alpha) + (-1)^{k-h}\left(X - \frac{1}{2}\,a - \frac{1}{2}\,\alpha\right) - t\right]^2 \\ &= \left[(-1)^h\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + (-1)^\lambda\left(X - \frac{1}{2}\,a - \frac{1}{2}\,\alpha\right) - t\right]^2,\end{aligned}$$

wenn die ganze Zahl λ durch die Gleichung

$$\lambda = (k - h)$$

definiert wird. Ebenso:

$$\begin{aligned}(x_h - \xi_2)^2 &= \left[\left(k - h + \frac{1}{2}\right)(a - \alpha) + (-1)^k\left(X - \frac{1}{2}\,a - \frac{1}{2}\,\alpha\right) - (-1)^{h+1}\, t\right]^2 \\ &= \left[(-1)^h\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)(a - \alpha) + (-1)^\lambda\left(X - \frac{1}{2}\,a - \frac{1}{2}\,\alpha\right) - t\right]^2,\end{aligned}$$

wenn jetzt: $\lambda = h - k - 1$. Werden mit N_1 und N_2 die Werte von N bezeichnet, die den Werten $\xi = \xi_1$ und $\xi = \xi_2$ entsprechen, so ist:

$$\frac{\partial N_1^{-1/2}}{\partial \xi_1} = (-1)^h \frac{\partial N_1^{-1/2}}{\partial t} = \frac{1}{2}(-1)^h\left[\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)(a - \alpha) + (-1)^\lambda\left(X - \frac{1}{2}\,a - \frac{1}{2}\,\alpha\right) - t\right] N_1^{-3/2}$$

und:

$$\frac{\partial N_2^{-1/2}}{\partial \xi_2} = (-1)^{h+1} \frac{\partial N_2^{-1/2}}{\partial t} = \frac{1}{2}(-1)^{h+1}\left[\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)(a - \alpha) + (-1)^\lambda\left(X - \frac{1}{2}\,a - \frac{1}{2}\,\alpha\right) - t\right] N_2^{-3/2}.$$

Also wenn Γ_1 und Γ_2 entsprechende Bedeutung haben:

$$(17) \qquad \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \xi_1} = -\frac{\partial \Gamma_2}{\partial \xi_2}.$$

Für $t = 0$ wird $\xi_1 = \xi_2$, folglich auch

$$(18) \qquad \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \xi_2}$$

und somit $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial \xi_1} = 0$, $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial \xi_2} = 0$, an jeder Fläche $\xi = \alpha + h\,(a - \alpha)$, wie oben in (12a).

Von der zweiten Greenschen Funktion (Γ) wird im folgenden kein Gebrauch gemacht. Die Aufstellung derselben geschah zur Ergänzung der Riemannschen Theorie.

§ 2a. Über die Konvergenz der benutzten Reihen.

Um die Konvergenz der Reihen für G bzw. Γ zu untersuchen, müssen wir auf die Methode von Eisenstein näher eingehen. Es war

$$G = \sum_k \sum_m \sum_n \left[\frac{(-1)^{k+m+n}}{\sqrt{N}} - \frac{(-1)^{k+m+n}}{\sqrt{N_0}}\right], \tag{1}$$

wo N durch (1), N_0 durch (3), § 2 definiert ist. Eisenstein führt die Konvergenz solcher Reihen auf die Konvergenz der Reihe

$$\Sigma\,\Sigma\,\Sigma\,(k^2 + m^2 + n^2)^{-1/2}$$

zurück, und untersucht allgemein Reihen der Form

$$R = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \ldots \sum_{m_\tau} (m_1^2 + m_2^2 \cdots + m_\tau^2)^{-p}, \tag{2}$$

wobei die τ Zahlen m_i je von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen. Die rechte Seite wird von ihm in Partialreihen geteilt, deren Indizes den folgenden Beschränkungen unterliegen sollen:

$$\begin{aligned} 2^{k_1} &\leqq m_1 < 2^{k_1+1}, \\ 2^{k_2} &\leqq m_2 < 2^{k_2+1}, \\ &\cdots \\ 2^{k_\tau} &\leqq m_\tau < 2^{k_\tau+1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Es ergibt sich die Ungleichung:

$$\Sigma\, 2^{2k_i} \leqq m_1^2 + \cdots + m_\tau^2 < \Sigma\, 2^{2k_i+2},$$

um so mehr $\Sigma m_i^2 \geqq 2^{2\varkappa}$, wo $\varkappa\tau = k_1 + k_2 + \ldots + k_\tau$, also

$$(m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_\tau^2)^{-p} \leqq 2^{-2\varkappa p}. \tag{4}$$

Die Anzahl der Glieder von R, die den Bedingungen (3) genügen, ist $2^{\varkappa\tau}$; man hat demnach:

$$R \leqq \frac{2^{\varkappa\tau}}{2^{2\varkappa p}} = \frac{1}{2^{\varkappa(2p-\tau)}} = \frac{1}{2^{\frac{2p-\tau}{\tau}k_1}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{2p-\tau}{\tau}k_2}} \cdots \frac{1}{2^{\frac{2p-\tau}{\tau}k_\tau}} \tag{5}$$

und somit, wenn $P = 2^{\frac{2p-\tau}{\tau}}$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} R &\leqq \sum_{k_1=0}^{k} \sum_{k_2=0}^{k} \cdots \sum_{k_\tau=0}^{k} P^{-k_1} P^{-k_2} \cdots P^{-k_\tau} = \sum_{k_1} P^{-k_1} \sum_{k_2} P^{-k_2} \cdots \sum_{k_\tau} P^{-k_\tau} \\ &= [1 + P^{-1} + P^{-2} \cdots + P^{-k}]^\tau = \left(\frac{P}{P-1}\right)^\tau \text{ für } k = \infty, \end{aligned} \tag{6}$$

falls $2p - \tau > 0$ ist. Die Reihe R ist somit absolut konvergent, wenn $2p > \tau$. In unserem Falle war $\tau = 3$, $p = \frac{1}{2}$; die erste Summe der obigen Reihe G ist also nicht konvergent, denn Eisenstein weist auch nach, daß für $2p \leqq \tau$ Divergenz eintritt.

Es ist zu untersuchen, ob der Ausdruck G durch Hinzufügen des Gliedes mit N_0 konvergent gemacht wird. Zu dem Zwecke muß man die erstere Summe nach Potenzen der Variabeln $(-1)^k X - \xi$, $(-1)^m Y - \eta$, $(-1)^n Z - \zeta$ entwickeln. Da es sich um absolute Konvergenz handeln soll, kann von dem Faktor $(-1)^{k+m+n}$ abgesehen werden. Wir nennen die Variabeln kurz x, y, z, so daß:

$$N = (ka + x)^2 + (mb + y)^2 + (nc + z)^2, \tag{7}$$

und:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N_0}} - N_0^{-3/2} \cdot [kax + mby + ncz] + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3}{2} N_0^{-5/2} [kax + mby + ncz]^2 + \ldots \tag{8}$$

Bei der dreifachen Summierung über k, m, n von $-\infty$ bis $+\infty$ heben sich die Glieder mit dem Faktor $N_0^{-3/2}$ gegenseitig fort. Es kommt also nur auf den Faktor von $N_0^{-5/2}$ an, dessen Konvergenz auf die Konvergenz der rein numerischen Reihe $\Sigma\Sigma\Sigma\, k^2 (k^2 + m^2 + n^2)^{-5/2}$ zurückzuführen ist (wie in analogen Fällen bei Eisenstein). Wir untersuchen sogleich die allgemeine Reihe

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} \ldots \sum_{m_\tau} \frac{m_1^2}{(m_1^2 + m_2^2 \ldots + m_\tau^2)^p}. \tag{9}$$

Die Ungleichungen (3) ändern wir in folgender Weise ab:

$$\begin{aligned} 2^{k_1} &\leqq m_1 < (2\varepsilon)^{k_1+1}, \\ 2^{k_2} &\leqq m_2 < 2^{k_2+1}, \\ &\ldots \\ 2^{k_\tau} &\leqq m_\tau < 2^{k_\tau+1}, \end{aligned} \tag{10}$$

wo ε eine Zahl bezeichnet, die größer als eins sein soll, im übrigen noch zu bestimmen ist. Für $i > 1$ ist die Anzahl der Zahlen m_i, die dieser Forderung genügen, gleich $2^{k_i+1} - 2^{k_i} = 2^{k_i}$. Für $i = 1$ ist sie kleiner als $(2\varepsilon)^{k_1+1} - 2^{k_1} = 2^{k_1}(2\varepsilon^{k_1+1} - 1)$, nämlich gleich 2^{k_1} mal der größten ganzen Zahl, die in letzterer Klammer enthalten ist. Sei λ diese Zahl, so ist die Anzahl der Kombinationen aller in Betracht kommenden Zahlen m_i gleich $2^{k_1} \cdot 2^{k_2} \cdots 2^{k_\tau} \cdot \lambda = 2^{\varkappa\tau} \cdot \lambda$, wenn

$$\varkappa = (k_1 + k_2 \ldots + k_\tau)\frac{1}{\tau}.$$

Nun ist jedenfalls $2^{\varkappa} < 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_\tau}$, also

$$m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_\tau^2 \geqq 2^{2k_1} + 2^{2k_2} + \cdots + 2^{2k_\tau} > 2^{2\varkappa},$$

und weiter

$$(m_1^2 + m_2^2 \cdots + m_\tau^2)^{-p} \leqq 2^{-2\varkappa p},$$

d. h. sämtliche Glieder der aus den zugelassenen Zahlen m_i zu bildenden Partialreihe sind, wenn man von dem Zähler m_1^2 absieht, nicht größer als $2^{-2\varkappa p}$. Die Anzahl der Glieder war soeben gleich $2^{\varkappa\tau}\cdot\lambda$ gefunden. Die Summe aller dieser Glieder ist folglich (da $\lambda \leqq 2\varepsilon^{k_1+1}-1$):

$$\leqq \frac{2^{\varkappa\tau}\cdot\lambda}{2^{2\varkappa p}} \leqq \frac{2\varepsilon^{k_1+1}}{2^{\varrho k_1}}\cdot\frac{1}{2^{\varrho k_2}}\cdot\frac{1}{2^{\varrho k_3}}\cdots\frac{1}{2^{\varrho k_\tau}},$$

wo zur Abkürzung $\varrho = \frac{2p-\tau}{\tau}$ gesetzt ist. Jetzt soll aber im Zähler zu jedem Gliede der Faktor m_1^2 hinzutreten, dessen Größe durch die erste Ungleichung (10) beschränkt wird. Schließlich haben wir, wenn wir die Summe aller Partialreihen bilden, für die keine der Zahlen $k_1, k_2, \ldots k_\tau$ größer als k wird:

$$\sum_{k_1=0}^{k}\sum_{k_2=0}^{k}\sum_{k_\tau=0}^{k}\frac{m_1^2}{(m_1^2+m_2^2\cdots+m_\tau^2)^p} \leqq 8\varepsilon^3\sum\cdots\sum\frac{\varepsilon^{3k_1}}{2^{\varrho k_1}}\cdot\frac{1}{2^{\varrho k_2}}\cdots\frac{1}{2^{\varrho k_\tau}}$$

und die rechte Seite ist gleich (wenn nach k_i von 0 bis k summiert wird)

$$(11)\qquad 8\varepsilon^3\left(1+\frac{\varepsilon^3}{2^\varrho}+\frac{\varepsilon^6}{2^{2\varrho}}\cdots+\frac{\varepsilon^{3k}}{2^{\varrho k}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^\varrho}+\frac{1}{2^{2\varrho}}+\cdots+\frac{1}{2^{k\varrho}}\right)^{\tau-1}.$$

Ist $\varrho > 0$, d. h. $2p > \tau$, so konvergiert bei unendlich wachsendem k die zweite Klammer zu

$$\left(\frac{2^\varrho}{2^\varrho-1}\right)^{\tau-1}.$$

Damit auch die erste Klammer konvergiert, und zwar zu

$$\frac{2^\varrho}{2^\varrho-\varepsilon^3},$$

muß $\varepsilon^3 < 2^\varrho$ oder $\varepsilon^{3\tau} < 2^{2p-\tau}$ sein. H i e r n a c h w ä r e ε s o z u b e s t i m m e n , d a ß d i e K o n v e r g e n z e r r e i c h t w i r d; und letztere ist gesichert, falls die verlangte Bestimmung möglich ist.

Als obere Grenze für ε ergibt sich $2^{\frac{2p-\tau}{3\tau}}$. Für das dritte Glied der rechten Seite von (8) kommt es auf Untersuchung der folgenden Reihe an

$$\sum_k\sum_m\sum_n\frac{k^2}{(k^2+m^2+n^2)^{5/3}}.$$

Es ist also $p=\frac{5}{2}$, $\tau = 3$; $2p-\tau = 2$ d. h. positiv, wie es sein soll, und $\varepsilon^9 < 4$, also $1 < \varepsilon < 1,65\ldots$ D i e r e c h t e S e i t e d e r G l e i c h u n g (5) i s t f o l g l i c h k o n v e r g e n t.

Wenn wir im folgenden die Potentialfunktion für mehrdimensionale Räume aufstellen, so haben wir es mit Verallgemeinerungen der Reihe (1) zu tun, bei der nicht $p = -\frac{1}{2}$ ist, sondern $p = \frac{\mu-2}{2}$, wo μ die Anzahl der Variabeln bezeichnet, also an Stelle des obigen τ

steht. Es wird $2p - \tau = -2$; die Reihe ist also nicht konvergent. Um zu prüfen, ob sie durch Hinzufügen des Gliedes mit N_0 konvergent gemacht werden kann, kommt es auf die Reihe (9) an, bei der $p = \frac{\mu-2}{2} + 2$, also $2p - \tau = 2$, so daß die zweite Klammer auf der rechten Seite von (11) konvergiert. Auch die erste Klammer daselbst konvergiert, wenn ε gemäß der Gleichung $\varepsilon^{3\mu} < 2^2$ bestimmt wird. Für ε kann irgendeine Zahl zwischen 1 und ε_0 gewählt werden, falls $\varepsilon_0^{3\mu} = 2^2$, wobei ε_0 mit wachsendem μ der Einheit sehr nahekommt. Die Konvergenz ist also zwar vorhanden, aber sie ist nicht besonders günstig.

Bei Aufstellung der Ungleichungen (3) wurde insofern mit Willkürlichkeit verfahren, als die Zahl 2 dabei ausgezeichnet wurde; man kann zur Zerlegung der mehrfach unendlichen Reihen in Partialreihen statt der Zahl 2 irgendeine andere ganze Zahl benutzen. In der Tat kommt man immer zu der gleichen Konvergenzbedingung $2p > \tau$. Ebenso ist es bei den Ungleichungen (10). Nimmt man z. B. 3 statt 2, so wird $\varepsilon^{3\tau} < 3^{2p-\tau}$, also für $p = \frac{5}{2}$, $\tau = 3$ findet man: $1 < \varepsilon < 1,276$.

§ 3. Die Potentialfunktion im mehrfach ausgedehnten Raume.

Im μ-fach ausgedehnten Raume verstehen wir unter einer Potentialfunktion der μ Variabeln ξ_i eine Funktion V, die der Bedingung:

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_i^2} = 0 \tag{1}$$

genügt. Für sie bestehen die Umformungen, die zum Greenschen Satze führen, unverändert; es ist also auch (wenn die Integrationsvariabeln mit ξ_i bezeichnet werden):

$$\int\int \cdots \int [V \Delta U - U \Delta V]\, d\tau = -\int \cdots \int \left[\overline{V}\, \frac{\overline{\partial U}}{\partial n} - \overline{U}\, \frac{\overline{\partial V}}{\partial n}\right] d\sigma, \tag{2}$$

wo $d\tau \,(= d\xi_1 \cdot d\xi_2 \ldots d\xi_\mu)$ das Raumelement, $d\sigma$ das Oberflächenelement bezeichnet. Auch die Ableitung der Gleichung (2) § 1 bleibt dieselbe; es ändert sich nur der Faktor 4π im Nenner der rechten Seite. Dieser Faktor ist dadurch entstanden, daß der Punkt mit einer kleinen Kugel umgeben und über deren Oberfläche integriert wurde. Die Oberfläche einer Kugel vom Radius eins ist gleich 4π; die Oberfläche einer Kugel im μ-dimensionalen Raume ist gleich $2^{\mu-1}\pi$; diese Zahl tritt also an Stelle von 4π.

Die Funktion G ist hier entsprechend anders definiert. Die einfachste Funktion, die der Gleichung (1) genügt und an einer gegebenen Stelle unendlich wird, ist jetzt:

$$\left[\sum_{i=1}^{\mu} (X_i - \xi_i)^2\right]^{-\frac{\mu-2}{2}}. \tag{3}$$

An Stelle der Forderung 2 in § 1 tritt also die Forderung, daß G für $\xi_i = X_i$ unendlich werden soll, wie der Ausdruck (3).

Dementsprechend lauten jetzt die Gleichungen (2), (3) und (11) bzw.:

$$(4)\qquad \begin{aligned} V &= \frac{1}{2^{\mu-1}\pi}\int\cdots\int \overline{V}\cdot\frac{\overline{\partial G}}{\partial n}\,d\sigma \\ &= \frac{-1}{2^{\mu-1}\pi}\int\cdots\int \frac{\overline{\partial V}}{\partial n}\cdot\overline{\Gamma}\,d\sigma. \end{aligned}$$

Die Greenschen Funktionen G und Γ für ein rechtwinkliges Parallelepipedon sind jetzt:

$$(5)\qquad G = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{k_\mu=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\Sigma k_i}\left[N^{-\frac{\mu-2}{2}} - N_0^{-\frac{\mu-2}{2}}\right],$$

$$(6)\qquad \Gamma = \Sigma\cdots\Sigma\left[N^{-\frac{\mu-2}{2}} - N_0^{-\frac{\mu-2}{2}}\right],$$

wo:

$$(7)\qquad N = \sum_{i=1}^{\mu}[k_i a_i + (-1)^{k_i}X_i - \xi_i]^2, \qquad N_0 = \sum_{i=1}^{\mu}[k_i a_i]^2.$$

Das Parallelepipedon hat die Seitenlängen a_i und erstreckt sich von $-\frac{1}{2}a_i$ bis $+\frac{1}{2}a_i$.

Wird der Anfangspunkt verlegt und die eine Ecke durch einen beliebigen Punkt mit den μ Koordinaten α_i ersetzt, und sind a_i die Koordinaten der gegenüberliegenden Ecke des Parallelepipedons, so muß man nach (15) und (16) § 2 setzen:

$$(8)\qquad \begin{aligned} N &= \sum_i\left[k_i(a_i-\alpha_i) + (-1)^{k_i}\left(X_i - \frac{1}{2}a_i - \frac{1}{2}\alpha_i\right) - \left(\xi_i - \frac{1}{2}a_i - \frac{1}{2}\alpha_i\right)\right]^2, \\ N_0 &= \sum [k_i(a_i-\alpha_i)]^2. \end{aligned}$$

Bei etwaigen Anwendungen wird man jedes einzelne Glied der Reihen für G und Γ nach Kugelfunktionen höherer Ordnung[1] entwickeln.

Über die Konvergenz der benutzten Reihen wurde schon in § 2a das Nötige gesagt.

§ 4. Die Gleichungen für das Problem der n Körper.

Sollen sich n Punkte mit den Koordinaten x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ und den Massen m_i im Raume unter alleiniger Wirkung der Newtonschen Anziehungskraft bewegen, so hängt die Lösung des Problems von der Bestimmung der zugehörigen Hamiltonschen Funktion V ab, die der partiellen Differentialgleichung

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right] = U + h$$

zu genügen hat, wo h eine Konstante und U die Kräftefunktion bezeichnet:

$$(2)\qquad U = \sum_{i,k}\frac{m_i m_k}{\sqrt{(x_i-x_k)^2 + (y_i-y_k)^2 + (z_i-z_k)^2}}.$$

---

[1] Vgl. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., Bd. 1, 1878, S. 445 ff.

Diese Funktion U genügt den n Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z_i^2}=0 \text{ oder } \Delta U=0, \tag{3}$$

von denen indessen im folgenden kein Gebrauch gemacht wird. Durch die Substitution

$$\begin{aligned} x_i\sqrt{2m_i} &= \xi_i && \text{für } i=1,2,\dots n\\ y_i\sqrt{2m_i} &= \xi_{n+i} && \text{für } i=1,2,\dots n\\ z_i\sqrt{2m_i} &= \xi_{2n+i} && \text{für } i=1,2,\dots n \end{aligned} \tag{4}$$

geht die Gleichung (1) über in:

$$\sum_{i=1}^{3n}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i}\right)^2=U+h, \tag{5}$$

wo U in den Variabeln ξ_i geschrieben zu denken ist, und wo Ω diejenige Funktion bezeichnet, die aus V durch die Substitution (4) hervorgeht.

Wir integrieren die Gleichung (5) über das Innere eines $3n$-dimensionalen Parallelepipedons mit den Seitenlängen $x_i-\alpha_i$, und zwar nach ξ_i von α_i bis x_i, wo mit α_i willkürliche Konstante bezeichnet sind. Bezeichnet $d\tau$ das Raumelement ($=d\xi_1\, d\xi_2\dots d\xi_{3n}$), so ist

$$\int_a^{x_1}\int_a^{x_2}\cdots\int_{a_\mu}^{x_\mu}\sum_i\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i}\right)^2 d\tau=\int_{a_1}^{x_1}\int_{a_2}^{x_2}\cdots\int_{a_\mu}^{x_\mu}(U+h)\,d\tau, \tag{6}$$

wobei (und ebenso im folgenden) gesetzt ist:

$$3n=\mu. \tag{7}$$

Jede der Gleichung (5) in dem Parallelepipedon genügende Funktion Ω genügt auch der Gleichung (6), aber nicht umgekehrt; doch gelingt es mit Hilfe des Greenschen Satzes, eine Funktion Ω gemäß der Gleichung (6) zu bestimmen, die an der Oberfläche des Parallelepipedons die Bedingung (5) befriedigt.

Um den Greenschen Satz anwenden zu können, nehmen wir an, daß Ω im Innern des Parallelepipedons der Gleichung

$$\Delta\Omega=0 \tag{8}$$

genügt. Der Wert an der Oberfläche ergibt sich im allgemeinen durch Differentiation nach den oberen Grenzen x_i. Das führt aber hier nicht zum Ziele, denn Ω hängt jetzt wegen der Bedingung (8) für das Innere selbst noch von den x_i ab. Der Greensche Satz ergibt jetzt:

$$\int\int\cdots\int\sum\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i}\right)^2 d\tau=-\int\cdots\int\overline{\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial n}\,d\sigma, \tag{9}$$

wo $d\sigma$ das Oberflächenelement für das Parallelepipedon bezeichnet. Die Gleichung (6) wird also:

$$(10)\qquad -\int\cdots\int\overline{\Omega}\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,n}\,d\sigma=\int\int\cdots\int(U+h)\,d\tau.$$

Es handelt sich zunächst darum, auch das rechts stehende Raumintegral in ein Oberflächenintegral zu verwandeln. Das kann z. B. erreicht werden durch Benutzung der bekannten Gleichung der Potentialtheorie

$$\int\int\cdots\int(U\Delta W-W\Delta U)\,d\tau=-\int\cdots\int\left(\overline{U}\frac{\partial W}{\partial n}-\overline{W}\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma,$$

indem man für W eine Lösung der Gleichung $\Delta W=1$ (z. B. $W=\frac{1}{2}\xi_1^2$ oder $=\frac{1}{6n}\Sigma\xi_i^2$) wählt, und beachtet, daß U gemäß den Gleichungen (3) der Bedingung $\Delta U=0$ genügt. Einfacher kommt man durch folgende Überlegung zum Ziele.

Die rechte Seite von (9) stellt sich als Summe von μ einzelnen Oberflächenintegralen dar, entsprechend den μ-Paaren von Begrenzungsebenen $\xi_i=x_i$ bzw. $\xi_i=\alpha_i$. Auf jeder dieser beiden Ebenen ist das Flächenelement gleich

$$(10\,\text{a})\qquad d\sigma_i=d\xi_1\,d\xi_2\cdots d\xi_{i-1}\,d\xi_{i+1}\cdots d\xi_\mu.$$

An der Ebene $\xi_i=x_i$ ist das Differential der inneren Normale ∂n durch $-\partial\xi_i$, an der Ebene $\xi_i=\alpha_i$ dagegen durch $+\partial\xi_i$ zu ersetzen. Somit wird:[1]

$$(11)\qquad -\int\cdots\int\overline{\Omega}\,\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,n}\,d\sigma=\sum_{i=1}^{\mu}\int\cdots\int\left[\left(\Omega\,\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\xi_i}\right)_{\xi_i=x_i}-\left(\Omega\,\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\xi_i}\right)_{\xi_i=\alpha_i}\right]d\sigma_i.$$

Auch die rechte Seite von (10) läßt sich als eine analoge Summe von Oberflächenintegralen darstellen. Es ist z. B. für die Begrenzungsebene $\xi_1=x_1$:

$$(11\,\text{a})\qquad \int\int\cdots\int(U+h)\,d\tau=\int\cdots\int\left[\int_{\alpha_1}^{x_1}(U+h)\,d\xi_1\right]d\sigma_1,$$

und allgemein (wenn $d\sigma_i$ durch (10a) definiert ist):

$$(11\,\text{b})\qquad =\int\cdots\int V_1\,d\sigma_1=\int\cdots\int V_2\,d\sigma_2\cdots=\int\cdots\int V_\mu\,d\sigma_\mu,$$

wenn

$$(12)\qquad V_i=\int_{\alpha_i}^{x_i}(U+h)\,d\xi_i\quad\text{für } i=1,2,\cdots\mu$$

gesetzt wird. Dabei ist z. B. der Ausdruck V_1 eine Funktion von $x_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_\mu$. Werden mit $B_1, B_2, \ldots B_\mu$ gewisse Konstante bezeichnet, so kann man setzen

$$(12\,\text{a})\qquad \int\int\cdots\int(U+h)\,d\tau=\sum_i B_i\int\cdots\int V_i\,d\sigma_i,$$

[1] Wird hier und im folgenden einem Ausdrucke die Gleichung $\xi_i=x_i$ als Index beigefügt, so soll damit gesagt werden, daß die eine Variable ξ_i durch x_i zu ersetzen ist, die anderen Variabeln ξ aber ungeändert bleiben. Lautet der Index aber $\xi=x$, so sollen alle Veränderlichen ξ je durch x ersetzt werden.

wenn die Konstanten B_i der Bedingung

$$B_1 + B_2 + \ldots + B_\mu = 1 \tag{12b}$$

genügen. In der Gleichung (10) müssen nach Umformung der rechten Seite mittels (12a) beiderseits auch die Oberflächenintegrale übereinstimmen. Die Vergleichung mit (11) gibt deshalb:

$$\left(\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i}\right)_{\xi_i = x_i} - \left(\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i}\right)_{\xi_i = a_i} = B_i \int_{a_i}^{x_i} (U + h)\, d\xi_i \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots \mu. \tag{13}$$

Denkt man sich Ω dementsprechend auf der Oberfläche bestimmt, so wird nach (4) § 3 für das Innere des Parallelepipedons:

$$2^{\mu-1} \pi \cdot \Omega(X) = -\sum_{i=1}^{\mu} \int \cdots \int \overline{\Omega}_i \frac{\partial G}{\partial \xi_i} \cdot d\sigma_i, \tag{14}$$

wo $\overline{\Omega}_i$ den Wert von Ω an der Begrenzungsebene $\xi_i = x_i$ und G die erste Greensche Funktion bezeichnet. Bei Bildung dieser Funktion ist zu beachten, daß die früher mit a bezeichnete Ecke des Parallelepipedons jetzt mit x bezeichnet ist. Die früher zur Definition des Ausdruckes N dienende Gleichung (9) § 3 ist demnach jetzt zu ersetzen durch:

$$N = \sum_i \left[k_i (x_i - \alpha_i) + (-1)^{k_i} \left(X_i - \frac{1}{2} x_i - \frac{1}{2} \alpha_i\right) - \left(\xi_i - \frac{1}{2} x_i - \frac{1}{2} \alpha_i\right)\right]^2, \tag{15}$$

und entsprechend für N_0. Diese Bezeichnung wird auch im folgenden beibehalten.

Es handelt sich jetzt um die nähere Bestimmung der in (14) auftretenden Ausdrücke Ω_i. Unser Parallelepipedon hat 2μ Grenzflächen. Wenn das über alle diese Flächen ausgedehnte Oberflächenintegral auf der rechten Seite von (12a) nur aus μ Gliedern besteht, so liegt dies daran, daß der Oberflächenwert V_i gleichzeitig für die Fläche $\xi_i = x_i$ und für die ihr kongruente Fläche $\xi_i = \alpha_i$ gilt; tatsächlich stehen demnach auf der rechten Seite von (11) doch 2μ einzelne Oberflächenintegrale. Wir setzen

$$\frac{1}{2} \Omega_i^2 = B_i \left[\int_{a_i}^{\xi_i'} d\xi_i \int_{a_i}^{\xi_i} [U(\xi) + h]\, d\xi_i\right]_{\xi_i' = x_i} = \frac{1}{2} [\Omega_i(\xi)^2]_{\xi_i = x_i}. \tag{16}$$

Durch Differentiation ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\left(\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i'}\right)_{\xi_i' = x_i} = -\left(\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial n}\right)_{\xi_i = x_i} = B_i \int_{a_i}^{x_i} [U(\xi) + h]\, d\xi_i \\ &\left(\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i'}\right)_{\xi_i' = a_i} = \left(\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial n}\right)_{\xi_i = a_i} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Im folgenden werden wir alle Größen B_i einander gleich $(= \mu^{-1})$ annehmen. Dadurch wird erreicht, daß die Werte Ω_i auf verschiedenen ebenen Grenzflächen sich stetig aneinander anschließen; aus (16) folgt nämlich:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1'^2}(\Omega_1^2)\right)_{\substack{\xi_1'=x_1\\ \xi_2=x_2}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_2'^2}(\Omega_2^2)\right)_{\substack{\xi_2'=x_2\\ \xi_1=x_1}} = (U+h)_{\substack{\xi_1=x_1,\\ \xi_2=x_2}}$$

so daß die Differentialquotienten von Ω_1 und Ω_2 in der gemeinsamen Mannigfaltigkeit der Ebenen $\xi_1 = x_1$ und $\xi_2 = x_2$ gleiche Werte haben.

Setzt man die aus (16) fließenden Werte von Ω_i in die rechte Seite von (14) ein, so ist damit eine Funktion $\Omega\,(X)$ gewonnen, die im Innern des durch die 2μ Ebenen $X_i = x_i, X_i = \alpha_i$ begrenzten Parallelepipedons der Gleichung $\Delta\Omega = 0$ genügt und an den Begrenzungsebenen die durch (16) gegebenen Werte Ω_i annimmt. Es ist also z. B.

$$[\Omega(X_1, X_2, \cdots X_\mu)]_{X_1=x_1} = \Omega_1(x_1, X_2 \cdots X_\mu).$$

Ursprünglich war nicht der Wert von Ω an der Oberfläche gegeben, sondern der Wert von $\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial n} = \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega^2}{\partial n}$, und zwar in Abhängigkeit von den Werten x_i, durch welche die begrenzenden Ebenen $X_i - x_i = 0$ bestimmt werden. Hieraus war gemäß der Gleichung (16) durch Integration der Wert von Ω^2 (und somit von Ω selbst) gewonnen. Umgekehrt also wird aus (14) der gegebene Wert von $\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial n}$ nach dem Greenschen Satz wieder gewonnen. So erhält man z. B.:

$$(17\text{a})\qquad 2^{\mu-1}\pi\,[\Omega\,(X)]_{X_1=x_1} = 2^{\mu-1}\pi\,\Omega_1(x_1, X_2, \cdots X_\mu) = -\sum_i \int\cdots\int \overline{\Omega_i}\left(\frac{\partial G}{\partial \xi_i}\right)_{\substack{X_1=x_1\\ \xi_i=x_i}} d\sigma_i.$$

Das allgemeine Glied der rechten Seite von (14) stellt eine Potentialfunktion dar, die an der Grenzfläche $\xi_i = x_i$ den Wert $\overline{\Omega_i}$, an allen anderen Grenzflächen des Parallelepipedon aber den Wert Null annimmt. In allen Gliedern hat man $X_1 = x_1$ zu setzen, um die Gleichung (17a) zu erhalten.

Hat man die Werte von Ω und $\frac{\partial\Omega}{\partial n}$ an der Oberfläche berechnet, so könnte man $\Omega\,(X)$ für das Innere auch gemäß (4) § 3 unter Benutzung der zweiten Greenschen Funktion Γ finden.

§ 5. Differentialgleichung für die Funktion Ω an der Oberfläche des Parallelepipedons.

Neben dem ursprünglich gegebenen Parallelepipedon betrachten wir ein ganz in demselben enthaltenes mit parallelen Seiten, das durch die Ecken α und X bestimmt sei, wobei also:

$$\alpha_i < X_i < x_i \text{ für } i = 1, 2, \ldots \mu.$$

Nachdem Ω durch (14) § 4 bestimmt ist, führen wir eine Funktion U^*, die von den Punkten x und ξ abhängt, ein durch die Gleichung:

$$(1)\qquad U^*(x,\xi) = \sum_{i=1}^{\mu}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i}\right)^2.$$

Es genügt Ω auch im Innern des kleineren Körpers der Gleichung $\Delta\Omega = 0$; nach dem Greenschen Satze ist also, wenn $d\sigma^*$ das Oberflächenelement des kleineren Parallelepipedons bezeichnet:

$$(2) \qquad \int_{a_1}^{X_1}\int_{a_2}^{X_2}\cdots\int_{a_\mu}^{X_\mu} \Sigma \left(\frac{\partial\,\Omega}{\partial\xi_1}\right)^2 d\tau = -\frac{1}{2}\int\cdots\int\frac{\partial\,\Omega^2}{\partial n}\,d\sigma^* = \int_{a_1}^{X_1}\int_{a_2}^{X_2}\cdots\int_{a_\mu}^{X_\mu} U^*(x,\xi)\,d\tau,$$

wo $d\tau = d\xi_1 \cdot d\xi_2 \cdots d\xi_\mu$, und wo Ω in Variabeln ξ (statt X) geschrieben zu denken ist. Das rechts stehende μfache Integral kann wieder in ein Oberflächenintegral verwandelt werden, und somit folgt:

$$(3) \qquad \frac{1}{\mu}\int_{a_i}^{X_i} U^*(x,\xi)\,d\xi_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\Omega^2}{\partial\xi_i}\right)_{\xi_i=X_i}$$

in Analogie zu der Gleichung (17) § 4, welche lautete:

$$(4) \qquad \frac{1}{\mu}\int_{a_i}^{x_i} [U(\xi)+h]\,d\xi_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\Omega^2}{\partial\xi_i}\right)_{\xi_i=x_i}.$$

Rückt also X an x heran, so ergibt sich:

$$(5) \qquad \lim_{X_i=x_i}\int_{a_i}^{X_i} U^*(x,\xi)\,d\xi_i = \lim_{X_i=x_i}\int_{a_i}^{X_i}[U(\xi)+h]\,d\xi_i.$$

Da der Punkt x fest zu denken ist, so kann nach X_i differenziert werden; somit folgt:

$$(6) \qquad \lim_{X_i=x_i}[U^*(x,\xi)_{\xi_i=X_i}] = [U(\xi)+h]_{\xi_i=x_i},$$

und um so mehr:

$$(7) \qquad \lim_{X=x} U^*(x,X) = U(x)+h.$$

Die Gleichung (5) und (7) läßt erkennen, daß die Funktion Ω an der Oberfläche des durch die Punkte x und α bestimmten Parallelepipedons und insbesondere an der Stelle x selbst der Bedingung genügt:

$$(8) \qquad \left[\sum_{i=1}^{\mu}\left(\frac{\partial\,\Omega(X)}{\partial X_i}\right)^2\right]_{X=x} = U(x)+h.$$

Diese Gleichung bietet eine große Analogie mit der Hamiltonschen partiellen Gleichung, die zur Kräftefunktion $U(x)$ gehört, und führt, wie wir sehen werden, zu entsprechenden Resultaten.

§ 6. Die Integrale der Bewegungsgleichungen.

Nach (1) § 5 ist in der begrenzenden Ebene $X_i = x_i$:

$$\left[\sum_k \left(\frac{\partial \Omega}{\partial X_h}\right)^2\right]_{X_i = x_i} = U^*(x, X)_{X_i = x_i}. \tag{1}$$

Lassen wir den Punkt X in beliebiger Richtung in den Punkt x hineinrücken, so wird nach (8) § 5:

$$\left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial X_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial X_\mu}\right)^2\right]_{X=x} = U(x) + h. \tag{2}$$

Benutzen wir für den Augenblick die urspünglichen rechtwinkligen Koordinaten der n Punkte im dreidimensionalen Raume und bezeichnen mit ξ_i, η_i, ζ_i die Koordinaten des Punktes mit der Masse m_i, so ist bekanntlich:

$$\frac{1}{2} \sum m_i \left[\left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_i}{dt}\right)^2\right] = U + h, \tag{3}$$

wenn U die Kräftefunktion bezeichnet; ferner:

$$m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots n, \tag{4}$$

und die Geschwindigkeiten lassen sich nach Hamilton als partielle Differentialquotienten einer Funktion V darstellen:

$$m_i \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \xi_i}, \quad m_i \frac{d\eta_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \eta_i}, \quad m_i \frac{d\zeta_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \zeta_i}, \tag{5}$$

wo V irgendeine vollständige Lösung[1] der Gleichung

$$\sum \frac{1}{2\,m_i} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \xi_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \eta_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \zeta_i}\right)^2\right] = U + h \tag{5a}$$

bezeichnet. Kehren wir mittels der Gleichungen (2) § 4, d. h. bei der jetzigen Bezeichnung:

$$\xi_i \sqrt{2\,m_i} = x_i, \quad \eta_i \sqrt{2\,m_i} = x_{n+i}, \quad \zeta_i \sqrt{2\,m_i} = x_{2n+i}, \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

zu der Variabeln x_i zurück, so gehen obige Gleichungen (3), (4), (5) über in:

$$\frac{1}{4} \sum_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 = U + h, \qquad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = 2\,\frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad \frac{dx_i}{dt} = 2\,\frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{6}$$

$$\text{für } i = 1, 2, 3, \ldots \mu\ (= 3n).$$

---

[1] Wie man aus einer vollständigen Lösung neue vollständige Lösungen ableiten kann, behandelt Jacobi a. a. O. S. 491 ff. Vgl. unten § 9. Die allgemeine Lösung, die von einer willkürlichen Funktion abhängt, kommt nur in Betracht, wenn die gegebenen Anfangsbedingungen von einer willkürlichen Funktion abhängen.

Die Gleichung (2) zeigt eine gewisse Analogie zu der Hamiltonschen Differentialgleichung (5a). Dementsprechend setzen wir (zunächst versuchsweise) in Anlehnung an die dritte Gleichung (6):

$$\frac{dx_i}{dt} = 2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_i}\right)_{X=x} \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots \mu. \tag{7}$$

Durch Differentiation nach der Zeit t ergibt sich:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = 2\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_i}\right)_{X=x} \cdot \frac{dx_k}{dt} = 4\sum_k\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_i}\right)\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial X_k}\right]_{X=x}, \tag{8}$$

und durch partielle Differentiation nach x_i findet man aus (2):

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = 2\sum_k\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_k}\right)_{X=x}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_k}\right)_{X=x}\right]. \tag{9}$$

Um die mittleren Gleichungen (6) zu erhalten, ist zu zeigen, daß die rechten Seiten der Gleichungen (8) und (9) miteinander bis auf einen Faktor 2 übereinstimmen. Die Gleichungen (8) mögen je mit $\frac{dx_i}{dt}$ multipliziert und die Produkte addiert werden; dann ergibt sich durch Summation nach dem Index i unter Rücksicht auf die erste Gleichung (6):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_i\left(\frac{dx_i}{dt}\right)\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\right) = \frac{dU}{dt} &= 2\sum_i\sum_k\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_i}\right)\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial X_k}\right]_{X=x}\cdot\frac{dx_i}{dt}\\ &= 2\sum_k\left[\sum_i\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_i}\right)_{X=x}\cdot\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_i}\right)_{X=x}\right]\frac{dx_k}{dt}.\end{aligned} \tag{10}$$

Andererseits ist identisch und unter Benutzung von (9):

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} = \sum_i\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} &= 2\sum_i\left[\sum_k\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_k}\right)_{X=x}\cdot\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_k}\right)_{X=x}\right]\frac{dx_i}{dt}\\ &= 2\sum_k\left[\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_k}\right)_{X=x}\cdot\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_i}\right)_{X=x}\right]\frac{dx_k}{dt}.\end{aligned} \tag{11}$$

In den beiden für $\frac{dU}{dt}$ gewonnenen Ausdrücken müssen die Faktoren von $\frac{dx_k}{dt}$ übereinstimmen; es folgen also die μ Gleichungen:

$$\sum_i\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_i}\right)_{X=x}\cdot\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_i}\right)_{X=x} = \sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_k}\right)_{X=x}\cdot\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_i}\right)_{X=x}. \tag{12}$$

Vertauscht man i und k, so wird demnach in Rücksicht auf (9) und (7):

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = 2\frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{13}$$

Die Gleichungen (7) stellen somit in der Tat die ersten Integrale der Gleichungen (13) dar, und die rechten Seiten geben die Geschwindigkeitskomponenten des Punktes x.

Die letzteren lassen sich nach der Hamiltonschen Theorie als partielle Differentialquotienten einer Funktion V darstellen; d. h. es bestehen Gleichungen der Form:

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_i}\right)_{X=x}=\frac{\partial V}{\partial x_i},\quad \left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_k}\right)_{X=x}=\frac{\partial V}{\partial x_k}\qquad \text{für } i,\ k=1,\ 2,\ \cdots \mu, \tag{14}$$

woraus das Bestehen der Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_i}\right)_{X=x}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_k}\right)_{X=x} \tag{15}$$

zu folgern ist. Dadurch wird aber die Gleichung (12) zur Identität. Die Funktion V wird durch Quadraturen gefunden:

$$V=\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_i}\right)_{X=x}dx_i=\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X_k}\right)_{X=x}dx_k. \tag{16}$$

Diese Funktion V ist die sogenannte charakteristische Funktion des Problems; sie ist eine vollständige (von den μ Konstanten α_i abhängige) Lösung der Gleichung:

$$\sum_i\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2=U(x)+h. \tag{16a}$$

Mit Hilfe dieser Funktion erhält man bekanntlich die zweiten Integrale in der Form

$$\beta_i=\frac{\partial V}{\partial \alpha_i}\qquad \text{für } i=1,\ 2,\ \cdots \mu-1, \tag{17}$$

wo mit β_i neue willkürliche Konstante bezeichnet sind; die Zeit t wird durch die Gleichung

$$t-t_0=\frac{\partial V}{\partial h} \tag{18}$$

eingeführt. Neben den $\mu-1$ Gleichungen (17) gilt natürlich auch die μ^{te} Gleichung für $i=\mu$, aber die Konstante β_μ ist nicht willkürlich; zwischen ihr und den anderen $\mu-1$ Konstanten β_i muß vielmehr eine Relation bestehen.[1]

§ 7. Berücksichtigung unendlich großer Werte von U.

Es bleibt zu untersuchen, ob etwa die Unendlichkeitsstellen der Funktion U die Ausführung der in § 4 verlangten Integrationen stören können. Bedienen wir uns wieder der ursprünglichen dreidimensionalen Koordinaten ξ_i, η_i, ζ_i, wie sie durch die Gleichungen (4) § 4 einzuführen sind. Gemäß (2) § 4 wird U nur dann unendlich, wenn zwei der n Punkte zusammenfallen. Nennen wir zwei solche Punkte ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' mit den Massen m und m', so kommt es an auf das Glied

$$\frac{m\cdot m'}{\sqrt{(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2}}. \tag{1}$$

[1] Vgl. darüber Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, S. 402 ff.

In bezug auf einen beliebigen Anfangspunkt sei

$$
\begin{aligned}
&\xi = r \cdot \cos\psi, && \xi' = r' \cdot \cos\psi',\\
&\xi = r \cdot \sin\psi \cdot \cos\varphi, && \eta' = r' \cdot \sin\psi' \cdot \cos\varphi',\\
&\xi = r \cdot \sin\psi \cdot \sin\varphi, && \xi' = r' \cdot \sin\psi' \cdot \sin\varphi'.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Für die betreffenden sechsfachen Integrale kommt das Raumelement $d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\xi'\, d\eta'\, d\zeta'$ hinzu, und es wird

$$
\frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\xi'\, d\eta'\, d\zeta'}{\sqrt{(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2}} = \frac{r^2 r'^2 \cdot \sin\varphi \cdot \sin\varphi' \cdot dr\, dr'\, d\psi\, d\psi'\, d\varphi\, d\varphi'}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^2}}, \tag{3}
$$

wo

$$
\cos\gamma = \cos\psi \cdot \cos\psi' + \cos(\varphi - \varphi') \cdot \sin\psi \cdot \sin\psi'.
$$

Zur Berechnung der Integrale könnte man den Ausdruck (3) nach Kugelfunktionen entwickeln:

$$
\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^2}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P^n(\cos\gamma).
$$

Die rechte Seite konvergiert für $r' < r$, auch noch für $r' = r$.[1]

Die Funktion unter dem über den Ausdruck (2) zu nehmenden sechsfachen Integralzeichen bleibt auch für $r = r'$ endlich. Nur wenn gleichzeitig $\gamma = 0$ ist, wird sie unendlich wie $(r - r')^{-1}$, aber das Unendlich wird durch die mehrfachen Integrationen aufgehoben. Macht man z. B. $\varphi = \varphi'$, $\psi = \psi'$, also $\gamma = 0$, so kommt es auf das Integral an:

$$
J = \int\!\!\int \frac{r^2 r'^2\, dr\, dr'}{r - r'} = \int\!\!\int (r + r')\, r'^2\, dr\, dr' + \int\!\!\int \frac{r'^4}{r - r'}\, dr\, dr'.
$$

Hier ist

$$
\int\!\!\int (r + r')\, r'^2\, dr\, dr' = \left(\frac{1}{2}r^2 + a r'^2\right)\left(\frac{1}{3}r'^3 + \alpha r^3\right) + (r + b r')\left(\frac{1}{4}r'^4 + \beta r^4\right),
$$

wo a, b, α, β zunächst willkürliche Konstante bedeuten; dieselben sind so zu bestimmen, daß sich für das Integral J ein in r und r' symmetrisches Resultat ergibt. Durch Ausführung der Rechnung findet man $a = 0$, $b = \alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{6}$. Dann wird:

$$
\begin{aligned}
J = \frac{1}{6}r^2 r'^2 (r + r') + \frac{1}{2}(r^5 + r'^5) + \frac{1}{4}(r - r')(r^4 - r^3 r' + r^2 r'^2 - r r'^3 + r'^4)\\
- \frac{1}{5}(r^5 - r'^5)\lg(r - r').
\end{aligned}
$$

Es geht hieraus hervor, daß die in Gleichung (12), § 4 auftretenden Integrale stets endlich bleiben. Dasselbe gilt dann nach (10) § 4 für $\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial n}$ und nach (14) § 4 für Ω selbst. Aus dem

[1] Vgl. C. Neumann, Beiträge zum Studium der Randwertaufgaben, Abhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften, math.-physik. Klasse, Bd. XXXV, III, S. 528, 1920. Die Konvergenz ist aber nicht absolut, vgl. O. Volk: Über die Reihe $\Sigma P_n(x)$, Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, math.-physik. Klasse, 1922, S. 35.

in (15) § 4 angegebenen Werte von N ist nämlich ersichtlich, daß G (und ebenso Γ) beim Zusammenfallen zweier Punkte nicht unendlich wird, und dasselbe gilt für $\frac{\partial G}{\partial n}$ $\left(\text{und } \frac{\partial \Gamma}{\partial n}\right)$.

Die auf der rechten Seite von (14) § 4 auftretenden Integrale haben sonach stets endliche Werte. Da die Variabeln X nur in der Funktion G vorkommen, gilt dasselbe für $\frac{\partial \Omega^2}{\partial X_i}$ und $\frac{\partial \Omega}{\partial X_i}$, was auch nicht gestört wird, wenn man alle X_i mit den x_i sich vereinigen läßt. Folglich haben auch die durch (7) § 6 dargestellten Geschwindigkeiten bei endlichen Werten der Koordinaten x_i stets endliche Werte. Nach (2) § 6 kann sonach $U(x)$ niemals unendlich werden, d. h. es können niemals zwei der n Massenpunkte, solange ihre Koordinaten endliche Werte haben, zusammenstoßen.

§ 8. Über die sogenannte Stabilität des Weltsystems.

Unter der Frage nach der Stabilität des Weltsystems versteht man die Frage, ob ein Zusammenstoßen zweier der bewegten Massenpunkte möglich ist, und ob sich einer der Punkte ins Unendliche entfernen kann. Durch den Satz am Schlusse von § 7 ist die erste Frage für endliche Werte der Koordinaten im negativen Sinne beantwortet. Zur weiteren Klärung benutzen wir eine von Lagrange aufgestellte Relation, die auch Jacobi seinen Bemerkungen zur Stabilitätsfrage zugrunde legt (a. a. O. S. 27).

Es sei ρ_i die Entfernung des Massenpunktes m_i vom gemeinsamen Schwerpunkte, so besteht die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{d^2 R}{dt^2} = U + 4h', \quad \text{wo } R = \Sigma\, m_i \rho_i^2,$$

und wo h' eine Konstante bedeutet. Nach dem Resultat von § 7 ist U stets endlich und > 0 (auch wenn einzelne x_i unendlich groß werden sollten). Stellt man also alle x_i als Funktionen der Zeit t dar, so steht auf der rechten Seite von (1) eine Funktion, die für alle endlichen Werte von t stets endlich bleibt. Da es sich um eine lineare Differentialgleichung handelt, folgt hieraus, daß auch R selbst für keinen endlichen Wert von t unendlich werden kann, so daß auch alle Größen ρ_i endliche Werte behalten. Es kann sich somit keiner der n Massenpunkte innerhalb endlicher Zeit ins Unendliche entfernen.

Eine Ausnahme tritt ein für $n = 2$. Der Satz am Schluß von § 7 gilt nämlich zunächst nur für endliche Werte der x_i; er wird aber nicht gestört, wenn alle Größen x_i mit Ausnahme von den Koordinaten zweier Massenpunkte unendlich werden, denn dann bleibt U doch immer endlich und von Null verschieden. Sind aber nur zwei Massenpunkte vorhanden, so wird $U = 0$ für $x_1 = \infty$, also $R = \frac{1}{2} h' t^2 + at + b$, und es würde $R = \infty$ für $t = \infty$, d. h. es könnte mit wachsendem t sich mindestens ein Punkt (falls h' und a von Null verschieden sind) ins Unendliche entfernen. In der Tat tritt das bei den Kometen ein, wenn man Sonne und Komet allein betrachtet, ohne auf andere Gestirne Rücksicht zu nehmen.

Zur weiteren Beurteilung der Frage des Zusammenstoßes zweier Punkte ist zunächst das Verhalten der durch (7) § 6 gegebenen Geschwindigkeiten für unendlich große Werte der x_i zu untersuchen. Wir nehmen z. B. $x_1 = \infty$ an, so daß es sich um die Funktion $\left(\frac{\partial \Omega}{\partial X_1}\right)_{X=x}$ handelt, wo Ω durch (14) § 4 definiert ist, also durch eine Summe von μ Gliedern, die einzeln zu betrachten sind, und in denen Ω_i durch (16) § 4 bestimmt wird. Für $x_1 = \infty$ bleibt $U + h$ endlich und positiv. In Ω_1 kommt x_1 auch in der oberen Grenze vor; wir setzen deshalb $\xi_1 = x_1 q$, so daß:

$$\frac{1}{2}\,\Omega_1^2 = x_1^2 \int_0^1 dq \int_0^q (U+h)\,dq. \tag{2}$$

Es wird also Ω_1 unendlich wie x_1. Für das erste Glied von Ω kommt es dann nur auf das Verhalten von $\left(\frac{\partial G}{\partial \xi_1}\right)_{\xi_1 = x_1}$ an. Es war G eine mehrfach unendliche nach den Zahlen $k_1, k_2, \ldots k_\mu$ von $-\infty$ bis $+\infty$ genommene Summe von Gliedern N^{-p}, wo $p = \frac{1}{2}(\mu - 2)$ und N durch (15) § 4 gegeben ist. Es wird:

$$\frac{\partial N^{-p}}{\partial \xi_i} = 2p\,N^{-p-1} K_i, \text{ wo} \tag{3}$$

$$K_i = x_i\left(k_i + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon_i\right) - \alpha_i\left(k_i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon_i\right) + \varepsilon_i X_i - \xi_i, \quad \varepsilon_i = (-1)^{k_i}, \quad N = \sum_i K_i^2.$$

Für $x_i = \infty$ wird also der Ausdruck (3) gleich Null wie x_i^{-2p-1}, ausgenommen wenn $k_i = 0$ oder $k_i = -1$ ist, in welchen Fällen x_i ganz herausfällt, indem dann:

$$K_i = X_i - \xi_i \qquad \text{für } k_i = 0,$$
$$K_i = 2\alpha_i - X_i - \xi_i \quad \text{für } k_i = -1.$$

Für $x_1 = \infty$ verschwinden hiernach alle anderen Glieder, und diese beiden geben für $\xi_1 = x_1$

$$K_1 = X_1 - x_1 \qquad \text{für } k_i = 0,$$
$$K_1 = 2\alpha_1 - X_1 - x_1 \text{ für } k_i = -1.$$

Um die Geschwindigkeit $\frac{dx_1}{dt}$ zu erhalten, ist nach X_1 zu differenzieren und dann $X = x$ zu setzen. Der erste Ausdruck gibt dann 1, der zweite gibt -1. In beiden Fällen wird

$$N = 1 + \Sigma' (K_i^2)_{X=x},$$

wo der Strich am Summenzeichen andeuten soll, daß das Glied mit $k_i = 0$ bzw. $k_i = -1$ auszulassen ist. Für $x_1 = \infty$ bleibt also in $\frac{dx_1}{dt}$ im ersten Falle das betreffende Glied endlich; im zweiten Falle verhält es sich wie x_1^{-2p-1}. Vorher wären allerdings diese Glieder nach $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_\mu$ zu integrieren; dadurch wird aber das Verhalten für $x_1 = \infty$ nicht beeinflußt. Aus (2) war gefolgert, daß Ω_1 für $x_1 = \infty$ sich verhält wie x_1 selbst. Soweit Ausdrücke aus dem ersten Gliede der rechten Seite von (14) in Betracht kommen, geben sie hiernach einen mit x_1 ins Unendliche wachsenden Beitrag zu der Geschwindigkeit. In den weitern Gliedern der rechten Seite von (14) bleibt $\overline{\Omega_i}$ endlich für $x_1 = \infty$ und $\frac{dG}{\partial \xi_2}$ verhält sich wie x_1^{-2p-1}, wird also Null. Diese Glieder kommen demnach nicht in Betracht.

Die Komponente $\frac{dx_1}{dt}$ wird somit unendlich groß, wenn x_1 ins Unendliche wächst. Gemäß der Gleichung der lebendigen Kraft müßte dann U unendlich groß werden, d. h. es müßten zwei Massenpunkte zusammenfallen. In Rücksicht auf den Satz am Schluß von § 7 folgt sonach: Ein Zusammenstoß zweier Weltkörper ist nur bei unendlicher Entfernung derselben (oder anderer Weltkörper) von der Anfangslage möglich.

Aus den Schwerpunktsätzen folgt ferner, daß, wenn ein Körper sich ins Unendliche entfernt, mindestens ein anderer sich in entgegengesetzter Richtung ebenfalls ins Unendliche entfernen muß.

Es bleibt zu untersuchen, wie unendlich große Werte von x_1 mit der Zeit t zusammenhängen. Dazu dient die Gleichung (18) § 6. In Rücksicht auf (14) § 6 kann die Hamiltonsche charakteristische Funktion V nach (16) gebildet werden; es ist also

$$t - t_0 = \frac{\partial V}{\partial h} = \int_{\alpha_i}^{x_i} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X_i \partial h}\right)_{X=x} dx_i \quad \text{für jeden Wert von } i. \tag{4}$$

Aus (16) finden wir:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_i^2}{\partial h} = \frac{1}{\mu}\int_{\alpha_i}^{x_i} d\xi_i \int_{\alpha_i}^{\xi_i} d\xi_i = \frac{1}{2\mu}(x_i - \alpha_i)^2 = \Omega_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial h},$$

also aus (12) § 4, wenn z. B. $i = 1$ genommen wird:

$$2^{\mu-1}\pi \left(\frac{\partial^2 \Omega(X)}{\partial X_1 \partial h}\right)_{X=x} \cdot \mu = -\left[\sum_i \int \cdots \int \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial h} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_i \partial X_1} d\sigma_i\right]_{X=x}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\sum (x_i - \alpha_i)^2 \int \cdots \int \frac{1}{\sqrt{Q_i}} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_i \partial X_1} d\sigma_i\right]_{X=x},$$

wenn zur Abkürzung $Q_i = \sqrt{\frac{2}{\mu}\int_{\alpha_i}^{x_i} d\xi_i \int_{\alpha_i}^{\xi_i} (U+h)\, d\xi_i}$. Lassen wir wieder x_1 unendlich groß werden, so kommt es nur auf das erste Glied der rechts stehenden Summe an. Es bleibt Q bei wachsendem x_1 stets endlich und (weil positiv) von Null verschieden; [allein für $x_1 = \alpha_1$ wird $Q_1 = 0$, das dadurch bedingte Unendlich wird aber durch den Faktor $(x_1 - \alpha_1)^2$ aufgehoben]. Für $\frac{\partial^2 G}{\partial \xi_i \partial X_1}$ gelten wieder die vorstehenden, bei Diskussion von $\frac{dx_1}{dt}$ angestellten Betrachtungen; es wird also in (4) die unter dem Integralzeichen stehende Funktion mit x_1 unendlich groß, um so mehr das nach x_1 genommene Integral, und somit folgt:

Wenn sich einer der n Weltkörper ins Unendliche entfernen soll, so braucht er dazu eine unendlich lange Zeit; erst nach unendlich langer Zeit kann demnach ein Zusammenstoß zweier Körper eintreten.

Mit den Worten „unendlich lange Zeitdauer" kann man indessen keinen klaren Begriff verbinden. Das gewonnene Resultat hat eigentlich nur folgenden Inhalt:

Nach außerordentlich langer Zeit können sich einige Weltkörper außerordentlich weit von ihrer Anfangslage mit außerordentlich großer Geschwindigkeit entfernen, wobei einige von ihnen einander außerordentlich nahe kommen können.

Wir haben nur gezeigt, daß dann zwei Körper zusammenstoßen, nicht, daß dies dieselben sind, die sich unendlich weit entfernt haben, wohl aber, daß die Geschwindigkeit der weit entfernten Körper andauernd wächst. Letzteres wird nur verständlich, wenn sie sich gleichzeitig einander sehr nähern. Ob nach dieser Annäherung ein wirklicher Zusammenstoß vorkommt, oder ob sie sich wieder voneinander entfernen, kann man nicht sagen, da man über $t = \infty$ hinaus nicht denken kann.

In diesem beschränkten Sinne ist die sogenannte Stabilität des Weltsystems gesichert.

§ 9. Ueber die Bedeutung der Konstanten α_i.

Aus der Definition der Funktion Ω und aus den Gleichungen (7) § 6 ist ersichtlich, daß die Geschwindigkeiten aller Massenpunkte gleich Null werden, wenn alle Koordinaten x_i gleich den entsprechenden α_i werden. Nach (14) und (18) § 6 wird dann $t = t_0$. Der Wert $t = t_0$ bezeichnet also den Zeitpunkt, in dem alle n Weltkörper sich in Ruhe befinden. Die Möglichkeit dieser allgemeinen Ruhelage vermögen wir uns nur vorzustellen, wenn sie einen Anfangszustand darstellt, in dem zugleich die Anfangsgeschwindigkeiten gleich Null sind. Es müßten also durch einen einheitlichen Schöpfungsakt alle Weltkörper zur Zeit $t = t_0$ an ihre Stellen im Weltraume gestellt und dann das Weltsystem (ohne Erteilung von Anfangsgeschwindigkeiten) sich selbst überlassen sein. Dabei aber verliert die Größe t_0 (d. h. der Zeitpunkt dieses Schöpfungsaktes) für uns jede Bedeutung.

Zum Übergange in die Wirklichkeit müssen wir Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit zu einer beliebig vorgegebenen Zeit einführen. Das gelingt durch die allgemeinen Untersuchungen von Jacobi[1] über den Ersatz einer vollständigen Lösung der Hamiltonschen Differentialgleichung durch eine andere vollständige Lösung.

Die durch (16) eingeführte Funktion V hängt von den μ Konstanten α_i und den μ Konstanten β_i (von denen eine eine Funktion der andern $\mu - 1$ ist) ab, wozu noch eine additive Konstante kommt; sie ist also eine vollständige Lösung der Differentialgleichung (16a), in der die Zeit t nicht vorkommt.

Diese additive Konstante nennen wir $- V_0$. Um die allgemeine Lösung V^* zu erhalten, müssen wir V_0 gleich einer willkürlichen Funktion der Konstanten α_i annehmen und aus den Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{\partial (V - V_0)}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial (V - V_0)}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial (V - V_0)}{\partial \alpha_\mu} = 0$$

[1] Vorlesungen über Dynamik; nachgelassene Abhandlungen § 25, S. 410 ff.

und der Gleichung

$$V = f(x_1, x_2, \ldots x_\mu;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu) \tag{2}$$

die Größen α_i eliminieren, so daß sich eine Gleichung

$$F(V^*;\ x_1, x_2, \ldots x_\mu) = 0 \tag{3}$$

zur Bestimmung von V^* ergibt, die von der angenommenen willkürlichen Funktion V_0 abhängt. Für unsern Zweck wählen wir nach Jacobi:

$$V_0 = f(a_1, a_2, \ldots a_\mu;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu), \tag{4}$$

wo das Funktionszeichen f durch Gleichung (2) definiert ist, und wo mit $a_1, a_2, \ldots a_\mu$ weitere unbestimmte Konstante bezeichnet sind. Es ist dann, wenn b_i die gegebenen Geschwindigkeiten (im ursprünglichen dreidimensionalen Raume) für $x_i = a_i$ bezeichnen.

$$\frac{\partial (V - V_0)}{\partial x_i} = \frac{d x_i}{d t}, \qquad \frac{\partial (V - V_0)}{\partial a_i} = -b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots \mu. \tag{5}$$

Dazu treten die Gleichungen:

$$t - t_0 = \frac{\partial V}{\partial h}, \quad t - \tau = \frac{\partial (V - V_0)}{\partial h}, \tag{6}$$

so daß die Größen a_i die Werte der x_i zur Zeit $t = \tau$ bezeichnen. In V ersetze man x_i durch $a_i + (x_i - a_i)$ und t durch $\tau + (t - \tau)$ und entwickle nach Potenzen von $x_i - a_i$; dabei kann (da $V - V_0$ für $x_i = a_i$ verschwindet) kein konstantes Glied auftreten, so daß für $t = \tau$ in der Tat $x_i = a_i$ folgt.

Zur Erläuterung betrachten wir den einfachen Fall der Fallgesetze. Für $t = t_0$ soll $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}$ verschwinden, es folgt also $h = -U(\alpha)$, wenn $x = \alpha$ den Anfangswert für $t = t_0$ bezeichnet. Es sei $U + h = A(x - \alpha)$, $h = -A\alpha$, wo A eine Konstante bedeutet, also

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 = U + h, \quad V = \frac{2}{3}\sqrt{A}\,(x - \alpha)^{3/2}, \quad t - t_0 = \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{x - \alpha}, \tag{7}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\frac{\partial V}{\partial x} = 2\sqrt{A}\cdot\sqrt{x - \alpha}.$$

Es soll jetzt für eine andere Zeit $t = \tau$ eine andere Anfangslage ($= a$) und andere Anfangsgeschwindigkeit (b) eingeführt werden. Nach Obigem ist

$$V - V_0 = \frac{2}{3}\sqrt{A}\left[(x - \alpha)^{3/2} - (a - \alpha)^{3/2}\right]$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial a} = b = \sqrt{A}\cdot\sqrt{a - \alpha}, \qquad t - \tau = \frac{\partial (V - V_0)}{\partial h} = \frac{1}{\sqrt{A}}\left[\sqrt{x - \alpha} - \sqrt{a - \alpha}\right] \tag{8}$$

und zur Elimination von α nach (1)

$$\frac{\partial (V - V_0)}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{oder:} \quad \sqrt{x - \alpha} - \sqrt{a - \alpha} = 0,$$

also $x = a$ für $t = \tau$. Ferner aus der ersten Gleichung (8): $\alpha = a - b^2 A^{-1}$, und dies eingesetzt in V:

$$V^* = \frac{2}{3}\sqrt{A}\,[x - a + b^2 A^{-1}]^{3/2}, \quad \frac{\partial V^*}{\partial x} = \sqrt{A}\,\sqrt{x - a + b^2 A^{-1}},$$

also $\frac{\partial V^*}{\partial x} = b$ für $x = a$, wie es sein soll. Aus der zweiten Gleichung (8) erhält man

$$x = a + 2b\,(t - \tau) + A\,(t - \tau)^2,$$

und hieraus: $\frac{dx}{dt} = 2b$ in Übereinstimmung mit der dritten Gleichung (6) § 6.

Sollen die Gleichungen $x_i = \alpha_i$ die Anfangslage des Punktes x bezeichnen, so können in den Gleichungen (17) § 6 die Konstanten β_i nicht willkürlich gewählt werden, denn für $x_i = \alpha_i$ sind Ω und der Differentialquotient $\frac{\partial V}{\partial \alpha_i}$ gleich Null, also auch $\beta_i = 0$. In diesem Falle werden also die Bahnkurven der n Weltkörper durch die Gleichungen $\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = 0$ bestimmt, indem man aus ihnen und der Gleichung (18) § 6 die Koordinaten x_i als Funktionen von t bestimmt. Für $n = 2$ wird sich ein Zusammenfallen der beiden Körper nach endlicher Zeit ergeben.

Führt man nicht neue Anfangslagen a_i und Anfangsgeschwindigkeiten b_i gemäß der Jacobischen Methode ein, sondern behält die in § 6 benutzten Größen α_i bei und nimmt die β_i von Null verschieden an, so bezeichnen die Gleichungen $x_i = \alpha_i$ eine Lage der n Weltkörper, die zu keiner Zeit erreicht werden kann, da sie mit der Annahme $\beta_i \neq 0$ nicht verträglich ist.

§ 10. Verallgemeinerung.

Abgesehen von §§ 7 und 8 wurde im Vorstehenden nur vorausgesetzt, daß für das betrachtete Problem eine Kräftefunktion existiert; von besonderen Eigenschaften dieser Funktion wurde kein Gebrauch gemacht. Wenn sich die in der Einleitung erwähnten, verlorengegangenen Untersuchungen Dirichlets in der durch obige Entwicklungen vorgezeichneten Richtung bewegten, so wäre es möglich, daß seine Angabe betr. Aufstellung einer „allgemeinen Methode zur Behandlung und Auflösung der Probleme der Mechanik" sagen wollte, daß seine Untersuchungen über das Problem der n Körper für alle mechanischen Probleme Anwendung finden könnten, für die eine Kräftefunktion existiert. In diesem Sinne hätten wir in Vorstehendem die Dirichletschen Angaben bestätigt gefunden.

§ 11. Gewisse Schwierigkeiten bei Behandlung einfacher Beispiele.

Bei den elementar bekannten Beispielen wird von der Greenschen Funktion kein Gebrauch gemacht; deshalb ist ein Vergleich mit obigen Methoden nicht leicht durchzuführen. Sei z. B.

$$U = Mr^{-1} = M(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2},$$

wo M eine Konstante bedeutet; es handle sich also um die Planetenbewegung. Aus (12) § 4 ergibt sich:

$$V_1 = \int_{\alpha_1}^{x_1} [M(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{-1/2} + h]\, d\xi_1$$
$$= h(x_1 - \alpha_1) + M \cdot \log \frac{x_1 + \sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2 + x_1^2}}{\alpha_1 + \sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2 + \alpha_1^2}},$$

und entsprechend für V_2 und V_3; sodann nach (16), § 4:

$$\frac{1}{2}\Omega_1^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(x_1 - \alpha_1)^2 h + M \int_{\alpha_1}^{x_1} \log P_1 \cdot dx_1\right],$$

wenn mit P_1 das Argument des Logarithmus in der vorhergehenden Gleichung bezeichnet wird. Zufolge (14) § 4 hat man sodann:

$$4\pi \cdot \Omega(X) = -\int_{\alpha_2}^{x_2}\int_{\alpha_3}^{x_3} \overline{\Omega_1} \frac{\partial G}{\partial \xi_1} d\xi_2\, d\xi_3 - \int_{\alpha_3}^{x_3}\int_{\alpha_1}^{x_1} \overline{\Omega_2} \frac{\partial G}{\partial \xi_2} d\xi_3\, d\xi_1 - \int_{\alpha_1}^{x_1}\int_{\alpha_2}^{x_2} \overline{\Omega_3} \frac{\partial G}{\partial \xi_3} d\xi_1\, d\xi_2.$$

Um zur Darstellung der Geschwindigkeiten $\dfrac{\partial \Omega}{\partial X_i}$ zu bilden, hat man die drei Funktionen $\dfrac{\partial G}{\partial \xi_k}$ nach X_i zu differenzieren, wo

$$G = \Sigma\Sigma\Sigma (-1)^{k_1 + k_2 + k_3} N^{-1/2},$$

während N durch (15) § 4 gegeben wird. Nach der Hamiltonschen Theorie werden diese Geschwindigkeiten (vgl. die Jacobische Darstellung) bedeutend einfacher gewonnen; die Hamiltonsche charakteristische Funktion V wird nach (16) § 6 aus $\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial X_i}\right)_{X=x}$ durch Integration gebildet. Es muß möglich sein, beide Lösungen aufeinander zurückzuführen. Bei der Willkürlichkeit, die in der Wahl der Lösung der Hamiltonschen Differentialgleichung liegt, ist es nicht zu verwundern, wenn die Zurückführung verschiedener Lösungen aufeinander Schwierigkeiten bereitet.

Die gleiche Umständlichkeit ergibt sich schon in dem einfachen Falle, wenn man U = Konst. $= U_0$ annimmt, wo sich die geradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit ergeben muß. Hier wird:

$$\frac{1}{2}\Omega_1^2 = \frac{1}{3}\int_{\alpha_1}^{x_1} dx_1 \int_{\alpha_1}^{x_1} (U_0 + h)\, d\xi_1 = \frac{1}{6}(U_0 + h)(x_1 - \alpha_1)^2,$$

also:

$$-4\pi\,\Omega(X) = \sqrt{\frac{U_0 + h}{6}}\left[(x_1 - \alpha_1)\int\!\!\int \frac{\partial G}{\partial \xi_1} d\xi_2\, d\xi_3 + (x_2 - \alpha_2)\int\!\!\int \frac{\partial G}{\partial \xi_2} d\xi_3\, d\xi_1 \right.$$
$$\left. + (x_3 - \alpha_3)\int\!\!\int \frac{\partial G}{\partial \xi_3} d\xi_1\, d\xi_2\right].$$

Wird eine Funktion $F(X)$ durch die Gleichung

$$-4\pi F(X) = \int_{\alpha_2}^{x_2} d\xi_2 \int_{\alpha_3}^{x_3} \frac{\partial G}{\partial \xi_1} d\xi_3$$

definiert, so genügt dieselbe im Innern des Parallelepipedons der Gleichung $\Delta F = 0$, und an den Flächen $X_1 = x_1$ bzw. $X_1 = \alpha_1$ ist sie gleich ± 1, an den anderen Begrenzungsflächen gleich Null. Differenziert man nach X_1, so wird

$$-4\pi \frac{\partial \Omega(X)}{\partial X_1} = \sqrt{\frac{U_0 + h}{6}} \Bigg[(x_1 - \alpha_1) \int\int \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_1 \partial X_1} d\xi_2 \, d\xi_3 + (x_2 - \alpha_2) \int\int \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_2 \partial X_1} d\xi_3 \, d\xi_1 + (x_3 - \alpha_3) \int\int \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_3 \partial X_1} d\xi_1 \, d\xi_2 \Bigg],$$

und dieser Ausdruck muß, wenn man alle X_i durch die entsprechenden x_i ersetzt, die Geschwindigkeitskomponente $\frac{dx_1}{dt}$ ergeben, d. h. die eckige Klammer der letzten Gleichung muß dann gleich einer Konstanten werden.

Nachträge.

Zu S. 11:

Eigentlich müßte auch die Konvergenz der Reihe näher untersucht werden, bei der statt m_1^2 das Produkt $m_1 m_2$ im Zähler des allgemeinen Gliedes steht. Es ist leicht zu sehen, daß diese Untersuchung in gleicher Weise durchgeführt werden kann.

Zu S. 15, Gleichung (9), usf.:

Hier und im folgenden ist der horizontale Strich über $\frac{\partial \Omega}{\partial n}$ $\left(\text{bzw. später } \frac{\partial G}{\partial n}\right)$ nicht immer wiederholt. Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei daran erinnert, daß an der Ebene $\xi_i = x_i$ zu nehmen ist $\frac{\partial \Omega}{\partial n} = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i}\right)_{\xi_i = x_i}$, an der Ebene $\xi_i = \alpha_i$ dagegen $\frac{\partial \Omega}{\partial n} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i}\right)_{\xi_i = \alpha_i}$, und in Gleichung (2) S. 19 bezieht sich $\frac{\partial \Omega^2}{\partial n}$ auf alle Ebenen $\xi_i = X_i$, bzw. $\xi_i = \alpha_i$, die zum Element $d\sigma^*$ gehören.

Zu S. 18, Gleichung (17a):

Um das Zutreffende der hierzu gemachten Bemerkung zu erkennen, stellt man sich am einfachsten umgekehrt die Aufgabe, eine Potentialfunktion $F(X)$ zu bestimmen, die an der Ebene $X_1 = x_1$ den Wert $f(X_2, X_3, \ldots X_\mu)$ annimmt, an allen anderen Begrenzungsebenen des Parallelepipedons aber den Wert Null. Eine solche Funktion ist offenbar:

$$2^{\mu-1} \pi \cdot F(X) = -\int\int \cdots \int f(\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_\mu) \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial \xi_1}\right)_{\xi_1 = x_1} d\xi_2 \, d\xi_3 \ldots d\xi_\mu.$$

Inhalt