Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1941. Heft II/III

Sitzungen Juli-Dezember

München 1941

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren IX.

Beispiele ähnlich geordneter Familien von komprimierten Gitterpunktmengen.

Von **Heinrich Tietze** in München.

Vorgelegt in der Sitzung vom 6. Dezember 1941.

1. Die vormals in einer Arbeit über symmetrische Funktionen eingeführten Ordnungsbeziehungen zwischen Partitionen, durch welche die Gesamtheit der Partitionen derselben Zahl m zu einer teilweise geordneten Menge wird, lassen sich, wie in[1] Note II (diese Sitz.ber. 1940, § 5, S. 88 ff.) ausgeführt[2], auffassen als Sonderfall von Ordnungsbeziehungen innerhalb gewisser Gesamtheiten komprimierter Gitterpunktmengen. Eine solche Gesamtheit, gelegentlich als „Familie" bezeichnet, wird erhalten, wenn man von allen in einem n-dimensionalen $(x_1 \ldots x_n)$-Raum $(n \gtrless 2)$ gelegenen komprimierten Gitterpunktmengen von gleicher Punktezahl m diejenigen nimmt, die aus einer irgendwie gewählten, – sie heiße $\mathfrak{K}_0$, – sich erhalten lassen durch „$x_\lambda x_\mu$-Umbauten", wobei wir von den n Koordinaten irgend zwei, x_λ und x_μ, zwecks Bildung der $\mathfrak{K}_0$ enthaltenden $x_\lambda x_\mu$-Familie herausgreifen. Die Ordnungsbeziehung innerhalb der Gesamtheit beruht dann auf der Festsetzung, daß $\mathfrak{K}' > \mathfrak{K}''$ gelten soll, wenn man von der komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}'$ zur komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}''$ durch einen $x_\lambda x_\mu$-Umbau[3] gelangen kann (also von $\mathfrak{K}''$ zu $\mathfrak{K}'$ durch einen $x_\mu x_\lambda$-Umbau).

Wie überhaupt bei (vollständig oder teilweise) geordneten Mengen kann man auch hier, bei zwei Familien komprimierter Gitterpunktmengen, fragen, ob sie ähnlich geordnet sind, d. h. ob eine eineindeutige Zuordnung der Elemente $\mathfrak{K}$ der einen Familie zu den Elementen $\mathfrak{L}$ der andern Familie so möglich ist,

[1] Die einzelnen Noten über „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren" mögen kurz mit ihrer Nummer zitiert werden.

[2] Vgl. auch Note VI (diese Sitz.ber. 1941, S. 54, 55).

[3] d. h. durch eine Folge elementarer $x_\lambda x_\mu$-Umbauten.

daß zugleich mit $\mathfrak{K}' > \mathfrak{K}''$ stets $\mathfrak{L}' > \mathfrak{L}''$ gilt und umgekehrt, allemal wenn $\mathfrak{K}'$ auf $\mathfrak{L}'$ und $\mathfrak{K}''$ auf $\mathfrak{L}''$ abgebildet ist. (Im Hinblick auf die mehrfach verwendete figürliche Darstellung unserer Ordnungsbeziehungen durch stammbaumartige Figuren können wir dann von „ähnlichen Stammbäumen" sprechen.) Einige Beispiele solcher ähnlich geordneter Familien sollen hier angeführt, jedoch auf die Aufstellung vollständiger Gesamtheiten ähnlicher Familien von komprimierten Gitterpunktmengen und auf die Frage nach den innerhalb einer solchen Gesamtheit geltenden Beziehungen nur hingewiesen werden.

2. In Note V (diese Sitz.ber. 1941, S. 1 ff., Nr. **28**, **29**) wurde eine yz-Familie von 14 komprimierten Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, ..., $\mathfrak{K}_{14}$ des (x_1x_2yz)-Raumes betrachtet, wobei dort auf S. 35 in Fig. 22 die Ordnungsbeziehungen zwischen diesen Mengen dargestellt wurden. Anstelle der l. c. S. 31 angegebenen Tabelle zur Beschreibung der einzelnen Gitterpunktmengen kann auch die nebenstehende Tabelle dienen (s. die nächste Seite), die wir sogleich erläutern werden.

Zunächst bedeuten dabei P, Q, R, S Gitterpunktmengen in der x_1x_2-Ebene, und zwar ist P die Menge der 4 Punkte mit

$$1 \leqq x_1 \leqq 2, \quad 1 \leqq x_2 \leqq 2; \tag{1, a}$$

ferner Q die Menge der 7 Punkte mit

$$1 \leqq x_1 \leqq 2, \quad x_1 + x_2 \leqq 5; \tag{1, b}$$

sodann R die Menge der 7 Punkte mit

$$1 \leqq x_2 \leqq 2, \quad x_1 + x_2 \leqq 5; \tag{1, c}$$

endlich S die Menge der 10 Punkte mit

$$1 \leqq x_1, \quad 1 \leqq x_2, \quad x_1 + x_2 \leqq 5. \tag{1, d}$$

Mit O ist die leere Menge bezeichnet. In der Tabelle sind nun bei jeder vierdimensionalen Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}_\lambda$ in der mit „Mengen $\mathfrak{K}^2_\lambda(y, z)$" überschriebenen Rubrik in der ersten Zeile die Mengen $\mathfrak{K}^2_\lambda(1, 1)$, $\mathfrak{K}^2_\lambda(2, 1)$, ... verzeichnet, in der zweiten dann die Mengen $\mathfrak{K}^2_\lambda(1, 2)$, $\mathfrak{K}^2_\lambda(2, 2)$, ... usw.[4] So ist beispiels-

$\mathfrak{R}_\lambda$	Mengen $\mathfrak{R}_\lambda^2(y, z)$	$\mathfrak{R}_\lambda$	Mengen $\mathfrak{R}_\lambda^2(y, z)$
$\mathfrak{R}_1$	$S\ O$ $S\ O$ $P\ O$ $P\ O$	$\mathfrak{R}_7$	$S\ R$ $Q\ P$
		$\mathfrak{R}_8$	$S\ Q$ $R\ P$
$\mathfrak{R}_2$	$S\ P$ $S\ O$ $P\ O$	$\mathfrak{R}_9$	$S\ P\ P$ $S\ O\ O$
		$\mathfrak{R}_{10}$	$S\ S$ $P\ P$
$\mathfrak{R}_3$	$S\ R$ $Q\ O$ $P\ O$	$\mathfrak{R}_{11}$	$S\ R\ P$ $Q\ O\ O$
$\mathfrak{R}_4$	$S\ Q$ $R\ O$ $P\ O$	$\mathfrak{R}_{12}$	$S\ Q\ P$ $R\ O\ O$
		$\mathfrak{R}_{13}$	$S\ S\ P$ $P\ O\ O$
$\mathfrak{R}_5$	$S\ P$ $S\ P$	$\mathfrak{R}_{14}$	$S\ S\ P\ P$ $O\ O\ O\ O$
$\mathfrak{R}_6$	$S\ S$ $P\ O$ $P\ O$		

weise für $\lambda = 12$ die vierdimensionale Gitterpunktmenge $\mathfrak{R}_{12}$ dadurch gekennzeichnet, daß $\mathfrak{R}_{12}^2(1, 1) = S$, $\mathfrak{R}_{12}^2(2, 1) = Q$, $\mathfrak{R}_{12}^2(3, 1) = P$, $\mathfrak{R}_{12}^2(1, 2) = R$, alle übrigen Mengen $\mathfrak{R}_{12}^2(y, z)$ leer sind[5].

Nun erhält man eine im vorhin genannten Sinne ähnlich geordnete Familie von ebenfalls vierdimensionalen Gitterpunktmengen, wenn man wieder die obige Tabelle zur Erklärung der einzelnen Mengen $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_{14}$ benützt, dabei jedoch unter P,

[4] Es ist $\mathfrak{R}_\lambda^2(y', z')$ erklärt als die Menge aller jener Punkte der x_1x_2-Ebene, für welche (x_1, x_2, y', z') ein Punkt von $\mathfrak{R}_\lambda$ ist; vgl. Note V, S. 8, Nr. **7**.

[5] Vgl. Note V, Anm. 54a, S. 36, wo beispielsweise $\mathfrak{R}_4$ durch $\mathfrak{R}_4^2(1, 1) = S$, $\mathfrak{R}_4^2(2, 1) = Q$, $\mathfrak{R}_4^2(1, 2) = R$, $\mathfrak{R}_4^2(1, 3) = P$ gekennzeichnet ist (nur ist dort J^*, L_1^*, L_2^* und M^* für die hier mit S, Q, R und P bezeichneten Mengen geschrieben).

Q, R, S andere zweidimensionale Gitterpunktmengen als oben ((1, a) bis (1, d)) versteht, nämlich unter P die aus dem einen Punkt

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1 \tag{2, a}$$

bestehende Menge der x_1x_2-Ebene; unter Q die aus 2 Punkten bestehende Menge

$$x_1 = 1,\ 1 \leqq x_2 \leqq 2; \tag{2, b}$$

unter R die aus 2 Punkten bestehende Menge

$$1 \leqq x_1 \leqq 2,\ x_2 = 1; \tag{2, c}$$

und unter S die aus 3 Punkten bestehende Menge

$$1 \leqq x_1,\quad 1 \leqq x_2,\quad x_1 + x_2 \leqq 3. \tag{2, d}$$

Die so mittels (2, a) bis (2, d), – statt mittels (1, a) bis (1, d), – vermöge der obigen Tabelle erklärten komprimierten Gitterpunktmengen mögen – statt mit $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{14}$, – mit $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_{14}$ bezeichnet werden. Jede der Mengen $\mathfrak{L}_\lambda$ enthält 8 Punkte. Die ganz in $y = 1$ liegende Menge $\mathfrak{L}_1$ wird durch Fig. 1 dargestellt;

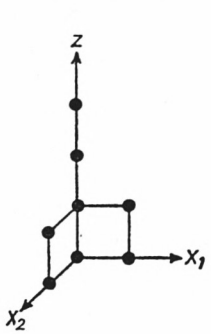

Fig. 1

für die anderen Mengen $\mathfrak{L}_\lambda$ ist es an Hand obiger Tabelle leicht, sie durch Zeichnung ihrer in $y = 1$, bzw. $y = 2$ usw. liegenden Teilmengen ebenso darzustellen, wie dies in Note V, S. 23 durch Fig. 3a und 3b für die Menge $\mathfrak{K}_5$ geschehen ist. Man überzeugt sich leicht, daß jedem elementaren zy-Umbau, der von einer Menge $\mathfrak{K}_\lambda$ zu einer anderen $\mathfrak{K}_\mu$ führt, ein elementarer zy-Umbau von $\mathfrak{L}_\lambda$ zu $\mathfrak{L}_\mu$ entspricht und umgekehrt, sodaß die in Note V,

Fig. 22 gegebene stammbaumartige Darstellung der Ordnungsbeziehungen innerhalb der Familie der Mengen $\mathfrak{K}_\lambda$ zugleich zur Darstellung der Ordnungsbeziehungen zwischen den $\mathfrak{L}_\lambda$ dienen kann[6].

3. Es werde noch auf einen ganzen Typus von Beispielen ähnlich geordneter Familien von komprimierten Gitterpunktmengen hingewiesen. Sei $n = p + 2$, $p \geqq 0$, $q \geqq 1$, $r \geqq 1$; sei $\mathfrak{Q}$ eine beliebige, q Punkte enthaltende komprimierte Gitterpunktmenge im $(x_1 \ldots x_p)$-Raum. Die aus $m = qr$ Punkten bestehende komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}$ des $(x_1 \ldots x_p\, yz)$-Raumes werde dann dadurch erklärt, daß sie alle Punkte $(x_1', \ldots, x_p', y', z')$ umfassen soll, für welche $y' = 1$, $1 \leqq z' \leqq r$ und $(x_1', \ldots, x_p')$ ein Punkt von $\mathfrak{Q}$ ist[7]. Betrachtet man die yz-Familie, zu der $\mathfrak{K}$ gehört, so sind, wie leicht zu sehen, alle derart (durch Wahl einer bestimmten Menge $\mathfrak{Q}$) erhältlichen Familien untereinander ähnlich geordnet. Die einfachste unter diesen Familien ist diejenige, die sich für $p = 0$, $q = 1$ ergibt, wobei (vgl. Nr. **1**) die betreffenden zweidimensionalen Gitterpunktmengen als Veranschaulichung der verschiedenen Partitionen der Zahl r angesehen werden können. Die andernorts zur Darstellung der Ordnungsbeziehungen zwischen den Partitionen einer Zahl r herangezogene stammbaumartige Figur[8] gibt also auch ein ähnliches Bild der Ordnungsbeziehungen für jede zum gleichen Wert r (bei beliebiger Wahl von $\mathfrak{Q}$) gehörende Familie.

---

[6] Die l. c., Fig. 22 bei den einzelnen $\mathfrak{K}_\lambda$ beigefügten Partitionen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ der Zahl 28 sind natürlich bei den $\mathfrak{L}_\lambda$ durch Partitionen der Zahl 8 zu ersetzen. Die auf x_1 und x_2 bezüglichen Partitionen sind selbstverständlich für alle $\mathfrak{L}_\lambda$ die gleichen (u. zw. $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}'' = (6, 2)$).

[7] Wegen des Falles $r = 2$ vgl. Note V, Nr. **19, 20.**

[8] Siehe für $r = 4$ die Fig. 1 in Note VI, diese Sitz.ber. 1941, S. 41, für $r = 6$ die Fig. 3 in Monatshefte f. Math. u. Phys. **49** (1940), S. 20.